Iteration und Konvergenz

zum Selbstlernen

Vorwort

Dies ist ein Skript zum Selbststudium. Du kannst hier Grundlagen zum Thema *Iteration und Konvergenz* kennenlernen.

Der Text ist im Wesentlichen der Mitschrieb aus einem Online-Kurs *Iteration und Konvergenz* im Schülerseminar für Klasse 8-10. Du findest diesen und andere Kurse auf der Seite

`https://pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/iadm/Zirkel/material-Schuelerseminar/`

Falls Du beim Studium des vorliegenden Textes Fragen hast, kannst Du beim Online-Kurs im entsprechenden Video nachsehen, dort gibt es ausführlichere Erklärungen. Um die Verbindung zu finden, ist am Rand des Textes markiert, wann die einzelnen Einheiten des Online-Kurses beginnen.

Die Aufgaben sind auch dieselben wie im Online-Kurs. Im Lerntext sind keine Lösungen dabei, damit Du sie selber lösen kannst. Bei den Aufgaben ist oft Platz, um Deine Lösungen aufzuschreiben. Manchmal musst Du aber auch ein extra Blatt für die Berechnungen dazunehmen. Falls Du Deine Lösungen überprüfen willst, stehen alle Aufgaben mit Lösungen im letzten Kapitel dieses Skripts.

Ich wünsche Dir viel Spaß beim Durcharbeiten des Skripts und bei den Aufgaben!

16. Januar 2025 Peter Lesky

Inhalt

Auf den nächsten Seiten findest Du das Skript mit Aufgaben zur ersten Einheit *Die Kreiszahl* π. Die weiteren Teile werden bei den entsprechenden Einheiten veröffentlicht.

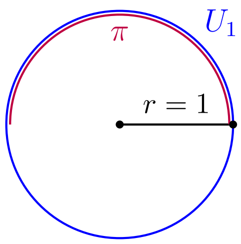
1 Die Kreiszahl π

Beginn Online-Einheit 1

Sicher hast Du bereits von der Zahl π gehört. Damit wir wissen, über was wir sprechen, definieren wir π zunächst.

Definition: Sei U_1 der Umfang des Kreises mit Radius $r = 1$.
Dann ist die Zahl Pi definiert durch

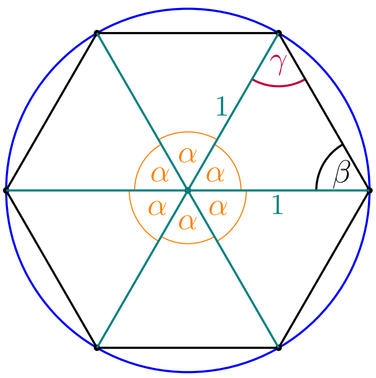
$$\pi := \frac{U_1}{2}.$$



Jetzt haben wir die Zahl π definiert, aber typisch Mathematiker: Wie groß π ist, wissen wir nicht. Das Problem mit der Größe von π ist, dass π eine irrationale Zahl ist. Das bedeutet, dass wir sie nicht als Bruch angeben können, und dass wir nie alle Nachkommastellen hinschreiben können. Man kann π nur näherungsweise berechnen.

Archimedes (287 – 212 v. Chr.) hat sich bereits mit der Frage beschäftigt, wie groß π ist. Wir gehen so vor wie er.

Erste Näherung für π: Zeichne ein regelmäßiges Sechseck in den Kreis mit $r = 1$ ein.



$\alpha = \frac{360°}{6} = 60°$

Jedes Dreieck ist gleichschenklig $\Rightarrow \gamma = \beta$

Winkelsumme: $\alpha + 2\beta = 180° \Rightarrow \beta = 60°$

Also ist jedes Dreieck gleichseitig,
das Sechseck hat die Seitenlänge 1.

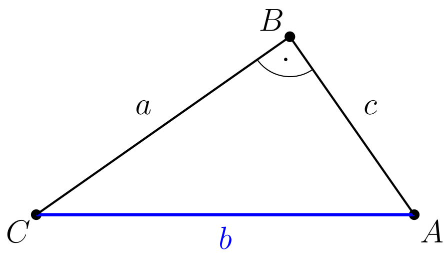
Offenbar gilt $U_1 > 6 \cdot 1$

$\Rightarrow \pi > 3$

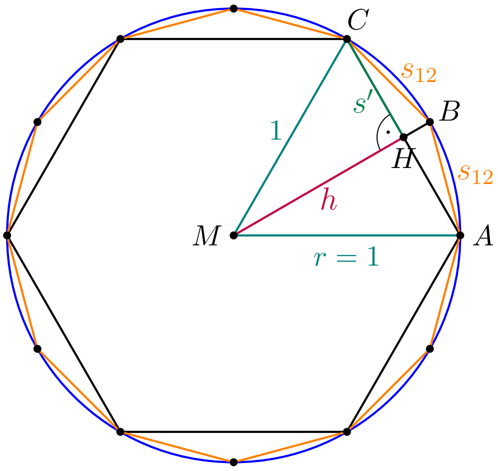
Für eine genauere Näherung von π wird der Satz des Pythagoras benötigt. Vorsichtshalber kannst Du ihn hier nachlesen. In einem rechtwinkligen Dreieck heißt die Seite, die dem rechten Winkel gegenüber liegt, Hypothenuse.

Satz des Pythagoras: Im rechtwinkligen Dreieck mit Hypothenuse b gilt

$$a^2 + c^2 = b^2.$$



Aufgabe 1



Im nebenstehenden Kreis mit Radius $r = 1$ sind ein regelmäßiges Sechseck und ein regelmäßiges Zwölfeck einbeschrieben.

a) Gib die Länge von s' an.

b) Berechne mit dem Satz des Pythagoras die Länge von h.

c) Berechne mit dem Satz des Pythagoras die Seitenlänge s_{12} des Zwölfecks.

d) Welche Abschätzung für π kann man hieraus folgern? (Taschenrechner benötigt.)

Lösung:

a) $s' =$ ....

b) Pythagoras im Dreieck MHC: ....

$\Rightarrow h^2 =$ .... $\Rightarrow h =$ ....

c) Pythagoras im Dreieck HBC: $s_{12}^2 =$ ....
Tipp: $\overline{HB} = \overline{MB} - \overline{MH}$

$=$ ....

$=$ ....

$=$ ....

$\Rightarrow s_{12} =$ ....

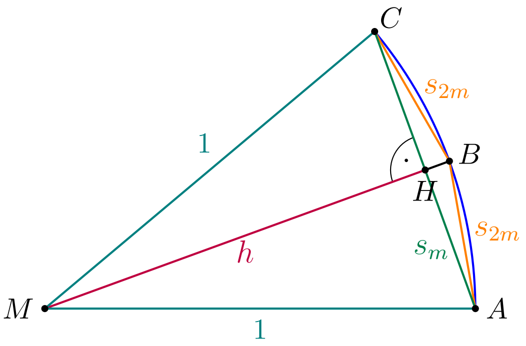
d) Für den Umfang U_1 des Kreises mit Radius 1 folgt

$U_1 >$ ....

$\Rightarrow \pi >$ ....

Um eine bessere Näherung für π zu erhalten, kann man entsprechend den Umfang des regelmäßigen 24-Ecks, dann des regelmäßigen 48-Ecks usw. berechnen. Es ist jedoch langweilig und umständlich, dieselben Überlegungen immer wieder anzuwenden. In der nächsten Aufgabe kannst Du eine allgemeine Formel herleiten, wie man aus dem Umfang eines regelmäßigen m-Ecks den Umfang des $2m$-Ecks mit demselben Umkreis mit Radius $r = 1$ berechnen kann. Diese Aufgabe ist nicht einfach. Falls Du nicht auf die Lösung kommst, kannst Du sie einfach überspringen. Die Rekursionsformel, die in der Aufgabe hergeleitet werden soll, steht im nächsten Satz.

Aufgabe 2



In einem Kreis mit Radius $r = 1$ sind ein regelmäßiges m-Eck und ein regelmäßiges $2m$-Eck einbeschrieben. Ein Ausschnitt ist in der Graphik links skizziert. Stelle eine Formel auf, wie aus der Seitenlänge s_m des m-Ecks die Seitenlänge s_{2m} des $2m$-Ecks berechnet werden kann. Gehe folgendermaßen vor: Nimm an, s_m sei bekannt. Berechne nacheinander aus s_m folgende Längen bzw. Ausdrücke: h^2, $(1-h)^2 = 1 - 2h + h^2$, s_{2m}^2. Trage die Formeln in die vorgesehenen Plätze ein.

Lösung:

Pythagoras im Dreieck MHC:

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\Rightarrow \quad h^2 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\overset{h\geq 0}{\Rightarrow} \quad h = \sqrt{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}$$

$$\Rightarrow \quad (1-h)^2 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Pythagoras im Dreieck HBC:

$$\begin{aligned} s_{2m}^2 &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Rightarrow \quad s_{2m} &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Bezeichnung: Eine Formel, mit der neue Werte jeweils aus dem davor erhaltenen Wert berechnet werden, heißt **Rekursionsformel**.

Das Resultat dieser Aufgabe schreiben wir nun als Satz auf.

Satz: Sei s_m die Seitenlänge des regelmäßigen m-Ecks, das einem Kreis mit Radius $r = 1$ einbeschrieben ist ($m \geq 3$). Dann gilt

$$s_{2m} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_m^2}}.$$

Aus $s_6 = 1$ können damit die Seitenlängen $s_{12}, s_{24}, \dots$ berechnet werden.

Man muss also nur noch die Formel anwenden und kann so immer bessere Näherungen für den Umfang des Kreises mit $r = 1$ und für π berechnen.

Aufgabe 3

Für die Seitenlänge des 12-Ecks gilt $s_{12} = \sqrt{2-\sqrt{3}}$. Der Umfang des 12-Ecks ist dann $12 \cdot s_{12}$. Für die näherungsweise Berechnung von π wird der halbe Umfang des 12-Ecks benötigt, also $6 \cdot s_{12}$. In dieser Aufgabe sollen immer bessere Näherungen für π gefunden werden, indem $\frac{m}{2} \cdot s_m$ für regelmäßige m-Ecke mit immer größerer Eckenzahl m berechnet wird.

a) Trage die Werte für $3 \cdot s_6$ und $6 \cdot s_{12}$ in die unten stehende Tabelle ein (7 Nachkommastellen).

b) Berechne mit einem Taschenrechner und der Formel aus der letzten Aufgabe s_{24}, die Näherung $12\, s_{24}$ für π, s_{48} und $24\, s_{48}$, usw. Trage die Ergebnisse in die Tabelle ein (7 Nachkommastellen).

c) Welche (möglichst gute) Abschätzung für π folgt hieraus?

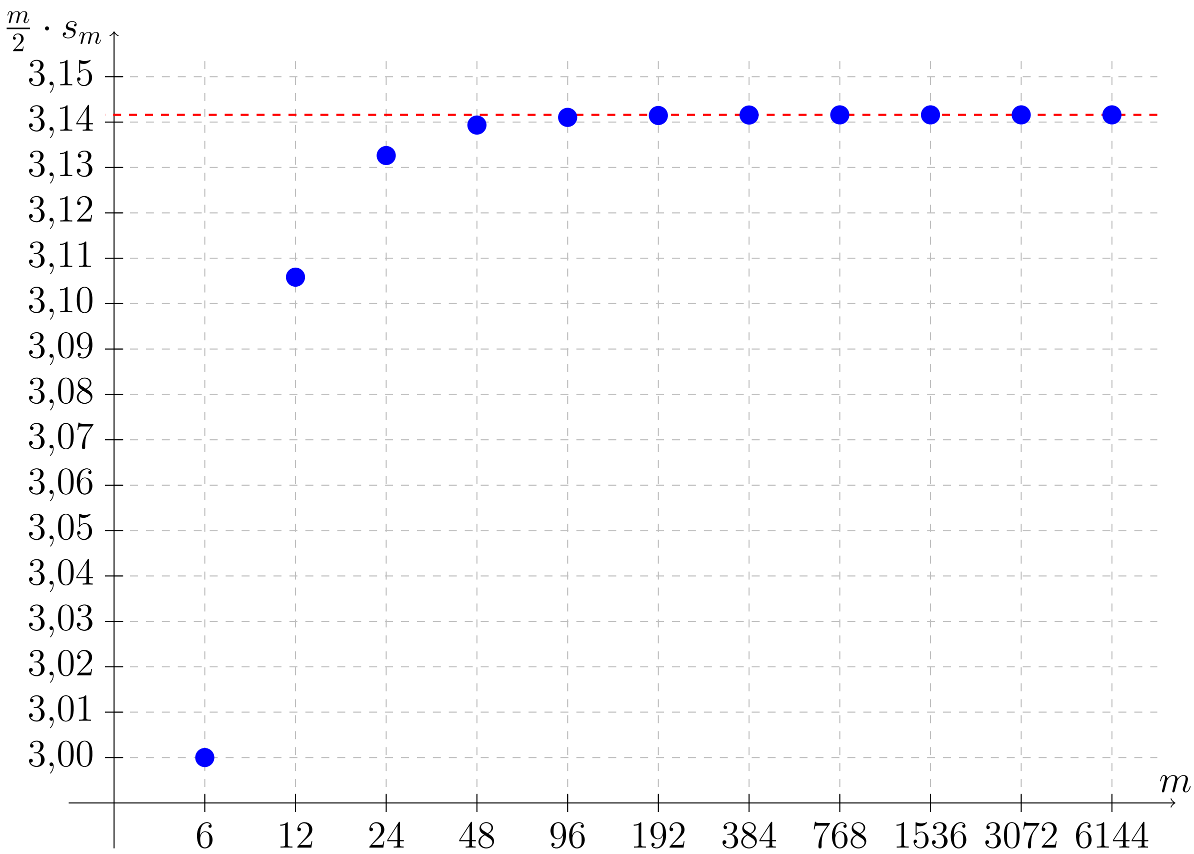
Lösungen zu **a)** und **b)**:

m	s_m	$\frac{m}{2} \cdot s_m$
6	$s_6 =$	$3 \cdot s_6 =$
12	$s_{12} \approx$	$6 \cdot s_{12} \approx$
24	$s_{24} \approx$	$12 \cdot s_{24} \approx$
48	$s_{48} \approx$	$24 \cdot s_{48} \approx$
96	$s_{96} \approx$	$48 \cdot s_{96} \approx$
192	$s_{192} \approx$	$96 \cdot s_{192} \approx$
384	$s_{384} \approx$	$192 \cdot s_{384} \approx$
768	$s_{768} \approx$	$384 \cdot s_{768} \approx$
1536	$s_{1536} \approx$	$768 \cdot s_{1536} \approx$
3072	$s_{3072} \approx$	$1536 \cdot s_{3072} \approx$
6144	$s_{6144} \approx$	$3072 \cdot s_{6144} \approx$

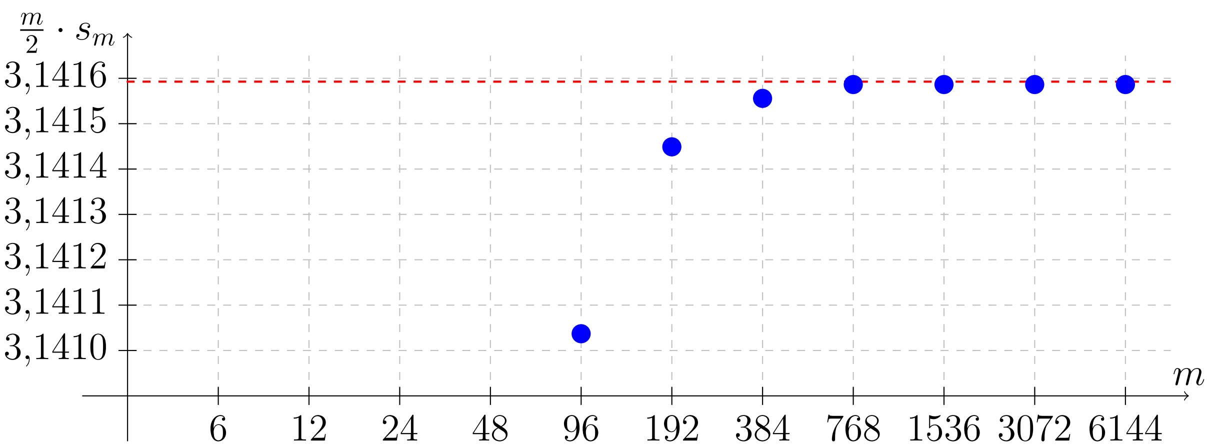
Lösung zu **c)**: Es folgt $\pi >$ ....

Weiter auf nächster Seite

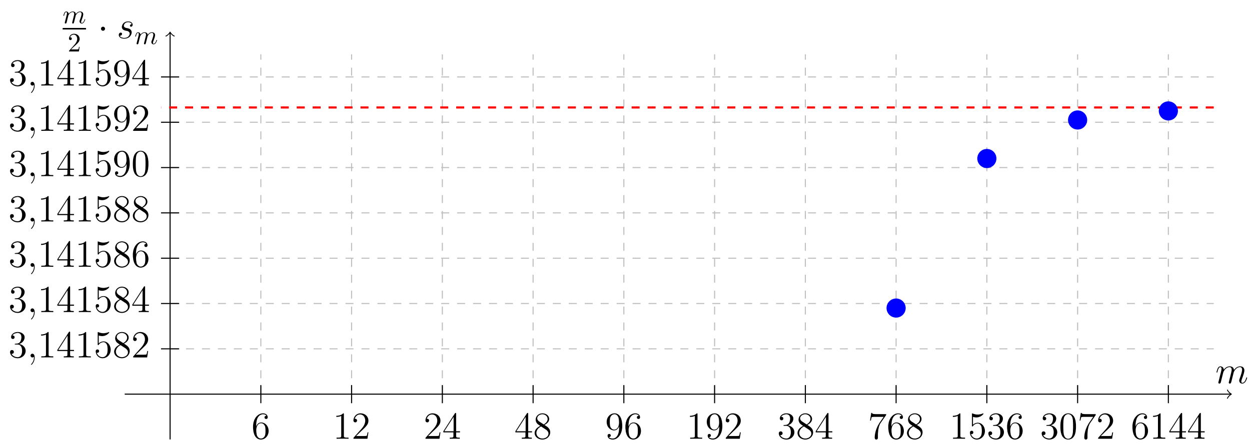
Man kann diese Zahlen veranschaulichen, indem man sie in ein Koordinatensystem einträgt.



Hier sieht es so aus, als ob π ab $m = 192$ bereits vollständig berechnet wurde. Wir zoomen in das Schaubild hinein, um die Abweichungen besser sehen zu können.

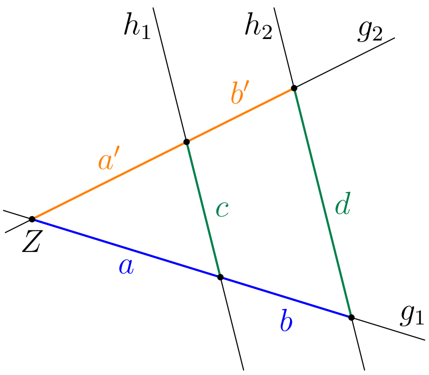


Wenn man nochmals zoomt, ergibt sich die Graphik auf der nächsten Seite. Du kannst sehen, dass sich alle berechneten Werte immer noch von π unterscheiden.



Die berechneten Werte stabilisieren sich für wachsendes m. Aber es ist nicht klar, ob sie sich in der Nähe von π stabilisieren. Deshalb führen wir nun eine Abschätzung von oben durch. Dafür werden die Strahlensätze benötigt. Falls Du sie noch nicht kennst, sind sie hier aufgeschrieben.

Strahlensätze: Zwei Geraden g_1, g_2 schneiden sich im Punkt Z.
Zwei weitere Geraden $h_1 \neq h_2$ sind zueinander parallel und gehen nicht durch Z.

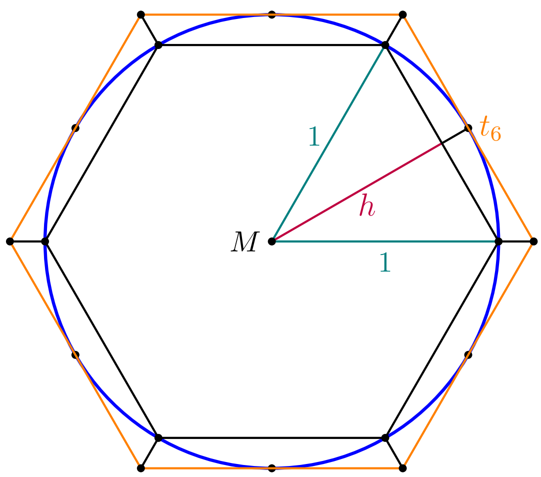


1. Strahlensatz: $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$

2. Strahlensatz: $\frac{a}{c} = \frac{a+b}{d}$

Bisher haben wir π durch Zahlen angenähert, die kleiner als π sind. Mit Hilfe der Strahlensätze kannst Du nun π durch Zahlen annähern, die größer als π sind. Dadurch wird π in Intervalle eingesperrt.

Aufgabe 4



Einem Kreis mit Radius $r = 1$ sind ein Sechseck umbeschrieben und ein Sechseck einbeschrieben.

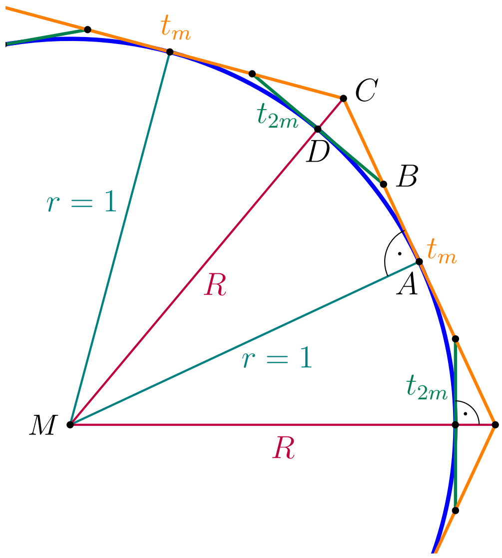
a) Berechne aus den Größen des einbeschriebenen Sechsecks (vgl. Aufgabe 1) die Seitenlänge t_6 des umbeschriebenen Sechsecks. *Tipp:* 2. Strahlensatz.

b) Berechne t_6 und $3\,t_6$ mit dem Taschenrechner (7 Nachkommastellen).

c) Welche Abschätzung für den Wert von π erhält man aus Deinem Ergebnis?

Die obere Schranke für π, die hier berechnet wurde, ist noch sehr ungenau. Um bessere Abschätzungen zu erhalten, kannst Du in der nächsten Aufgabe wieder eine Rekursionsformel aufstellen. Diese Aufgabe ist nicht einfach. Falls Du nicht auf die Lösung kommst, kannst Du sie einfach überspringen. Die Rekursionsformel, die in der Aufgabe hergeleitet werden soll, steht im nächsten Satz.

Aufgabe 5



Einem Kreis mit Radius $r = 1$ sind ein m-Eck und ein $2m$-Eck umbeschrieben. Ein Ausschnitt ist in der Graphik rechts skizziert. Berechne aus der Seitenlänge t_m des m-Ecks die Seitenlänge t_{2m} des $2m$-Ecks.

Hinweise: $\overline{AC} = \frac{t_m}{2}$, $\overline{AB} = \overline{BD} = \frac{t_{2m}}{2}$,
$\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB} = \frac{t_m}{2} - \frac{t_{2m}}{2}$.

Pythagoras in MAC:

$$R^2 = \dots\dots\dots \quad \overset{R \geq 0}{\Rightarrow} \quad R = \sqrt{\dots\dots\dots} \qquad (1)$$

Pythagoras in BCD:

$$\left(\frac{t_m}{2} - \frac{t_{2m}}{2}\right)^2 = \dots\dots\dots \quad \underset{\text{Formel}}{\overset{\text{2. binom.}}{=}} \quad \dots\dots\dots \qquad (2)$$

1. binomische Formel auf linke Seite von (2) anwenden und R^2 und R aus (1) in rechte Seite von (2) einsetzen:

$$\dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

Vereinfachen und auf beiden Seiten Terme abziehen, die auf beiden Seiten vorkommen:

$$\dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

Nach t_{2m} auflösen:

$$t_{2m} = \dots\dots\dots$$

<u>Satz:</u> Sei t_m die Seitenlänge des regelmäßigen m-Ecks, das einem Kreis mit Radius $r = 1$ umbeschrieben ist ($m \geq 3$). Dann gilt

$$t_{2m} = \sqrt{\left(\frac{4}{t_m}\right)^2 + 4} - \frac{4}{t_m}.$$

Aus $t_6 = \frac{2}{\sqrt{3}}$ können damit die Seitenlängen $t_{12}, t_{24}, \dots$ berechnet werden.

Aufgabe 6

a) Trage die Werte von t_6 und $3\,t_6$ aus Aufgabe 4 in die untenstehende Tabelle ein.

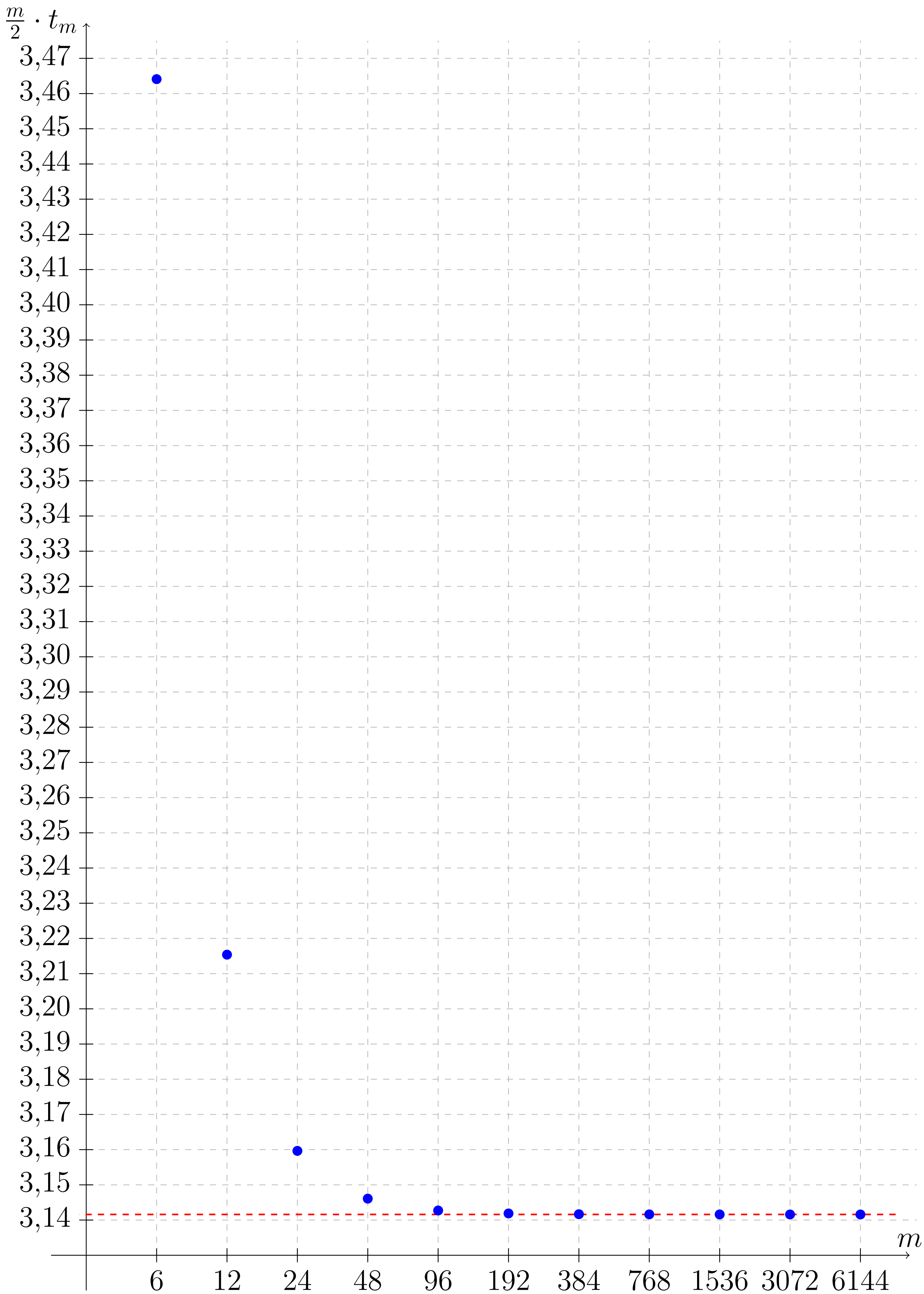
b) Berechne aus t_6 mit Hilfe der Rekursionsformel $t_{12}, t_{24}, \ldots$. Trage die berechneten Werte und die Werte von $6\,t_{12},\ 12\,t_{24}, \ldots$ in die Tabelle unten ein (7 Nachkommastellen).

c) Bestimme aus der Tabelle eine möglichst gute obere Abschätzung für den Wert von π.

m	t_m	$\frac{m}{2} \cdot t_m$
6	$t_6 \approx$	$3 \cdot t_6 \approx$
12	$t_{12} \approx$	$6 \cdot t_{12} \approx$
24	$t_{24} \approx$	$12 \cdot t_{24} \approx$
48	$t_{48} \approx$	$24 \cdot t_{48} \approx$
96	$t_{96} \approx$	$48 \cdot t_{96} \approx$
192	$t_{192} \approx$	$96 \cdot t_{192} \approx$
384	$t_{384} \approx$	$192 \cdot t_{384} \approx$
768	$t_{768} \approx$	$384 \cdot t_{768} \approx$
1536	$t_{1536} \approx$	$768 \cdot t_{1536} \approx$
3072	$t_{3072} \approx$	$1536 \cdot t_{3072} \approx$
6144	$t_{6144} \approx$	$3072 \cdot t_{6144} \approx$

Weiter auf nächster Seite

Veranschaulichung der berechneten Näherungswerte:



Du kannst hier sehen, wie sich die berechneten Werte von oben an π annähern.

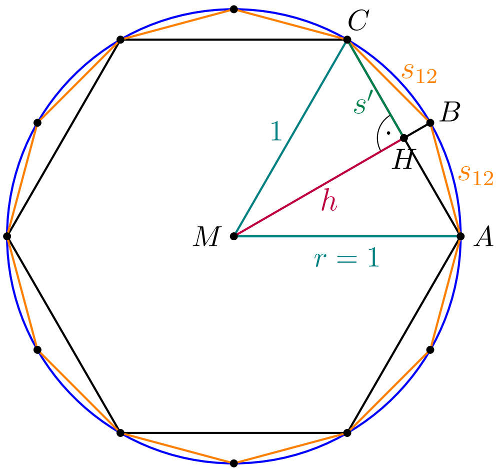
Unsere Berechnungen in einer Tabelle zusammengestellt:

m	$\frac{m}{2} \cdot s_m$	$\frac{m}{2} \cdot t_m$
6	$3\,s_6 \approx 3{,}0000000$	$3\,t_6 \approx 3{,}4641016$
12	$6\,s_{12} \approx 3{,}1058285$	$6\,t_{12} \approx 3{,}2153903$
24	$12\,s_{24} \approx 3{,}1326286$	$12\,t_{24} \approx 3{,}1596599$
48	$24\,s_{48} \approx 3{,}1393502$	$24\,t_{48} \approx 3{,}1460862$
96	$48\,s_{96} \approx 3{,}1410319$	$48\,t_{96} \approx 3{,}1427145$
192	$96\,s_{192} \approx 3{,}1414524$	$96\,t_{192} \approx 3{,}1418730$
384	$192\,s_{384} \approx 3{,}1415576$	$192\,t_{384} \approx 3{,}1416627$
768	$384\,s_{768} \approx 3{,}1415838$	$384\,t_{768} \approx 3{,}1416102$
1536	$768\,s_{1536} \approx 3{,}1415904$	$768\,t_{1536} \approx 3{,}1415970$
3072	$1536\,s_{3072} \approx 3{,}1415921$	$1536\,t_{3072} \approx 3{,}1415937$
6144	$3072\,s_{6144} \approx 3{,}1415925$	$3072\,t_{6144} \approx 3{,}1415929$

Fazit: Wir haben bewiesen, dass $3{,}1415925 < \pi < 3{,}1415929$ gilt.

Lösungen der Aufgaben

Aufgabe 1



Im nebenstehenden Kreis mit Radius $r = 1$ sind ein regelmäßiges Sechseck und ein regelmäßiges Zwölfeck einbeschrieben.

a) Gib die Länge von s' an.

b) Berechne mit dem Satz des Pythagoras die Länge von h.

c) Berechne mit dem Satz des Pythagoras die Seitenlänge s_{12} des Zwölfecks.

d) Welche Abschätzung für π kann man hieraus folgern? (Taschenrechner benötigt.)

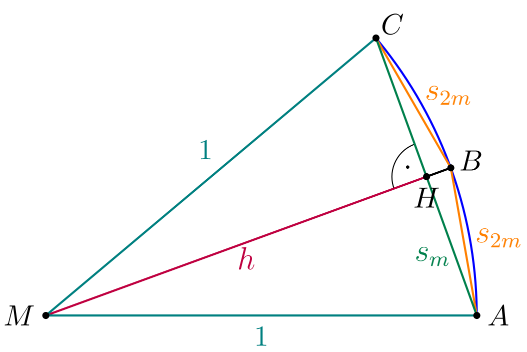
Lösung: **a)** $s' = \frac{1}{2}$,

b) Pythagoras im Dreieck MHC: $h^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2$
$\Rightarrow \; h^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \;\Rightarrow\; h = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

c) Pythagoras im Dreieck HBC:
$s_{12}^2 \;=\; (1-h)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \;=\; 1 - 2h + h^2 + \frac{1}{4} \;=\; 1 - \sqrt{3} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \;=\; 2 - \sqrt{3}$
$\Rightarrow \; s_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$

d) Offenbar gilt $U_1 > 12 \cdot s_{12} = 12 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}$
$\Rightarrow \; \pi > 6 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}} \approx 3{,}1058$

Aufgabe 2



In einem Kreis mit Radius $r = 1$ sind ein regelmäßiges m-Eck und ein regelmäßiges $2m$-Eck einbeschrieben. Ein Ausschnitt ist in der Graphik links skizziert. Stelle eine Formel auf, wie aus der Seitenlänge s_m des m-Ecks die Seitenlänge s_{2m} des $2m$-Ecks berechnet werden kann. Gehe folgendermaßen vor: Nimm an, s_m sei bekannt. Berechne nacheinander aus s_m folgende Längen bzw. Ausdrücke: h^2, $(1-h)^2 = 1 - 2h + h^2$, s_{2m}^2. Trage die Formeln in die vorgesehenen Plätze ein.

Lösung: Pythagoras im Dreieck MHC: $h^2 + \left(\frac{1}{2}s_m\right)^2 = 1$
$\Rightarrow \; h^2 = 1 - \frac{1}{4}s_m^2$
$\Rightarrow \; h = \sqrt{1 - \frac{1}{4}s_m^2}$
$\Rightarrow \; (1-h)^2 = 1 - 2\sqrt{1 - \frac{1}{4}s_m^2} + 1 - \frac{1}{4}s_m^2 = 2 - 2\sqrt{1 - \frac{1}{4}s_m^2} - \frac{1}{4}s_m^2$

Pythagoras im Dreieck HBC: $s_{2m}^2 = (1-h)^2 + \left(\frac{1}{2}s_m\right)^2$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\quad s_{2m}^2 &= 2 - 2\sqrt{1-\tfrac{1}{4}s_m^2} - \tfrac{1}{4}s_m^2 + \tfrac{1}{4}s_m^2 \\
&= 2 - 2\sqrt{1-\tfrac{1}{4}s_m^2} \\
\Rightarrow\quad s_{2m} &= \sqrt{2 - 2\sqrt{1-\tfrac{1}{4}s_m^2}} \\
&= \sqrt{2-\sqrt{4-s_m^2}}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Für die Seitenlänge des 12-Ecks gilt $s_{12} = \sqrt{2-\sqrt{3}}$. Der Umfang des 12-Ecks ist dann $12 \cdot s_{12}$. Für die näherungsweise Berechnung von π wird der halbe Umfang des 12-Ecks benötigt, also $6 \cdot s_{12}$. In dieser Aufgabe sollen immer bessere Näherungen für π gefunden werden, indem $\frac{m}{2}\cdot s_m$ für regelmäßige m-Ecke mit immer größerer Eckenzahl m berechnet wird.

a) Trage die Werte für $3 \cdot s_6$ und $6 \cdot s_{12}$ in die unten stehende Tabelle ein (7 Nachkommastellen).

b) Berechne mit einem Taschenrechner und der Formel aus der letzten Aufgabe s_{24}, die Näherung $12\,s_{24}$ für π, s_{48} und $24\,s_{48}$, usw. Trage die Ergebnisse in die Tabelle ein (7 Nachkommastellen).

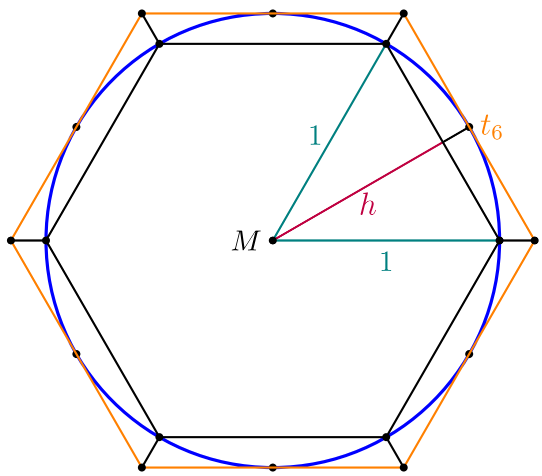
c) Welche (möglichst gute) Abschätzung für π folgt hieraus?

Lösung: a), b)

m	s_m	$\frac{m}{2}\cdot s_m$
6	$s_6 =$ 1,0000000	$3 \cdot s_6 =$ 3,0000000
12	$s_{12} \approx$ 0,5176381	$6\,s_{12} \approx$ 3,1058285
24	$s_{24} \approx$ 0,2610523	$12\,s_{24} \approx$ 3,1326286
48	$s_{48} \approx$ 0,1308063	$24\,s_{48} \approx$ 3,1393502
96	$s_{96} \approx$ 0,0654382	$48\,s_{96} \approx$ 3,1410319
192	$s_{192} \approx$ 0,0327235	$96\,s_{192} \approx$ 3,1414524
384	$s_{384} \approx$ 0,0163623	$192\,s_{384} \approx$ 3,1415576
768	$s_{768} \approx$ 0,0081812	$384\,s_{768} \approx$ 3,1415838
1536	$s_{1536} \approx$ 0,0040906	$768\,s_{1536} \approx$ 3,1415904
3072	$s_{3072} \approx$ 0,0020453	$1536\,s_{3072} \approx$ 3,1415921
6144	$s_{6144} \approx$ 0,0010227	$3072\,s_{6144} \approx$ 3,1415925

c) Es folgt: $\pi > 3{,}1415925$.

Aufgabe 4



Einem Kreis mit Radius $r = 1$ sind ein Sechseck umbeschrieben und ein Sechseck einbeschrieben.

a) Berechne aus den Größen des einbeschriebenen Sechsecks (vgl. Aufgabe 1) die Seitenlänge t_6 des umbeschriebenen Sechsecks. *Tipp:* 2. Strahlensatz.

b) Berechne t_6 und $3\,t_6$ mit dem Taschenrechner (7 Nachkommastellen).

c) Welche Abschätzung für den Wert von π erhält man aus Deinem Ergebnis?

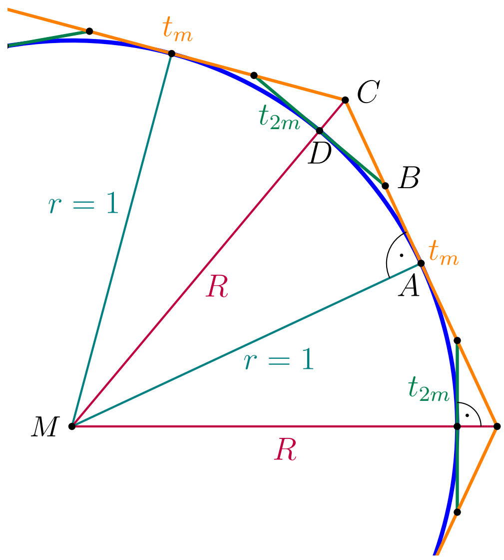
Lösung: **a)** 2. Strahlensatz: $\frac{\frac{t_6}{2}}{1} = \frac{\frac{1}{2}}{h} \Rightarrow t_6 = \frac{1}{h} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

b) $t_6 \approx 1{,}1547005,\ 3 \cdot t_6 \approx 3{,}4641016$.

c) $\pi < 3 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \approx 3{,}4641016$.

Aufgabe 5

Einem Kreis mit Radius $r = 1$ sind ein m-Eck und ein $2m$-Eck umbeschrieben. Ein Ausschnitt ist in der Graphik rechts skizziert. Berechne aus der Seitenlänge t_m des m-Ecks die Seitenlänge t_{2m} des $2m$-Ecks.
Hinweise: $\overline{AC} = \frac{t_m}{2}$, $\overline{AB} = \overline{BD} = \frac{t_{2m}}{2}$,
$\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB} = \frac{t_m}{2} - \frac{t_{2m}}{2}$.



Lösung:
$$R^2 = 1^2 + \left(\frac{t_m}{2}\right)^2 \quad \overset{R>0}{\Rightarrow} \quad R = \sqrt{1 + \left(\frac{t_m}{2}\right)^2} \qquad (1)$$
$$\left(\frac{t_m}{2} - \frac{t_{2m}}{2}\right)^2 = (R-1)^2 + \left(\frac{t_{2m}}{2}\right)^2 \quad \overset{\text{2. binom.}}{\underset{\text{Formel}}{=}} \quad R^2 - 2R + 1 + \left(\frac{t_{2m}}{2}\right)^2 \qquad (2)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{t_m}{2}\right)^2 - 2\frac{t_m}{2}\frac{t_{2m}}{2} + \left(\frac{t_{2m}}{2}\right)^2 = 1 + \left(\frac{t_m}{2}\right)^2 - 2\sqrt{1 + \left(\frac{t_m}{2}\right)^2} + 1 + \left(\frac{t_{2m}}{2}\right)^2$$
$$\Rightarrow -\frac{1}{2} t_m t_{2m} = 2 - 2\sqrt{1 + \left(\frac{t_m}{2}\right)^2}$$
$$\Rightarrow t_m t_{2m} = 4\sqrt{1 + \frac{t_m^2}{4}} - 4 = \sqrt{16 + 4t_m^2} - 4$$
$$\Rightarrow t_{2m} = \frac{\sqrt{16 + 4t_m^2} - 4}{t_m} = \sqrt{\left(\frac{4}{t_m}\right)^2 + 4} - \frac{4}{t_m}$$

Aufgabe 6

a) Trage die Werte von t_6 und $3\,t_6$ aus Aufgabe 4 in die untenstehende Tabelle ein.

b) Berechne aus t_6 mit Hilfe der Rekursionsformel $t_{12}, t_{24}, \ldots$. Trage die berechneten Werte und die Werte von $6\,t_{12},\ 12\,t_{24}, \ldots$ in die Tabelle unten ein (7 Nachkommastellen).

c) Bestimme aus der Tabelle eine möglichst gute obere Abschätzung für den Wert von π.

Lösung: a), b):

m	t_m	$\frac{m}{2} \cdot t_m$
6	$t_6 \approx$ 1,1547005	$3 \cdot t_6 \approx$ 3,4641016
12	$t_{12} \approx$ 0,5358984	$6 \cdot t_{12} \approx$ 3,2153903
24	$t_{24} \approx$ 0,2633049	$12 \cdot t_{24} \approx$ 3,1596599
48	$t_{48} \approx$ 0,1310869	$24 \cdot t_{48} \approx$ 3,1460862
96	$t_{96} \approx$ 0,0654732	$48 \cdot t_{96} \approx$ 3,1427145
192	$t_{192} \approx$ 0,0327278	$96 \cdot t_{192} \approx$ 3,1418730
384	$t_{384} \approx$ 0,0163628	$192 \cdot t_{384} \approx$ 3,1416627
768	$t_{768} \approx$ 0,0081813	$384 \cdot t_{768} \approx$ 3,1416102
1536	$t_{1536} \approx$ 0,0040906	$768 \cdot t_{1536} \approx$ 3,1415970
3072	$t_{3072} \approx$ 0,0020453	$1536 \cdot t_{3072} \approx$ 3,1415937
6144	$t_{6144} \approx$ 0,0010227	$3072 \cdot t_{6144} \approx$ 3,1415929

c) Es folgt: $\pi < 3{,}1415929$.