Graphentheorie

zum Selbstlernen

Vorwort

Dies ist ein Skript zum Selbststudium. Du kannst hier Grundlagen der Graphentheorie kennenlernen.

Der Text ist im Wesentlichen der Mitschrieb aus einem Online-Kurs *Graphentheorie* im Schülerseminar für Klasse 8-10. Du findest diesen und andere Kurse auf der Seite

`https://pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/iadm/Zirkel/material-Schuelerseminar/`

Falls Du beim Studium des vorliegenden Textes Fragen hast, kannst Du beim Online-Kurs im entsprechenden Video nachsehen, dort gibt es ausführlichere Erklärungen. Um die Verbindung zu finden, ist am Rand des Textes markiert, wann die einzelnen Einheiten des Online-Kurses beginnen.

Die Aufgaben sind auch dieselben wie im Online-Kurs. Im Lerntext sind keine Lösungen dabei, damit Du sie selber lösen kannst. Bei den Aufgaben ist oft Platz, um Deine Lösungen aufzuschreiben. Manchmal musst Du aber auch ein extra Blatt für die Berechnungen dazunehmen. Falls Du Deine Lösungen überprüfen willst, stehen alle Aufgaben mit Lösungen im letzten Kapitel dieses Skripts.

Ich wünsche Dir viel Spaß beim Durcharbeiten des Skripts und bei den Aufgaben!

20. Dezember 2024 Peter Lesky

Inhalt

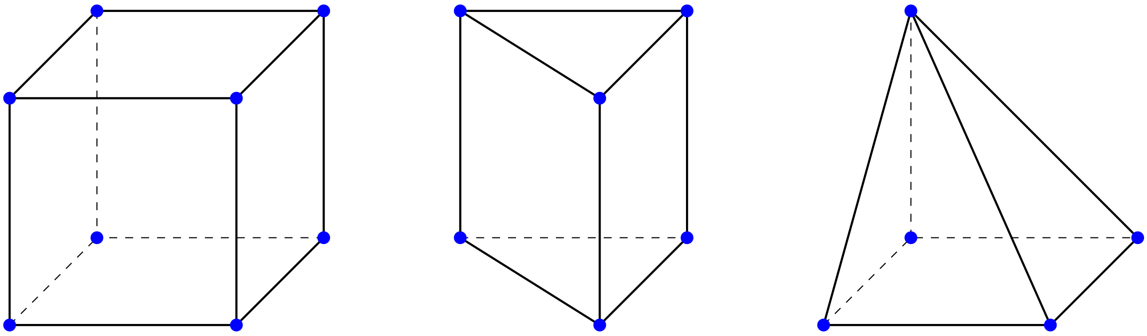
Auf den nächsten Seiten findest Du das Skript mit Aufgaben zur siebten Einheit *Graphen und Polyeder*. Die weiteren Teile werden bei den entsprechenden Einheiten veröffentlicht.

10 Graphen und Polyeder

Beginn Online-Einheit 7

Definition: Ein Polyeder ist ein dreidimensionaler Körper, dessen Seiten aus ebenen Vielecksflächen bestehen. Die Vielecksflächene stoßen an den Kanten und den Ecken des Körpers zusammen. In jeder Ecke enden mindestens 3 Kanten.
Die Ecken und Kanten bilden den Graphen des Polyeders.

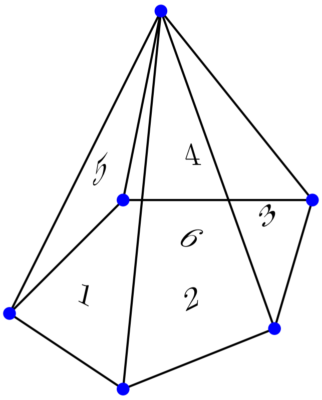
Beispiele für Polyeder:



Aufgabe 1
Gegeben ist das unten skizzierte Polyeder mit 6 Ecken, 10 Kanten und 6 Flächen. Die dreieckigen Seitenflächen sind der Reihe nach mit den Zahlen 1 bis 5 nummeriert, die fünfeckige Bodenfläche hat die Nummer 6.

a) Warum ist der Graph des Polyeders einfach?

b) Zeichne einen isomorphen ebenen Graphen und nummeriere die Flächen des Graphen so, dass ihre Nummern denen der Flächen des Polyeders entsprechen.
Hinweis: Der ebene Graph besitzt auch eine äußere Fläche.

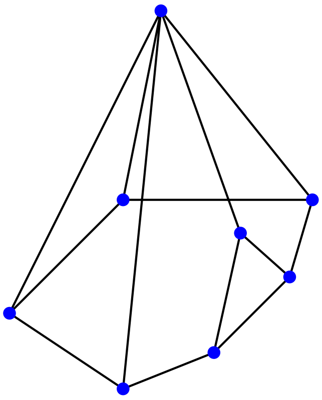


a) Der Graph ist einfach, denn:

b) Isomorpher ebener Graph:

Weiter auf nächster Seite

Aufgabe 2
Beim Polyeder aus der letzten Aufgabe wurde eine Ecke abgeschnitten, siehe unten stehende Graphik. Zeichne einen isomorphen ebenen Graphen. Wie viele Ecken, Kanten, Flächen hat der vorliegende Graph mehr als der aus der vorigen Aufgabe?



a) Isomorpher ebener Graph:

b) Im Vergleich zum Graphen aus der letzten Aufgabe erhöhte sich die Anzahl der Ecken um $\square$, die der Kanten um $\square$ und die der Flächen um $\square$.

Satz: Für jeden Graphen eines Polyeders gelten:

1) Der Graph ist zusammenhängend und einfach,

2) Eckenzahl $e \geq 4$,

3) Kantenzahl $k \geq 6$.

Beweis: 1) Zusammenhängend: Ein Polyeder ist ein Körper.
Die Kante eines Polyeders sind Geradenstücke. Daher besitzt der Graph keine parallelen Kanten und keine Schlingen, ist also einfach.

2) 3 Ecken liegen in einer Ebene, bilden also nicht die Ecken eines Körpers $\Rightarrow \; e \geq 4$.

3) In jeder Ecke enden mindestens 3 Kanten
$\Rightarrow$ Es gibt mindestens $4 \cdot 3 = 12$ Enden von Kanten.
Jede Kante hat zwei Enden $\Rightarrow \; k \geq 6$. $\square$

Aufgabe 3

a) Konstruiere ein Polyeder mit $k = 8$ Kanten. Zeichne einen isomorphen ebenen Graphen.
Hinweis: Das Polyeder kann entsprechend zu dem aus Aufgabe 1 konstruiert werden. Wähle als Grundfläche ein Viereck.

b) Konstruiere ein Polyeder mit $k = 11$ Kanten. Zeichne einen isomorphen ebenen Graphen.
Hinweis: Verwende das Polyeder aus Teilaufgabe a) und schneide eine Ecke ab (vgl. die Konstruktion für Aufgabe 2).

Aufgabe 4

a) Sei k ein Element der Menge $\{6, 8, 10, \ldots\}$. Konstruiere ein Polyeder mit k Kanten, indem Du eine Grundfläche mit $n = \frac{k}{2}$ Ecken und eine Spitze wählst.

b) Sei k ein Element der Menge $\{9, 11, 13, \ldots\}$. Konstruiere ein Polyeder mit k Kanten, indem Du eine Grundfläche mit $n = \frac{k-3}{2}$ Ecken und eine Spitze wählst und dann eine Ecke abschneidest.

<u>Satz:</u> 1) Zu jeder natürlichen Zahl $k \geq 6$, $k \neq 7$ gibt es ein Polyeder mit k Kanten.

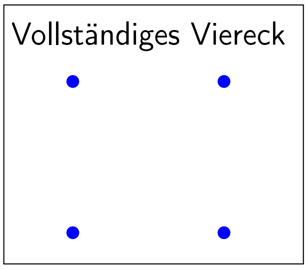
2) Es gibt kein Polyeder mit 7 Kanten.

Beweis: Siehe letzte und nächste Übungsaufgabe.

Aufgabe 5
In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass es kein Polyeder mit 7 Kanten gibt. Fülle dazu die Lücken aus.
Betrachte den Graphen des Polyeders. Die Anzahl seiner Ecken wird mit e bezeichnet. Wir wissen, dass der Graph einfach ist.

Weiter wissen wir, dass $e \geq \boxed{\quad}$ gilt. Nun können wir eine Fallunterscheidung vornehmen.

<u>Fall $e = 4$:</u> Zeichne rechts ein vollständiges Viereck, d.h. einen einfachen Graphen mit 4 Ecken und möglichst vielen Kanten.



Das vollständige Viereck besitzt $k = \boxed{\quad}$ Kanten. Ein einfacher Graph mit 4 Ecken kann nicht mehr Kanten besitzen.

$\Rightarrow$ Es gibt kein Polyeder mit $e = \boxed{\quad}$ Ecken und 7 Kanten.

<u>Fall $e \geq 5$:</u> Der Eckengrad jeder Ecke ist mindestens $\boxed{\quad}$.

$\Rightarrow$ Im Graphen gibt es mindestens $\boxed{\quad}$ Enden von Kanten.

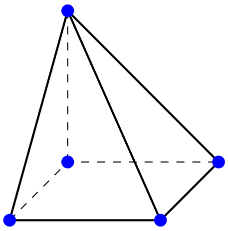
Jede Kante hat 2 Enden $\Rightarrow$ Für die Anzahl von Kanten folgt $k \geq \boxed{\quad\quad}$.

$\Rightarrow$ Der Graph besitzt mindestens $\boxed{\quad}$ Kanten.

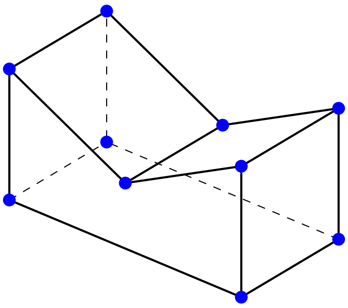
$\Rightarrow$ Es gibt kein Polyeder mit $e \geq \boxed{\quad}$ Ecken und 7 Kanten. □

<u>Definition:</u> Ein Polyeder heißt <u>konvex</u>, wenn die Verbindungsstrecken beliebiger Punkte des Polyeders ganz im Polyeder verlaufen.

Konvexes Polyeder:



Nicht konvexes Polyeder:

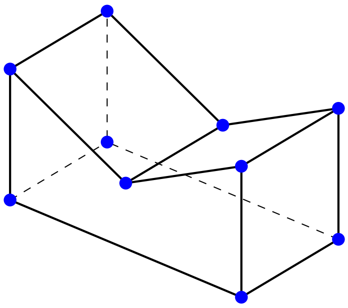


Satz: Der Graph eines konvexen Polyeders ist plättbar, d.h. er besitzt einen isomorphen ebenen Graphen. Die Anzahl der Flächen des Polyeders ist gleich der Anzahl der Flächen des ebenen Graphen, wenn beim ebenen Graphen die äußere Fläche mitgezählt wird.

Veranschaulichung: Bei dem Graphen eines konvexen Polyeders kann man so durch eine seiner Flächen hindurchsehen, so dass man den Graphen des Polyeders ohne Kreuzungen der Kanten sieht. Die Fläche, durch die man hindurchsieht, wird die äußere Fläche des ebenen Graphen.

Aufgabe 6

Gegeben ist das rechts dargestellte Polyeder.



a) Weise nach, dass das Polyeder nicht konvex ist. Zeichne dazu eine Verbindungsstrecke zweier Punkte des Polyeders ein, die nicht ganz im Polyeder verläuft.

b) Weise nach, dass der Graph des Polyeders einen isomorphen ebenen Graphen besitzt, obwohl die Voraussetzung *konvex* nicht erfüllt ist. Zeichne dazu einen isomorphen ebenen Graphen.

Satz: Für jedes konvexe Polyeder gilt die eulersche Polyederformel: $e - k + f = 2$

Beweis: Betrachte ein konvexes Polyeder. Der Graph des Polyeders besitzt einen isomorphen Graphen, der eben, einfach und zusammenhängend ist. Für jeden ebenen und zusammenhängenden Graphen gilt die eulersche Formel $e - k + f = 2$ (früherer Satz).
Der Graph des Polyeders besitzt gleich viele Ecken, Kanten und Flächen,
$\Rightarrow$ Die Formel gilt auch für das Polyeder. $\square$

Satz: Ein ebener Graph, der isomorph zu dem Graphen eines Polyeders ist, hat folgende Eigenschaften:

1) Er ist zusammenhängend und einfach,

2) $e \geq 4$,

3) Jede Ecke hat mindestens den Grad 3,

4) $k \geq 6$.

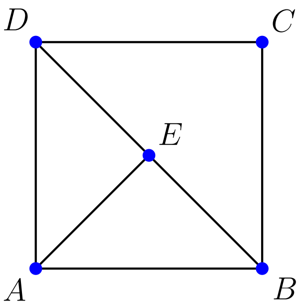
Beweis: Jeder Graph eines Poyeders besitzt alle diese Eigenschaften, also auch jeder isomorphe Graph. $\square$

Aufgabe 7

Gegeben ist der unten stehende ebene Graph mit 7 Kanten.

a) Zeige, dass die eulersche Formel gilt.

b) Warum gibt es kein Polyeder, dessen Graph isomorph zum hier gezeigten Graphen ist?



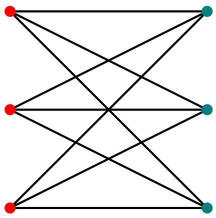
a) $e =$, $k =$, $f =$

$\Rightarrow \; e - k + f =$

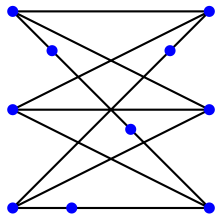
b) Es gibt kein Polyeder, dessen Graph isomorph zum nebenstehenden Graphen ist, denn

Erinnerung: Wenn ein Graph einen Teilgraphen enthält, der isomorph zu einer Unterteilung des vollständigen 3–3–Graphen ist, dann ist er nicht plättbar.

3–3–Graph:

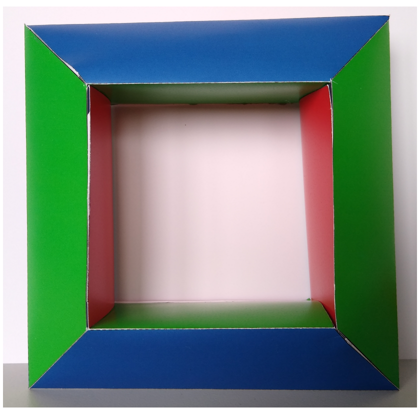


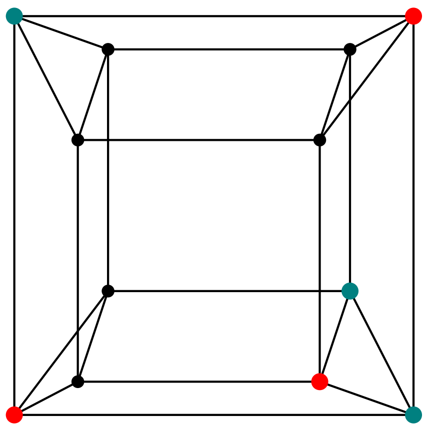
Unterteilung des 3–3–Graphen:



Aufgabe 8

Gegeben ist das nicht konvexe Polyeder, dessen Photo und Graph abgebildet sind.





a) Bestimme die Anzahl der Flächen, Kanten und Ecken des Polyeders. Zeige, dass die eulersche Polyederformel nicht gilt. Beachte, dass die im Graphen als Dreiecke erscheinende Flächen keine Seiten des Polyeders sind.

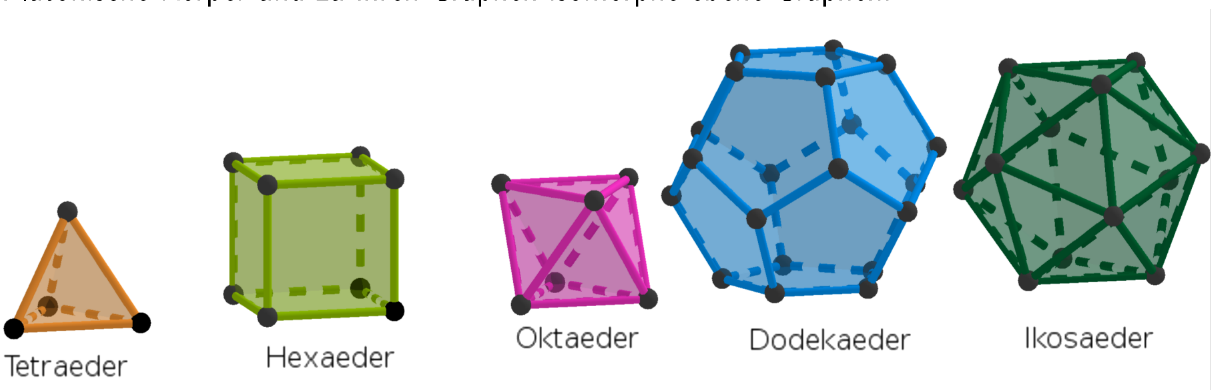
$e =$, $k =$, $f =$, $\Rightarrow$ $e - k + f = \qquad \neq 2$.

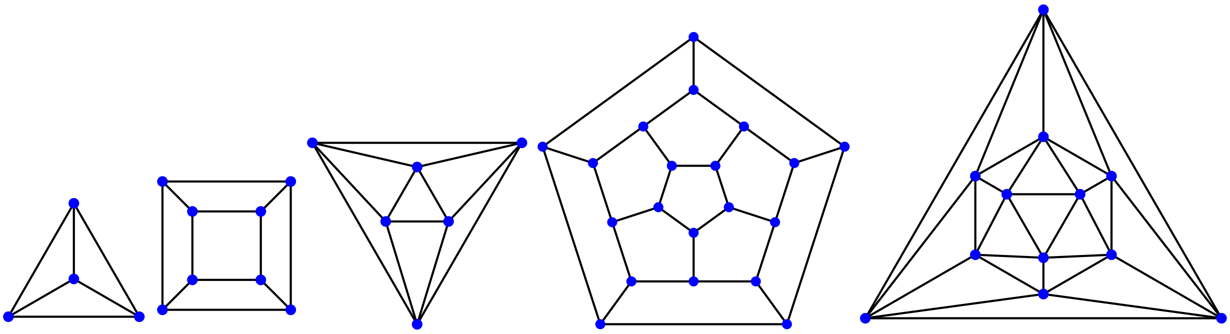
b) Zeige, dass der Graph des Polyeders nicht plättbar ist, indem Du einen Teilgraphen blau markierst, der isomorph zu einer Unterteilung des 3-3-Graphen ist.

11 Platonische Körper und Graphen

Definition: Ein konvexes Polyeder heißt platonischer Körper, wenn alle Flächen aus kongruenten regelmäßigen n-Ecken bestehen und in jeder Ecke gleich viele Kanten enden.

Platonische Körper und zu ihren Graphen isomorphe ebene Graphen:





Tetraeder Hexaeder Oktaeder Dodekaeder Ikosaeder

Aufgabe 9
Trage in die Tabelle den Eckengrad g der Ecken und die Ecken-, Kanten- und Flächenzahl ein.

	Tetraeder	Hexaeder	Oktaeder	Dodekaeder	Ikosaeder
$g =$					
$e =$					
$k =$					
$f =$					

Definition: Ein zusammenhängender einfacher ebener Graph heißt platonischer Graph, wenn er folgende Eigenschaften besitzt:

1) Alle Ecken des Graphen haben den selben Grad, dieser beträgt mindestens 3 und

2) alle Flächen (auch die äußere) haben die selbe Anzahl Kanten, diese ist mindestens 3.

Folgerung: Die fünf Polyeder Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder, Ikosaeder sind platonische Körper, ihre Graphen sind isomorph zu platonische Graphen.

Satz: Jeder platonische Graph ist isomorph zu einem der Graphen von Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder, Ikosaeder. Daher gibt es genau diese fünf platonischen Körper.

Aufgabe 10

In dieser Aufgabe zeigen wir: Jeder platonische Graph ist isomorph zu einem der Graphen von Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder, Ikosaeder. Fülle dazu die Lücken aus.

Wir betrachten einen platonischen Graphen mit e Ecken, k Kanten und f Flächen. Seien zusätzlich g der Eckengrad, den jede Ecke besitzt, und n die Anzahl der Kanten, die jede Fläche begrenzen.

Jede Ecke hat den Eckengrad g $\Rightarrow$ es gibt $\boxed{\qquad}$ Enden von Kanten.

Da jede Kante $\boxed{\quad}$ Enden besitzt, gibt es insgesamt $k = \boxed{\qquad}$ Kanten.

Umformen nach der Anzahl der Ecken e liefert

$$e = \boxed{\qquad}. \qquad (*)$$

Addiert man die Anzahl der Kanten, die die Flächen begrenzen, so zählt man jede Kante doppelt $\Rightarrow$ Der Graph besitzt $k = \boxed{\qquad}$ Kanten. Umformen nach der Anzahl der Flächen liefert

$$f = \boxed{\qquad}. \qquad (**)$$

Setzt man $(*)$ und $(**)$ für e und f in die eulersche Formel ein, so erhält man

$$2 = e - k + f \quad \Rightarrow \quad 2 = \boxed{\qquad\qquad}.$$

Teilt man auf beiden Seiten durch $2k$, so erhält man die Gleichung $\boxed{\qquad\qquad}$.

Nach dem ersten Satz gilt $g \geq 3$ und $n \geq 3$. Deshalb müssen wir jetzt einfach durchprobieren, für welche Werte von g und n wir Lösungen für k finden. Starte dazu mit $g = 3$ und erhöhe n solange, bis du keine sinnvolle Lösung mehr für k findest. Fahre dann mit dem nächst größeren g fort.

g	n	$\frac{1}{g} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2}$	k	Name
3	3			

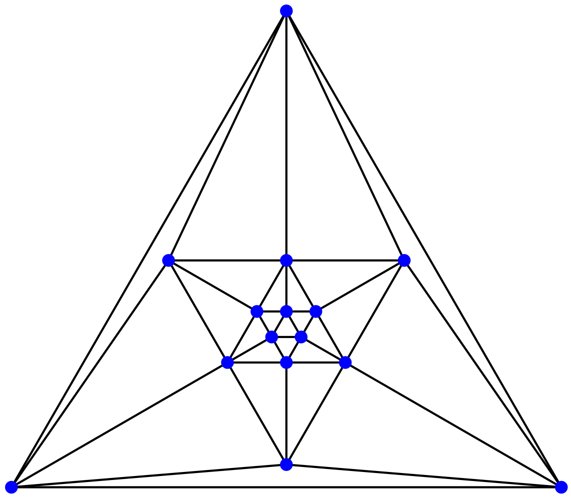
Warum sind wir mit den hier betrachtetet Werten für g und n fertig und müssen nicht alle möglichen Kombinationen durchgehen?

Aufgabe 11

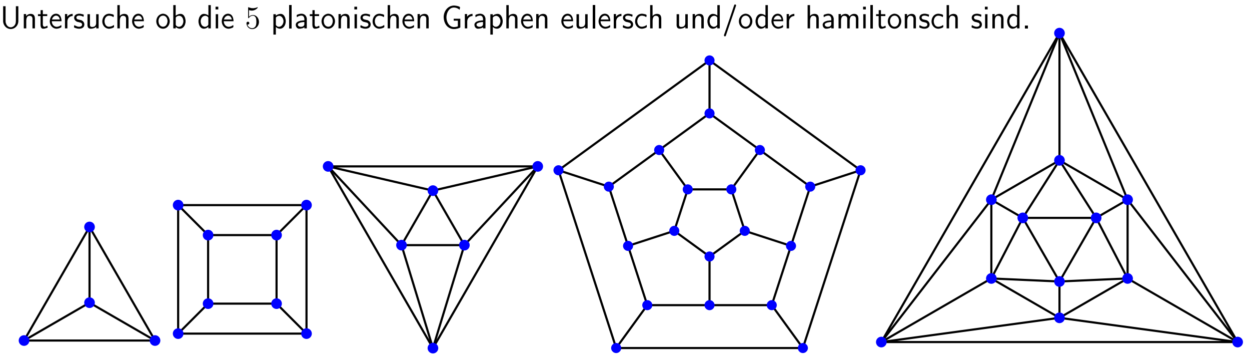
Gegeben ist der nebenstehende ebene Graph. Er ist isomorph zu dem Graphen eines Polyeders.

a) Aus was für n-Ecken bestehen die Seiten des Polyeders?

b) Warum kann das zugehörige Polyeder nicht platonisch sein?



Aufgabe 12
Untersuche ob die 5 platonischen Graphen eulersch und/oder hamiltonsch sind.



Tetraeder Hexaeder Oktaeder Dodekaeder Ikosaeder

	Tetraeder	Hexaeder	Oktaeder	Dodekaeder	Ikosaeder
ist eulersch					
ist hamiltonsch					

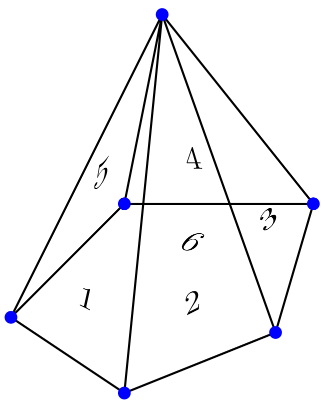
Lösungen der Aufgaben

Aufgabe 1

Gegeben ist das unten skizzierte Polyeder mit 6 Ecken, 10 Kanten und 6 Flächen. Die dreieckigen Seitenflächen sind der Reihe nach mit den Zahlen 1 bis 5 nummeriert, die fünfeckige Bodenfläche hat die Nummer 6.

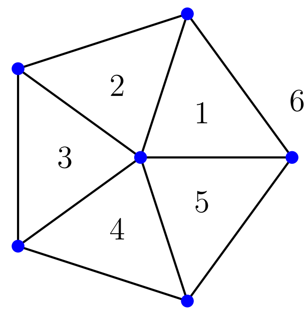
a) Warum ist der Graph des Polyeders einfach?

b) Zeichne einen isomorphen ebenen Graphen und nummeriere die Flächen des Graphen so, dass ihre Nummern denen der Flächen des Polyeders entsprechen.
Hinweis: Der ebene Graph besitzt auch eine äußere Fläche.



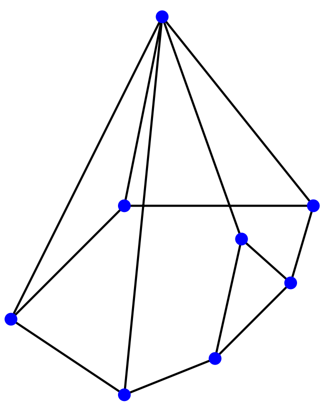
a) Der Graph ist einfach, denn:
Er hat keine Schlingen und keine parallelen Kanten

b) Isomorpher ebener Graph:

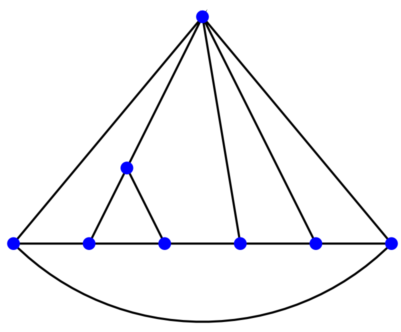


Aufgabe 2

Beim Polyeder aus der letzten Aufgabe wurde eine Ecke abgeschnitten, siehe unten stehende Graphik. Zeichne einen isomorphen ebenen Graphen. Wie viele Ecken, Kanten, Flächen hat der vorliegende Graph mehr als der aus der vorigen Aufgabe?



a) Isomorpher ebener Graph:



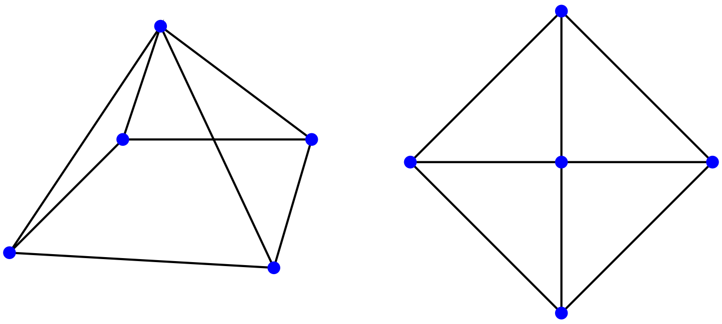
b) Im Vergleich zum Graphen aus der letzten Aufgabe erhöhte sich die Anzahl der Ecken um $\boxed{2}$,
die der Kanten um $\boxed{3}$ und
die der Flächen um $\boxed{1}$.

Aufgabe 3

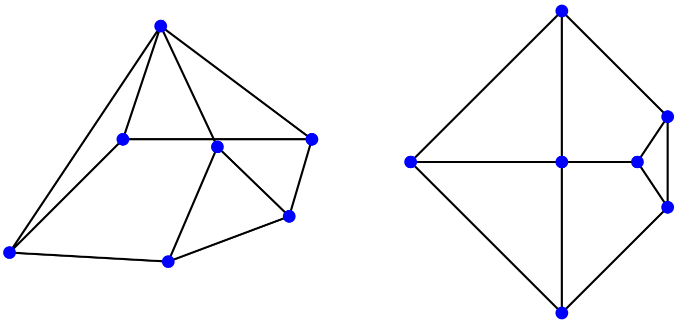
a) Konstruiere ein Polyeder mit $k = 8$ Kanten. Zeichne einen isomorphen ebenen Graphen.
Hinweis: Das Polyeder kann entsprechend zu dem aus Aufgabe 1 konstruiert werden. Wähle als Grundfläche ein Viereck.

b) Konstruiere ein Polyeder mit $k = 11$ Kanten. Zeichne einen isomorphen ebenen Graphen.
Hinweis: Verwende das Polyeder aus Teilaufgabe a) und schneide eine Ecke ab (vgl. die Konstruktion für Aufgabe 2).

Lösung: **a)**



b)

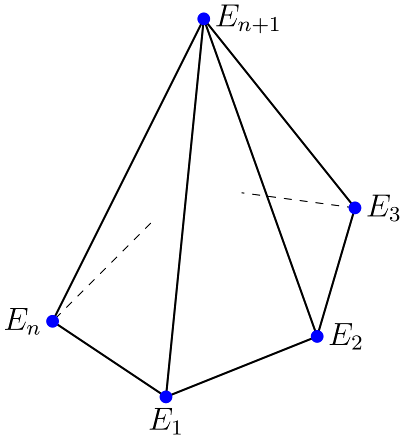


Aufgabe 4

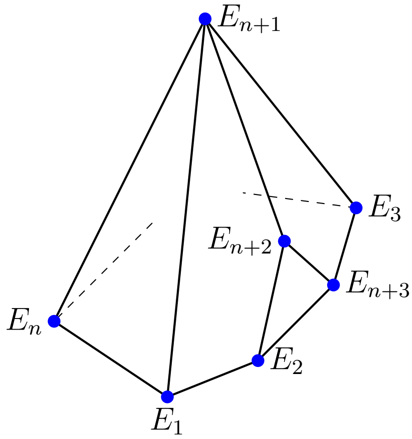
a) Sei k ein Element der Menge $\{6, 8, 10, \ldots\}$. Konstruiere ein Polyeder mit k Kanten, indem Du eine Grundfläche mit $n = \frac{k}{2}$ Ecken und eine Spitze wählst.

b) Sei k ein Element der Menge $\{9, 11, 13, \ldots\}$. Konstruiere ein Polyeder mit k Kanten, indem Du eine Grundfläche mit $n = \frac{k-3}{2}$ Ecken und eine Spitze wählst und dann eine Ecke abschneidest.

Lösung: **a)**



b)



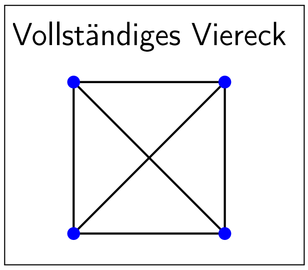
Aufgabe 5

In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass es kein Polyeder mit 7 Kanten gibt. Fülle dazu die Lücken aus.

Betrachte den Graphen des Polyeders. Die Anzahl seiner Ecken wird mit e bezeichnet. Wir wissen, dass der Graph einfach ist.

Weiter wissen wir, dass $e \geq \boxed{4}$ gilt. Nun können wir eine Fallunterscheidung vornehmen.

<ins>Fall $e = 4$:</ins> Zeichne rechts ein vollständiges Viereck, d.h. einen einfachen Graphen mit 4 Ecken und möglichst vielen Kanten.



Das vollständige Viereck besitzt $k = \boxed{6}$ Kanten. Ein einfacher Graph mit 4 Ecken kann nicht mehr Kanten besitzen.

$\Rightarrow$ Es gibt kein Polyeder mit $e = \boxed{4}$ Ecken und 7 Kanten.

<ins>Fall $e \geq 5$:</ins> Der Eckengrad jeder Ecke ist mindestens $\boxed{3}$.

$\Rightarrow$ Im Graphen gibt es mindestens $\boxed{15}$ Enden von Kanten.

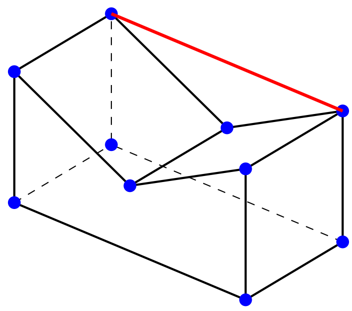
Jede Kante hat 2 Enden $\Rightarrow$ Für die Anzahl von Kanten folgt $k \geq \boxed{\frac{15}{2}}$.

$\Rightarrow$ Der Graph besitzt mindestens $\boxed{8}$ Kanten.

$\Rightarrow$ Es gibt kein Polyeder mit $e \geq \boxed{5}$ Ecken und 7 Kanten. $\square$

Aufgabe 6

Gegeben ist das rechts dargestellte Polyeder.

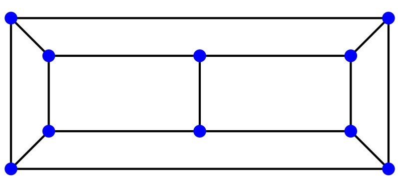


a) Weise nach, dass das Polyeder nicht konvex ist. Zeichne dazu eine Verbindungsstrecke zweier Punkte des Polyeders ein, die nicht ganz im Polyeder verläuft.

b) Weise nach, dass der Graph des Polyeders einen isomorphen ebenen Graphen besitzt, obwohl die Voraussetzung *konvex* nicht erfüllt ist. Zeichne dazu einen isomorphen ebenen Graphen.

Lösung: **a)** Siehe rote Linie in der Graphik im Aufgabentext.

b)

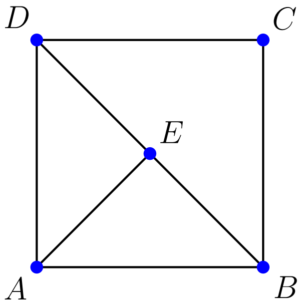


Aufgabe 7

Gegeben ist der unten stehende ebene Graph mit 7 Kanten.

a) Zeige, dass die eulersche Formel gilt.

b) Warum gibt es kein Polyeder, dessen Graph isomorph zum hier gezeigten Graphen ist?



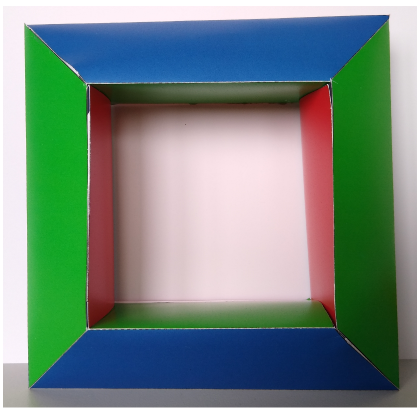
a) $\boxed{e = 5}$, $\boxed{k = 7}$, $\boxed{f = 4}$

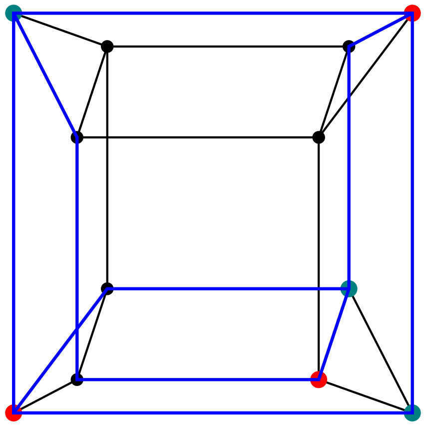
$\boxed{\Rightarrow \; e - k + f = 2}$

b) Es gibt kein Polyeder, dessen Graph isomorph zum nebenstehenden Graphen ist, denn
$\mathrm{Grad}(C) = 2$,
der Eckengrad muss mindestens 3 sein.

Aufgabe 8

Gegeben ist das nicht konvexe Polyeder, dessen Photo und Graph abgebildet sind.





a) Bestimme die Anzahl der Flächen, Kanten und Ecken des Polyeders. Zeige, dass die eulersche Polyederformel nicht gilt. Beachte, dass die im Graphen als Dreiecke erscheinende Flächen keine Seiten des Polyeders sind.

$\boxed{e = 12}$, $\boxed{k = 24}$, $\boxed{f = 12}$, $\Rightarrow$ $\boxed{e - k + f = 12 - 24 + 12 = 0 \neq 2}$.

b) Zeige, dass der Graph des Polyeders nicht plättbar ist, indem Du einen Teilgraphen blau markierst, der isomorph zu einer Unterteilung des 3-3-Graphen ist.

Aufgabe 9

Trage in die Tabelle den Eckengrad g der Ecken und die Ecken-, Kanten- und Flächenzahl ein.

	Tetraeder	Hexaeder	Oktaeder	Dodekaeder	Ikosaeder
$g =$	3	3	4	3	5
$e =$	3	8	6	20	12
$k =$	6	12	12	30	30
$f =$	4	6	8	12	20

Aufgabe 10

In dieser Aufgabe zeigen wir: Jeder platonische Graph ist isomorph zu einem der Graphen von Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder, Ikosaeder. Fülle dazu die Lücken aus.

Wir betrachten einen platonischen Graphen mit e Ecken, k Kanten und f Flächen. Seien zusätzlich g der Eckengrad, den jede Ecke besitzt, und n die Anzahl der Kanten, die jede Fläche begrenzen.

Jede Ecke hat den Eckengrad g $\Rightarrow$ es gibt $\boxed{g \cdot e}$ Enden von Kanten.

Da jede Kante $\boxed{2}$ Enden besitzt, gibt es insgesamt $k = \boxed{\frac{1}{2} g \cdot e}$ Kanten.
Umformen nach der Anzahl der Ecken e liefert

$$e = \boxed{\frac{2k}{g}}. \qquad (*)$$

Addiert man die Anzahl der Kanten, die die Flächen begrenzen, so zählt man jede Kante doppelt $\Rightarrow$ Der Graph besitzt $k = \boxed{\frac{1}{2} \cdot n \cdot f}$ Kanten. Umformen nach der Anzahl der Flächen liefert

$$f = \boxed{\frac{2k}{n}}. \qquad (**)$$

Setzt man $(*)$ und $(**)$ für e und f in die eulersche Formel ein, so erhält man

$$2 \;=\; e - k + f \quad \Rightarrow \quad 2 = \boxed{\frac{2k}{g} - k + \frac{2k}{n}}.$$

Teilt man auf beiden Seiten durch $2k$, so erhält man die Gleichung $\boxed{\frac{1}{k} = \frac{1}{g} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n}}$.

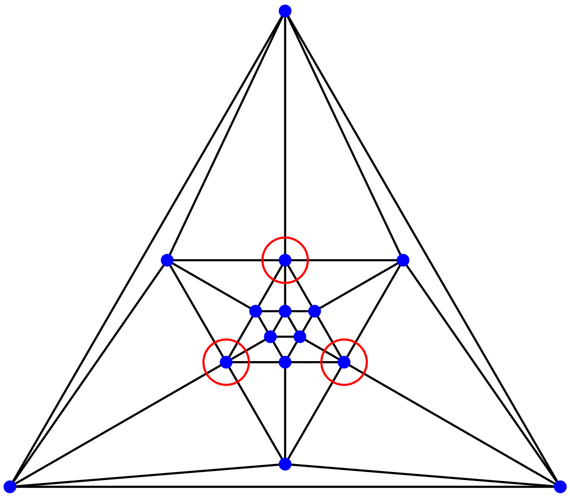
Nach dem ersten Satz gilt $g \geq 3$ und $n \geq 3$. Deshalb müssen wir jetzt einfach durchprobieren, für welche Werte von g und n wir Lösungen für k finden. Starte dazu mit $g = 3$ und erhöhe n solange, bis du keine sinnvolle Lösung mehr für k findest. Fahre dann mit dem nächst größeren g fort.

g	n	$\frac{1}{g} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2}$	k	Name
3	3	$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{2+2-3}{6} = \frac{1}{6}$	6	Tetraeder
3	4	$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{4+3-6}{12} = \frac{1}{12}$	12	Würfel
3	5	$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} = \frac{10+6-15}{30} = \frac{1}{30}$	30	Dodekaeder
3	6	$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = \frac{2+1-3}{6} = 0$	–	
4	3	$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$	12	Oktaeder
4	4	$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 0$	–	
5	3	$\frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{30}$	30	Ikosaeder
5	4	$\frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{4+5-10}{20} < 0$	–	
6	3	$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = \frac{2+1-3}{6} = 0$	–	

Warum sind wir mit den hier betrachtetet Werten für g und n fertig und müssen nicht alle möglichen Kombinationen durchgehen? Für höhere Werte von g, n ist die Summe der Brüche negativ, daher gibt es kein k und keinen platonischen Graphen.

Aufgabe 11

Gegeben ist der nebenstehende ebene Graph. Er ist isomorph zu dem Graphen eines Polyeders.



a) Aus was für n-Ecken bestehen die Seiten des Polyeders?

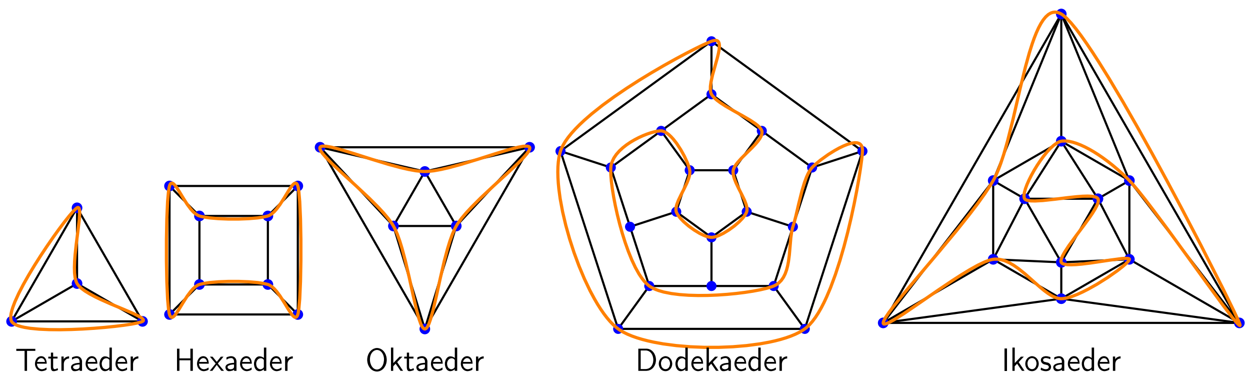
b) Warum kann das zugehörige Polyeder nicht platonisch sein?

Lösung: **a)** Die Seiten bestehen aus Dreiecken, auch die äußere Fläche wird durch drei Kanten begrenzt.

b) Es gibt Ecken mit Eckengrad 5 (die meisten) und Ecken mit Eckengrad 6 (im Graphen rot markiert). Bei einem platonischen Körper müssten alle Eckengrade gleich sein.

Aufgabe 12

Untersuche ob die 5 platonischen Graphen eulersch und/oder hamiltonsch sind.



	Tetraeder	Hexaeder	Oktaeder	Dodekaeder	Ikosaeder
ist eulersch	Nein	Nein	Ja	Nein	Nein
ist hamiltonsch	Ja	Ja	Ja	Ja	Ja

Lösung: Damit ein Graph eulersch ist, müssen alle Eckengrade geradzahlig sein.

In den Graphiken sind hamiltonsche Kreise eingezeichnet.