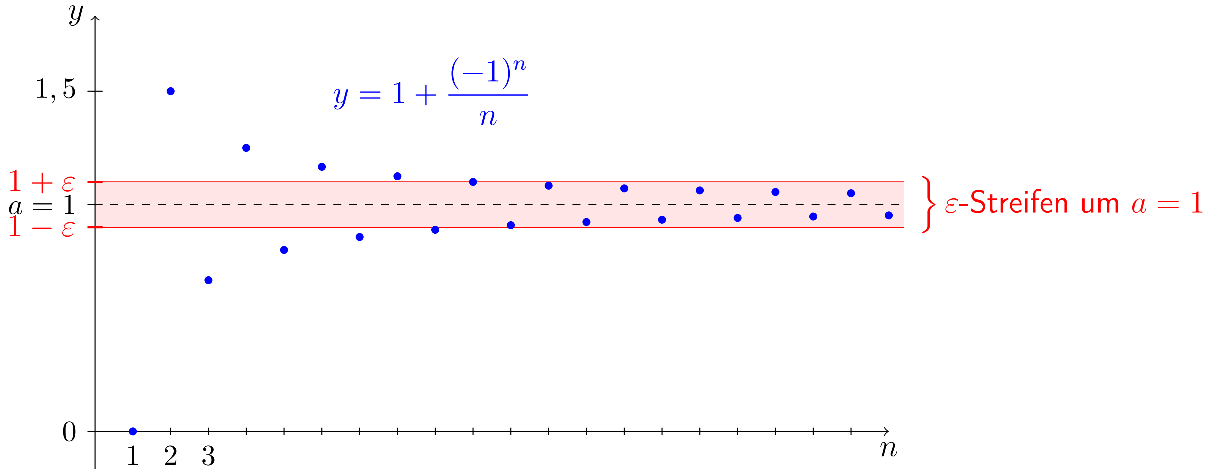
Konvergenz

Veranschaulichung der Folge (a_n) mit $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$:



Anschaulich: Eine Folge (a_n) konvergiert gegen a, wenn es zu jedem noch so schmalen ε-Streifen um a eine Zahl N gibt, so dass die Folgenglieder für alle $n > N$ im ε-Streifen liegen.

Aufgabe 3

Gegeben ist die Folge (a_n) mit $a_n = \frac{n^2}{n^2+3}$. Behauptung: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

a) Berechne $|a_n - 1|$.

b) Bestimme ein N so, dass $|a_n - 1| < \frac{1}{1000}$ für alle $n > N$ gilt.

c) Es sei ein beliebiges $\varepsilon > 0$ fest vorgegeben. Bestimme eine Formel für N, so dass $|a_n - 1| < \varepsilon$ für alle $n > N$ gilt.

Durch die Lösung von Teil c) ist bewiesen, dass (a_n) gegen $a = 1$ konvergiert.

Aufgabe 4

Es soll bewiesen werden, dass die Folge (a_n) mit $a_n = \frac{3n^2-1}{n^2+2}$ gegen $a = 3$ konvergiert.

a) Berechne $|a_n - 3|$.

b) Es sei ein beliebiges $\varepsilon > 0$ fest vorgegeben. Bestimme eine Formel für N, so dass $|a_n - 3| < \varepsilon$ für alle $n > N$ gilt.

Durch die Lösung von Teil b) ist bewiesen, dass (a_n) gegen $a = 3$ konvergiert.

Bitte wenden

Zusatzaufgabe 1

Gegeben ist die Folge (a_n) mit $a_n = \dfrac{n^3 + n^2}{n^3 + n^2 + 3}$. Behauptung: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

a) Berechne $|a_n - 1|$.

b) Schätze $|a_n - 1|$ durch einen einfacheren Term nach oben ab. Im Nenner sollte keine Summe stehen bleiben.

c) Bestimme ein N so, dass $|a_n - 1| < \dfrac{1}{1000}$ für alle $n > N$ gilt.

d) Es sei ein beliebiges $\varepsilon > 0$ fest vorgegeben. Bestimme eine Formel für N, so dass $|a_n - 1| < \varepsilon$ für alle $n > N$ gilt.

Durch die Lösung von Teil d) hast Du bewiesen, dass (a_n) gegen $a = 1$ konvergiert.

Zusatzaufgabe 2

Ein weiterer Beweis, dass $1{,}\overline{9} = 2$ gilt:
Gegeben ist die Folge $a_1 = 1{,}9;\ a_2 = 1{,}99;\ a_3 = 1{,}999;\ \ldots;\ a_n = 1{,}\underbrace{99\ldots9}_{n \text{ Mal}};\ \ldots.$

Beweise, dass a_n gegen $a = 2$ konvergiert.
Tipp: Bestimme eine explizite Formel für $|a_n - 2|$.

Zusatzaufgabe 3

Es sei (a_n) eine Folge, die gegen a konvergiert

a) Beweise, dass dann die Folge $(1 - a_n)$ gegen $1 - a$ konvergiert.

b) Beweise, dass dann die Folge $(5a_n)$ gegen $5a$ konvergiert.