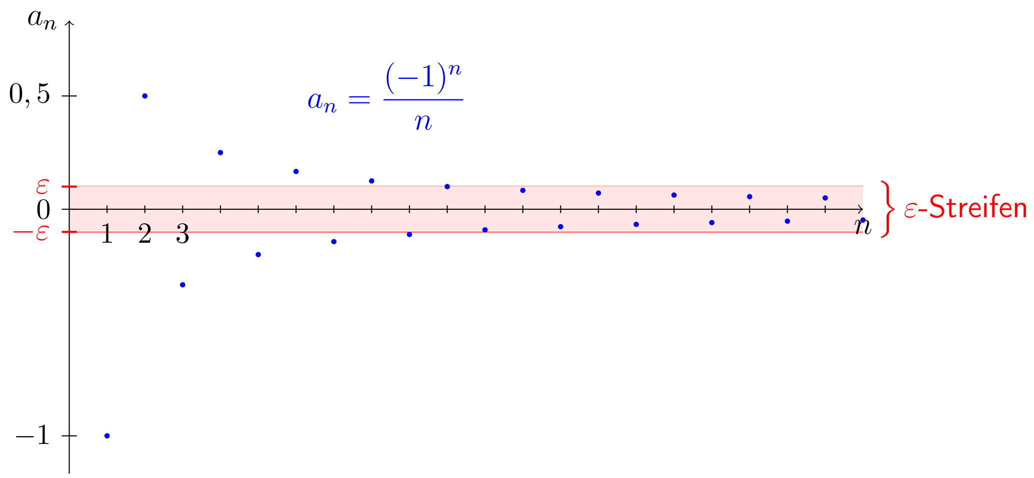
Nullfolgen



Anschaulich: Eine Folge (a_n) ist eine Nullfolge, wenn es zu jedem noch so schmalen ε-Streifen eine Zahl N gibt, so dass für alle $n > N$ die Folgenglieder im ε-Streifen liegen.

Aufgabe 2

Gegeben ist die Folge $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Behauptung: (a_n) ist eine Nullfolge.

a) Wie ist $N \in \mathbb{N}$ zu wählen, dass $|a_n| < \frac{1}{1\,000}$ für $n > N$ gilt? $N \geq$ $\boxed{}$

b) Wie ist $N \in \mathbb{N}$ zu wählen, dass $|a_n| < \frac{1}{100\,000}$ für $n > N$ gilt? $N \geq$ $\boxed{}$

c) Es sei ein beliebiges $\varepsilon > 0$ fest vorgegeben. Bestimme eine Formel für N, so dass $|a_n| < \varepsilon$ für $n > N$ gilt: $N \geq$ $\boxed{}$

Aufgabe 3

Untersuche, ob die angegebene Folge eine Nullfolge ist. Begründe Deine Antwort. Das heißt, im Fall einer Nullfolge ist für beliebig vorgegebenes $\varepsilon > 0$ anzugeben, wie $N \in \mathbb{N}$ zu wählen ist, dass $|a_n| < \varepsilon$ für alle $n > N$ gilt. Im anderen Fall ist anzugeben, warum die Definition einer Nullfolge nicht erfüllt ist.

a) (a_n) mit $a_1 = 1,\ a_2 = 0,\ a_3 = \frac{1}{2},\ a_3 = 0,\ a_5 = \frac{1}{3}, \ldots$, oder allgemein

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{2}{n+1} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

b) (a_n) mit $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

c) (a_n) mit $a_n = 2 + \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$,

d) (a_n) mit $a_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 2 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$

e) (a_n) mit $a_n = \frac{1}{n^2+1}$.

Zusatzaufgabe 1

a) Sei (a_n) eine Nullfolge und (b_n) eine weitere Folge mit der Eigenschaft $|b_n| \leq |a_n|$ für $n \in \mathbb{N}$. Beweise, dass dann (b_n) eine Nullfolge ist.

b) Sei (a_n) eine Nullfolge und (b_n) eine weitere Folge mit der Eigenschaft $|b_n| \leq 3|a_n|$ für $n \in \mathbb{N}$. Beweise, dass dann (b_n) eine Nullfolge ist.

c) Seien (a_n) und (b_n) Nullfolgen. Beweise, dass dann auch die Summenfolge (c_n) mit $c_n = a_n + b_n$ für $n \in \mathbb{N}$ eine Nullfolge ist.