Graphentheorie

zum Selbstlernen

Vorwort

Dies ist ein Skript zum Selbststudium. Du kannst hier Grundlagen der Graphentheorie kennenlernen.

Der Text ist im Wesentlichen der Mitschrieb aus einem Online-Kurs *Graphentheorie* im Schülerseminar für Klasse 8-10. Du findest diesen und andere Kurse auf der Seite

`https://pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/iadm/Zirkel/material-Schuelerseminar/`

Falls Du beim Studium des vorliegenden Textes Fragen hast, kannst Du beim Online-Kurs im entsprechenden Video nachsehen, dort gibt es ausführlichere Erklärungen. Um die Verbindung zu finden, ist am Rand des Textes markiert, wann die einzelnen Einheiten des Online-Kurses beginnen.

Die Aufgaben sind auch dieselben wie im Online-Kurs. Im Lerntext sind keine Lösungen dabei, damit Du sie selber lösen kannst. Bei den Aufgaben ist oft Platz, um Deine Lösungen aufzuschreiben. Manchmal musst Du aber auch ein extra Blatt für die Berechnungen dazunehmen. Falls Du Deine Lösungen überprüfen willst, stehen alle Aufgaben mit Lösungen im letzten Kapitel dieses Skripts.

Ich wünsche Dir viel Spaß beim Durcharbeiten des Skripts und bei den Aufgaben!

6. Dezember 2024 Peter Lesky

Inhalt

Auf den nächsten Seiten findest Du das Skript mit Aufgaben zur sechsten Einheit *Plättbare und nicht plättbare Graphen*. Die weiteren Teile werden bei den entsprechenden Einheiten veröffentlicht.

Beginn Online-Einheit 6

Zur Erinnerung:

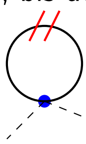
- Ein einfacher Graph ist ein Graph, der keine Schlingen und keine parallelen Kanten besitzt.
- Bei einem ebenem Graphen haben die Kanten keine Punkte gemeinsam außer Ecken.
- Ein plättbarer Graph besitzt einen isomorphen ebenen Graphen.
- In der letzten Aufgabe haben wir gesehen, dass $e+k-f$ für alle betrachteten Graphen gleich war.
  Insbesondere gilt für einen Baum mit n Ecken
  $$e = n,\ k = n-1 \text{ (früherer Satz)},\ f = 1 \ \Rightarrow\ e-k+f = n-(n-1)+1 = 2.$$

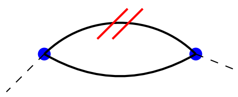
<u>Satz:</u> Für jeden zusammenhängenden ebenen Graphen gilt die <u>eulersche Flächenformel</u>

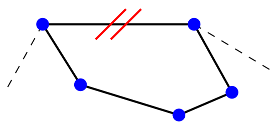
$$e - k + f = 2.$$

Hierbei bezeichnet e die Anzahl der Ecken, k die Anzahl der Kanten und f die Anzahl der Flächen. Die äußere Fläche muss mitgezählt werden.

<u>Beweis:</u> Betrachte einen zusammenhängenden ebenen Graphen mit e Ecken, k Kanten und f Flächen. Entferne so lange Kanten, bis der entstehende Teilgraph ein Baum ist.

Entfernen einer Schlinge:  f und k werden jeweils um 1 kleiner, e bleibt gleich
$\Rightarrow\ e-k+f$ bleibt gleich.

Entfernen einer parallelen Kante:  genauso

Entfernen einer Kante aus einem Kreis:  genauso

Wir können also alle Kreise „öffnen“, ohne den Wert von $e-k+f$ zu ändern. Der Graph bleibt zusammenhängend.

Am Ende bleibt ein Baum mit e Ecken übrig. Für diesen gilt $e-k+f=2$ (letzte Aufgabe).
$\Rightarrow$ Für den ursprünglich gegebenen Graphen gilt ebenfalls $e-k+f=2$. □

Aufgabe 1

a) Ein zusammenhängender ebener Graph besitzt 13 Kanten und unterteilt die Ebene in 9 Flächen. Wie viele Ecken hat er?

b) Ein zusammenhängender ebener Graph hat 5 Ecken und 7 Flächen. Wie viele Kanten hat er?

c) Zeichne jeweils für a) und b) einen ebenen Graphen, der diese Eigenschaften hat. Sind die Graphen, die Du gezeichnet hast, einfach?

Aufgabe 2

a) Zeichne einen eben Graphen mit 7 Flächen, der nicht zusammenhängend ist und aus zwei Komponenten besteht. Berechne $e + k - f$.

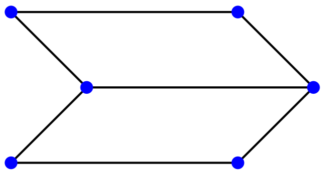
b) Zeichne einen eben Graphen mit 6 Flächen, der nicht zusammenhängend ist und aus drei Komponenten besteht. Berechne $e + k - f$.

c) Sei ein ebener Graph mit e Ecken, k Kanten und f Flächen gegeben, der aus n Komponenten besteht. Stelle eine Vermutung für den Wert von $e + k - f$ in Abhängigkeit von n auf. Überprüfe, ob Deine Formel auch für $n = 1$ stimmt. In diesem Fall ist der Graph zusammenhängend.

Ist ein Graph plättbar, so können wir dies überprüfen, indem wir einen isomorphen ebenen Graphen zeichnen. Wir wollen nun Werkzeuge kennenlernen, mit deren Hilfe wir feststellen können, ob ein Graph plättbar oder nicht plättbar ist. Dazu betrachten wir zunächst ebene Graphen mit möglichst vielen Kanten.

<u>Definition:</u> Ein Graph heißt <u>vollständig eben</u>, wenn er einfach und eben ist und ihm keine Kante hinzugefügt werden kann, ohne dass seine Eigenschaft, einfach und eben zu sein, verloren geht.

Aufgabe 3
Gegeben ist der folgende Graph.



Ergänze möglichst viele Kanten, so dass der entstehende Graph einfach und eben ist. Wie viele Kanten kannst Du ergänzen?

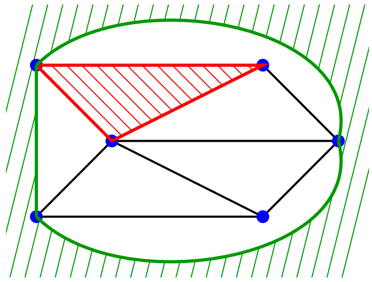
Nachdem Du möglichst viele Kanten ergänzt hast, stellt sich die Frage, ob wirklich nicht mehr Kanten ergänzt werden können.

Dieser Frage gehen wir im nächsten Satz nach. Dazu ziehen wir auf der folgenden Seite Schlussfolgerungen aus der Lösung dieser Aufgabe, die wir dann beim Beweis des Satzes benützen können.

Weiter auf nächster Seite

Rechts sind die Lösung und zwei markierte Flächen zu sehen.

Nachdem wir möglichst viele Kanten ergänzt haben, sehen wir, dass alle Flächen Dreiecke sind. Auch die grün markierte Außenfläche wird von drei Kanten begrenzt.



Satz: Ein vollständig ebener Graph mit $e \geq 3$ Ecken besitzt $k = 3 \cdot e - 6$ Kanten.

Beweis: Betrachte einen vollständig ebenen Graphen.
Er ist zusammenhängend, denn sonst könnte man noch eine Kante ergänzen.
$\Rightarrow$ Es gilt die eulersche Formel $f = 2 + k - e$.
Jede innere Fläche ist ein Dreieck, denn sonst könnte noch eine Kante eingefügt werden.
Die äußere Fläche wird auch von 3 Kanten begrenzt, denn sonst könnte man außen noch eine Kante ergänzen.
Addiert man die Anzahl der Kanten, die die Dreiecke begrenzen, so zählt man jede Kante doppelt.
$\Rightarrow$ $2k = 3f = 3(2 + k - e)$
$\Rightarrow$ $2k = 6 + 3k - 3e \Leftrightarrow 0 = 6 + k - 3e \Leftrightarrow k = 3e - 6.$ □

Wir können nun kontrollieren, ob die letzte Aufgabe richtig gelöst wurde. Der Graph hat $e = 6$ Ecken. Da er einfach und eben sein soll, kann er höchstens $3 \cdot e - 6 = 12$ Kanten besitzen. Nachdem 5 Kanten ergänzt wurden, besitzt der Graph 12 Kanten. Wir haben also alle möglichen Kanten gefunden.

Folgerung: Ein einfacher ebener Graph mit $e \geq 3$ Ecken besitzt höchstens $k = 3e - 6$ Kanten.

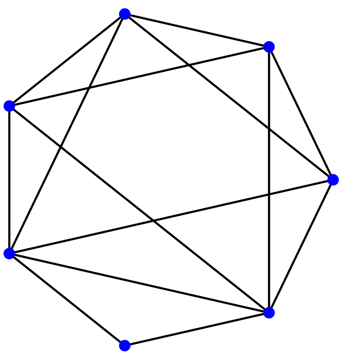
Aufgabe 4
Gegeben ist der unten links gezeichnete Graph.

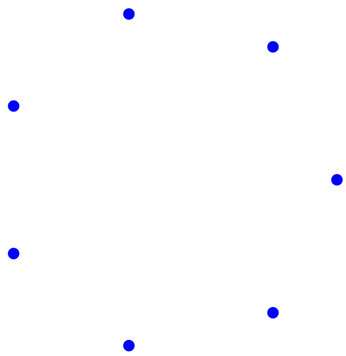
a) Beweise, dass der Graph plättbar ist, indem Du daneben einen isomorphen ebenen Graphen zeichnest.

b) Wie viele Ecken und Kanten besitzt der Graph? $e = \boxed{}$, $k = \boxed{}$.

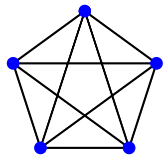
c) Warum ist der Graph nicht vollständig eben?

d) Ergänze (zuerst im rechten, dann im linken Graphen) so viele Kanten (in rot), bis der Graph vollständig eben ist.





Aufgabe 5
Gegeben ist das vollständige Fünfeck, siehe rechts.



a) Warum ist das vollständige Fünfeck einfach?

Antwort: $\boxed{}$

b) Wie viele Ecken und Kanten hat das vollständige Fünfeck? $e = \boxed{}$, $k = \boxed{}$.

c) Angenommen, das vollständige Fünfeck wäre plättbar. Dann besitzt es einen isomorphen einfachen und ebenen Graphen. Wie viele Ecken und Kanten hat der isomorphe Graph?

Antwort: $e = \boxed{}$, $k = \boxed{}$.

d) Für diesen isomorphen einfachen und ebenen Graphen gilt $3e - 6 = \boxed{}$,

e) Warum gibt es diesen isomorphen ebenen und einfachen Graphen nicht?

Antwort: $\boxed{}$

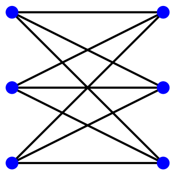
f) Also ist die Annahme, das vollständige Fünfeck wäre plättbar, $\boxed{}$.

Durch die Lösung der letzten Aufgabe hast Du den folgenden Satz bewiesen.

Satz: Ein vollständiges Fünfeck ist nicht plättbar.

Nun folgt das zweite wichtige Beispiel für einen nicht plättbaren Graphen.

Satz: Der vollständige 3–3–Graph ist nicht plättbar.



Beweisversuch:
$e = 6 \;\Rightarrow\; 3 \cdot e - 6 = 12$
Es gilt $k = 9 \leq 12$, also kein Widerspruch

Das klappt nicht, der Graph hat zu wenig Kanten. Zum Beweis wird eine andere Idee benötigt: Suche möglichst kurze Kreise im vollständigen 3–3–Graphen.

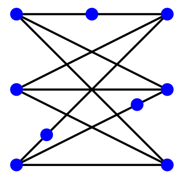
Alle Kreise im Graphen haben mindestens 4 Ecken bzw. 4 Kanten. Diese Eigenschaft können wir im Beweis verwenden.

Beweis: Annahme: Der vollständige 3–3–Graph ist plättbar
Dann gibt es einen isomorphen ebenen Graphen.
Der ebene Graph hat $e = 6$ Ecken und $k = 9$ Kanten.
eulersche Formel $\Rightarrow$ $f = 2 + k - e = 5$
Der ebene Graph hat, wie der vollständige 3–3–Graph, nur Kreise mit mindestens 4 Ecken.
$\Rightarrow$ jede Fläche wird von mindestens 4 Kanten begrenzt, auch die Außenfläche
Addiert man die Anzahl der begrenzenden Kanten, so zählt man jede Kante doppelt
$\Rightarrow$ $2k \geq 4f = 20 \;\Rightarrow k \geq 10$ ↯ Denn er besitzt nur 9 Kanten
$\Rightarrow$ die Annahme muss falsch sein
$\Rightarrow$ der vollständige 3–3–Graph ist nicht plättbar. □

Satz: Ist ein Graph plättbar, dann sind auch alle seine Teilgraphen plättbar. Insbesondere: Besitzt ein Graph auch nur einen Teilgraphen, der nicht plättbar ist, dann ist der Graph nicht plättbar.

Beweisskizze: Gibt es zu einem Graphen einen isomorphen ebenen Graphen, dann gibt es zu jedem Teilgraphen einen isomorphen Teilgraphen des ebenen Graphen. Und der ist dann eben.

Beobachtung: Fügen wir im vollständigen 3–3–Graphen zusätzliche Ecken auf bereits bestehenden Kanten ein wie in der Graphik rechts, so ändert dies nichts daren, dass der Graph nicht plättbar ist.



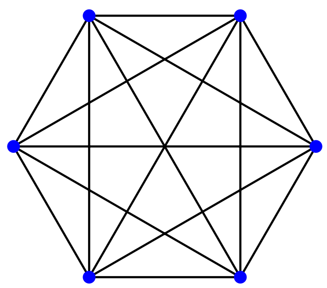
Definition: Fügt man in einem Graphen zusätzliche Ecken auf den bereits bestehenden Kanten ein, so erhält man eine Unterteilung des Graphen.
Durch eine zusätzliche Ecke werden aus einer Kante zwei neue Kanten.

Satz von Kuratowski: Ein Graph ist genau dann nicht plättbar, wenn er einen Teilgraphen enthält, der isomorph zu einem vollständigen Fünfeck oder einem vollständigen bipartiten 3-3-Graphen oder einer Unterteilung eines dieser beiden Graphen ist.

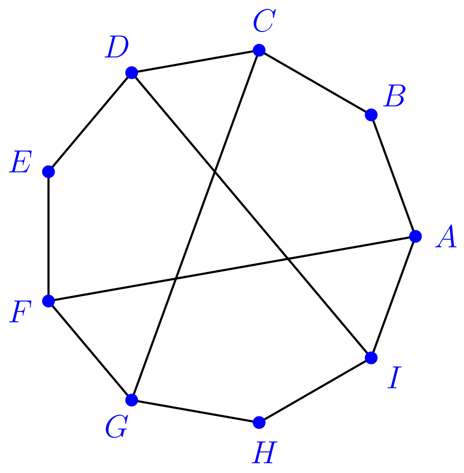
Auf den Beweis dieses Satzes verzichten wir.

Aufgabe 6
Gegeben ist das vollständige Sechseck, siehe rechts.

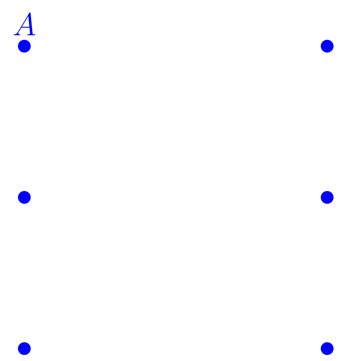
Beweise, dass das vollständige Sechseck nicht plättbar ist, indem Du einen Teilgraphen farbig markierst, der isomorph zu einem vollständigen Fünfeck ist.



Aufgabe 7
Beweise, dass der unten gezeichnete Graph nicht plättbar ist. Weise dazu nach, dass er isomorph zu einer Unterteilung des vollständigen 3–3–Graphen ist. Zeichne dazu rechts den vollständigen 3–3–Graphen mit den vorgegebenen Ecken. Bezeichne dann die Ecken so, dass die Kanten des rechten Graphen denen im linken Graphen entsprechen. Dazu musst Du noch 3 Unterteilungsecken im rechten Graphen passend einfügen.
Hinweis: Die Ecke im rechten Graphen, die der Ecke A im linken Graphen entsprechen soll, ist bereits bezeichnet.



Lösung:



Lösungen der Aufgaben

Aufgabe 1

a) Ein zusammenhängender ebener Graph besitzt 13 Kanten und unterteilt die Ebene in 9 Flächen. Wie viele Ecken hat er?

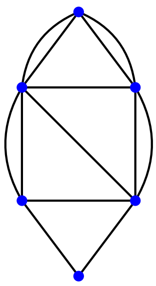
b) Ein zusammenhängender ebener Graph hat 5 Ecken und 7 Flächen. Wie viele Kanten hat er?

c) Zeichne jeweils für a) und b) einen ebenen Graphen, der diese Eigenschaften hat. Sind die Graphen, die Du gezeichnet hast, einfach?

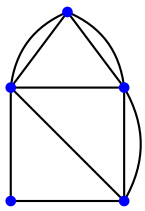
Lösung: **a)** $e-k+f=2 \;\Rightarrow\; e=2+k-f$. Hier ist $k=13$ und $f=9$, also ist $e=2+13-9=6$.

b) $e-k+f=2 \;\Rightarrow\; k=e+f-2$. Hier ist $e=5$ und $f=7$, also ist $k=5+7-2=10$.

c) Zu a):



Zu b):



Die Graphen sind nicht einfach, da sie parallele Kanten (oder je nach Lösung Schlingen) besitzen.

Hinweis: Ein einfacher ebener Graph kann höchstens $3e-6$ Kanten besitzen, siehe später.

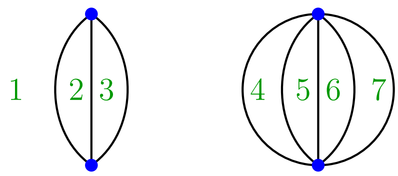
Aufgabe 2

a) Zeichne einen eben Graphen mit 7 Flächen, der nicht zusammenhängend ist und aus zwei Komponenten besteht. Berechne $e+k-f$.

b) Zeichne einen eben Graphen mit 6 Flächen, der nicht zusammenhängend ist und aus drei Komponenten besteht. Berechne $e+k-f$.

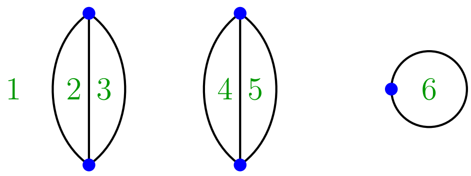
c) Sei ein ebener Graph mit e Ecken, k Kanten und f Flächen gegeben, der aus n Komponenten besteht. Stelle eine Vermutung für den Wert von $e+k-f$ in Abhängigkeit von n auf. Überprüfe, ob Deine Formel auch für $n=1$ stimmt. In diesem Fall ist der Graph zusammenhängend.

Lösung: **a)**



$e-k+f=4-8+7=3.$

b)



$e-k+f=5-7+6=4.$

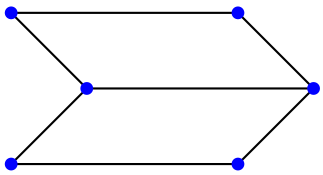
c) Es gilt $e-k+f=n+1$. Diese Formel ist für $n=1$ identisch mit der eulerschen Formel.

Man kann diese Formel beweisen, indem man die eulersche Formel auf jede Komponente anwendet und dann die Gleichungen addiert. Dabei wird die äußere Fläche n Mal gezählt anstelle von 1 Mal. Man muss also $(n-1)$ abziehen und erhält

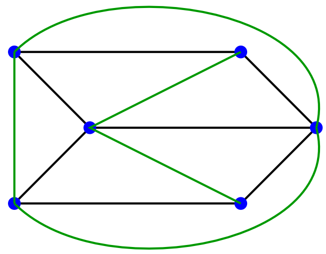
$$e-k+f \;=\; 2n-(n-1) \;=\; n+1.$$

Aufgabe 3

Gegeben ist der folgende Graph.



Lösung:



Ergänze möglichst viele Kanten, so dass der entstehende Graph einfach und eben ist. Wie viele Kanten kannst Du ergänzen?

Aufgabe 4

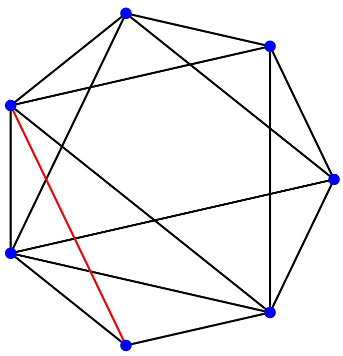
Gegeben ist der unten links gezeichnete Graph.

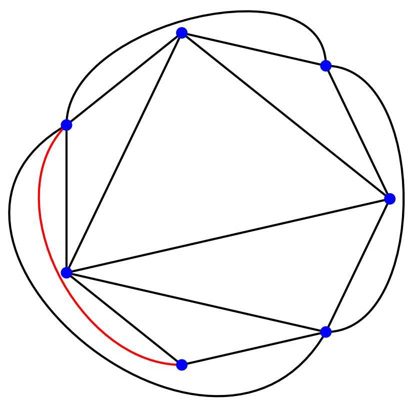
a) Beweise, dass der Graph plättbar ist, indem Du daneben einen isomorphen ebenen Graphen zeichnest.

b) Wie viele Ecken und Kanten besitzt der Graph? $e = \boxed{7}$, $k = \boxed{13}$.

c) Warum ist der Graph nicht vollständig eben?

d) Ergänze (zuerst im rechten, dann im linken Graphen) so viele Kanten (in rot), bis der Graph vollständig eben ist.

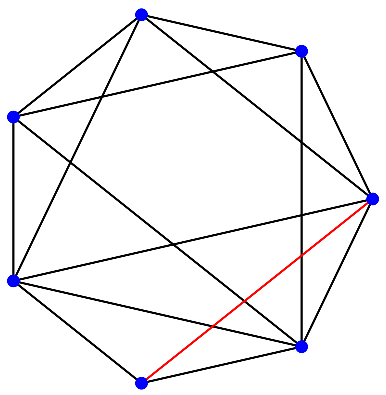


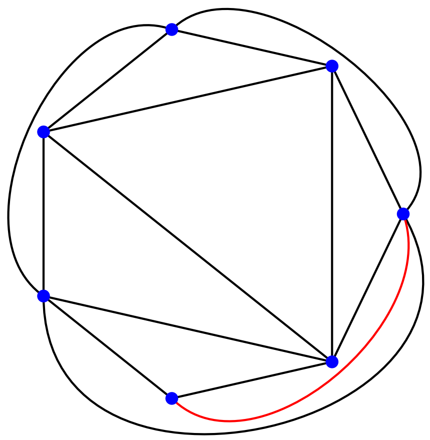


Lösung: **a)** und **b)** Siehe oben.

c) Ein vollständiger Graph mit 7 Ecken muss $k = 3 \cdot 7 - 6 = 15$ Kanten besitzen. Der gegebene Graph besitzt jedoch nur 14 Kanten.
Andere Antwort: In Teil c) kann eine Kante ergänzt werden, also ist der Graph nicht vollständig eben.

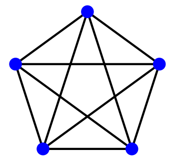
d) Aus der Formel des letzten Satzes folgt, dass genau eine Kante ergänzt werden muss. Eine Lösung siehe Graphik oben. Je nachdem, wie die Lösung von a) gezeichnet wurde, muss die rote Kante entsprechend gewählt werden. Hier eine andere Lösung:





Aufgabe 5

Gegeben ist das vollständige Fünfeck, siehe rechts.



a) Warum ist das vollständige Fünfeck einfach?

Antwort: Es besitzt keine Schlingen und keine parallelen Kanten.

b) Wie viele Ecken und Kanten hat das vollständige Fünfeck? $e = \boxed{5}$, $k = \boxed{10}$.

c) Angenommen, das vollständige Fünfeck wäre plättbar. Dann besitzt es einen isomorphen einfachen und ebenen Graphen. Wie viele Ecken und Kanten hat der isomorphe Graph?

Antwort: $e = \boxed{5}$, $k = \boxed{10}$.

d) Für diesen isomorphen einfachen und ebenen Graphen gilt $3e - 6 = \boxed{9}$,

e) Warum gibt es diesen isomorphen ebenen und einfachen Graphen nicht?

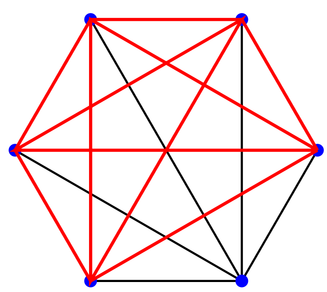
Antwort: Ein ebener einfacher Graph besitzt höchstens 9 Kanten.
Der isomorphe Graph besitzt jedoch 10 Kanten.
Also kann er nicht einfach und eben sein.

f) Also ist die Annahme, das vollständige Fünfeck wäre plättbar, falsch.

Aufgabe 6

Gegeben ist das vollständige Sechseck, siehe rechts.

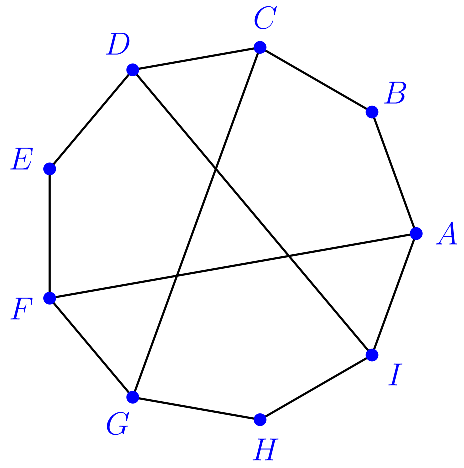
Beweise, dass das vollständige Sechseck nicht plättbar ist, indem Du einen Teilgraphen farbig markierst, der isomorph zu einem vollständigen Fünfeck ist.



Aufgabe 7

Beweise, dass der unten gezeichnete Graph nicht plättbar ist. Weise dazu nach, dass er isomorph zu einer Unterteilung des vollständigen 3–3–Graphen ist. Zeichne dazu rechts den vollständigen 3–3–Graphen mit den vorgegebenen Ecken. Bezeichne dann die Ecken so, dass die Kanten des rechten Graphen denen im linken Graphen entsprechen. Dazu musst Du noch 3 Unterteilungsecken im rechten Graphen passend einfügen.

Hinweis: Die Ecke im rechten Graphen, die der Ecke A im linken Graphen entsprechen soll, ist bereits bezeichnet.



Lösung: