

Iteration und Konvergenz

zum Selbstlernen

Vorwort

Dies ist ein Skript zum Selbststudium. Du kannst hier Grundlagen zum Thema *Iteration und Konvergenz* kennenlernen.

Der Text ist im Wesentlichen der Mitschrieb aus einem Online-Kurs *Iteration und Konvergenz* im Schülerseminar für Klasse 8-10. Du findest diesen und andere Kurse auf der Seite

<https://pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/iadm/Zirkel/material-Schuelerseminar/>

Falls Du beim Studium des vorliegenden Textes Fragen hast, kannst Du beim Online-Kurs im entsprechenden Video nachsehen, dort gibt es ausführlichere Erklärungen. Um die Verbindung zu finden, ist am Rand des Textes markiert, wann die einzelnen Einheiten des Online-Kurses beginnen.

Die Aufgaben sind auch dieselben wie im Online-Kurs. Im Lerntext sind keine Lösungen dabei, damit Du sie selber lösen kannst. Bei den Aufgaben ist oft Platz, um Deine Lösungen aufzuschreiben. Manchmal musst Du aber auch ein extra Blatt für die Berechnungen dazunehmen. Falls Du Deine Lösungen überprüfen willst, stehen alle Aufgaben mit Lösungen im letzten Kapitel dieses Skripts.

Ich wünsche Dir viel Spaß beim Durcharbeiten des Skripts und bei den Aufgaben!

30. Januar 2025

Peter Lesky

Inhalt

Auf den nächsten Seiten findest Du das Skript mit Aufgaben zur zweiten Einheit *Achilles und die Schildkröte*. Die weiteren Teile werden bei den entsprechenden Einheiten veröffentlicht.

Copyright: © Schülerzirkel Mathematik, Universität Stuttgart, 2025



Dieses Dokument steht unter der der Creative Commons Lizenz **BY NC SA**,
siehe <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/legalcode>

2 Achilles und die Schildkröte

Diese Einheit startet mit einer Aufgabe.

Aufgabe 1

Gegeben ist eine Zahlenfolge a_1, a_2, a_3, \dots durch die Rekursionsformel

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + 9}{10} \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \dots$$

- Bestimme die Folgenglieder a_n für $n = 2, \dots, 6$.
- Kannst Du eine allgemeine Formel für das n -te Folgenglied a_n angeben?

Definition: Die Formel

$$a_1 = 0 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = \frac{a_n + 9}{10} \quad \text{für } n = 1, 2, \dots$$

heißt rekursive Darstellung der Folge (a_n) , die Formel

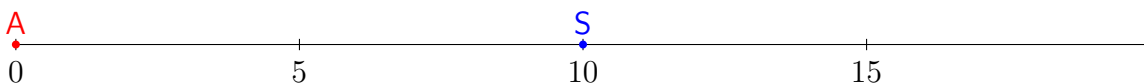
$$a_n = 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} \quad \text{für } n = 1, 2, \dots$$

heißt explizite Darstellung der Folge (a_n) .

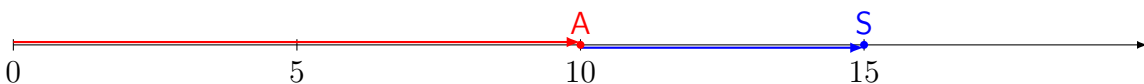
Der griechische Philosoph Zenon erzählte im 5. Jahrhundert vor Christus eine Geschichte über den Wettlauf des Achilles mit einer Schildkröte. Achilles ist eine Sagengestalt und war damals bekannt für seine Schnelligkeit. So eine Art Superman der Antike. Zenon schlägt vor, der Schildkröte 10m Vorsprung zu geben, da sie ja viel langsamer ist. Und dann behauptet er, dass Achilles die Schildkröte nie einholen wird.

Du glaubst das nicht? Hier kommt sein Beweis. Stell Dir vor, Achilles läuft doppelt so schnell wie die Schildkröte. Und stell Dir vor, dass er die ersten 10m gelaufen ist. Aber inzwischen ist die Schildkröte bereits 5m weiter. Wenn Achilles diese 5m gelaufen ist, dann ist die Schildkröte bereits wieder weiter.

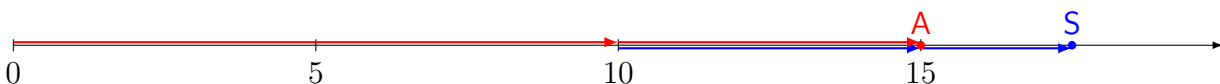
Zu Beginn hat die Schildkröte 10m Vorsprung vor Achilles.



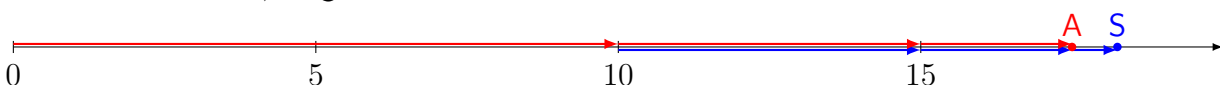
Nun ist Achilles 10m gelaufen, die Schildkröte hat 5m Vorsprung.



Achilles ist weitere 5m gelaufen.



Achilles ist weitere 2,5m gelaufen.



Achilles bleibt immer hinter der Schildkröte, egal wie oft wir diese Überlegung wiederholen.

So eine Geschichte, die unserer Vorstellung widerspricht, heißt *Paradoxon*. Wir beschäftigen uns nun mit diesem Paradoxon und rechnen nach, was hier passiert.

In der nächsten Aufgabe kannst Du nachrechnen, wie weit Achilles bei den nächsten Messstops kommt.

Aufgabe 2

Achilles startet bei 0 m, die Schildkröte bei 10 m. Achilles läuft 10 m bis zum ersten Messstopp. Inzwischen ist die Schildkröte 5 m gelaufen. Dann läuft Achilles 5 m weiter bis zum zweiten Messstopp, die Schildkröte läuft zugleich 2,5 m usw.

$s_n =$	Zurückgelegter Weg des Achilles beim n -ten Messstopp in Metern	$d_n =$	Abstand zwischen der Schildkröte und Achilles beim n -ten Messstopp in Metern
$s_0 =$	0	$d_0 =$	10
$s_1 =$	10	$d_1 =$	5
$s_2 =$		$d_2 =$	
$s_3 =$		$d_3 =$	
$s_4 =$		$d_4 =$	
$s_5 =$		$d_5 =$	
$s_6 =$		$d_6 =$	
$s_7 =$		$d_7 =$	
$s_8 =$		$d_8 =$	
$s_9 =$		$d_9 =$	
$s_{10} =$		$d_{10} =$	

Aufgabe 3

a) Gib Formeln an, wie d_{n+1} aus d_n und s_{n+1} aus d_n und s_n berechnet werden können.

$$d_{n+1} = \boxed{} \quad s_{n+1} = \boxed{}$$

b) Finde eine Formel, mit der d_n direkt berechnet werden kann.

$$d_n = \boxed{}.$$

Für den Weg des Achilles bis zum n -ten Messstopp gilt

$$s_1 = 10 \quad \text{und} \quad s_{n+1} = s_n + \frac{10}{2^n}.$$

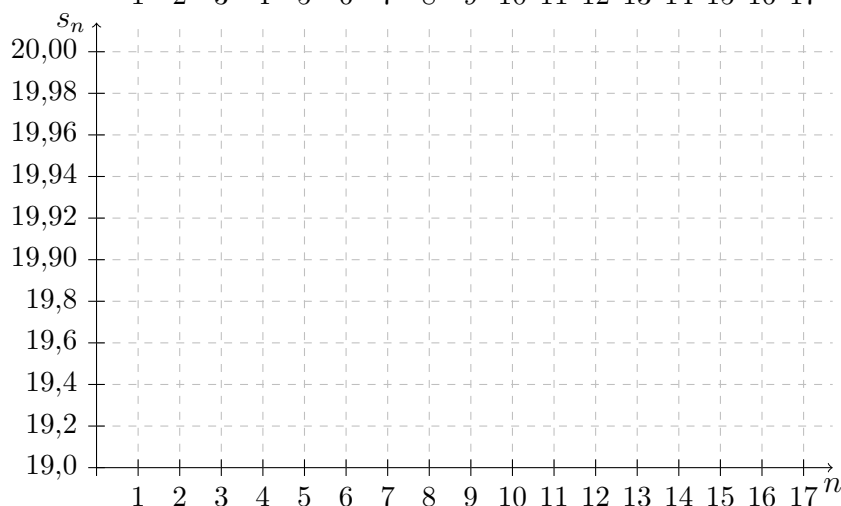
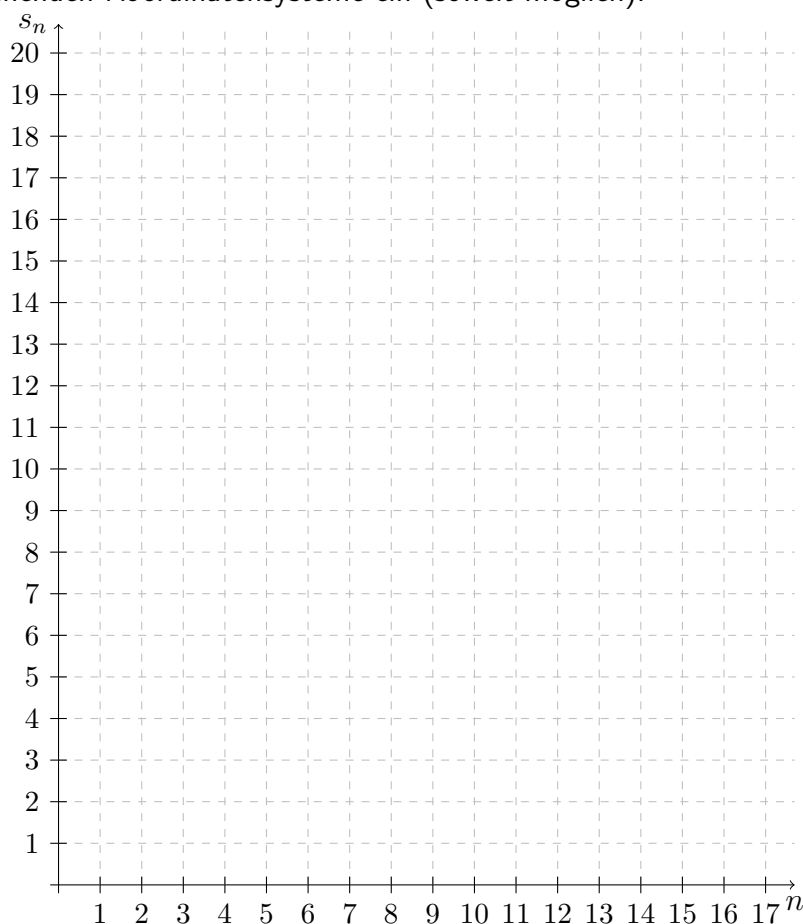
Dies bedeutet

$$s_{n+1} = 10 + \frac{10}{2} + \frac{10}{2^2} + \dots + \frac{10}{2^n}.$$

Erklärung der Formel: s_{n+1} ist der Weg zum ersten Messstopp plus der Weg zwischen dem ersten und zweiten Messstopp usw. Diese Formel wird später benötigt.

Aufgabe 4

Trage die errechneten Werte aus der Tabelle für den Weg des Achilles beim n -ten Messstopp in die untenstehenden Koordinatensysteme ein (soweit möglich).



- Vermutungen: 1) s_n erreicht nicht 20,
 2) s_n kommt mit wachsendem n beliebig nahe an 20 dran.

Diese zwei Aussagen sollen nun mathematisch beschrieben werden.

Zu 1): $s_n < 20$ für $n \in \mathbb{N}$ bedeutet, dass s_n nicht 20 erreicht.

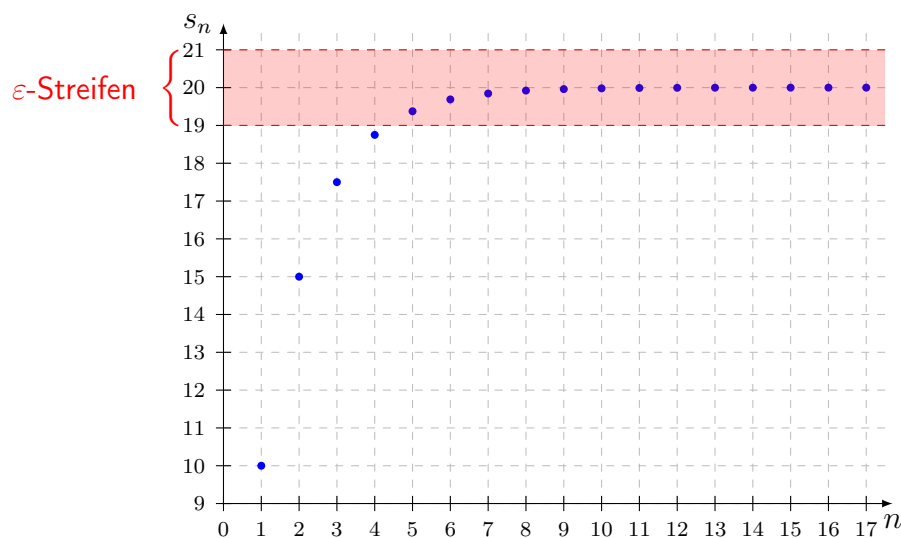
zu 2): Die Differenz $|20 - s_n|$ wird kleiner als jede noch so kleine positive Zahl. Dies formuliert man folgendermaßen:

Zu jeder noch so kleinen Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es einen Index n_0 ,
 so dass $|20 - s_n| < \varepsilon$ für alle $n > n_0$ gilt.

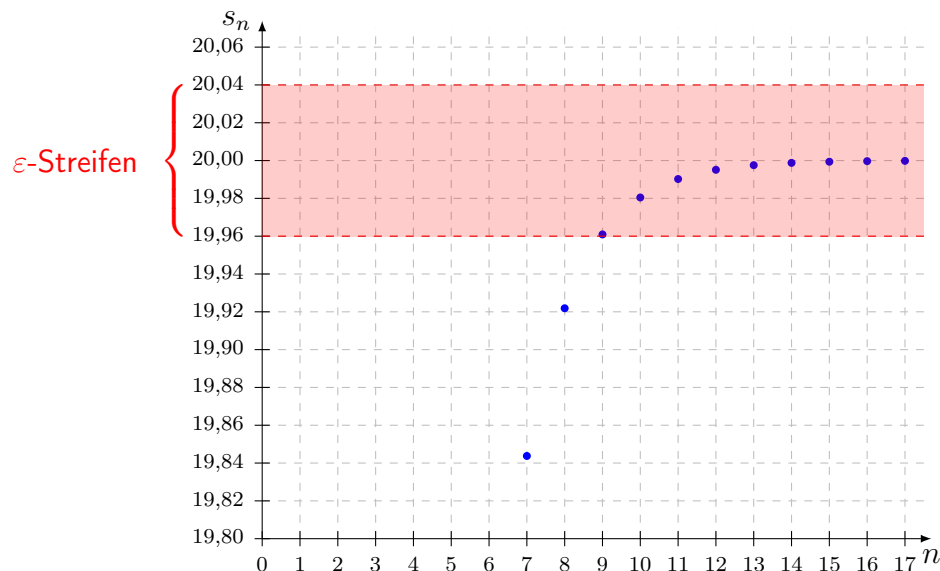
In dieser Aussage steckt noch mehr drin, nämlich dass $|20 - s_n|$ sogar dauerhaft kleiner als ε bleibt.

Man veranschaulicht dies in einem sogenannten ε -Streifen. Dazu zeichnet man in der Graphik der letzten Aufgabe einen Streifen ein, der von $y = 20 - \varepsilon$ bis $y = 20 + \varepsilon$ reicht. Dann müssen ab einem Index n_0 alle eingezeichneten Punkte in diesem Streifen liegen, egal wie klein $\varepsilon > 0$ ist.

Für $\varepsilon = 1$:



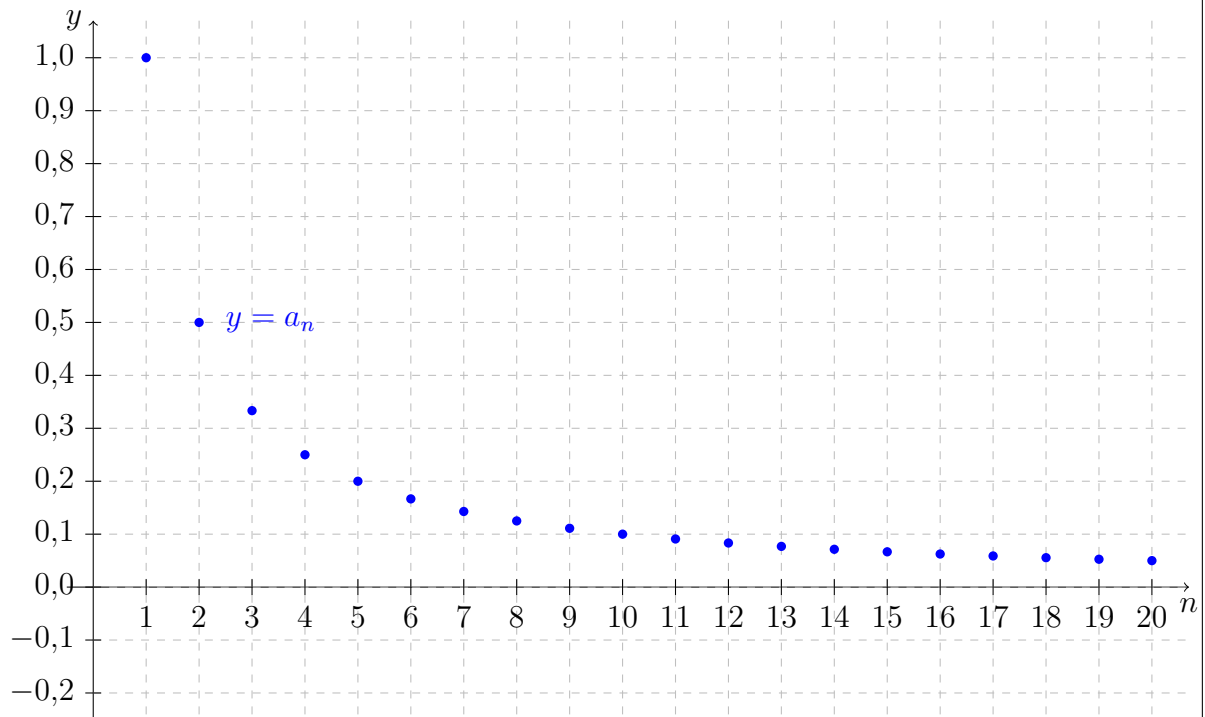
Für $\varepsilon = 0,04$:



Aufgabe 5

Gegeben ist die Folge (a_n) mit $a_n = \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Die Werte von a_n kommen der Zahl Null beliebig nahe. Dies wollen wir mathematisch beschreiben bzw. nachrechnen.

- a) Zeichne in der Graphik den ε -Streifen für $\varepsilon = \frac{1}{10}$ ein und ermittle zeichnerisch, ab welchem n alle a_n im ε -Streifen liegen.



- b) Ermittle rechnerisch, wie groß n sein muss, damit $0 < a_n < \frac{1}{2000}$ gilt.
- c) Sei nun eine beliebig kleine Zahl $\varepsilon > 0$ gegeben. Ermittle rechnerisch eine Zahl n_0 in Abhängigkeit von ε , so dass

$$0 < a_n < \varepsilon \quad \text{für } n > n_0$$

gilt. Dabei muss n_0 keine ganze Zahl sein.

Um zu beweisen, dass $|20 - s_n| < \varepsilon$ wird und bleibt, benötigen wir eine explizite Formel für s_n , die wir hier herleiten. Dazu verwenden wir die Formel für s_{n+1} von Seite 13 und eine tolle Methode zur Bestimmung von Summen. Durch geschickte Subtraktion einer Gleichung von einer anderen heben sich viele Summanden weg.

Satz (geometrische Summe): Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $s_{n+1} = 20 - \frac{10}{2^n}$.

Beweis:
$$s_{n+1} = 10 + \frac{10}{2} + \frac{10}{4} + \dots + \frac{10}{2^{n-1}} + \frac{10}{2^n} \quad | \cdot 2$$

$$\Rightarrow 2s_{n+1} = \begin{array}{ccccccc} & & \swarrow & \swarrow & \swarrow & & \\ & & 10 & + & 10 & + & \dots & + & \frac{10}{2^{n-1}} & + & \frac{10}{2^n} \\ & & \swarrow & \swarrow & \swarrow & & & & & & \\ \Rightarrow & 2s_{n+1} & = & 20 & + & 10 & + & \frac{10}{2} & + & \dots & + & \frac{10}{2^{n-2}} & + & \frac{10}{2^{n-1}} \end{array}$$

$$\Rightarrow 2s_{n+1} - s_{n+1} = 20 - \frac{10}{2^n}$$

$$\Rightarrow s_{n+1} = 20 - \frac{10}{2^n} \quad \square$$

Jetzt haben wir eine Formel für s_{n+1} . Wir brauchen aber eine Formel für s_n . Dazu reduzieren wir n in der Formel um 1. Das bedeutet, aus n wird $n - 1$ und aus $n + 1$ wird n . Es gilt also

$$s_n = 20 - \frac{10}{2^{n-1}}.$$

Nun können wir beweisen, dass unsere zwei Vermutungen wahr sind. Daher formulieren wir diese Vermutungen als Satz.

Satz: 1) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $s_n < 20$.

2) Sei eine beliebig kleine Zahl $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass gilt:

$$|20 - s_n| < \varepsilon \quad \text{für } n > n_0.$$

Beweis: Zu 1): $s_n = 20 - \frac{10}{2^{n-1}} \Rightarrow s_n < 20$, da von 20 etwas Positives abgezogen wird.

Zu 2): Vorüberlegung: Wir schreiben die Zweierpotenzen auf und darunter die Nummer in der Folge.

$$\begin{array}{cccccccc} 2^0 = 1 & \xrightarrow{\cdot 2} & 2^1 = 2 & \xrightarrow{\cdot 2} & 2^2 = 4 & \xrightarrow{\cdot 2} & 2^3 = 8 & \xrightarrow{\cdot 2} & \dots & 2^{n-1} \\ 1 & \xrightarrow{+1} & 2 & \xrightarrow{+1} & 3 & \xrightarrow{+1} & 4 & \xrightarrow{+1} & \dots & n \end{array}$$

Wir sehen, dass $2^{n-1} \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Es gilt also $\frac{1}{2^{n-1}} \leq \frac{1}{n}$ bzw. $\frac{10}{2^{n-1}} \leq \frac{10}{n}$.

Zu $\varepsilon > 0$ beachte: $\frac{10}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{10}{\varepsilon}$

Für jedes $n > \frac{10}{\varepsilon}$ gilt dann

$$|20 - s_n| \stackrel{s_n < 20}{=} 20 - s_n = 20 - \left(20 - \frac{10}{2^{n-1}}\right) = \frac{10}{2^{n-1}} \leq \frac{10}{n} < \varepsilon.$$

Also liegt s_n für jedes $n > n_0 := \frac{10}{\varepsilon}$ im ε -Streifen. \square

Nun können wir auflösen, warum das Paradoxon nicht unserer Vorstellung entspricht. Dazu berechnen wir in der folgenden Aufgabe die Zeitpunkte, zu denen Achilles die Messstopps erreicht.

Weiter auf nächster Seite

Aufgabe 6

Achill gibt der Schildkröte wie am Anfang 10 m Vorsprung. Achill benötigt 2 Sekunden, um 10 m zu laufen, entsprechend 1 Sekunde für 5 m usw. Trage in die Tabelle die Zeitintervalle bis zu den Messstopps ein.

$t_n =$	Laufzeit des Achill bis zum n -ten Messstopp (in Sekunden)	$d_n =$	Zeit, die Achill von n -ten bis zum $(n + 1)$ -ten Messstopp benötigt
$t_0 =$	0	$d_0 =$	2
$t_1 =$	2	$d_1 =$	1
$t_2 =$		$d_2 =$	
$t_3 =$		$d_3 =$	
$t_4 =$		$d_4 =$	
$t_5 =$		$d_5 =$	
$t_6 =$		$d_6 =$	
$t_7 =$		$d_7 =$	
$t_8 =$		$d_8 =$	
$t_9 =$		$d_9 =$	
$t_{10} =$		$d_{10} =$	

Du siehst: Die betrachteten Zeitintervalle werden immer kürzer, es wird nie die Zeit $t = 4$ Sekunden erreicht. Alle Überlegungen von Zenon enden vor der Zeit $t = 4$ Sekunden. Und bis dahin hat Achilles die Schildkröte ja auch nicht eingeholt.

Das ist so, wie wenn man filmen würde, wie Achilles die Schildkröte überholt, aber dann beim Abspielen des Films den Film immer langsamer laufen lässt, so dass nie der Zeitpunkt des Einholens erreicht wird.

Für $t = 4$ Sekunden ist Achilles bei 20m angekommen und steht neben der Schildkröte. Für $t > 4$ Sekunden ist er vor der Schildkröte.

Da bist Du sicher froh, dass deine Vorstellung der Situation doch richtig ist :)

Zwar hat Zenon uns mit seinem „Beweis“ ganz schön durcheinander gebracht, aber wir konnten alles erklären.

Ergänzung: Auch die Zeitpunkte werden durch eine geometrische Summe dargestellt. Es gilt

$$t_n = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{2}{2^{n-1}} = 4 - \frac{2}{2^{n-1}} < 4.$$

Lösungen der Aufgaben

Aufgabe 1

Gegeben ist eine Zahlenfolge a_1, a_2, a_3, \dots durch die Rekursionsformel

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + 9}{10} \text{ für } n = 1, 2, 3, \dots$$

- a) Bestimme die Folgenglieder a_n für $n = 2, \dots, 6$.
- b) Kannst Du eine allgemeine Formel für das n -te Folgenglied a_n angeben?

Lösung: a) $a_2 = 0,9$ b) $a_n = 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$
 $a_3 = 0,99$
 $a_4 = 0,999$
 $a_5 = 0,9999$
 $a_6 = 0,99999$

Aufgabe 2

Achilles startet bei 0 m, die Schildkröte bei 10 m. Achilles läuft 10 m bis zum ersten Messstopp. Inzwischen ist die Schildkröte 5 m gelaufen. Dann läuft Achilles 5 m weiter bis zum zweiten Messstopp, die Schildkröte läuft zugleich 2,5 m usw.

Lösung:

$s_n =$	Zurückgelegter Weg des Achilles beim n -ten Messstopp in Metern	$d_n =$	Abstand zwischen der Schildkröte und Achilles beim n -ten Messstopp in Metern
$s_0 =$	0	$d_0 =$	10
$s_1 =$	10	$d_1 =$	5
$s_2 =$	15	$d_2 =$	2,5
$s_3 =$	17,5	$d_3 =$	1,25
$s_4 =$	18,75	$d_4 =$	0,625
$s_5 =$	19,375	$d_5 =$	0,3125
$s_6 =$	19,6875	$d_6 =$	0,15625
$s_7 =$	19,84375	$d_7 =$	0,078125
$s_8 =$	19,921875	$d_8 =$	0,0390625
$s_9 =$	19,9609375	$d_9 =$	0,01953125
$s_{10} =$	19,98046875	$d_{10} =$	0,009765625

Aufgabe 3

- a) Gib Formeln an, wie d_{n+1} aus d_n und s_{n+1} aus d_n und s_n berechnet werden können.
- b) Finde eine Formel, mit der d_n direkt berechnet werden kann.

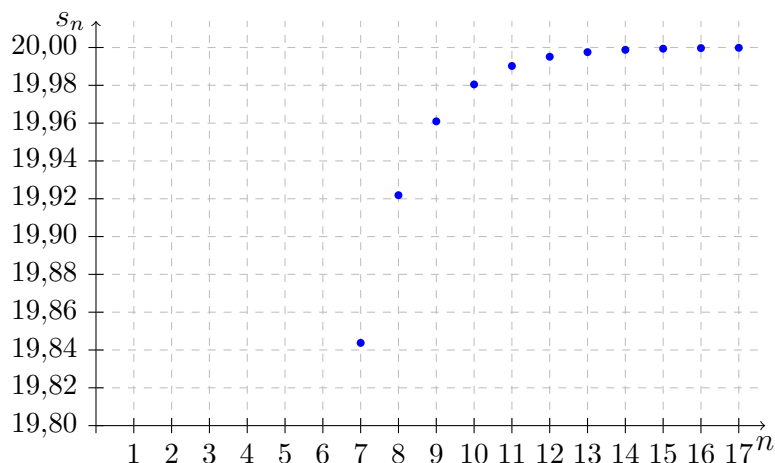
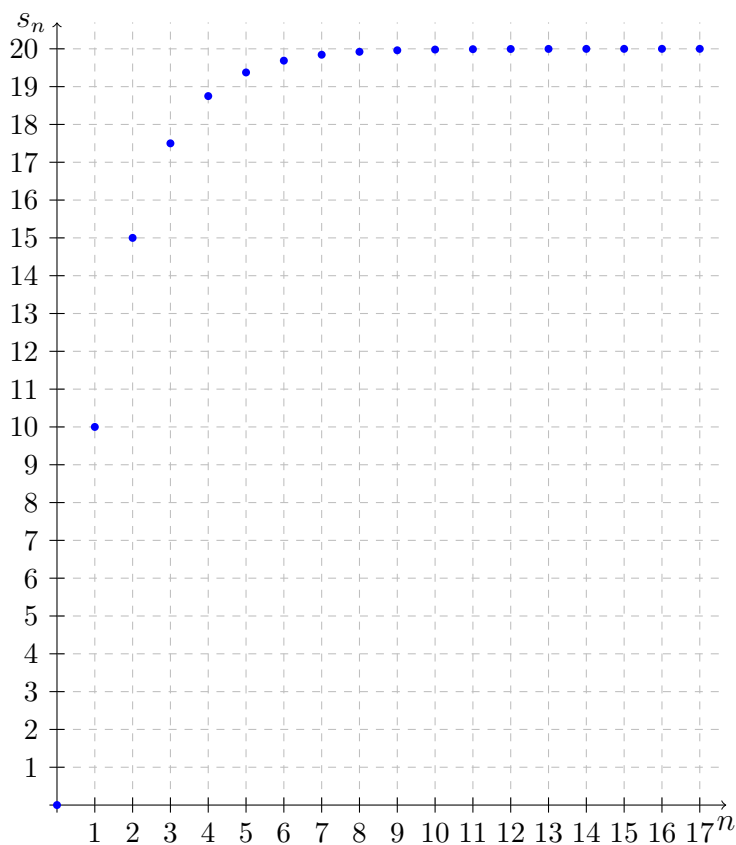
Lösung: a) $d_{n+1} = \frac{d_n}{2}$, $s_{n+1} = s_n + d_n$;

b) $d_n = \frac{10}{2^n}$.

Aufgabe 4

Trage die errechneten Werte aus der Tabelle für den Weg des Achilles beim n -ten Messstopp in die untenstehenden Koordinatensysteme ein (soweit möglich).

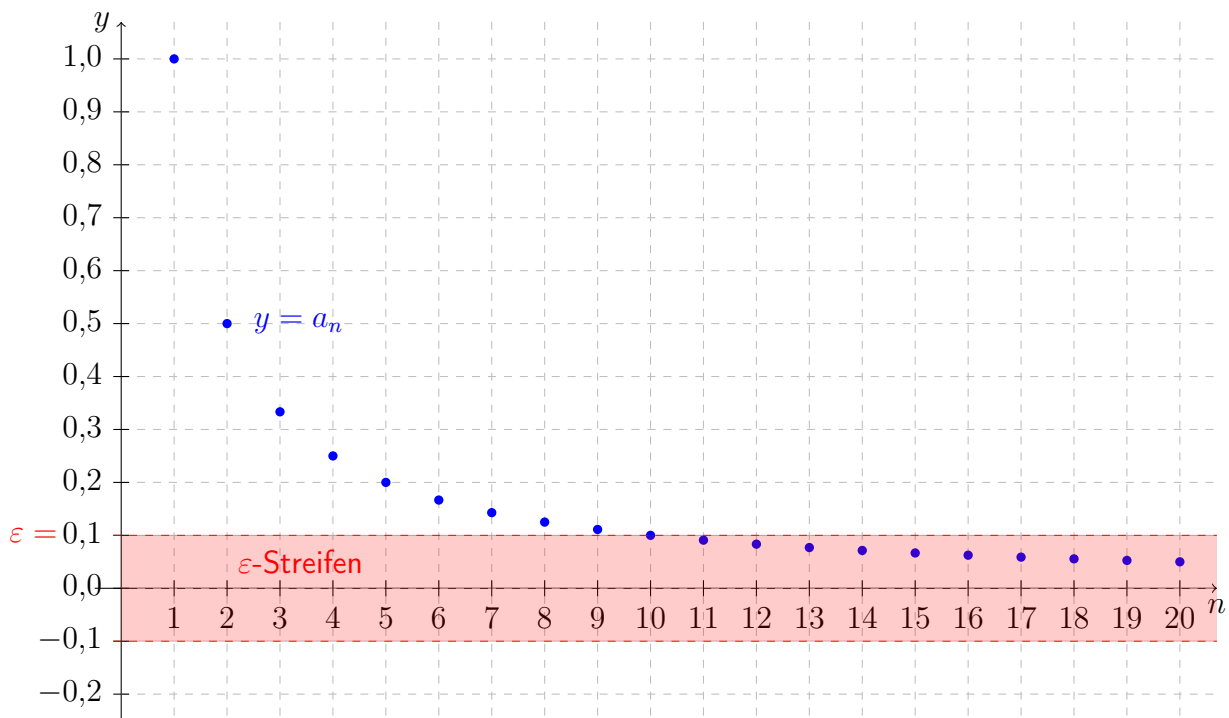
Lösung:



Aufgabe 5

Gegeben ist die Folge (a_n) mit $a_n = \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Die Werte von a_n kommen der Zahl Null beliebig nahe. Dies wollen wir mathematisch beschreiben bzw. nachrechnen.

- a) Zeichne in der Graphik den ε -Streifen für $\varepsilon = \frac{1}{10}$ ein und ermittle zeichnerisch, ab welchem n alle a_n im ε -Streifen liegen.



- b) Ermittle rechnerisch, wie groß n sein muss, damit $0 < a_n < \frac{1}{2000}$ gilt.
- c) Sei nun eine beliebig kleine Zahl $\varepsilon > 0$ gegeben. Ermittle rechnerisch eine Zahl n_0 in Abhängigkeit von ε , so dass

$$0 < a_n < \varepsilon \quad \text{für } n > n_0$$

gilt. Dabei muss n_0 keine ganze Zahl sein.

Lösung: a) Für den ε -Streifen siehe Graphik. Offensichtlich liegt a_n für $n > 10$ im ε -Streifen.

b) $a_n < \frac{1}{2000} \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{2000} \Leftrightarrow n > 2000$: Für $n > 2000$ liegt a_n im ε -Streifen.

c) $a_n < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$
Für alle $n > n_0 := \frac{1}{\varepsilon}$ gilt $0 < a_n < \varepsilon$, also liegt a_n im ε -Streifen.

Aufgabe 6

Achill gibt der Schildkröte wie am Anfang 10 m Vorsprung. Achill benötigt 2 Sekunden, um 10 m zu laufen, entsprechend 1 Sekunde für 5 m usw. Trage in die Tabelle die Zeitintervalle bis zu den Messstopps ein.

Lösung:

$t_n =$	Laufzeit des Achill bis zum n -ten Messstopp (in Sekunden)	$d_n =$	Zeit, die Achill von n -ten bis zum $(n + 1)$ -ten Messstopp benötigt
$t_0 =$	0	$d_0 =$	2
$t_1 =$	2	$d_1 =$	1
$t_2 =$	3	$d_2 =$	0,5
$t_3 =$	3,5	$d_3 =$	0,25
$t_4 =$	3,75	$d_4 =$	0,125
$t_5 =$	3,875	$d_5 =$	0,0625
$t_6 =$	3,9375	$d_6 =$	0,03125
$t_7 =$	3,96875	$d_7 =$	0,015625
$t_8 =$	3,984375	$d_8 =$	0,0078125
$t_9 =$	3,9921875	$d_9 =$	0,00390625
$t_{10} =$	3,99609375	$d_{10} =$	0,001953125