Schriftliche Aufgaben

Name:

Aufgabe 7

In dieser Aufgabe soll eine noch bessere Abschätzung für π berechnet werden. Wir hatten als beste untere Schranke für π den halben Umfang des im Einheitskreis einbeschriebenen 6144-Ecks ($3072 \cdot s_{6144}$) ausgerechnet, und als obere Schranke den halben Umfang des umbeschriebenen 6144-Ecks ($3072 \cdot t_{6144}$).

Die auf 12 Nachkommastellen gerundeten Werte der Seitenlängen des im Einheitskreis einbeschriebenen 6144-Ecks und des umbeschriebenen 6144-Ecks sind

$$\begin{aligned} s_{6144} &\approx 0{,}001022653814 \\ t_{6144} &\approx 0{,}001022653948 \end{aligned}$$

a) Berechne mit Hilfe der Rekursionsformel, die in dieser Einheit hergeleitet wurde, die Seitenlängen des im Einheitskreis einbeschriebenen 12288-Ecks und des umbeschriebenen 12288-Ecks auf 12 Nachkommastellen genau.

$$\begin{aligned} s_{12288} &\approx \boxed{\phantom{0{,}000000000000}} \\ t_{12288} &\approx \boxed{\phantom{0{,}000000000000}} \end{aligned}$$

b) Welche Abschätzungen für π nach unten und nach oben folgen hieraus? Trage in die Kästchen Zahlen mit 9 Nachkommastellen ein.

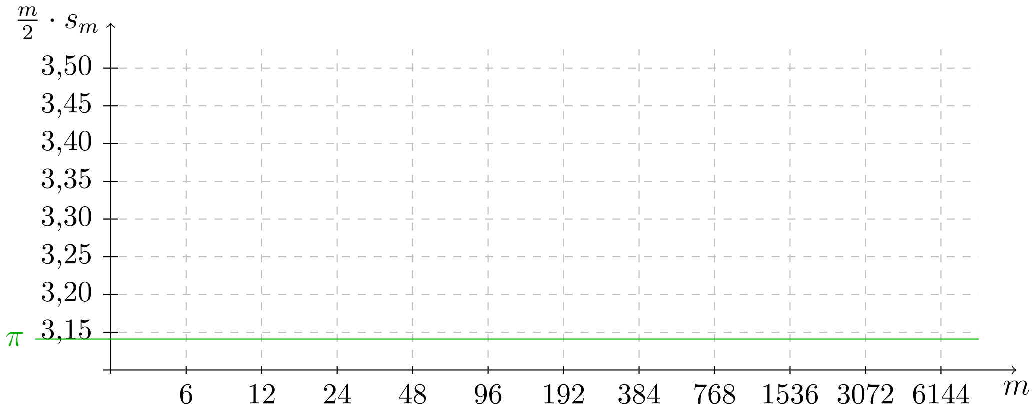
$$\boxed{\phantom{0{,}000000000}} \leq \pi \leq \boxed{\phantom{0{,}000000000}}$$

Weiter auf Seite 2

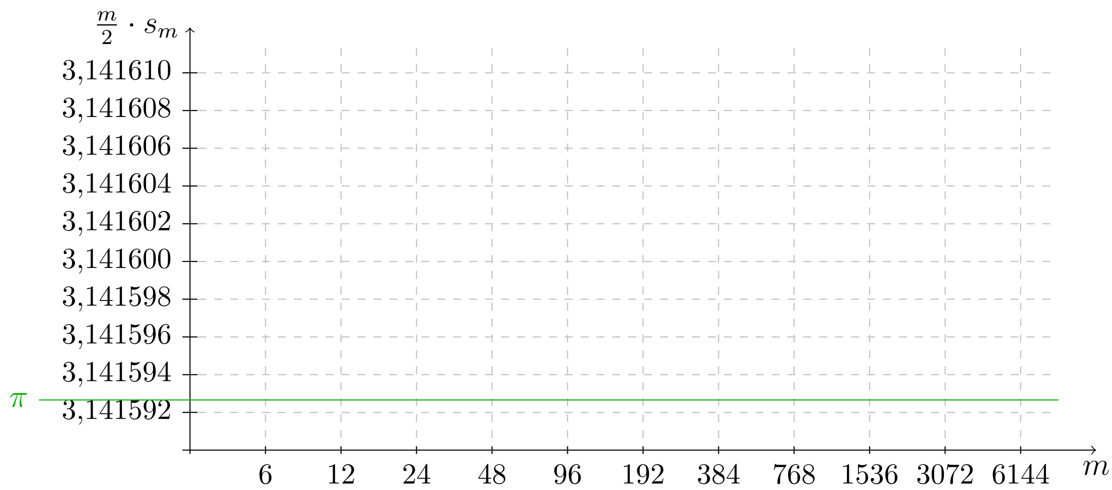
Aufgabe 8

Wir haben mit t_m die Seitenlänge des m-Ecks bezeichnet, das dem Einheitskreis umschrieben ist. Als Näherungswert für π wurde dann der halbe Umfang $\frac{m}{2} \cdot t_m$ berechnet. Für diese Aufgabe sollst Du die Werte von $\frac{m}{2} \cdot t_m$ verwenden, die in dieser Einheit bereits berechnet wurden.

a) Zeichne die Punkte $(m \mid \frac{m}{2} \cdot t_m)$ in das unten stehende Koordinatensystem ein, um die Annäherung von π durch umbeschriebene Vielecke zu veranschaulichen.



b) Die Graphik in der letzten Teilaufgabe sieht so aus, als sei π bereits erreicht worden. Trage nun die Punkte $(m \mid \frac{m}{2} \cdot t_m)$ für $m = 768, 1536, 3072, 6144$ in das unten stehende (in vertikaler Richtung skalierte) Koordinatensystem ein, um den Abstand der Näherungswerte zu π zu veranschaulichen.



Weiter auf Seite 3

Aufgabe 9

Die Formel von Leibniz (1637): $\pi \;=\; 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \ldots$

Aber Vorsicht, das ist eine komische Gleichung. Denn links steht eine Zahl, rechts eine unendlich lange Abfolge von Summen und Differenzen.

Die Formel ist folgendermaßen zu verstehen: Man betrachtet die Folge s_n, deren Glieder s_n jeweils aus den ersten n Summanden der rechten Seite gebildet werden, also

$$s_1 = 4,\ s_2 = 4 - \frac{4}{3},\ s_3 = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5},\ s_4 = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7},\ \ldots$$

Die Formel sagt nun, dass die s_n für wachsendes n immer bessere Näherungen der Zahl π darstellen.

Mit dem Taschenrechner rechnet man geschickter

$$s_1 = 4,\ s_2 = s_1 - \frac{4}{3},\ s_3 = s_2 + \frac{4}{5},\ s_4 = s_3 - \frac{4}{7},\ \ldots$$

oder allgemein

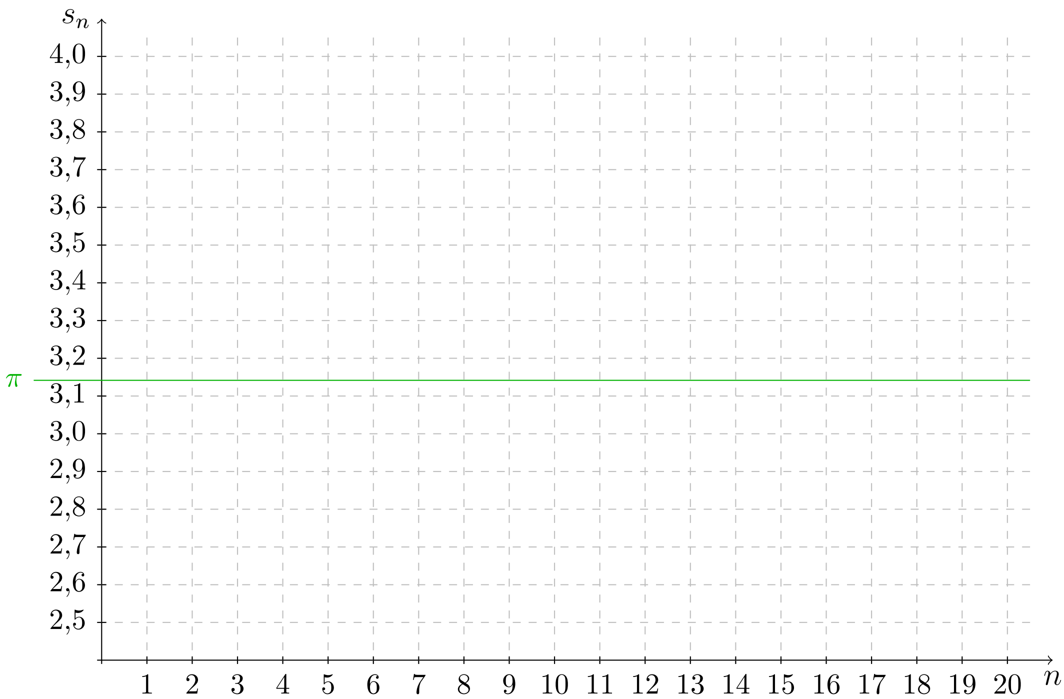
$$s_{n+1} = s_n + (-1)^n \frac{4}{2n+1} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

In der unten stehenden Tabelle sind die Werte der ersten 20 Folgenglieder angegeben.

$n =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$s_n =$	4,00	2,67	3,47	2,90	3,34	2,98	3,28	3,02	3,25	3,04

$n =$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$s_n =$	3,23	3,06	3,22	3,07	3,21	3,08	3,20	3,09	3,19	3,09

a) Veranschauliche den Verlauf der Folge, indem Du in der Graphik im Koordinatensystem die Punkte $(n \mid s_n)$ einzeichnest (in blau).



b) Welche Abschätzung für π erhält man aus den Folgengliedern s_{19} und s_{20}? Fülle die leeren Kästchen aus.

$$\boxed{} \leq \pi \leq \boxed{}$$