Iteration und Konvergenz

zum Selbstlernen

Vorwort

Dies ist ein Skript zum Selbststudium. Du kannst hier Grundlagen zum Thema *Iteration und Konvergenz* kennenlernen.

Der Text ist im Wesentlichen der Mitschrieb aus einem Online-Kurs *Iteration und Konvergenz* im Schülerseminar für Klasse 8-10. Du findest diesen und andere Kurse auf der Seite

`https://pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/iadm/Zirkel/material-Schuelerseminar/`

Falls Du beim Studium des vorliegenden Textes Fragen hast, kannst Du beim Online-Kurs im entsprechenden Video nachsehen, dort gibt es ausführlichere Erklärungen. Um die Verbindung zu finden, ist am Rand des Textes markiert, wann die einzelnen Einheiten des Online-Kurses beginnen.

Die Aufgaben sind meistens dieselben wie im Online-Kurs. Im Lerntext sind keine Lösungen dabei, damit Du sie selber lösen kannst. Bei den Aufgaben ist oft Platz, um Deine Lösungen aufzuschreiben. Manchmal musst Du aber auch ein extra Blatt für die Berechnungen dazunehmen. Falls Du Deine Lösungen überprüfen willst, stehen alle Aufgaben mit Lösungen im letzten Kapitel dieses Skripts.

Ich wünsche Dir viel Spaß beim Durcharbeiten des Skripts und bei den Aufgaben!

13. März 2025 Peter Lesky

Inhalt

Auf den nächsten Seiten findest Du das Skript mit Aufgaben zur fünften Einheit *Intervallschachtelung*. Die weiteren Teile werden bei den entsprechenden Einheiten veröffentlicht.

Diese Einheit startet mit einer Aufgabe.

Beginn Online-Einheit 5

Aufgabe 1
Kreuze jeweils an, ob die gegebene Zahl rational oder irrational ist.

	rational	irrational
$\sqrt{3}$		
$\sqrt{9}$		
$\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$		
$10 \cdot \sqrt{3}$		
$0{,}175846834$		
$1234{,}\overline{56789876}$		
$0{,}101010\ldots$ (abwechselnd 1 und 0)		
$4{,}31311311131111\ldots$ (nach der k-ten 3 kommen k Einsen)		
π		
$\pi - 3{,}141$		
$\frac{a}{b}$ mit $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$		
Zahl mit endlich vielen Nachkommastellen		
Zahl mit unendlich vielen Nachkommastellen, die sich periodisch wiederholen		

7 Intervallschachtelung

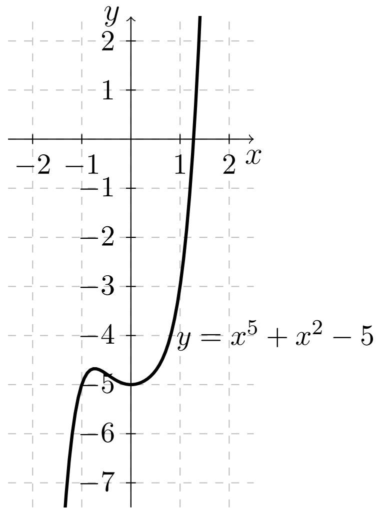
Definition: Sei $a \leq b$. Das abgeschlossene Intervall $[a;b]$ besteht aus allen Zahlen x, für die $a \leq x \leq b$ gilt. Die Differenz $b - a$ heißt Länge des Intervalls.

In der folgenden Aufgabe kannst Du sehen, wie man Intervalle benützt, um eine gesuchte (eventuell irrationale) Zahl immer genauer zu bestimmen. In die Kästchen sollen Zahlen eingetragen werden.

Weiter auf nächster Seite

Aufgabe 2

Die Nullstelle des Polynoms p mit $p(x) = x^5 + x^2 - 5$ soll bestimmt werden. Leider gibt es für solche Polynome keine allgemein gültigen Lösungsformeln, so wie z.B. für quadratische Polynome. An der Skizze des Graphen rechts sieht man, dass p eine Nullstelle im Intervall $[a_1; b_1] := [1; 2]$ besitzt (Das Intervall $[1; 2]$ besteht aus allen Zahlen x mit $1 \leq x \leq 2$). Diese Nullstelle soll nun näherungsweise berechnet werden. Dazu wird das Intervallhalbierungsverfahren mit dem Startintervall $[a_1; b_1]$ benützt. Trage die Zahlen, die Du in den Teilaufgaben erhältst, in die Tabelle ein (auf drei Nachkommastellen gerundet).



a) Rechne nach, dass $p(a_1) < 0$ und $p(b_1) > 0$ gilt. Da die Funktion keine Sprünge macht, muss im Intervall $[a_1; b_1]$ mindestens eine Nullstelle x_0 mit $p(x_0) = 0$ enthalten sein.

$p(a_1) = \boxed{}$ $\quad$ $p(b_1) = \boxed{}$

b) Sei $m_1 := \dfrac{a_1 + b_1}{2} = 1{,}5$. Berechne $p(m_1)$. $\quad p(m_1) = \boxed{}$

In welchem der Intervalle $[a_1; m_1]$ oder $[m_1; b_1]$ liegt die Nullstelle?

Antwort: Im Intervall $\left[\boxed{}\,;\,\boxed{}\right] = [a_2; b_2]$.

Hierdurch werden a_2 und b_2 definiert. Trage a_2, b_2 unten in die Tabelle ein.

c) Sei $m_2 := \dfrac{a_2 + b_2}{2}$. Berechne $p(m_2)$ und trage m_2 und $p(m_2)$ unten in die Tabelle ein.

In welchem der Intervalle $[a_2; m_2]$ oder $[m_2; b_2]$ liegt die Nullstelle?

Antwort: Im Intervall $\left[\boxed{}\,;\,\boxed{}\right] = [a_3; b_3]$.

Trage a_3, b_3 unten in die Tabelle ein.

d) Fahre entsprechend fort und berechne $a_4, b_4, \ldots$ (drei Nachkommastellen).

$n =$	1	2	3	4	5	6	7
$a_n =$	1,000						
$b_n =$	2,000						
$m_n =$	1,500						
$p(m_n) =$							
$b_n - a_n =$	1,000						

e) Gib ein Intervall möglichst kleiner Länge an, in dem die gesuchte Nullstelle liegt.

Antwort: Im Intervall $\left[\boxed{}\,;\,\boxed{}\right]$.

Die gesuchte Nullstelle liegt in den Intervallen, die durch a_n und b_n begrenzt werden. Welche Eigenschaften haben die Werte a_n, welche Eigenschaften haben die Werte b_n?

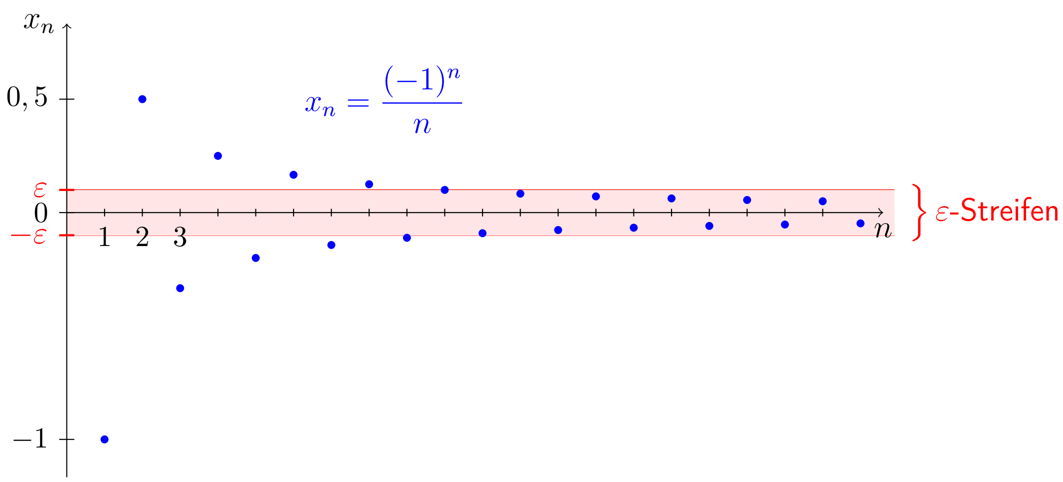
a_n wird immer größer, ist also monoton wachsend, b_n wird immer kleiner, ist also monoton fallend, und die Differenz $b_n - a_n$ wird in jedem Schritt halbiert, wird also immer kleiner. Noch genauer: Sie wird kleiner als jede noch so kleine positive Zahl. Für die letzte dieser drei Eigenschaften definieren wir einen Begriff.

Definition: Eine Folge (x_n) heißt Nullfolge, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$|x_n| \; < \; \varepsilon \quad \text{für alle } n > n_0.$$

D.h: Egal, wie klein $\varepsilon > 0$ gewählt wird, ab einem geeigneten n_0 ist $|x_n|$ für alle $n > n_0$ noch kleiner als ε.

Diese Definition kann man gut mit einem sogenannten ε-Streifen verdeutlichen.



Ab $n = 11$ liegen alle Punkte im skizzierten ε-Streifen. Das bedeutet, man kann $n_0 = 10$ wählen. Dann gilt $|x_n| < \varepsilon$ für alle $n > n_0$. Man kann aber auch $n_0 = 100$ oder $n_0 = 1\,000$ wählen. In der Definition wird nur gefordert, dass es ein n_0 gibt. Sobald man ein n_0 gefunden hat, ist man fertig, man muss nicht das kleinstmögliche n_0 bestimmen.

Anschaulich: Eine Folge (x_n) ist eine Nullfolge, wenn es zu jedem noch so schmalen ε-Streifen eine Zahl n_0 gibt, so dass für alle $n > n_0$ die Folgenglieder im ε-Streifen liegen.

Aufgabe 3

Gegeben ist die Folge $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$. Behauptung: (x_n) ist eine Nullfolge.

a) Wie ist $n_0 \in \mathbb{N}$ zu wählen, dass $|x_n| < \dfrac{1}{1\,000}$ für $n > n_0$ gilt? $\quad n_0 \;\geq$ ☐

b) Wie ist $n_0 \in \mathbb{N}$ zu wählen, dass $|x_n| < \dfrac{1}{100\,000}$ für $n > n_0$ gilt? $\quad n_0 \;\geq$ ☐

c) Es sei ein beliebiges $\varepsilon > 0$ fest vorgegeben.
Wie ist $n_0 \in \mathbb{N}$ zu wählen, dass $|x_n| < \varepsilon$ für $n > n_0$ gilt? $\quad n_0 \;\geq$ ☐

Für die Lösung der nächsten Aufgabe ist die folgende Überlegung nützlich.

$$\text{Sind } a, b, c > 0 \text{ und gilt } \frac{1}{a} < c, \text{ dann folgt } \frac{1}{a+b} < c \quad \left(\text{wegen } \frac{1}{a+b} < \frac{1}{a}\right).$$

Aufgabe 4

Die Folge (x_n) ist gegeben durch $x_n = \dfrac{1}{2+\sqrt{n}}$. Behauptung: (x_n) ist eine Nullfolge. Dies soll hier bewiesen werden.

a) Gib ein n_0 an, so dass $|x_n| < 0,01$ für $n > n_0$ gilt: $n_0 = \boxed{}$

b) Gib ein n_0 an, so dass $|x_n| < 0,0001$ für $n > n_0$ gilt: $n_0 = \boxed{}$

c) Es sei ein beliebiges $\varepsilon > 0$ fest vorgegeben.
Wie ist $n_0 \in \mathbb{N}$ zu wählen, dass $|x_n| < \varepsilon$ für $n > n_0$ gilt? $n_0 \geq \boxed{}$

Hinweis: Es ist nicht notwendig, das kleinstmögliche n_0 anzugeben.

Aufgabe 5

Untersuche, ob die angegebene Folge eine Nullfolge ist. Begründe Deine Antwort. Das heißt, im Fall einer Nullfolge ist für beliebig vorgegebenes $\varepsilon > 0$ anzugeben, wie $n_0 \in \mathbb{N}$ zu wählen ist, dass $|x_n| < \varepsilon$ für alle $n > n_0$ gilt. Im anderen Fall ist anzugeben, warum die Definition einer Nullfolge nicht erfüllt ist.

a) (x_n) mit $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = 0$, $x_5 = \frac{1}{3}$, $\ldots$, oder allgemein

$$x_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \dfrac{2}{n+1} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

b) (x_n) mit $x_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

c) (x_n) mit $x_n = 2 + \dfrac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$,

d) (x_n) mit $x_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 2 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$

e) (x_n) mit $x_n = \dfrac{1}{n^2+1}$.

Definition: Die Intervalle $I_1 = [a_1; a_2],\ I_2 = [a_2; b_2], \ldots$ mit $a_n \leq b_n$ bilden eine Intervallschachtelung, falls

1) $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots$ d.h. die Folge (a_n) ist monoton wachsend, und
2) $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \ldots$ d.h. die Folge (b_n) ist monoton fallend, und
3) die Folge der Differenzen $(b_n - a_n)$ ist eine Nullfolge.

Es gilt also $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ und $[a_{n+1}; b_{n+1}] \subseteq [a_n; b_n]$. Jedes Intervall liegt im vorherigen drin, die Intervalle sind geschachtelt. Und die Längen der Intervalle $b_n - a_n$ bilden eine Nullfolge.

Aufgabe 6
Überprüfe, ob die Definition einer Intervallschachtelung erfüllt ist. Trage „J" für Ja und „N" für Nein ein.

Def. (a_n)	Def. (b_n)	(a_n) mon. wachsend	(b_n) mon. fallend	$(b_n - a_n)$ ist Nullfolge	$I_n = [a_n, b_n]$ ist Intervallschachtelung
$a_n = 2$	$b_n = 3$				
$a_n = 4$	$b_n = 4 + \frac{1}{n}$				
$a_n = 2 - \frac{1}{n}$	$b_n = 2 + \frac{1}{n}$				
$a_n = \frac{1}{2n}$	$b_n = \frac{1}{n}$				

Satz: Bilden $I_1 = [a_1; b_1], I_2 = [a_2; b_2], \ldots$ eine Intervallschachtelung, dann gibt es höchstens eine Zahl x, die in allen Intervallen enthalten ist.

Widerspruchsbeweis:
1) Ich formuliere die Behauptung.
2) Ich formuliere die Annahme, das Gegenteil der Behauptung sei wahr.
3) Ich ziehe Folgerungen aus der Annahme und führe die Folgerungen zu einem Widerspruch.
4) Ich schließe, dass die Annahme widerlegt und dadurch die Behauptung bewiesen ist.

Beweis: 1) Behauptung: Es gibt höchstens eine Zahl x, die in allen Intervallen enthalten ist.

2) Annahme: Es gibt mindestens zwei verschiedene Zahlen x_1, x_2, die in allen Intervallen I_n enthalten sind.

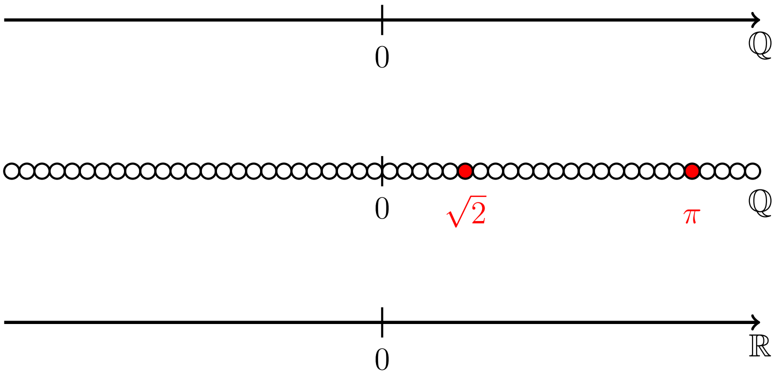
3) Wähle die Bezeichnung der Zahlen so, dass $x_1 < x_2$ gilt.
$a_n \leq x_1$ und $x_2 \leq b_n \Rightarrow -x_1 \leq -a_n$ und $x_2 \leq b_n$
$\Rightarrow x_2 - x_1 \leq b_n - a_n$ für $n \in \mathbb{N}$
Wähle $\varepsilon := x_2 - x_1 > 0$
$(b_n - a_n)$ ist Nullfolge $\Rightarrow b_n - a_n < \varepsilon = x_2 - x_1$ für $n > n_0$
$\Rightarrow$ Für $n > n_0$ gilt $x_2 - x_1 < x_2 - x_1$ ↯

4) Also war die Annahme falsch.
Somit gibt es höchstens eine Zahl x, die in allen Intervallen enthalten ist. □

Es kann aber sein, dass es keine **rationale** Zahl gibt, die in allen Intervallen enthalten ist. Man kann z.B. eine Intervallschachtelung konstruieren, die als einzige Zahl die irrationale Zahl $x = \sqrt{2}$ enthält. Aber für jede Intervallschachtelung gibt es eine **reelle** Zahl, die in allen Intervallen enthalten ist.

Grundeigenschaft der reellen Zahlen: Jede Intervallschachtelung $[a_1; b_1], [a_2; b_2], \ldots$ zieht sich auf genau eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ zusammen. D.h. es gibt genau eine reelle Zahl x, die in allen Intervallen enthalten ist: $x \in [a_n; b_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Man sagt: Die reellen Zahlen sind vollständig.

Anschaulich: Der reelle Zahlenstrahl hat keine Lücken.



Wenn man alle rationalen Zahlen auf dem Zahlenstrahl einzeichnet, so sieht man keine Lücken.

Sieht man „genauer" hin, dann erkennt man, dass zwischen den rationalen Zahlen ganz viele Lücken sind.

Die reellen Zahlen füllen den Zahlenstrahl komplett aus, es gibt keine Lücken mehr.

Dass die reellen Zahlen den Zahlenstrahl komplett ausfüllen, sieht man folgendermaßen: Wählt man irgendeinen Punkt des Zahlenstrahls aus, dann kann man eine Intervallschachtelung konstruieren, die sich auf genau diesen Punkt zusammenzieht. Und nach der Grundeigenschaft ist dies eine reelle Zahl.

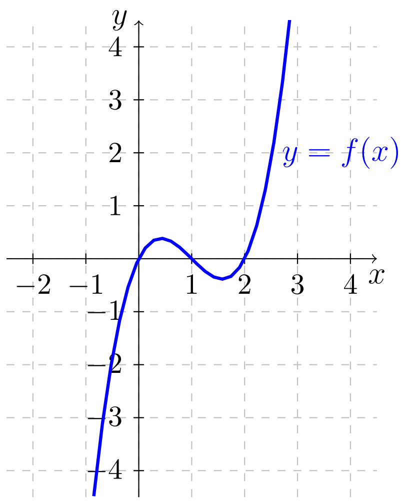
Man kann eine Intervallschachtelung auch auf andere Art und Weise konstruieren: Wir teilen das Intervall, in dem das gesuchte x liegt, in 10 Teilintervalle und wählen dasjenige aus, in dem x liegt. Dabei müssen wir in jedem Schritt mehr rechnen als in der ersten Aufgabe. Aber wir gewinnen in jedem Schritt eine Nachkommastelle, und dadurch ist das Verfahren übersichtlicher. Dies ergibt dann eine Intervallschachtelung für x.

Beispiel:

Gegeben: $f(x) = x(x-1)(x-2)$
Gesucht: Für welches x_0 gilt $f(x_0) = 1$?

Wertetabelle:

x	-1	0	1	2	3	$-0{,}5$	2,5
$f(x)$	-6	0	0	0	6	$-1{,}9$	1,9



Nun soll x_0 bis auf drei Nachkommastellen berechnet werden:

Schritt 1: $f(2) = 0,\ f(3) = 6$ $\Rightarrow a_1 = 2 < x_0 < 3 = b_1$

Schritt 2:

x	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4
$f(x)$	0	0,231	0,528	0,897	1,344

$\Rightarrow a_2 = 2{,}3 < x_0 < 2{,}4 = b_2$

Schritt 3:

x	2,30	2,31	2,32	2,33
$f(x)$	0,897	0,938	0,98	1,023

$\Rightarrow a_3 = 2{,}32 < x_0 < 2{,}33 = b_3$

Schritt 4:

x	2,320	2,321	2,322	2,323	2,324	2,325
$f(x)$	0,98	0,984	0,988	0,993	0,997	1,001

$\Rightarrow a_4 = 2{,}324 < x_0 < 2{,}325 = b_4$

Aufgabe 7

Bestimme $\sqrt[4]{3}$ bis auf drei Nachkommastellen genau. Dazu sei $f(x) = x^4$. Gesucht ist die Stelle x_0 mit $f(x_0) = 3$. Gehe wie auf der vorigen Seite beschrieben vor.

Schritt 1:

$f(1) = \boxed{}$ $f(2) = \boxed{}$ $\Rightarrow a_1 = \boxed{} < x_0 < \boxed{} = b_1$

Schritt 2:

x										
$f(x)$										

$\Rightarrow a_2 = \boxed{} < x_0 < \boxed{} = b_2$

Schritt 3:

x										
$f(x)$										

$\Rightarrow a_3 = \boxed{} < x_0 < \boxed{} = b_3$

Schritt 4:

x										
$f(x)$										

$\Rightarrow a_4 = \boxed{} < x_0 < \boxed{} = b_4$

Lösungen der Aufgaben

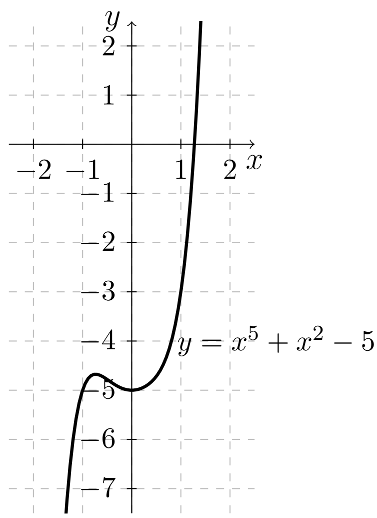
Aufgabe 1

Kreuze jeweils an, ob die gegebene Zahl rational oder irrational ist.

	rational	irrational
$\sqrt{3}$		×
$\sqrt{9}$	×	
$\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$	×	
$10 \cdot \sqrt{3}$		×
$0{,}175846834$	×	
$1234{,}\overline{56789876}$	×	
$0{,}101010\ldots$ (abwechselnd 1 und 0)	×	
$4{,}31311311131111\ldots$ (nach der k-ten 3 kommen k Einsen)		×
π		×
$\pi - 3{,}141$		×
$\frac{a}{b}$ mit $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$	×	
Zahl mit endlich vielen Nachkommastellen	×	
Zahl mit unendlich vielen Nachkommastellen, die sich periodisch wiederholen	×	

Aufgabe 2

Die Nullstelle des Polynoms p mit $p(x) = x^5 + x^2 - 5$ soll bestimmt werden. Leider gibt es für solche Polynome keine allgemein gültigen Lösungsformeln, so wie z.B. für quadratische Polynome. An der Skizze des Graphen rechts sieht man, dass p eine Nullstelle im Intervall $[a_1; b_1] := [1; 2]$ besitzt (Das Intervall $[1; 2]$ besteht aus allen Zahlen x mit $1 \leq x \leq 2$). Diese Nullstelle soll nun näherungsweise berechnet werden. Dazu wird das Intervallhalbierungsverfahren mit dem Startintervall $[a_1; b_1]$ benützt. Trage die Zahlen, die Du in den Teilaufgaben erhältst, in die Tabelle ein (auf drei Nachkommastellen gerundet).



a) Rechne nach, dass $p(a_1) < 0$ und $p(b_1) > 0$ gilt. Da die Funktion keine Sprünge macht, muss im Intervall $[a_1; b_1]$ mindestens eine Nullstelle x_0 mit $p(x_0) = 0$ enthalten sein.

$$p(a_1) = \boxed{-3} \qquad p(b_1) = \boxed{31}$$

b) Sei $m_1 := \dfrac{a_1 + b_1}{2} = 1{,}5$. Berechne $p(m_1)$. $p(m_1) = \boxed{4{,}84}$

In welchem der Intervalle $[a_1; m_1]$ oder $[m_1; b_1]$ liegt die Nullstelle?

Antwort: Im Intervall $\left[\boxed{1}\,;\,\boxed{1{,}5}\right] = [a_2; b_2]$.

Hierdurch werden a_2 und b_2 definiert. Trage a_2, b_2 unten in die Tabelle ein.

c) Sei $m_2 := \dfrac{a_2 + b_2}{2}$. Berechne $p(m_2)$ und trage m_2 und $p(m_2)$ unten in die Tabelle ein.

In welchem der Intervalle $[a_2; m_2]$ oder $[m_2; b_2]$ liegt die Nullstelle?

Antwort: Im Intervall $\left[\boxed{1{,}25}\,;\,\boxed{1{,}5}\right] = [a_3; b_3]$.

Trage a_3, b_3 unten in die Tabelle ein.

d) Fahre entsprechend fort und berechne $a_4, b_4, \ldots$ (drei Nachkommastellen).

$n =$	1	2	3	4	5	6	7
$a_n =$	1,000	1,000	1,250	1,250	1,250	1,250	1,266
$b_n =$	2,000	1,500	1,500	1,375	1,313	1,281	1,281
$m_n =$	1,500	1,250	1,375	1,313	1,281	1,266	1,273
$p(m_n) =$	4,84	−0,39	1,81	0,62	0,09	−0,15	−0,03
$b_n - a_n =$	1,000	0,500	0,250	0,125	0,063	0,031	0,0016

e) Gib ein Intervall möglichst kleiner Länge an, in dem die gesuchte Nullstelle liegt.

Antwort: Im Intervall $\left[\boxed{1{,}273}\,;\,\boxed{1{,}277}\right]$.

Aufgabe 3

Gegeben ist die Folge $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$. Behauptung: (x_n) ist eine Nullfolge.

a) Wie ist $n_0 \in \mathbb{N}$ zu wählen, dass $|x_n| < \dfrac{1}{1\,000}$ für $n > n_0$ gilt? $n_0 \geq \boxed{}$

b) Wie ist $n_0 \in \mathbb{N}$ zu wählen, dass $|x_n| < \dfrac{1}{100\,000}$ für $n > n_0$ gilt? $n_0 \geq \boxed{}$

c) Es sei ein beliebiges $\varepsilon > 0$ fest vorgegeben.
Wie ist $n_0 \in \mathbb{N}$ zu wählen, dass $|x_n| < \varepsilon$ für $n > n_0$ gilt? $n_0 \geq \boxed{}$

Lösung: **a)** $n_0 = 1\,000$ oder jede größere Zahl n_0.

b) $n_0 = 100\,000$ oder jede größere Zahl n_0.

c) $n_0 \geq \dfrac{1}{\varepsilon}$ oder jede größere Zahl n_0.

Aufgabe 4

Die Folge (x_n) ist gegeben durch $x_n = \dfrac{1}{2+\sqrt{n}}$. Behauptung: (x_n) ist eine Nullfolge. Dies soll hier bewiesen werden.

a) Gib ein n_0 an, so dass $|x_n| < 0,01$ für $n > n_0$ gilt: $n_0 = \boxed{}$

b) Gib ein n_0 an, so dass $|x_n| < 0,0001$ für $n > n_0$ gilt: $n_0 = \boxed{}$

c) Es sei ein beliebiges $\varepsilon > 0$ fest vorgegeben.
Wie ist $n_0 \in \mathbb{N}$ zu wählen, dass $|x_n| < \varepsilon$ für $n > n_0$ gilt? $n_0 \geq \boxed{}$

Hinweis: Es ist nicht notwendig, das kleinstmögliche n_0 anzugeben.

Lösung: **a)** Z.B. $n_0 = 10\,000$, es sind alle Angaben größer oder gleich $9604 (= 98^2)$ richtig.

b) Z.B. $n_0 = 100\,000\,000$, es sind alle Angaben größer oder gleich $99\,960\,004 (= 9998^2)$ richtig.

c) Z.B. $n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon^2}$, es sind alle Angaben größer oder gleich $\left(\frac{1}{\varepsilon} - 2\right)^2$ richtig.

Beweis (nicht verlangt): Sei $n > n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon^2}$. Dann folgt

$$|x_n| = \frac{1}{2+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \overset{n>n_0}{<} \frac{1}{\sqrt{n_0}} \overset{n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon^2}}{\leq} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}}} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon, \qquad (*)$$

also insgesamt $|x_n| < \varepsilon$.

Wie man auf den Wert für n_0 kommt: Zuerst schätzt man $|x_n|$ durch einen einfacheren Term ab, um die Rechnung zu vereinfachen (oder in anderen Beispielen erst möglich zu machen):

$$|x_n| = \frac{1}{2+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Wenn nun die rechte Seite kleiner als ε ist, dann sicher auch $|x_n|$. D.h. man versucht nun, n so groß zu wählen, dass die rechte Seite kleiner als ε wird.

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{n} < \varepsilon^2 \;\Leftrightarrow\; n > \frac{1}{\varepsilon^2}$$

Damit ist klar, dass $n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon^2}$ gewählt werden kann, denn für $n > n_0$ gilt dann $n > \frac{1}{\varepsilon^2}$. Als Beweis schreibt man nun nicht die Herleitung, sondern die Abschätzung $(*)$ auf.

Weiter auf nächster Seite

Aufgabe 5

Untersuche, ob die angegebene Folge eine Nullfolge ist. Begründe Deine Antwort. Das heißt, im Fall einer Nullfolge ist für beliebig vorgegebenes $\varepsilon > 0$ anzugeben, wie $n_0 \in \mathbb{N}$ zu wählen ist, dass $|x_n| < \varepsilon$ für alle $n > n_0$ gilt. Im anderen Fall ist anzugeben, warum die Definition einer Nullfolge nicht erfüllt ist.

a) (x_n) mit $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = 0$, $x_5 = \frac{1}{3}$, …, oder allgemein

$$x_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \dfrac{2}{n+1} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

b) (x_n) mit $x_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

c) (x_n) mit $x_n = 2 + \dfrac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$,

d) (x_n) mit $x_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 2 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$

e) (x_n) mit $x_n = \dfrac{1}{n^2+1}$.

Lösung: **a)** Diese Folge ist eine Nullfolge. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben. Es genügt, $n_0 \geq \dfrac{2}{\varepsilon}$ zu wählen. Denn für $n > n_0$ folgt dann

- Falls n gerade ist, gilt sowieso $|x_n| = 0 < \varepsilon$
- Falls n ungerade ist, gilt $|x_n| = x_n = \dfrac{2}{n+1} \leq \dfrac{2}{n} < \dfrac{2}{n_0} \leq \dfrac{2}{\frac{2}{\varepsilon}} = \varepsilon$, also $|x_n| < \varepsilon$.

b) Diese Folge ist eine Nullfolge. Hier genügt es, $n_0 = 1$ zu wählen, unabhängig von $\varepsilon > 0$. Denn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $|x_n| = 0 < \varepsilon$.

c) Diese Folge ist keine Nullfolge. Zum Nachweis genügt es, ein $\varepsilon > 0$ anzugeben, zu dem kein n_0 existiert, so dass $|x_n| < \varepsilon$ für alle $n > n_0$ gilt. Setze z.B. $\varepsilon := 1$. Dann gilt für alle n: $|x_n| = 2 + \dfrac{1}{n} \geq 2 > \varepsilon$.

d) Auch diese Folge ist keine Nullfolge. Setze $\varepsilon := 1$. Egal wie groß n_0 gewählt wird, es gibt immer ein $n > n_0$, das ungerade ist. Für dieses n folgt dann $|x_n| = 2 > \varepsilon$. Also gibt es kein n_0, so dass für <u>alle</u> $n > n_0$ die Ungleichung $|x_n| < \varepsilon$ erfüllt ist.

e) Diese Folge ist eine Nullfolge. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $n_0 \geq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Für $n > n_0$ folgt

$$|x_n| = \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2} \overset{n>n_0}{<} \frac{1}{n_0^2} \overset{n_0 \geq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}}{\leq} \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon, \text{ also } |x_n| < \varepsilon. \qquad (*)$$

Auf die richtige Wahl von n_0 kommt man folgendermaßen: Zuerst wird $|x_n|$ durch einen einfacheren Term abgeschätzt:

$$|x_n| = \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2}$$

Wenn nun die rechte Seite $< \varepsilon$ ist, dann sicher auch $|x_n|$. D.h. man versucht nun, n so groß zu wählen, dass die rechte Seite $< \varepsilon$ wird.

$$\frac{1}{n^2} < \varepsilon \overset{\text{quadrieren}}{\Leftrightarrow} \frac{1}{n} < \sqrt{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

Damit ist klar, dass $n_0 \geq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ gewählt werden kann, denn für $n > n_0$ gilt dann $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Als Beweis schreibt man nun nicht die Herleitung, sondern die Abschätzung $(*)$ auf.

Beachte, dass n_0 auch immer größer gewählt werden kann als hier angegeben. Man muss nicht das kleinst mögliche n_0 finden. Wichtig ist, dass man ein n_0 findet. Z.B. kann man in Teil e) einfacher $n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon}$ wählen. Für $n > n_0$ folgt dann

$$|x_n| = \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} \overset{n>n_0}{<} \frac{1}{n_0} \overset{n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon}}{\leq} \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon, \text{ also } |x_n| < \varepsilon.$$

Bei solchen Aufgaben kann es wichtig sein, dass man $|x_n|$ geeignet durch einen einfachen Term abschätzt, um dann n_0 in Abhängigkeit von ε gut berechnen zu können.

Aufgabe 6

Überprüfe, ob die Definition einer Intervallschachtelung erfüllt ist. Trage „J" für Ja und „N" für Nein ein.

Def. (a_n)	Def. (b_n)	(a_n) mon. wachsend	(b_n) mon. fallend	$(b_n - a_n)$ ist Nullfolge	$I_n = [a_n, b_n]$ ist Intervallschachtelung
$a_n = 2$	$b_n = 3$	J	J	N	N
$a_n = 4$	$b_n = 4 + \frac{1}{n}$	J	J	J	J
$a_n = 2 - \frac{1}{n}$	$b_n = 2 + \frac{1}{n}$	J	J	J	J
$a_n = \frac{1}{2n}$	$b_n = \frac{1}{n}$	N	J	J	N

Aufgabe 7

Bestimme $\sqrt[4]{3}$ bis auf drei Nachkommastellen genau. Dazu sei $f(x) = x^4$. Gesucht ist die Stelle x_0 mit $f(x_0) = 3$. Gehe wie auf der vorigen Seite beschrieben vor.

Schritt 1:

$f(1) = \boxed{1}$ $\quad f(2) = \boxed{8}$ $\quad \Rightarrow a_1 = \boxed{1} < x_0 < \boxed{2} = b_1$

Schritt 2:

x	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
$f(x)$	1,00	1,46	2,07	2,86	3,84					

$\Rightarrow a_2 = \boxed{1{,}3} < x_0 < \boxed{1{,}4} = b_2$

Schritt 3:

x	1,30	1,31	1,32							
$f(x)$	2,86	2,94	3,04							

$$\Rightarrow \; a_3 = \boxed{1{,}31} < x_0 < \boxed{1{,}32} = b_3$$

Schritt 4:

x	1,310	1,311	1,312	1,313	1,314	1,315	1,316	1,317		
$f(x)$	2,94	2,95	2,96	2,97	2,98	2,99	2,999	3,01		

$$\Rightarrow \; a_4 = \boxed{1{,}316} < x_0 < \boxed{1{,}317} = b_4$$