Iteration und Konvergenz

zum Selbstlernen

Vorwort

Dies ist ein Skript zum Selbststudium. Du kannst hier Grundlagen zum Thema *Iteration und Konvergenz* kennenlernen.

Der Text ist im Wesentlichen der Mitschrieb aus einem Online-Kurs *Iteration und Konvergenz* im Schülerseminar für Klasse 8-10. Du findest diesen und andere Kurse auf der Seite

`https://pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/iadm/Zirkel/material-Schuelerseminar/`

Falls Du beim Studium des vorliegenden Textes Fragen hast, kannst Du beim Online-Kurs im entsprechenden Video nachsehen, dort gibt es ausführlichere Erklärungen. Um die Verbindung zu finden, ist am Rand des Textes markiert, wann die einzelnen Einheiten des Online-Kurses beginnen.

Die Aufgaben sind meistens dieselben wie im Online-Kurs. Im Lerntext sind keine Lösungen dabei, damit Du sie selber lösen kannst. Bei den Aufgaben ist oft Platz, um Deine Lösungen aufzuschreiben. Manchmal musst Du aber auch ein extra Blatt für die Berechnungen dazunehmen. Falls Du Deine Lösungen überprüfen willst, stehen alle Aufgaben mit Lösungen im letzten Kapitel dieses Skripts.

Ich wünsche Dir viel Spaß beim Durcharbeiten des Skripts und bei den Aufgaben!

14. Februar 2025 Peter Lesky

Inhalt

Auf den nächsten Seiten findest Du das Skript mit Aufgaben zur dritten Einheit *Wurzelziehen*. Die weiteren Teile werden bei den entsprechenden Einheiten veröffentlicht.

3 Wurzelziehen nach Heron

Beginn Online-Einheit 3

Diese Einheit startet mit einer Aufgabe.

Aufgabe 1
Die Folge (a_n) ist durch

$$a_1 = 2 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} \text{ für } n = 1,\ n = 2,\ \ldots$$

definiert.

a) Berechne die Folgenglieder a_n für $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ und trage ihre Dezimaldarstellung auf 8 Nachkommastellen gerundet in die Tabelle ein (Rechner erforderlich).

$a_1 = 2{,}00000000$
$a_2 =$
$a_3 \approx$
$a_4 \approx$
$a_5 \approx$
$a_6 \approx$
$a_7 \approx$

b) Welche Beobachtung(en) machst Du?

Durch die Folge aus der Aufgabe kann $\sqrt{2}$ näherungsweise berechnet werden. Die Annäherung ist offensichtlich sehr schnell. In dieser Einheit wird erklärt, warum dies funktioniert.

Definition: Die Quadratwurzel $\sqrt{a}$ einer Zahl $a \geq 0$ ist diejenige nichtnegative Zahl, deren Quadrat a ergibt.

Kurz: $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ und $\sqrt{a} \geq 0$.

Achtung: $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$, allgemein gilt $\sqrt{a^2} = |a|$.

Z.B.: $\sqrt{6} = 2{,}4\ldots$

Die Berechnung von $\sqrt{6}$ ist nicht so einfach. Wir werden heute zwei Verfahren kennenlernen, wie Quadratwurzeln nur mit Hilfe der vier Grundrechenarten Plus, Minus, Mal und Geteilt näherungsweise berechnet werden können.

In dieser Einheit werden die folgenden zwei Formeln benötigt:

Arithmetisches Mittel m von x, y: $m = \dfrac{x+y}{2}$

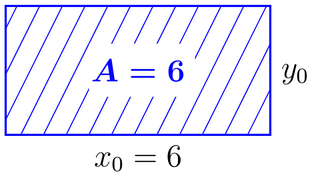
2. Binomische Formel: $(a-b)^2 \;=\; a^2 - 2ab + b^2$

Aufgabe 2: Das Heron-Verfahren

Die Idee: Ein Quadrat mit dem Flächeninhalt A hat die Seitenlänge $\sqrt{A}$. Ausgangspunkt ist ein beliebiges Rechteck mit Flächeninhalt A. Durch Verkürzen der längeren Seite unter Beibehaltung des Flächeninhalts wird das Rechteck „quadratähnlicher“ gemacht. Die Annäherung passiert, indem eine Seitenlänge für das neue Rechteck aus dem arithmetischen Mittel der beiden Seitenlängen gebildet wird. Der Quotient aus dem konstanten Flächeninhalt und der neuen Seitenlänge ergibt die Länge der zweiten Seite des neuen Rechtecks.

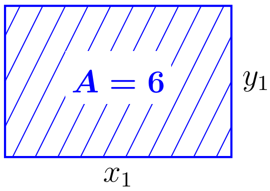
Wir gehen von $A = 6$ aus und wollen $\sqrt{6}$ berechnen.

1. Schritt: Wähle $x_0 = 6$ als Startwert und bestimme y_0 so, dass x_0 und y_0 die Seitenlängen eines Rechtecks mit Flächeninhalt $A = 6$ sind. Trage den Wert für y_0 ein.



$y_0 =$

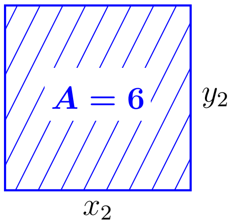
2. Schritt: Um eine bessere Näherung zu erhalten, wähle x_1 als Mittelwert von x_0 und y_0. Bestimme dann y_1, so dass x_1 und y_1 die Seitenlängen eines Rechtecks mit Flächeninhalt $A = 6$ sind. Trage die Werte für x_1 und y_1 in Dezimaldarstellung ein.



$x_1 =$

$y_1 \approx$

3. Schritt: Um eine noch bessere Näherung zu erhalten, wähle x_2 als Mittelwert von x_1 und y_1. Bestimme dann y_2, so dass x_2 und y_2 die Seitenlängen eines Rechtecks mit Flächeninhalt $A = 6$ sind. Trage die Werte für x_2 und y_2 ein.



$x_2 \approx$

$y_2 \approx$

Stelle die Rekursionsformel für das Heron-Verfahren auf: Es sei x_n gegeben.

Man berechnet y_n aus x_n: $y_n =$

Man berechnet x_{n+1} aus x_n und y_n: $x_{n+1} =$

Nun kann man auf den Zwischenschritt (Berechnung von y_n) verzichten. Man berechnet x_{n+1} direkt aus x_n durch

$$x_{n+1} =$$

Du hast nun gesehen, wie das Heron-Verfahren zur Berechnung von $\sqrt{6}$ konstruiert wird. Auf der nächsten Seite wird das Heron-Verfahren allgemein definiert.

Definition: Sei $A > 0$. Für das Heron-Verfahren zur näherungsweisen Berechnung von $\sqrt{A}$ definiert man die Folge (x_n) rekursiv durch

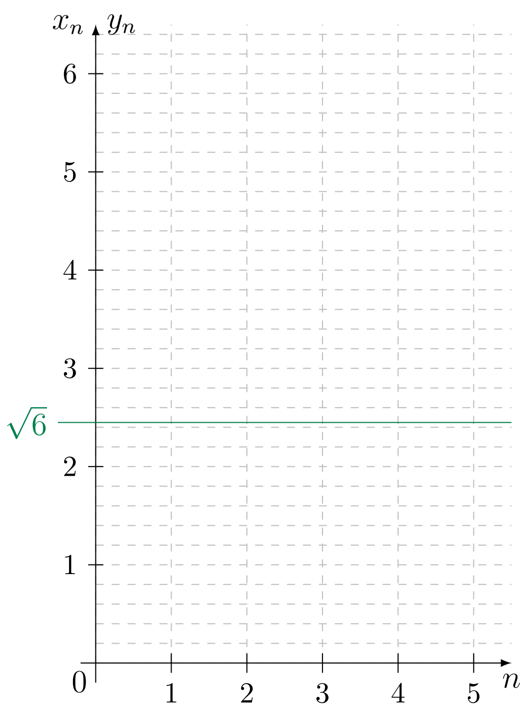
$$x_0 = A, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{A}{x_n}\right) \text{ für } n = 0,\ n = 1,\ \ldots$$

Aufgabe 3

a) In der vorherigen Aufgabe hast du bereits angefangen, das Heron-Verfahren zur Bestimmung von $\sqrt{6}$ anzuwenden. Ergänze in der Tabelle die fehlenden Werte auf 5 Nachkommastellen genau.

n	x_n	$y_n = \frac{6}{x_n}$
0	6,00000	1,00000
1	3,50000	1,71429
2	2,60714	2,30137
3		
4		

b) Trage die Werte von x_n und y_n über n in das Koordinatensystem ein. Verwende für x_n und y_n verschiedene Farben.



c) Was beobachtest Du? Wie verhalten sich x_n und y_n für wachsende n? Wie verhalten sich die Differenzen $x_n - y_n$?

Nun beweisen wir nach und nach, dass unsere Beobachtungen über das Verhalten von x_n und y_n immer zutreffen, unabhängig von der Wahl von A.

Satz 1: Für jedes $n \geq 0$ gilt $x_{n+1} \geq \sqrt{A}$, insbesondere $x_{n+1} > 0$.
Man sagt: Die Folge (x_n) ist nach unten beschränkt.

Beweis:

$$\begin{aligned}
x_{n+1} - \sqrt{A} &\overset{\text{Definition}}{\underset{\text{Heron}}{=}} \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{A}{x_n}\right) - \sqrt{A} \\
&= \frac{1}{2}\left(\underbrace{x_n}_{a^2} - 2\sqrt{A} + \underbrace{\frac{A}{x_n}}_{b^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\underbrace{\sqrt{x_n}^2}_{a^2} - 2 \cdot \underbrace{\sqrt{x_n}}_{a} \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{A}{x_n}}}_{b} + \underbrace{\sqrt{\frac{A}{x_n}}^2}_{b^2}\right) \\
\Rightarrow x_{n+1} - \sqrt{A} &\overset{\text{2. Binomi}}{=} \frac{1}{2}\left(\underbrace{\sqrt{x_n}}_{a} - \underbrace{\sqrt{\frac{A}{x_n}}}_{b}\right)^2 \\
\Rightarrow x_{n+1} &= \sqrt{A} + \frac{1}{2}(\dots)^2 \geq \sqrt{A} \qquad \square
\end{aligned}$$

Satz 2: Für jedes $n \geq 1$ gilt

$$y_n = \frac{A}{x_n} \leq \sqrt{A}.$$

Beweis: $x_n \geq \sqrt{A} \overset{\sqrt{A}>0}{\Rightarrow} \frac{1}{x_n} \leq \frac{1}{\sqrt{A}} \Leftrightarrow \frac{A}{x_n} \leq \frac{A}{\sqrt{A}} = \sqrt{A}.$ $\square$

Folgerung: Wenn ein Wert x_n berechnet ist, können wir abschätzen, wie groß die Differenz zu $\sqrt{A}$ höchstens ist, denn es gilt

$$\frac{A}{x_n} \leq \sqrt{A} \leq x_n \text{ für } n \geq 1.$$

In der nächsten Aufgabe ist diese Ungleichung bereits eingetragen.

Aufgabe 4
Berechne $\sqrt{17}$ näherungsweise mit Hilfe des Heron-Verfahrens. Trage die Werte mit 5 Nachkommastellen in die Tabelle ein.

n	x_n		$y_n = \frac{17}{x_n}$
0	17,00000		
1		$\geq \sqrt{17} \geq$	
2		$\geq \sqrt{17} \geq$	
3		$\geq \sqrt{17} \geq$	
4		$\geq \sqrt{17} \geq$	
5		$\geq \sqrt{17} \geq$	

Auch hier kann man beobachten, dass die Werte x_n mit wachsendem n immer größer werden, die Werte y_n dagegen immer kleiner. Dieses Verhalten ist eine so wichtige Eigenschaft, dass man dafür Begriffe definiert.

Definition: Eine Folge (x_n) heißt monoton fallend, wenn die Folgenglieder immer kleiner werden oder gleich bleiben: $x_{n+1} \leq x_n$.
Eine Folge (y_n) heißt monoton wachsend, wenn die Folgenglieder immer größer werden oder gleich bleiben: $y_{n+1} \geq y_n$.

Aufgabe 5
Untersuche, ob die jeweils angegebene Folge monoton wachsend oder monoton fallend ist. Trage jeweils Ja oder Nein ein.

Folge	monoton wachsend	monoton fallend
$a_n = \frac{2}{n}$		
$a_n = 4 - \frac{1}{n}$		
$a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$		
$a_n = (-1)^n n$		
$a_n = -3$		
$a_n = \sqrt{n}$		
$a_n = -2n$		

Satz 3: Die Folge (x_n) ist monoton fallend.

Beweis:
$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{A}{x_n}\right) \\ &\overset{\text{Satz 2}}{\leq} \frac{1}{2}\left(x_n + \sqrt{A}\right) \\ &\overset{\text{Satz 1}}{\leq} \frac{1}{2}(x_n + x_n) \\ \Rightarrow x_{n+1} &\leq x_n \qquad \square \end{aligned}$$

Wir wissen jetzt, dass die Werte von x_n mit wachsendem n immer näher an $\sqrt{A}$ kommen. Aber ob sie sich $\sqrt{A}$ beliebig annähern, ist noch nicht bewiesen. Der Beweis folgt nun.

Satz 4: Für jedes $n \geq 1$ gilt $0 \leq x_{n+1} - \sqrt{A} \leq \frac{1}{2}(x_n - \sqrt{A})$.
D.h. in jedem Schritt halbiert sich der Abstand von x_n zu $\sqrt{A}$, oder er wird noch kleiner.

Beweis: Satz 1 $\Rightarrow$ $0 \leq x_{n+1} - \sqrt{A}$.

Zum Beweis der zweiten Ungleichung gehen wir von Satz 2 aus:

$$\begin{array}{rrcll}
 & \frac{A}{x_n} & \leq & \sqrt{A} & \big| -x_n - 2\sqrt{A} \\
\Rightarrow & \frac{A}{x_n} + x_n - 2\sqrt{A} & \leq & \sqrt{A} + x_n - 2\sqrt{A} & \\
\Rightarrow & \frac{A}{x_n} + x_n - 2\sqrt{A} & \leq & x_n - \sqrt{A} & \big| \cdot \frac{1}{2} \\
\Rightarrow & \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{A}{x_n}\Big) - \sqrt{A} & \leq & \frac{1}{2}\big(x_n - \sqrt{A}\big) & \\
\Rightarrow & x_{n+1} - \sqrt{A} & \leq & \frac{1}{2}\big(x_n - \sqrt{A}\big) & \square
\end{array}$$

<u>Satz 5:</u> Für jedes $n \geq 1$ gilt

$$0 \leq x_{n+1} - \sqrt{A} \leq \frac{1}{2^{n+1}} \cdot (A+1).$$

Beweis: Mehrfache Anwendung von Satz 4 ergibt

$$\begin{aligned}
x_{n+1} - \sqrt{A} &\leq \frac{1}{2}\big(x_n - \sqrt{A}\big) = \frac{1}{2^1}\big(x_{n-0} - \sqrt{A}\big) \\
&\leq \frac{1}{2^2}\big(x_{n-1} - \sqrt{A}\big) \\
&\leq \ldots \\
&\leq \frac{1}{2^n}\big(x_{n-(n-1)} - \sqrt{A}\big) = \frac{1}{2^n}\big(x_1 - \sqrt{A}\big)
\end{aligned}$$

Für x_1 können wir die Abschätzung aus Satz 4 nicht verwenden. Wegen $x_0 = A$ gilt $x_1 = \frac{1}{2}(A+1)$. Damit folgt

$$x_{n+1} - \sqrt{A} = \frac{1}{2^n}\Big(\frac{1}{2}(A+1) - \sqrt{A}\Big) \leq \frac{1}{2^n}\Big(\frac{1}{2}(A+1)\Big) = \frac{1}{2^{n+1}}(A+1). \qquad \square$$

Durch Satz 5 sehen wir, dass $|x_{n+1} - \sqrt{A}|$ beliebig klein ist, wenn n genügend groß gewählt wird. Dies ist allerdings eine sehr grobe Abschätzung. Mit einer besseren Abschätzung kann man zeigen, dass sich ab einem gewissen Index n die Anzahl der richtigen Nachkommastellen von x_n in jedem Schritt verdoppelt.

4 Wurzelziehen von Hand

Du weißt, wie man schriftlich dividiert. Ganz ähnlich kann man schriftlich Quadratwurzeln näherungsweise berechnen. Das kannst Du hier lernen.

Im Folgenden siehst Du, wie man $\sqrt{x}$ für $x = 12{,}5316$ berechnet. Zur besseren Beschreibung des Verfahrens schreiben wir $\sqrt{12{,}5316} = a{,}bc\ldots$, d.h. b ist die erste Nachkommastelle von x und c die zweite. Nun wird beschrieben, wie man a, b, c berechnet.

Die Zahl a erhält man, indem man die höchste ganzzahlige Quadratzahl $a^2 \leq x$ sucht. In unserem Fall ist $a = 3$. Das Quadrat dieser Zahl schreibt man unter x und zieht es vom ganzzahligen Anteil von x ab, ähnlich wie beim Dividieren. Dann holt man die ersten zwei Nachkommastellen von x dazu herunter (siehe Schritt 1). Anders als beim Dividieren muss man immer zwei Stellen auf ein Mal ergänzen.

Schritt 1:

$$\begin{array}{rcl}
\sqrt{12{,}5316} & = & 3, \\
-9 & & \\
\hline
353 & &
\end{array}$$

Im Schritt 2 erhält man die erste Nachkommastelle b folgendermaßen: Man sucht eine Zahl b so, dass

Schritt 2:

$$\begin{array}{l} \sqrt{12{,}5316} \;=\; 3{,}5 \\ \underline{-9} \\ \quad 353\colon 65 = 5,\ldots \\ \underline{-325} \\ \quad\; 28 \end{array}$$

$$353 : (2 \cdot 10a + b) = b, \ldots$$

gilt. Durch Ausprobieren ergibt sich $b = 5$. Nun multipliziert man 65 mit 5 und zieht das Ergebnis von 353 ab, genau wie beim schriftlichen Dividieren.
Tipp: Zur Abschätzung von b kann man zunächst $353 : 20a = 353 : 60 = 5, \ldots$ rechnen.

Bestimmung von b :

$$\begin{array}{l} \sqrt{12{,}5316} \;=\; 3{,}b \\ \underline{-9} \\ \quad 353\colon 6b = b,\ldots \end{array}$$

Schritt 3:

$$\begin{array}{l} \sqrt{12{,}5316} \;=\; 3{,}54 \\ \underline{-9} \\ \quad 353\colon 65 = 5,\ldots \\ \underline{-325} \\ \quad\; 2816\colon 704 = 4,\ldots \\ \quad \underline{-2816} \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$

Nun holt man die nächsten zwei Stellen von x dazu herunter und sucht die nächste Stelle c. Dazu soll

$$2816 : (2 \cdot 100a + 2 \cdot 10b + c) \;=\; c, \ldots$$

gelten. Durch Ausprobieren folgt $c = 4$.

Bestimmung von c :

$$\begin{array}{l} \sqrt{12{,}5316} \;=\; 3{,}5c \\ \underline{-9} \\ \quad 353\colon 65 = 5,\ldots \\ \underline{-325} \\ \quad\; 2816\colon 70c = c,\ldots \end{array}$$

Der Rest ist nun Null, d.h. wir haben die Wurzel exakt bestimmt.

Aufgabe 6
Berechne die ersten vier Ziffern von $\sqrt{21}$. Trage hierzu die fehlenden Zahlen ein, in Kästchen derselben Farbe kommt dieselbe Zahl:

$$\begin{array}{l} \sqrt{21} \;=\; \sqrt{21{,}000000\ldots} \;=\; \boxed{}, \boxed{}\boxed{}\boxed{}\ldots \\ \quad\;\; \underline{-16} \\ \qquad\; 500\colon 8\boxed{} = \boxed{},\ldots \\ \qquad \underline{-425} \\ \qquad\quad 7500\colon 90\boxed{} = \boxed{},\ldots \\ \qquad\; \underline{-7264} \\ \qquad\qquad 23600\colon 916\boxed{} = \boxed{},\ldots \\ \qquad\quad \underline{-18324} \end{array}$$

Hinweis: Da $\sqrt{21}$ nicht rational ist, endet das Verfahren nie, man kann beliebig lange weiterrechnen.

Aufgabe 7
Berechne von Hand bis einschließlich der dritten Nachkommastelle:

a) $\sqrt{3}$,

b) $\sqrt{26}$,

c) Zusatzaufgabe: $\sqrt{11{,}\overline{1}} = \sqrt{11{,}111\ldots}$.

Weiter auf nächster Seite

Erklärung des Verfahrens:

Zum Verständnis des Verfahrens für das Wurzelziehen wird eine Verallgemeinerung der binomischen Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ benötigt. Es gilt

$$(a+b+c)^2 \; = \; a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

Das Quadrat der Summe von drei Zahlen ist die Summe der Quadrate und aller doppelten Produkte. Wenn Du willst, kannst Du die Formel nachrechnen, indem Du das Produkt $(a+b+c)\cdot(a+b+c)$ ausrechnest.

Wir benötigen jedoch eine andere Sortierung der Formel, nämlich

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= a^2 + \underbrace{2ab + b^2}_{=(2a+b)\cdot b} + \underbrace{2ac + 2bc + c^2}_{=(2a+2b+c)\cdot c} \\ &= a^2 + (2a+b)\cdot b + (2a+2b+c)\cdot c.\end{aligned}$$

Nun wird diese Formel auf die Zahl $x = a{,}bc = a + \frac{b}{10} + \frac{c}{100}$ angewandt:

$$\begin{aligned}x^2 &= \Big(a + \frac{b}{10} + \frac{c}{100}\Big)^2 \\ &= a^2 + \Big(2a + \frac{b}{10}\Big)\cdot\frac{b}{10} + \Big(2a + 2\frac{b}{10} + \frac{c}{100}\Big)\cdot\frac{c}{100}\end{aligned}$$

Gegeben ist nun die Zahl x^2, wir wollen x berechnen. Nach unserem Verfahren ziehen wir von x^2 die größte ganzzahlige Quadratzahl ab, das ist hier a^2:

$$\begin{aligned}x^2 - a^2 &= \Big(2a + \frac{b}{10}\Big)\cdot\frac{b}{10} + \Big(2a + 2\frac{b}{10} + \frac{c}{100}\Big)\cdot\frac{c}{100} \\ &= \Big(2a + \frac{b}{10}\Big)\cdot\frac{b}{10} + \ldots\end{aligned}$$

Dann holen wir zwei Nachkommastellen herunter. Das bedeutet, dass mit 100 multipliziert wird:

$$100(x^2 - a^2) \;=\; 100\Big(\Big(2a + \frac{b}{10}\Big)\cdot\frac{b}{10} + \ldots\Big) \;=\; \Big(20a + b\Big)\cdot b + \ldots$$

Um b zu erhalten, müssen wir also $100(x^2 - a^2)$ durch $20a + b$ teilen, und es soll $b + \ldots = b, \ldots$, d.h. b oder etwas mehr als b herauskommen. Nun ziehen wir $(20a+b)\cdot b$ von $100(x^2 - a^2)$ ab:

$$100(x^2 - a^2) - (20a+b)\cdot b \;=\; 100\Big(2a + 2\frac{b}{10} + \frac{c}{100}\Big)\cdot\frac{c}{100} \;=\; \Big(2a + 2\frac{b}{10} + \frac{c}{100}\Big)\cdot c$$

Im nächsten Schritt holen wir die nächsten zwei Nachkommastellen von x^2 herunter, multiplizieren also wieder mit 100:

$$100\big(100(x^2 - a^2) - (20a+b)\cdot b\big) \;=\; 100\Big(2a + 2\frac{b}{10} + \frac{c}{100}\Big)\cdot c \;=\; \Big(200a + 20b + c\Big)c.$$

Das Ergebnis müssen wir, um c zu erhalten, durch $200a + 20b + c$ teilen, und es soll c oder etwas mehr als c herauskommen. Hier geht die Rechnung exakt auf, da wir angenommen haben, dass x zwei Nachkommastellen besitzt. Der letzte Schritt in unserem Verfahren

$$100\big(100(x^2 - a^2) - (20a+b)\cdot b\big) - (200a + 20b + c)c \;=\; 0$$

liefert als Ergebnis 0, d.h. wir haben $\sqrt{x^2} = a{,}bc$ berechnet.

Lösungen der Aufgaben

Aufgabe 1

Die Folge (a_n) ist durch

$$a_1 = 2 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} \text{ für } n = 1,\ n = 2,\ \ldots$$

definiert.

a) Berechne die Folgenglieder a_n für $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ und trage ihre Dezimaldarstellung auf 8 Nachkommastellen gerundet in die Tabelle ein (Rechner erforderlich).

b) Welche Beobachtung(en) machst Du?

Lösung: **a)**

$a_1 = 2{,}00000000$
$a_2 = 1{,}50000000$
$a_3 \approx 1{,}41666666$
$a_4 \approx 1{,}41421569$
$a_5 \approx 1{,}41421356$
$a_6 \approx 1{,}41421356$
$a_7 \approx 1{,}41421356$

b) Mögliche Beobachtungen:

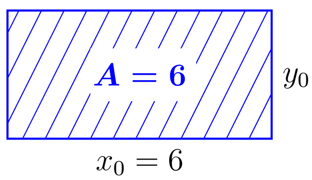
- Die Folge wird konstant: Ab $n = 5$ sind die Folgenglieder gleich. Ganz korrekt muss man sagen: Die ersten 8 Nachkommastellen ändern sich ab $n = 5$ nicht mehr.
- $a_5 \approx \sqrt{2}$

Aufgabe 2: Das Heron-Verfahren

Die Idee: Ein Quadrat mit dem Flächeninhalt A hat die Seitenlänge $\sqrt{A}$. Ausgangspunkt ist ein beliebiges Rechteck mit Flächeninhalt A. Durch Verkürzen der längeren Seite unter Beibehaltung des Flächeninhalts wird das Rechteck „quadratähnlicher“ gemacht. Die Annäherung passiert, indem eine Seitenlänge für das neue Rechteck aus dem arithmetischen Mittel der beiden Seitenlängen gebildet wird. Der Quotient aus dem konstanten Flächeninhalt und der neuen Seitenlänge ergibt die Länge der zweiten Seite des neuen Rechtecks.

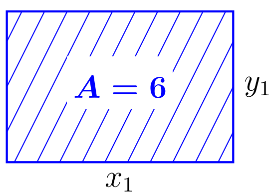
Wir gehen von $A = 6$ aus und wollen $\sqrt{6}$ berechnen.

1. Schritt: Wähle $x_0 = 6$ als Startwert und bestimme y_0 so, dass x_0 und y_0 die Seitenlängen eines Rechtecks mit Flächeninhalt $A = 6$ sind. Trage den Wert für y_0 ein.



$y_0 = \boxed{1}$

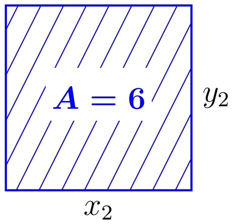
2. Schritt: Um eine bessere Näherung zu erhalten, wähle x_1 als Mittelwert von x_0 und y_0. Bestimme dann y_1, so dass x_1 und y_1 die Seitenlängen eines Rechtecks mit Flächeninhalt $A = 6$ sind. Trage die Werte für x_1 und y_1 in Dezimaldarstellung ein.



$x_1 = \boxed{3{,}5}$

$y_1 \approx \boxed{1{,}71}$

3. Schritt: Um eine noch bessere Näherung zu erhalten, wähle x_2 als Mittelwert von x_1 und y_1. Bestimme dann y_2, so dass x_2 und y_2 die Seitenlängen eines Rechtecks mit Flächeninhalt $A = 6$ sind. Trage die Werte für x_2 und y_2 ein.



$x_2 \approx$ $\boxed{2{,}61}$

$y_2 \approx$ $\boxed{2{,}30}$

Stelle die Rekursionsformel für das Heron-Verfahren auf: Es sei x_n gegeben.

Man berechnet y_n aus x_n: $\quad y_n = \boxed{\dfrac{6}{x_n}}$

Man berechnet x_{n+1} aus x_n und y_n: $\quad x_{n+1} = \boxed{\dfrac{1}{2}(x_n + y_n)}$

Nun kann man auf den Zwischenschritt (Berechnung von y_n) verzichten. Man berechnet x_{n+1} direkt aus x_n durch

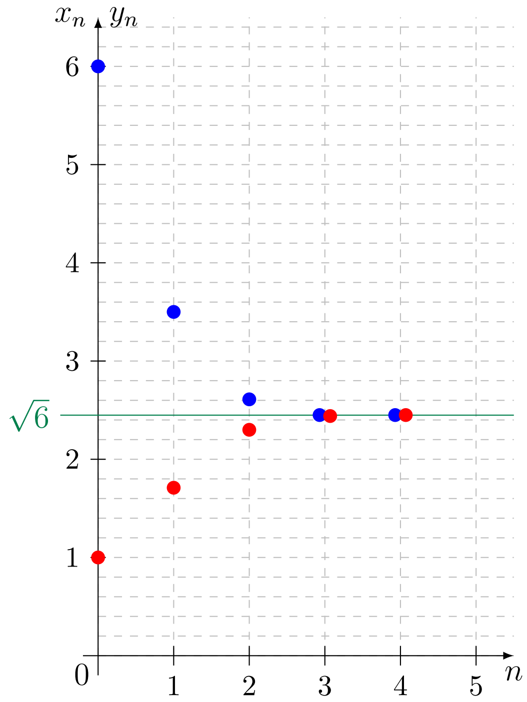
$$x_{n+1} = \boxed{\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{6}{x_n}\right)}$$

Aufgabe 3

a) In der vorherigen Aufgabe hast du bereits angefangen, das Heron-Verfahren zur Bestimmung von $\sqrt{6}$ anzuwenden. Ergänze in der Tabelle die fehlenden Werte auf 5 Nachkommastellen genau.

n	x_n	$y_n = \frac{6}{x_n}$
0	6,00000	1,00000
1	3,50000	1,71429
2	2,60714	2,30137
3	2,45426	2,44473
4	2,44949	2,44949

b) Trage die Werte von x_n und y_n über n in das Koordinatensystem ein. Verwende für x_n und y_n verschiedene Farben.



c) Was beobachtest Du? Wie verhalten sich x_n und y_n für wachsende n? Wie verhalten sich die Differenzen $x_n - y_n$?

Lösung: **a)** und **b)** Siehe Aufgabentext.

c) Mögliche Beobachtungen: x_n wird immer kleiner, y_n wird immer größer, $x_n - y_n$ wird immer kleiner, $x_n \geq \sqrt{6}$, $y_n \leq \sqrt{6}$.

Aufgabe 4

Berechne $\sqrt{17}$ näherungsweise mit Hilfe des Heron-Verfahrens. Trage die Werte mit 5 Nachkommastellen in die Tabelle ein.

n	x_n				$y_n = \frac{17}{x_n}$
0	17,00000				1,00000
1	9,00000	$\geq$	$\sqrt{17}$	$\geq$	1,88889
2	5,44444	$\geq$	$\sqrt{17}$	$\geq$	3,12245
3	4,28345	$\geq$	$\sqrt{17}$	$\geq$	3,96877
4	4,12611	$\geq$	$\sqrt{17}$	$\geq$	4,12011
5	4,12311	$\geq$	$\sqrt{17}$	$\geq$	4,12310

Weiter auf nächster Seite

Aufgabe 5

Untersuche, ob die jeweils angegebene Folge monoton wachsend oder monoton fallend ist. Trage jeweils Ja oder Nein ein.

Folge	monoton wachsend	monoton fallend
$a_n = \frac{2}{n}$	Nein	Ja
$a_n = 4 - \frac{1}{n}$	Ja	Nein
$a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$	Nein	Nein
$a_n = (-1)^n n$	Nein	Nein
$a_n = -3$	Ja	Ja
$a_n = \sqrt{n}$	Ja	Nein
$a_n = -2n$	Nein	Ja

Aufgabe 6

Berechne die ersten vier Ziffern von $\sqrt{21}$. Trage hierzu die fehlenden Zahlen ein, in Kästchen derselben Farbe kommt dieselbe Zahl:

$$
\begin{array}{lcl}
\sqrt{21} & = & \sqrt{21{,}000000\ldots} = \boxed{4},\boxed{5}\,\boxed{8}\,\boxed{2}\ldots \\
 & & \underline{-16} \\
 & & \quad 500 : 8\boxed{5} = \boxed{5}, \ldots \\
 & & \underline{\quad -425} \\
 & & \qquad 7500 : 90\boxed{8} = \boxed{8}, \ldots \\
 & & \qquad \underline{-7264} \\
 & & \qquad\quad 23600 : 916\boxed{2} = \boxed{2}, \ldots \\
 & & \qquad\quad \underline{-18324}
\end{array}
$$

Hinweis: Da $\sqrt{21}$ nicht rational ist, endet das Verfahren nie, man kann beliebig lange weiterrechnen.

Weiter auf nächster Seite

Aufgabe 7

Berechne von Hand bis einschließlich der dritten Nachkommastelle:

a) $\sqrt{3}$,

b) $\sqrt{26}$,

c) **Zusatzaufgabe:** $\sqrt{11{,}\overline{1}} = \sqrt{11{,}111\ldots}$.

Lösung: a)

$$
\begin{array}{l}
\sqrt{3} \;=\; 1{,}7320\ldots \\
-1 \\
\hline
\quad 200:\ 27 = 7,\ldots \\
-189 \\
\hline
\quad\quad 1100:\ 343 = 3,\ldots \\
\quad -1029 \\
\hline
\quad\quad\quad 7100:\ 3462 = 2,\ldots \\
\quad\quad -6924 \\
\hline
\quad\quad\quad\quad 17600:\ 34640 = 0,\ldots
\end{array}
$$

b)

$$
\begin{array}{l}
\sqrt{26} \;=\; 5{,}0990\ldots \\
-25 \\
\hline
\quad 100:\ 100 = 0,\ldots \\
\quad -\ 0 \\
\hline
\quad 10000:\ 1009 = 9,\ldots \\
\quad -9081 \\
\hline
\quad\quad 91900:\ 10189 = 9,\ldots \\
\quad\quad -91701 \\
\hline
\quad\quad\quad 19900:\ 101980 = 0,\ldots
\end{array}
$$

c)

$$
\begin{array}{l}
\sqrt{11{,}1111\ldots} = 3{,}3333\ldots \\
-9 \\
\hline
\quad 2\,11:\ 63 = 3,\ldots \\
-1\,89 \\
\hline
\quad\quad 2211:\ 663 = 3,\ldots \\
\quad -1989 \\
\hline
\quad\quad\quad 22211:\ 6663 = 3,\ldots \\
\quad\quad -19989 \\
\hline
\quad\quad\quad\quad 222211:\ 66663 = 3,\ldots
\end{array}
$$