Iteration und Konvergenz

zum Selbstlernen

Vorwort

Dies ist ein Skript zum Selbststudium. Du kannst hier Grundlagen zum Thema *Iteration und Konvergenz* kennenlernen.

Der Text ist im Wesentlichen der Mitschrieb aus einem Online-Kurs *Iteration und Konvergenz* im Schülerseminar für Klasse 8-10. Du findest diesen und andere Kurse auf der Seite

`https://pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/iadm/Zirkel/material-Schuelerseminar/`

Falls Du beim Studium des vorliegenden Textes Fragen hast, kannst Du beim Online-Kurs im entsprechenden Video nachsehen, dort gibt es ausführlichere Erklärungen. Um die Verbindung zu finden, ist am Rand des Textes markiert, wann die einzelnen Einheiten des Online-Kurses beginnen.

Die Aufgaben sind meistens dieselben wie im Online-Kurs. Im Lerntext sind keine Lösungen dabei, damit Du sie selber lösen kannst. Bei den Aufgaben ist oft Platz, um Deine Lösungen aufzuschreiben. Manchmal musst Du aber auch ein extra Blatt für die Berechnungen dazunehmen. Falls Du Deine Lösungen überprüfen willst, stehen alle Aufgaben mit Lösungen im letzten Kapitel dieses Skripts.

Ich wünsche Dir viel Spaß beim Durcharbeiten des Skripts und bei den Aufgaben!

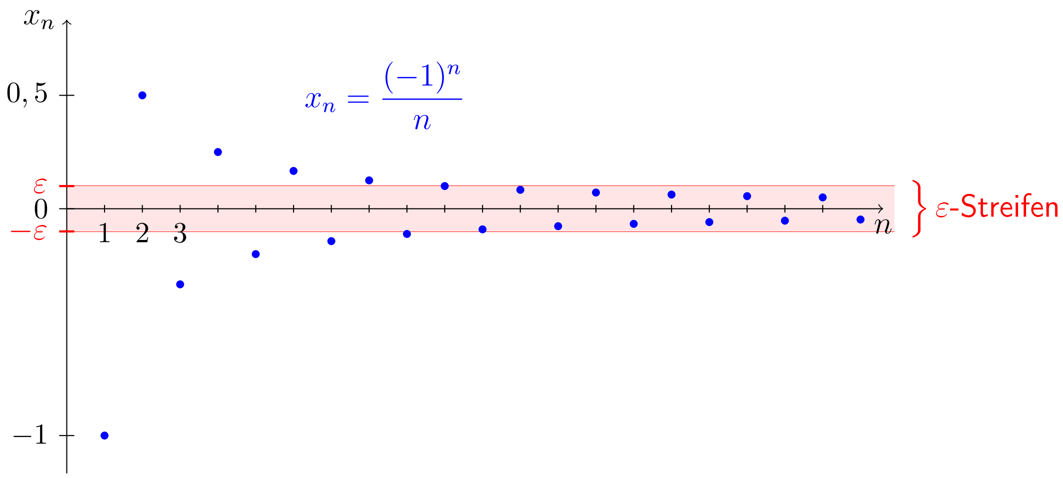
26. März 2025 Peter Lesky

Inhalt

Auf den nächsten Seiten findest Du das Skript mit Aufgaben zur sechsten Einheit *Konvergenz*. Die weiteren Teile wurden bei den entsprechenden Einheiten veröffentlicht.

Beginn Online-Einheit 6

Die Definition einer Nullfolge kann man mit Hilfe eines ε-Streifens veranschaulichen.



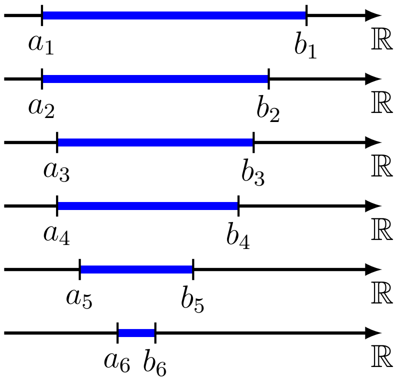
Anschaulich: Eine Folge (x_n) ist eine Nullfolge, wenn es zu jedem noch so schmalen ε-Streifen eine Zahl n_0 gibt, so dass für alle $n > n_0$ die Folgenglieder im ε-Streifen liegen.

Aufgabe 1

Welche der angegebenen Folgen bildet eine Nullfolge? Trage „J“ für Ja, „N“ für Nein ein.

Definition (a_n)	Ist (a_n) eine Nullfolge?
$a_n = \frac{1}{n^2}$	
$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$	
$a_n = \frac{n+1}{n}$	
$a_n = \frac{1}{2^n}$	
$a_n = \frac{1}{n - 100{,}5}$	
$a_n = \frac{1\,000}{\sqrt{n}}$	
$a_n = \frac{1}{\sqrt[1000]{n}}$	
$a_n = n$	
$a_n = 0{,}001$	

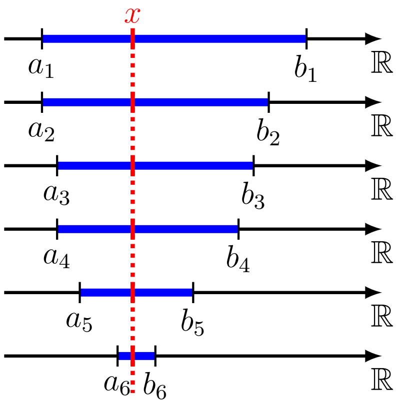
Hier noch Veranschaulichungen zum Thema Intervallschachtelung.



Die Intervalle $I_1 = [a_1; a_2]$, $I_2 = [a_2; b_2], \ldots$ mit $a_n \leq b_n$ bilden eine Intervallschachtelung, falls

1) (a_n) monoton wachsend ist und
2) (b_n) monoton fallend ist und
3) $(b_n - a_n)$ eine Nullfolge ist.

Satz: Bilden $I_1 = [a_1; b_1], I_2 = [a_2; b_2], \ldots$ eine Intervallschachtelung, dann gibt es genau eine reelle Zahl x, die in allen Intervallen enthalten ist.



Aufgabe 2

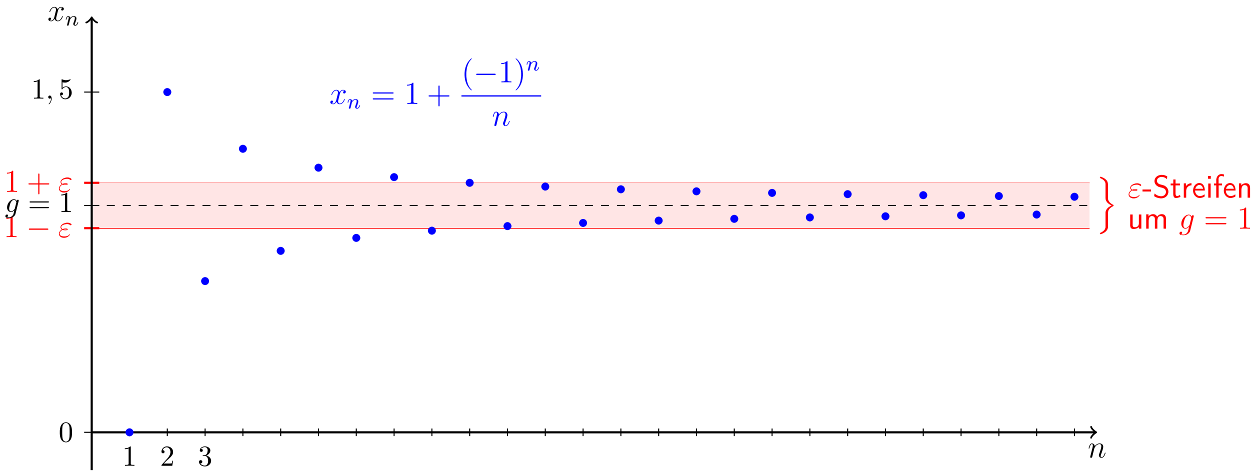
Welche der angegebenen Eigenschaften sind erfüllt? Trage „J" für Ja, „N" für Nein ein:

Def. (a_n)	Def. (b_n)	(a_n) ist monoton wachsend	(b_n) ist monoton fallend	$(b_n - a_n)$ ist eine Nullfolge	$I_n = [a_n, b_n]$ ist Intervall-schachtelung
$a_n = -\frac{1}{\sqrt{n}}$	$b_n = \frac{1}{n^5}$				
$a_n = 4$	$b_n = 4,00001$				
$a_n = -2$	$b_n = 2 + \frac{n^2+n}{n^3}$				
$a_n = \frac{n-1}{n}$	$b_n = \frac{n^2+n}{n^2}$				

Weiter auf nächster Seite

8 Konvergenz

In der folgenden Graphik siehst Du, was passiert, wenn man zu der Nullfolge aus der Graphik der vorvorigen Seite die Zahl 1 addiert.



Die Folgenglieder werden um 1 „nach oben“ verschoben und nähern sich nun an 1 an. Deshalb verschiebt man auch den ε-Streifen entsprechend nach oben, um die Annäherung an 1 zu veranschaulichen.

Definition: Eine Folge (x_n) heißt konvergent gegen die Zahl g, wenn es zu jedem noch so kleinen $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$|x_n - g| \;<\; \varepsilon \quad \text{für alle } n > n_0.$$

Oder anders: Die Folge der Differenzen $(x_n - g)$ ist eine Nullfolge.

Die Zahl g heißt dann Grenzwert der Folge (x_n), man schreibt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = g \text{ oder } x_n \to g \text{ für } n \to \infty.$$

Bemerkung: Jede Nullfolge ist konvergent gegen 0.

Anschaulich: Eine Folge (x_n) konvergiert gegen g, wenn es zu jedem noch so schmalen ε-Streifen um g eine Zahl n_0 gibt, so dass die Folgenglieder für alle $n > n_0$ im ε-Streifen um g liegen.

Aufgabe 3

Gegeben ist die Folge (x_n) mit $x_n = \dfrac{n^2}{n^2+4}$. Behauptung: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

a) Berechne $|x_n - 1|$.

b) Bestimme ein n_0 so, dass $|x_n - 1| < \dfrac{1}{1000}$ für alle $n > n_0$ gilt.

c) Es sei ein beliebiges $\varepsilon > 0$ fest vorgegeben. Bestimme n_0 in Abhängigkeit von ε, so dass $|x_n - 1| < \varepsilon$ für alle $n > n_0$ gilt.

Durch die Lösung von Teil c) ist bewiesen, dass (x_n) gegen $g = 1$ konvergiert.

Aufgabe 4

Es soll bewiesen werden, dass die Folge (x_n) mit $x_n = \dfrac{3n^2 - 1}{n^2 + 2}$ gegen $g = 3$ konvergiert.

a) Berechne $|x_n - 3|$.

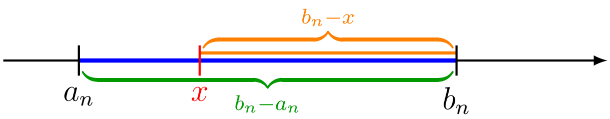
b) Es sei ein beliebiges $\varepsilon > 0$ fest vorgegeben. Bestimme n_0 in Abhängigkeit von ε, so dass $|x_n - 3| < \varepsilon$ für alle $n > n_0$ gilt.

Durch die Lösung von Teil b) ist bewiesen, dass (x_n) gegen $g = 3$ konvergiert.

Der folgende Satz stellt den Zusammenhang zwischen Konvergenz und Intervallschachtelung her.

<u>Satz:</u> Ist $[a_1; b_1], [a_2; b_2], \ldots$ eine Intervallschachtelung und ist die Zahl x in allen Intervallen enthalten, so folgt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = x$.

Beweis: Wir wissen 1) $a_n \leq x \leq b_n$



2) Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|b_n - a_n| < \varepsilon$ für $n > n_0$.

Wir zeigen, dass $|b_n - x| < \varepsilon$ für $n > n_0$ gilt. Dies beweist $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = x$.

Für $n > n_0$ gilt $|b_n - x| \overset{1)}{=} \underline{b_n - x} \overset{1)}{\leq} \underline{b_n - a_n} \overset{1)}{=} |b_n - a_n| \overset{2)}{<} \varepsilon$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$ folgt mit $|a_n - x| = |x - a_n| = x - a_n$ genauso. □

<u>Definition:</u> Eine Folge (x_n) heißt

1) <u>nach oben beschränkt</u>, falls es eine Zahl M gibt, so dass $x_n \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

2) <u>nach unten beschränkt</u>, falls es eine Zahl M gibt, so dass $x_n \geq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 5

Untersuche, ob die angegebene Folge monoton wachsend oder fallen ist und ob sie nach unten oder nach oben beschränkt ist. Trage ein: „J“ für Ja, „N“ für Nein.

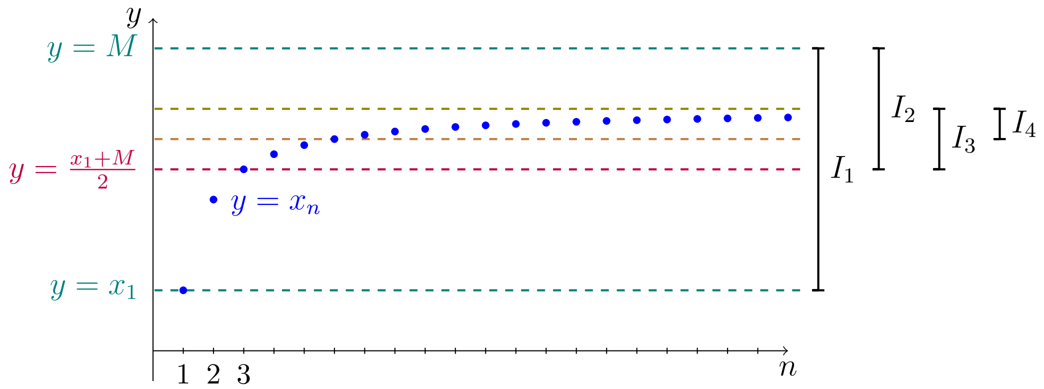
Definition von (a_n)	monoton wachsend	monoton fallend	nach oben beschränkt	nach unten beschränkt
$a_n = \dfrac{1}{n}$				
$a_n = n$				
$a_n = (-1)^n$				
$a_n = (-1)^n \cdot n$				
$a_n = 2$				
$a_n = 1 + \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{100} + \ldots + \dfrac{1}{10^n}$				

<u>Hauptsatz über monotone Folgen:</u> 1) Jede Folge (x_n), die monoton wachsend und nach oben beschränkt ist, ist konvergent.
2) Jede Folge (x_n), die monoton fallend und nach unten beschränkt ist, ist konvergent.

Wir beweisen: Jede Folge (x_n), die monoton wachsend und nach oben beschränkt ist, ist konvergent.

Beweis:
(x_n) ist nach oben beschränkt $\Rightarrow$ Es gibt eine Zahl $M \geq 0$, so dass $\boxed{\qquad\qquad}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Nun werden Intervalle $I_1, I_2, \ldots$ konstruiert, so dass in jedem der Intervalle unendlich viele Folgenglieder x_n liegen und nur endlich viele Folgenglieder außerhalb, und dass die Intervalle eine Intervallschachtelung bilden. In der folgenden Graphik ist dies veranschaulicht, die formale Beschreibung folgt danach. In jedem Schritt wird die Intervalllänge halbiert. In I_1 liegen alle x_n, in I_2 sind alle x_n mit $n > 3$ enthalten, in I_3 ebenfalls alle x_n mit $n > 3$, in I_4 alle x_n mit $n > 6$.



Schritt 1: Alle Folgenglieder x_n liegen in dem Intervall $I_1 = \boxed{[\qquad;\qquad]}$

Schritt 2: Die Mitte des Intervalls I_1 ist durch $m_1 = \boxed{\qquad\qquad}$ gegeben.

Fall 1: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $x_n < m_1$.
Dann liegen alle Folgenglieder x_n im Intervall $\boxed{[\qquad;\qquad]}$.
Bezeichne dieses Intervall mit I_2, setze $n_1 = 1$ und fahre fort mit Schritt 3.

Fall 2: Es gibt eine Zahl n_1, so dass $x_{n_1} \geq m_1$.
Da (x_n) monoton wächst, folgt, dass dann $\boxed{\qquad\qquad}$ für alle $n \geq n_1$ gilt.
Dann liegen alle Folgenglieder x_n mit Index $n \geq n_1$ im Intervall $\boxed{[\qquad;\qquad]}$.
Bezeichne dieses Intervall mit I_2 und fahre fort mit Schritt 3.

Weiter auf nächster Seite

Schritt 3: Wir wissen, dass $x_n \in I_2$ für $n \geq n_1$ gilt.
Sei $I_2 = [c_2; d_2]$, und m_2 bezeichne die Mitte des Intervalls m_2.

Fall 1: Für alle $n \geq n_1$ gilt $\boxed{\qquad\qquad}$

Dann liegen alle Folgenglieder x_n mit $n \geq n_1$ im Intervall $\boxed{[\quad\;;\quad\;]}$.

Bezeichne dieses Intervall mit I_3, setze $n_2 := n_1$ und fahre fort mit Schritt 4.

Fall 2: Es gibt eine Zahl n_2, so dass $\boxed{\qquad\qquad}$ für $n \geq n_2$.

Dann liegen alle Folgenglieder x_n mit Index $n \geq n_2$ im Intervall $\boxed{[\quad\;;\quad\;]}$.

Bezeichne dieses Intervall mit I_3 und fahre fort mit Schritt 4.

So fortfahrend erhalten wir Intervalle $I_1, I_2, I_3, I_4, \ldots$.

Da sich die Intervalllänge in jedem Schritt $\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$,

bilden die Intervalllängen eine $\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$.

Außerdem gilt $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \ldots$.

Daher bilden die Intervalle $I_1, I_2, \ldots$ eine $\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$.

Sei x die einzige reelle Zahl, die in allen Intervallen $I_1, I_2, \ldots$ enthalten ist.

Für $\varepsilon > 0$ gibt es ein k, so dass die Intervalllänge von I_k kleiner als $\boxed{\qquad\quad}$ ist.

Nach Konstruktion gilt $\boxed{\qquad\qquad\quad}$ für $n > n_k$.

Wegen $x, x_n \in I_k$ folgt $|x - x_n| < \boxed{\qquad\quad}$ für $n > n_k$.

Dies beweist $\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$. $\square$

Für die nächste Aufgabe benötigen wir die folgende Erinnerung an den Weg des Achilles und die Definition der Fakultät einer natürlichen Zahl.

Erinnerungen: 1) Weg des Achill

$$s_n = 10\Big(1 + \frac{1}{2} + \Big(\frac{1}{2}\Big)^2 + \ldots + \Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-1}\Big) = 20 - 10\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-1} \leq 20.$$

Daraus folgt

$$1 + \frac{1}{2} + \Big(\frac{1}{2}\Big)^2 + \ldots + \Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-1} \leq \boxed{\qquad\quad} \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

2) Für $n \in \mathbb{N}$ oder $n = 0$ ist die Fakultät von n definiert durch

$$n! := n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1, \quad 0! := 1, \quad 1! := 1.$$

Man definiert $0! = 1$, damit $1! = 1 \cdot 0!$ gilt.

Aufgabe 6

Gegeben ist die Folge (x_n) mit $x_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ für $n \in \mathbb{N}$

a) Gib die Formel für x_{n+1} an: $x_{n+1} = \boxed{}$

b) Berechne die Differenz: $x_{n+1} - x_n = \boxed{}$

c) Trage ein: „J" für Ja, „N" für Nein.

(x_n) ist monoton wachsend	(x_n) ist monoton fallend

d) Nun soll bewiesen werden, dass (x_n) nach oben beschränkt ist.

d$_1$) Gib an, durch welche Zweierpotenz $n!$ nach unten abgeschätzt werden kann.

$$n! = \underbrace{n}_{\geq 2} \cdot \underbrace{(n-1)}_{\geq 2} \cdot \underbrace{(n-2)}_{\geq 2} \cdots \underbrace{3}_{\geq 2} \cdot \underbrace{2}_{=2} \cdot 1 \;\geq\; 2^{\boxed{}} \qquad \text{für } n \geq 2.$$

Für $n = 1$ gilt dieselbe Formel: $1! \geq 2^0$.

d$_2$) Aus der letzten Teilaufgabe folgt $\frac{1}{n!} \leq \boxed{}$ für $n \geq 1$.

d$_3$) Verwende die Abschätzung aus der letzten Teilaufgabe und die Ungleichung (1), um eine Zahl M zu bestimmen, so dass $x_n \leq M$ für $n \in \mathbb{N}$ gilt.

$$\begin{aligned} x_n &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!} \\ &\overset{d_2)}{\leq} 1 + \boxed{} \\ &\overset{(1)}{\leq} 1 + \boxed{} = \boxed{} \end{aligned}$$

Also gilt $x_n \leq \boxed{}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Hauptsatz über monotone Folgen $\Rightarrow \boxed{}$.

Definition: Die eulersche Zahl e ist definiert durch

$$\mathrm{e} := \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} \right) = 2{,}71828182845\ldots$$

Die eulersche Zahl ist irrational.

Lösungen der Aufgaben

Aufgabe 1

Welche der angegebenen Folgen bildet eine Nullfolge? Trage „J“ für Ja, „N“ für Nein ein.

Lösung:

Definition (a_n)	Ist (a_n) eine Nullfolge?
$a_n = \frac{1}{n^2}$	J
$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$	J
$a_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$	N
$a_n = \frac{1}{2^n}$	J
$a_n = \frac{1}{n - 100{,}5}$	J
$a_n = \frac{1\,000}{\sqrt{n}}$	J
$a_n = \frac{1}{\sqrt[1000]{n}}$	J
$a_n = n$	N
$a_n = 0{,}001$	N

Aufgabe 2

Welche der angegebenen Eigenschaften sind erfüllt? Trage „J“ für Ja, „N“ für Nein ein:

Lösung:

Def. (a_n)	Def. (b_n)	(a_n) ist monoton wachsend	(b_n) ist monoton fallend	$(b_n - a_n)$ ist eine Nullfolge	$I_n = [a_n, b_n]$ ist Intervall-schachtelung
$a_n = -\frac{1}{\sqrt{n}}$	$b_n = \frac{1}{n^5}$	J	J	J	J
$a_n = 4$	$b_n = 4,00001$	J	J	N	N
$a_n = -2$	$b_n = 2 + \underbrace{\frac{n^2+n}{n^3}}_{=2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$	J	J	N	N
$a_n = \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{=1-\frac{1}{n}}$	$b_n = \underbrace{\frac{n^2+n}{n^2}}_{=1+\frac{1}{n}}$	J	J	J	J

Aufgabe 3

Gegeben ist die Folge (x_n) mit $x_n = \dfrac{n^2}{n^2+4}$. Behauptung: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

a) Berechne $|x_n - 1|$.

b) Bestimme ein n_0 so, dass $|x_n - 1| < \dfrac{1}{1000}$ für alle $n > n_0$ gilt.

c) Es sei ein beliebiges $\varepsilon > 0$ fest vorgegeben. Bestimme n_0 in Abhängigkeit von ε, so dass $|x_n - 1| < \varepsilon$ für alle $n > n_0$ gilt.

Durch die Lösung von Teil c) ist bewiesen, dass (x_n) gegen $g = 1$ konvergiert.

Lösung: **a)** $|x_n - 1| = \left|\dfrac{n^2}{n^2+4} - \dfrac{n^2+4}{n^2+4}\right| = \left|\dfrac{n^2-(n^2+4)}{n^2+4}\right| = \dfrac{4}{n^2+4}$

b)
$$\begin{array}{lrcl} |x_n - 1| = & \dfrac{4}{n^2+4} & < & \dfrac{1}{1000} \quad \Big| \cdot 1000(n^2+4) > 0 \\ \Leftrightarrow & 3000 & < & n^2+4 \\ \Leftrightarrow & 2996 & < & n^2 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{2996} & < & n \end{array}$$

Also muss $n_0 \geq \sqrt{2996}$ gewählt werden.
Wähle $n_0 = 60$ oder $n_0 = 3000$ oder ...

c) $|x_n - 1| = \dfrac{4}{n^2+4} < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; \dfrac{4}{\varepsilon} < n^2 + 4 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{4}{\varepsilon} - 4 < n^2.$

Jetzt würde man gerne auf beiden Seiten der letzten Ungleichung die Wurzel ziehen. Es könnte jedoch sein, dass $\frac{4}{\varepsilon} - 4 < 0$ ist, dann wäre die Wurzel auf der linken Seite nicht definiert. Deshalb machen wir die untere Grenze für n noch größer und fordern $n^2 > \frac{4}{\varepsilon}$. Daraus folgt dann $\frac{4}{\varepsilon} - 4 < n^2$ und nach den obigen Äquivalenzen $|x_n - 1| < \varepsilon$. Außerdem ist die Wurzel aus $\frac{4}{\varepsilon}$ definiert, da $\varepsilon > 0$ vorausgesetzt wird.

Es reicht, $n_0 \geq \sqrt{\frac{4}{\varepsilon}}$ zu wählen. Dann folgt für $n > n_0$

$$n^2 > \frac{4}{\varepsilon} \;\Rightarrow\; n^2 > \frac{4}{\varepsilon} - 4 \overset{\text{vorherige}}{\underset{\text{Rechnung}}{\Leftrightarrow}} |x_n - 1| < \varepsilon.$$

Aufgabe 4

Es soll bewiesen werden, dass die Folge (x_n) mit $x_n = \dfrac{3n^2-1}{n^2+2}$ gegen $g = 3$ konvergiert.

a) Berechne $|x_n - 3|$.

b) Es sei ein beliebiges $\varepsilon > 0$ fest vorgegeben. Bestimme n_0 in Abhängigkeit von ε, so dass $|x_n - 3| < \varepsilon$ für alle $n > n_0$ gilt.

Durch die Lösung von Teil b) ist bewiesen, dass (x_n) gegen $g = 3$ konvergiert.

Lösung: **a)** $|x_n - 3| = \left|\dfrac{3n^2-1}{n^2+2} - 3\right| = \left|\dfrac{3n^2-1-(3n^2+6)}{n^2+2}\right| = \dfrac{7}{n^2+2}.$

b)
$$\begin{aligned} |x_n - 3| = \frac{7}{n^2+2} &< \varepsilon \qquad \Big| \cdot \frac{n^2+2}{\varepsilon} \\ \Leftrightarrow \qquad \frac{7}{\varepsilon} &< n^2+2 \\ \Leftrightarrow \qquad \frac{7}{\varepsilon} - 2 &< n^2 \end{aligned}$$

Jetzt würde man gerne auf beiden Seiten der letzten Ungleichung die Wurzel ziehen. Es könnte jedoch sein, dass $\frac{7}{\varepsilon} - 2 < 0$ ist, dann wäre die Wurzel auf der linken Seite nicht definiert. Deshalb machen wir die untere Grenze für n noch größer und fordern $n^2 > \frac{7}{\varepsilon}$ (wir müssen ja nicht das kleinste n finden, sondern nur nachweisen, dass es irgendeines gibt).

Also reicht es, $n_0 \geq \sqrt{\frac{7}{\varepsilon}}$ zu wählen.

Aufgabe 5

Untersuche, ob die angegebene Folge monoton wachsend oder fallen ist und ob sie nach unten oder nach oben beschränkt ist. Trage ein: „J“ für Ja, „N“ für Nein.

Lösung:

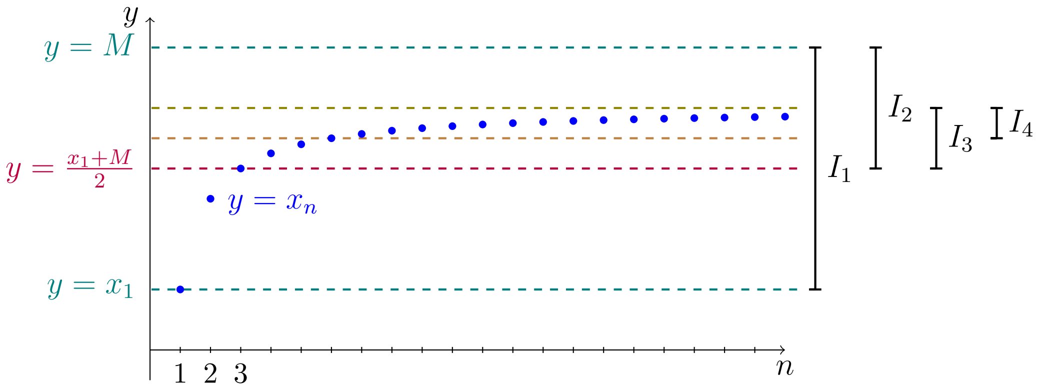
Definition von (a_n)	monoton wachsend	monoton fallend	nach oben beschränkt	nach unten beschränkt
$a_n = \frac{1}{n}$	N	J	J ($a_n \leq 1$)	J ($a_n \geq 0$)
$a_n = n$	J	N	N	J ($a_n \geq 1$)
$a_n = (-1)^n$	N	N	J ($a_n \leq 1$)	J ($a_n \geq -1$)
$a_n = (-1)^n \cdot n$	N	N	N	N
$a_n = 2$	J	J	J ($a_n \leq 2$)	J ($a_n \geq 2$)
$a_n = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \ldots + \frac{1}{10^n}$	J	N	J ($a_n \leq 2$)	J ($a_n \geq 1$)

Lösung zum Beweis des Hauptsatzes über monotone Folgen:

Wir beweisen: Jede Folge (x_n), die monoton wachsend und nach oben beschränkt ist, ist konvergent.

Beweis:
(x_n) ist nach oben beschränkt $\Rightarrow$ Es gibt eine Zahl $M \geq 0$, so dass $\boxed{x_n \leq M}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Nun werden Intervalle $I_1, I_2, \ldots$ konstruiert, so dass in jedem der Intervalle unendlich viele Folgenglieder x_n liegen und nur endlich viele Folgenglieder außerhalb, und dass die Intervalle eine Intervallschachtelung bilden. In der folgenden Graphik ist dies veranschaulicht, die formale Beschreibung folgt danach. In jedem Schritt wird die Intervalllänge halbiert. In I_1 liegen alle x_n, in I_2 sind alle x_n mit $n > 3$ enthalten, in I_3 ebenfalls alle x_n mit $n > 3$, in I_4 alle x_n mit $n > 6$.



Schritt 1: Alle Folgenglieder x_n liegen in dem Intervall $I_1 = \boxed{[x_1; M]}$

Schritt 2: Die Mitte des Intervalls I_1 ist durch $m_1 = \boxed{\frac{x_1 + M}{2}}$ gegeben.

Fall 1: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $x_n < m_1$.
Dann liegen alle Folgenglieder x_n im Intervall $\boxed{[x_1; m_1]}$.

Bezeichne dieses Intervall mit I_2, setze $n_1 = 1$ und fahre fort mit Schritt 3.

Fall 2: Es gibt eine Zahl n_1, so dass $x_{n_1} \geq m_1$.
Da (x_n) monoton wächst, folgt, dass dann $\boxed{x_n \geq m_1}$ für alle $n \geq n_1$ gilt.

Dann liegen alle Folgenglieder x_n mit Index $n \geq n_1$ im Intervall $\boxed{[m; M]}$.

Bezeichne dieses Intervall mit I_2 und fahre fort mit Schritt 3.

Schritt 3: Wir wissen, dass $x_n \in I_2$ für $n \geq n_1$ gilt.
Sei $I_2 = [c_2; d_2]$, und m_2 bezeichne die Mitte des Intervalls m_2.

Fall 1: Für alle $n \geq n_1$ gilt $\boxed{x_n < m_2}$

Dann liegen alle Folgenglieder x_n mit $n \geq n_1$ im Intervall $\boxed{[x_1; m_1]}$.

Bezeichne dieses Intervall mit I_3, setze $n_2 := n_1$ und fahre fort mit Schritt 4.

Fall 2: Es gibt eine Zahl n_2, so dass $\boxed{x_n \geq m_2}$ für $n \geq n_2$.

Dann liegen alle Folgenglieder x_n mit Index $n \geq n_2$ im Intervall $\boxed{[m; M]}$.

Bezeichne dieses Intervall mit I_3 und fahre fort mit Schritt 4.

So fortfahrend erhalten wir Intervalle $I_1, I_2, I_3, I_4, \ldots$.

Da sich die Intervalllänge in jedem Schritt $\boxed{\text{halbiert}}$,

bilden die Intervalllängen eine $\boxed{\text{Nullfolge}}$.

Außerdem gilt $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \ldots$.

Daher bilden die Intervalle $I_1, I_2, \ldots$ eine $\boxed{\text{Intervallschachtelung}}$.

Sei x die einzige reelle Zahl, die in allen Intervallen $I_1, I_2, \ldots$ enthalten ist.

Für $\varepsilon > 0$ gibt es ein k, so dass die Intervalllänge von I_k kleiner als $\boxed{\varepsilon}$ ist.

Nach Konstruktion gilt $\boxed{x_n \in I_k}$ für $n > n_k$.

Wegen $x, x_n \in I_k$ folgt $|x - x_n| < \boxed{\varepsilon}$ für $n > n_k$.

Dies beweist $\boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = x}$. □

Aufgabe 6

Gegeben ist die Folge (x_n) mit $x_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ für $n \in \mathbb{N}$

Lösung: **a)** Gib die Formel für x_{n+1} an: $x_{n+1} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}$

b) Berechne die Differenz: $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{(n+1)!}$

c) Trage ein: „J“ für Ja, „N“ für Nein.

(x_n) ist monoton wachsend	(x_n) ist monoton fallend
J	N

d) Gib eine obere Schranke M für (x_n) an, d.h. eine Zahl M, so dass $x_n \le M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. $M = 3$

Um M zu finden, verwende die folgende Abschätzung.

$$\begin{aligned} x_n &= 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2\cdot 1} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}}_{\le\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} \\ &\le 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) \\ &\overset{(*)}{\le} 1 + 2 = 3 \end{aligned}$$

Hauptsatz über monotone Folgen $\Rightarrow$ (x_n) ist konvergent.