Iteration und Konvergenz

zum Selbstlernen

Vorwort

Dies ist ein Skript zum Selbststudium. Du kannst hier Grundlagen zum Thema *Iteration und Konvergenz* kennenlernen.

Der Text ist im Wesentlichen der Mitschrieb aus einem Online-Kurs *Iteration und Konvergenz* im Schülerseminar für Klasse 8-10. Du findest diesen und andere Kurse auf der Seite

`https://pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/iadm/Zirkel/material-Schuelerseminar/`

Falls Du beim Studium des vorliegenden Textes Fragen hast, kannst Du beim Online-Kurs im entsprechenden Video nachsehen, dort gibt es ausführlichere Erklärungen. Um die Verbindung zu finden, ist am Rand des Textes markiert, wann die einzelnen Einheiten des Online-Kurses beginnen.

Die Aufgaben sind meistens dieselben wie im Online-Kurs. Im Lerntext sind keine Lösungen dabei, damit Du sie selber lösen kannst. Bei den Aufgaben ist oft Platz, um Deine Lösungen aufzuschreiben. Manchmal musst Du aber auch ein extra Blatt für die Berechnungen dazunehmen. Falls Du Deine Lösungen überprüfen willst, stehen alle Aufgaben mit Lösungen im letzten Kapitel dieses Skripts.

Ich wünsche Dir viel Spaß beim Durcharbeiten des Skripts und bei den Aufgaben!

27. Februar 2025 Peter Lesky

Inhalt

Auf den nächsten Seiten findest Du das Skript mit Aufgaben zur vierten Einheit *Rationale und irrationale Zahlen*. Die weiteren Teile werden bei den entsprechenden Einheiten veröffentlicht.

5 Darstellung rationaler Zahlen

Beginn Online-Einheit 4

Aufgabe 1
Gegeben sind die Zahlen $-\frac{1}{2}$, $1{,}23$, π, 9, $2{,}\overline{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{4}$, $-\pi$. Welche dieser Zahlen ist rational, welche irrational? Trage die Zahlen in die passende Spalte der Tabelle ein.

rational	irrational

Definition: 1) Sei $x = \frac{1}{40}$. Die Darstellung

$$x = 0{,}025$$

heißt abbrechende Dezimaldarstellung von x.

2) Sei $y = \frac{1}{37}$. Die Darstellung

$$y = 0{,}027027027\ldots =: 0{,}\underbrace{\overline{027}}_{\text{3 Stellen}}$$

heißt periodische Dezimaldarstellung von x mit der Periodenlänge 3.
Achtung: Man schreibt nicht $0{,}\overline{027027}$ oder $0{,}0\overline{270}$.

Folgerung: Für rationale Zahlen gibt es mindestens zwei verschiedene Darstellungen.
Z.B. sind $\frac{1}{40}$ und $0{,}025$ verschiedene Darstellungen derselben Zahl.

Aufgabe 2
Bestimme jeweils ohne Taschenrechner die Dezimaldarstellung der angegebenen Zahl.
Gib bei den periodischen Dezimaldarstellungen jeweils die Periodenlänge an.
Hinweis: Du kannst einen Bruch als Divisionsaufgabe schreiben und dann rechnen.

a) $\frac{7}{11} =$

b) $\frac{7}{40} =$

c) $\frac{1}{7} =$

Beobachtung: Bei der Berechnung von $1:7$ wiederholen sich nach 6 Divisionen die Reste und auch die Nachkommastellen.

Allgemein gilt bei der Berechnung von $m:n$
Falls der Rest 0 auftritt: Abbrechende Dezimaldarstellung.
Falls nie der Rest 0 auftritt: Die Reste wiederholen sich nach höchstens $n-1$ Schritten.

Satz: Die Dezimaldarstellung einer rationalen Zahl $\frac{m}{n}$ $(m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N})$ ist entweder abbrechend oder periodisch. Die Periodenlänge ist höchstens $n-1$.

Z.B. Periodenlänge 108 bei $x = \frac{1}{109}$.

Aufgabe 3
Bestimme mit dem Taschenrechner jeweils für die angegebene Zahl die Periodenlänge ihrer Dezimaldarstellung. Die Dezimaldarstellung muss nicht bestimmt werden.
Hinweis: Wie viele Nachkommastellen muss der Taschenrechner anzeigen, damit die Periodenlänge bestimmt ist?

a) $x_1 = \frac{7}{11}$, **b)** $x_2 = \frac{1}{13}$.

Wir fragen nun nach der Umkehrung: Gehört jede abbrechende oder periodische Dezimaldarstellung zu einer rationale Zahl?

Satz: Sei $x = 0{,}\overline{a_1 a_2 \dots a_k}$ eine Zahl mit periodischer Dezimaldarstellung und Periodenlänge k. Dann gilt

$$x = \frac{a_1 a_2 \dots a_k}{99\dots 9},$$

wobei im Nenner die Zahl steht, die aus k Neunern gebildet wird, d.h. $10^k - 1$. Also ist x rational.

Beweis für $x = 0{,}\overline{126}$:

$$\begin{array}{rcl} 1000 \cdot x &=& 126{,}\overline{126} \\ -x &=& -0{,}\overline{126} \\ \hline 999x &=& 126{,}0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{126}{999} \qquad \square$$

Aufgabe 4
Rechne die Dezimaldarstellungen ohne Taschenrechner in gekürzte Brüche um.

a) $0{,}267 =$

b) $0{,}\overline{123} =$

c) $0{,}\overline{9} =$

d) $3{,}\overline{345} =$

e) $0{,}11\overline{63} =$

Aufgabe 5
Berechne und gib als gekürzten Bruch an.

a) $0{,}1 + 0{,}\overline{3} =$

b) $0{,}\overline{45} - 0{,}\overline{2} =$

c) $0{,}5 \cdot 0{,}\overline{8} =$

d) $0{,}\overline{7} : 0{,}\overline{6} =$

Folgerung: Jede abbrechende oder periodische Dezimaldarstellung gehört zu einer rationalen Zahl und umgekehrt.

6 Irrationale Zahlen

Beispiel: $x = 0{,}101001000100001\ldots$,
d.h. nach der ersten 1 eine Null, nach der zweiten 1 zwei Nullen usw.

Diese Dezimaldarstellung ist weder abbrechend noch periodisch. Also ist x nicht rational.

Definition: Eine reelle Zahl heißt irrational, wenn sie nicht rational ist.

Um festzustellen, dass eine Zahl x irrational ist, muss man also beweisen, dass sie nicht rational ist. Zum Nachweis, dass eine Eigenschaft nicht erfüllt ist, bietet sich das Beweisprinzip *Widerspruchsbeweis* an. Um zu verstehen, wie dieses Beweisprinzip funktioniert, beginnen wir mit einer kurzen Geschichte.

Herr X ist angeklagt, den Tresor der Knete-Bank in Zasterhausen geknackt und daraus **100.000 Euro** geraubt zu haben.

Sein Anwalt behauptet: Mein Mandant ist unschuldig, und ich werde dies beweisen".

Der Anwalt argumentiert folgendermaßen:

„Nehmen wir an, **Herr X** wäre **schuldig**. Dann hätte er den Alarm in der Bank um **20:45 Uhr** ausgelöst, als der Tresor geknackt wurde.

Er hätte danach den Tatort verlassen und wäre mit seinem Auto von Zasterhausen nach Monetenstadt gefahren. Für diese Strecke benötigt man mit dem Auto mindestens 60 Minuten. Daher hätte er **frühestens um 21:45** Uhr das Gasthaus „Zur goldenen Kröte" betreten können.

Dies steht im Widerspruch zur Aussage des Wirtes, dass mein Mandant am selben Tag um **21:30 Uhr** in seinem Lokal gesessen hat.

Damit komme ich zum Schluss, dass Herr X nicht der Täter gewesen sein kann, sondern **unschuldig** ist."

Nachdem der Anwalt seine Beweisführung beendet hat, unterhalten sich zwei Zuhörer über den Prozessverlauf. Der eine meint: „Das ist unlogisch, wie der Anwalt argumentiert hat. Erst behauptet er, Herr X hätte den Alarm ausgelöst, aber am Ende kommt heraus, dass er es doch nicht gewesen ist." Darauf erwidert der andere: „Das war nicht unlogisch, sondern eine ganz geschickte Beweisstrategie".

Der Anwalt verwendet eine bestimmte Argumentationsstrategie. In der Mathematik nennt man dies einen **Widerspruchsbeweis**.

Diese Art von Beweis enthält stets folgende Schritte:

1) Ich formuliere die Behauptung.
2) Annahme: Ich nehme an, das Gegenteil der Behauptung sei wahr.
3) Ich ziehe Folgerungen aus der Annahme.
4) Ich führe die Folgerungen zu einem Widerspruch.
5) Ich schließe, dass die Annahme widerlegt und dadurch die Behauptung bewiesen ist.

Aufgabe 6

Lies den Text erneut und

1) unterstreiche die Behauptung des Anwalts grün,
2) die Annahme rot und
3) die Aussagen, die sich widersprechen, rot.
4) Markiere die Stelle, an der der Widerspruch auftritt, mit einem roten Widerspruchspfeil $\lightning$.
5) Unterstreiche die Schlussfolgerung aus dem Widerspruch grün.

Wir wenden nun dieses Beweisprinzip an, um die Irrationalität einer Zahl nachzuweisen.

Satz: $\sqrt{2}$ ist irrational.

Beweis: Annahme: $\sqrt{2}$ ist rational

$\Rightarrow$ es gibt $m, n \in \mathbb{N}$, so dass $\sqrt{2} = \dfrac{m}{n}$

$$\begin{aligned} \text{Kürzen} \quad &\Rightarrow \quad \sqrt{2} = \frac{p}{q}, \text{ wobei } p, q \text{ teilerfremd} \\ &\Rightarrow \quad 2 = \frac{p^2}{q^2} \\ &\Rightarrow \quad 2q^2 = p^2 \qquad\qquad (*) \end{aligned}$$

Da p^2 gerade ist, ist auch p gerade. Schreibe $p = 2k$ mit $k = \dfrac{p}{2} \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \text{Einsetzen in } (*) \quad &\Rightarrow \quad 2q^2 = (2k)^2 = 4k^2 \\ &\Rightarrow \quad q^2 = 2k^2 \end{aligned}$$

Da q^2 gerade ist, ist auch q gerade.

$\Rightarrow$ p, q sind beide durch 2 teilbar $\lightning$ zu p, q sind teilerfremd

$\Rightarrow$ die Annahme war falsch

$\Rightarrow$ $\sqrt{2}$ ist irrational $\square$

In den folgenden zwei Aufgaben entsteht im Unterschied zum letzten Beweis nicht ein Widerspruch zweier Aussagen innerhalb des Beweises, sondern ein Widerspruch zu der Aussage des letzten Satzes.

Aufgabe 7

Sei x eine rationale Zahl. Beweise durch Widerspruch, dass dann die Summe $x+\sqrt{2}$ irrational ist.

Annahme: $x+\sqrt{2}$ ist $\boxed{}$

$\Rightarrow$ Es gibt $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, so dass $x+\sqrt{2} = \boxed{}$

Drücke $\sqrt{2}$ durch m, n, x aus: $\sqrt{2} = \boxed{}$

x ist rational $\Rightarrow$ Es gibt $r \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{N}$, so dass $x = \boxed{}$

Drücke $\sqrt{2}$ durch m, n, r, s aus: $\sqrt{2} = \boxed{}$

$\Rightarrow$ $\sqrt{2}$ ist $\boxed{}$ $\lightning$ zu $\boxed{}$

$\Rightarrow$ Die Annahme war $\boxed{}$

Also ist $x+\sqrt{2}$ $\boxed{}$ $\square$

Aufgabe 8

Sei x eine rationale Zahl, $x \neq 0$. Beweise durch Widerspruch, dass dann das Produkt $x \cdot \sqrt{2}$ irrational ist.

Schreibe die Annahme auf, dann die Folgerungen aus der Annahme und schließlich die falsche Aussage, die aus der Annahme folgt.

Aufgabe 9

Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist $\sqrt{2}^n$ irrational, für welche rational?

Hinweis: Unterscheide die Fälle n gerade und n ungerade. Schreibe $n = 2k$ bzw. $n = 2k+1$ und vereinfache die Ausdrücke $\sqrt{2}^{2k}$ bzw. $\sqrt{2}^{2k+1}$.

Lösungen der Aufgaben

Aufgabe 1

Gegeben sind die Zahlen $-\frac{1}{2}$, $1{,}23$, π, 9, $2{,}\overline{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{4}$, $-\pi$. Welche dieser Zahlen ist rational, welche irrational? Trage die Zahlen in die passende Spalte der Tabelle ein.

rational	irrational
$-\frac{1}{2}$, $1{,}23$, 9, $2{,}\overline{1}$, $\sqrt{4}=2$	π, $\sqrt{2}$, $-\pi$

Aufgabe 2

Bestimme jeweils ohne Taschenrechner die Dezimaldarstellung der angegebenen Zahl.

Gib bei den periodischen Dezimaldarstellungen jeweils die Periodenlänge an.
Hinweis: Du kannst einen Bruch als Divisionsaufgabe schreiben und dann rechnen.

a) $\frac{7}{11} = 0{,}\overline{63}$, denn

$$\begin{array}{l}
7 : 11 = 0{,}\overline{63} \\
-0 \\
\hline
\;70 \\
-66 \\
\hline
\;\;40 \\
\;-33 \\
\hline
\;\;\;70 \quad \Rightarrow \text{ alles wiederholt sich } \Rightarrow \text{ Periodenlänge } 2
\end{array}$$

b) $\frac{7}{40} = 0{,}175$, denn

$$\begin{array}{l}
7 : 40 = 0{,}175 \\
-0 \\
\hline
\;70 \\
-40 \\
\hline
\;300 \\
-280 \\
\hline
\;\;200 \\
\;-200 \\
\hline
\;\;\;\;0 \quad \Rightarrow \text{ Dezimaldarstellung ist abbrechend}
\end{array}$$

c) $\frac{1}{7} = 0{,}\overline{142857}$, denn

$$\begin{array}{l}
1 : 7 = 0{,}\overline{142857} \\
-0 \\
\hline
\;10 \\
\;-7 \\
\hline
\;\;30 \\
\;-28 \\
\hline
\;\;\;20 \\
\;\;-14 \\
\hline
\;\;\;\;60 \\
\;\;\;-56 \\
\hline
\;\;\;\;\;40 \\
\;\;\;\;-35 \\
\hline
\;\;\;\;\;\;50 \\
\;\;\;\;\;-49 \\
\hline
\;\;\;\;\;\;\;10 \quad \Rightarrow \text{ alles wiederholt sich } \Rightarrow \text{ Periodenlänge } 6
\end{array}$$

Aufgabe 3

Bestimme mit dem Taschenrechner jeweils für die angegebene Zahl die Periodenlänge ihrer Dezimaldarstellung. Die Dezimaldarstellung muss nicht bestimmt werden.
Hinweis: Wie viele Nachkommastellen muss der Taschenrechner anzeigen, damit die Periodenlänge bestimmt ist?

a) $x_1 = \frac{7}{11}$, **b)** $x_2 = \frac{1}{13}$.

Lösung: **a)** Anzeige des Taschenrechners: 0.6363636363
Da die Periodenlänge höchstens 10 ist, reichen 10 Nachkommastellen aus, um festzustellen, dass die Periodenlänge 2 ist.

b) Anzeige des Taschenrechners: 0.076923076923
Da die Periodenlänge höchstens 12 ist, reichen 12 Nachkommastellen aus, um festzustellen, dass die Periodenlänge 6 ist.

Aufgabe 4

Rechne die Dezimaldarstellungen ohne Taschenrechner in gekürzte Brüche um.

a) $0{,}267 = \frac{267}{1000}$

b) $0{,}\overline{123} = \frac{123}{999} = \frac{41}{333}$

c) $0{,}\overline{9} = \frac{9}{9} = 1$

d) $3{,}\overline{345} = 3 + \frac{345}{999} = 3 + \frac{115}{333} = \frac{999+115}{333} = \frac{1114}{333}$

e) $0{,}11\overline{63} = 0{,}11 + \frac{1}{100} \cdot 0{,}\overline{63} = \frac{11}{100} + \frac{1}{100} \cdot \frac{63}{99} = \frac{1}{100}\left(11 + \frac{7}{11}\right) = \frac{128}{1100} = \frac{32}{275}$

Aufgabe 5

Berechne und gib als gekürzten Bruch an.

a) $0{,}1 + 0{,}\overline{3} = \frac{1}{10} + \frac{3}{9} = \frac{1}{10} + \frac{1}{3} = \frac{13}{30}$

b) $0{,}\overline{45} - 0{,}\overline{2} = \frac{45}{99} - \frac{2}{9} = \frac{45-22}{99} = \frac{23}{99}$

c) $0{,}5 \cdot 0{,}\overline{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{9} = \frac{4}{9}$

d) $0{,}\overline{7} : 0{,}\overline{6} = \frac{7}{9} : \frac{6}{9} = \frac{7}{9} \cdot \frac{9}{6} = \frac{7}{6}$

Aufgabe 6

Lies den Text erneut und

1) unterstreiche die Behauptung des Anwalts grün,
2) die Annahme rot und
3) die Aussagen, die sich widersprechen, rot.
4) Markiere die Stelle, an der der Widerspruch auftritt, mit einem roten Widerspruchspfeil $\lightning$.
5) Unterstreiche die Schlussfolgerung aus dem Widerspruch grün.

Herr X ist angeklagt, den Tresor der Knete-Bank in Zasterhausen geknackt und daraus **100.000 Euro** geraubt zu haben.

Sein Anwalt behauptet: Mein Mandant ist unschuldig, und ich werde dies beweisen".

Der Anwalt argumentiert folgendermaßen:

„Nehmen wir an, **Herr X** wäre **schuldig**. Dann hätte er den Alarm in der Bank um **20:45 Uhr** ausgelöst, als der Tresor geknackt wurde.

Er hätte danach den Tatort verlassen und wäre mit seinem Auto von Zasterhausen nach Monetenstadt gefahren. Für diese Strecke benötigt man mit dem Auto mindestens 60 Minuten. Daher hätte er **frühestens um 21:45** Uhr das Gasthaus „Zur goldenen Kröte" betreten können.

Dies steht im Widerspruch zur Aussage des Wirtes, dass mein Mandant am selben Tag um **21:30 Uhr** in seinem Lokal gesessen hat. $\lightning$

Damit komme ich zum Schluss, dass Herr X nicht der Täter gewesen sein kann, sondern **unschuldig** ist."

Aufgabe 7

Sei x eine rationale Zahl. Beweise durch Widerspruch, dass dann die Summe $x + \sqrt{2}$ irrational ist.

Annahme: $x + \sqrt{2}$ ist $\boxed{\text{rational}}$

$\Rightarrow$ Es gibt $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, so dass $x + \sqrt{2} = \boxed{\frac{m}{n}}$

Drücke $\sqrt{2}$ durch m, n, x aus: $\sqrt{2} = \boxed{\frac{m}{n} - x}$

x ist rational $\Rightarrow$ Es gibt $r \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{N}$, so dass $x = \boxed{\frac{r}{s}}$

Drücke $\sqrt{2}$ durch m, n, r, s aus: $\sqrt{2} = \boxed{\frac{m}{n} - \frac{r}{s} = \frac{ms - rn}{ns}}$

$\Rightarrow$ $\sqrt{2}$ ist $\boxed{\text{rational}}$ $\lightning$ zu $\boxed{\sqrt{2} \text{ ist irrational}}$

$\Rightarrow$ Die Annahme war $\boxed{\text{falsch}}$

Also ist $x + \sqrt{2}$ $\boxed{\text{irrational}}$ $\square$

Aufgabe 8

Sei x eine rationale Zahl, $x \neq 0$. Beweise durch Widerspruch, dass dann das Produkt $x \cdot \sqrt{2}$ irrational ist.

Schreibe die Annahme auf, dann die Folgerungen aus der Annahme und schließlich die falsche Aussage, die aus der Annahme folgt.

Lösung: Annahme: $x \cdot \sqrt{2}$ ist rational, d.h. $x \cdot \sqrt{2} = \frac{m}{n}$.

x ist rational $\Rightarrow$ $x = \frac{r}{s}$, $x \neq 0$ $\Rightarrow$ $r \neq 0$

$\Rightarrow$ $\sqrt{2} = \frac{m}{n} \cdot \frac{1}{x} = \frac{m}{n} \cdot \frac{s}{r} = \frac{ms}{nr}$

$\Rightarrow$ $\sqrt{2}$ ist rational $\lightning$

$\Rightarrow$ die Annahme war falsch

$\Rightarrow x \cdot \sqrt{2}$ ist irrational.

Aufgabe 9

Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist $\sqrt{2}^n$ irrational, für welche rational?
Hinweis: Unterscheide die Fälle n gerade und n ungerade. Schreibe $n = 2k$ bzw. $n = 2k+1$ und vereinfache die Ausdrücke $\sqrt{2}^{2k}$ bzw. $\sqrt{2}^{2k+1}$.

Lösung: Fall 1: n ist gerade. Dann gilt $n = 2k$ mit geeignetem $k \in \mathbb{N}$ und

$$\sqrt{2}^n = \sqrt{2}^{2k} = \left(\sqrt{2}^2\right)^k = 2^k.$$

Also ist $\sqrt{2}^n$ für gerades n eine rationale Zahl, sogar eine natürliche Zahl.

Fall 2: n ist ungerade. Der Fall $n = 1$ ist trivial, $\sqrt{2}$ ist irrational.
Sei nun n ungerade und $n \geq 3$. Dann gilt $n = 2k+1$ mit geeignetem $k \in \mathbb{N}$ und

$$\sqrt{2}^n = \sqrt{2}^{2k+1} = \underbrace{\sqrt{2}^{2k}}_{\text{ganzzahlig nach Fall 1}} \cdot \sqrt{2}.$$

Nach der letzten Aufgabe ist $\sqrt{2}^n$ als Produkt einer rationalen Zahl mit $\sqrt{2}$ irrational.

Somit ist $\sqrt{2}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ genau dann irrational, wenn n eine ungerade Zahl ist.