Graphentheorie

zum Selbstlernen

Vorwort

Dies ist ein Skript zum Selbststudium. Du kannst hier Grundlagen der Graphentheorie kennenlernen.

Der Text ist im Wesentlichen der Mitschrieb aus einem Online-Kurs *Graphentheorie* im Schülerseminar für Klasse 8-10. Du findest diesen und andere Kurse auf der Seite

`https://pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/iadm/Zirkel/material-Schuelerseminar/`

Falls Du beim Studium des vorliegenden Textes Fragen hast, kannst Du beim Online-Kurs im entsprechenden Video nachsehen, dort gibt es ausführlichere Erklärungen. Um die Verbindung zu finden, ist am Rand des Textes markiert, wann die einzelnen Einheiten des Online-Kurses beginnen.

Die Aufgaben sind auch dieselben wie im Online-Kurs. Im Lerntext sind keine Lösungen dabei, damit Du sie selber lösen kannst. Bei den Aufgaben ist oft Platz, um Deine Lösungen aufzuschreiben. Manchmal musst Du aber auch ein extra Blatt für die Berechnungen dazunehmen. Falls Du Deine Lösungen überprüfen willst, stehen alle Aufgaben mit Lösungen im letzten Kapitel dieses Skripts.

Ich wünsche Dir viel Spaß beim Durcharbeiten des Skripts und bei den Aufgaben!

25. Oktober 2024 Peter Lesky

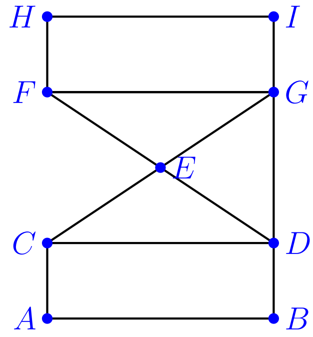
Inhalt

Auf den nächsten Seiten findest Du das Skript mit Aufgaben zur dritten Einheit *Hamiltonsche Graphen, Kreise und Bäume*. Die weiteren Teile werden bei den entsprechenden Einheiten veröffentlicht.

Beginn Online-Einheit 3

Aufgabe 1

Gegeben ist der nebenstehende einfache Graph.



a) Gib einen Kantenzug an, der A und F verbindet.

Antwort:

b) Warum ist der Graph hamiltonsch?

Antwort:

c) Gib einen geschlossenen Kantenzug an, der durch alle Ecken des Graphen verläuft, keine Kante zwei Mal benützt und trotzdem kein hamiltonscher Kreis ist.

Antwort:

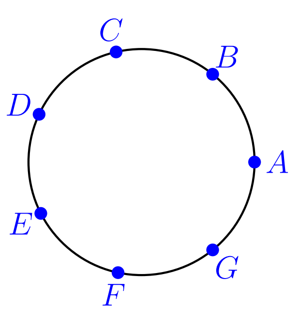
Es ist nicht immer einfach, einen hamiltonschen Kreis zu finden. Aber der folgende Satz besagt, dass ein Graph hamiltonsch ist, wenn er genügend viele Kanten besitzt.

Satz von Dirac: Ein Graph mit $n \geq 3$ Ecken, der einfach und zusammenhängend ist und bei dem $\mathrm{Grad}(E) \geq \frac{n}{2}$ für jede Ecke E gilt, ist hamiltonsch.

Ohne Beweis. Wir benötigen diesen Satz im Weiteren nicht.

Dieser Satz gibt eine hinreichende Bedingung an. Wenn die Voraussetzungen des Satzes ($n \geq 3$, Graph einfach und zusammenhängend, $\mathrm{Grad}(E) \geq \frac{n}{2}$ für jede Ecke E) erfüllt sind, dann ist der Graph hamiltonsch. Es gibt jedoch hamiltonsche Graphen, die nicht alle Voraussetzungen des Satzes erfüllen.

Beispiel: Hamiltonscher Graph mit 7 Ecken und möglichst wenig Kanten



Graph 1

Wir sehen: Jeder Eckengrad ist 2, und das ist kleiner als $\frac{7}{2}$.

Im Folgenden werden verschiedene Eigenschaften hamiltonscher Graphen zusammengestellt. Ist eine dieser Eigenschaften nicht erfüllt, dann ist der Graph nicht hamiltonsch.

Satz: 1) Ein hamiltonscher Graph ist zusammenhängend.
2) Für jede Ecke E in einem hamiltonschen Graphen gilt $\mathrm{Grad}(E) \geq 2$.

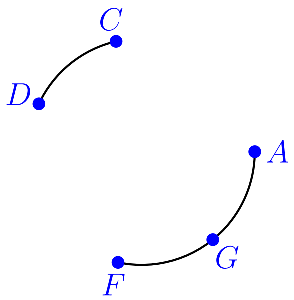
Beweis: 1) Seien E, E' zwei beliebige Ecken des Graphen. Da sie auf einem hamiltonschen Kreis liegen, gibt es einen Kantenzug, der die beiden Ecken verbindet.
2) E liegt auf einem hamiltonschen Kreis, also folgt $\mathrm{Grad}(E) \geq 2$. □

Umgekehrt bedeutet dieser Satz: Ist ein Graph nicht zusammenhängend, so ist er nicht hamiltonsch. Oder gibt es eine Ecke E mit $\mathrm{Grad}(E) \leq 1$, so ist der Graph nicht hamiltonsch.

Die beiden Eigenschaften dieses Satzes sind nicht sehr kraftvoll. Um bessere Kriterien dafür zu formulieren, dass ein Graph nicht hamiltonsch ist, müssen wir den Begriff *Löschen von Ecken* definieren.

Definition: 1) Sei E eine Ecke in einem Graphen. E wird aus dem Graphen gelöscht, indem man E und alle Kanten, die E mit sich oder anderen Ecken verbinden, aus dem Graphen entfernt.
2) Ein Graph H heißt Teilgraph eines Graphen G, wenn alle Ecken und Kanten von H auch Ecken und Kanten von G sind.

Beispiel: Lösche aus Graph 1 die Ecken B und E.



Graph 2

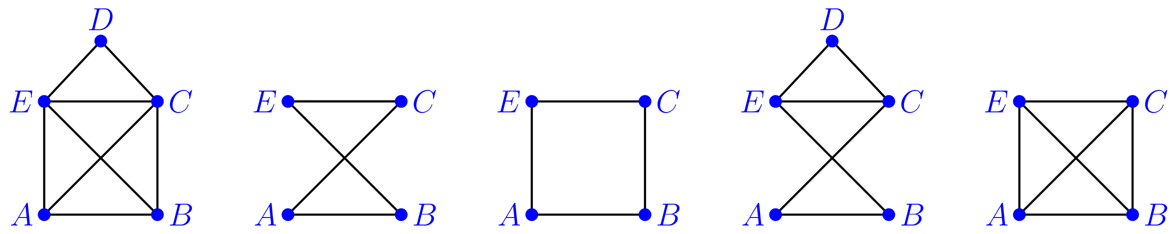
Graph 2 ist ein Teilgraph von Graph 1. Graph 2 besteht aus zwei Teilgraphen, die jeder für sich zusammenhängend sind.

Wir definieren nun einen Fachbegriff, mit dem beschrieben werden kann, dass Graph 2 aus zwei „Teilen" besteht.

Definition: Die maximal großen zusammenhängenden Teilgraphen eines Graphen heißen die Komponenten des Graphen. Ist ein Graph zusammenhängend, so besteht er aus einer Komponente.

Graph 2 besteht also aus zwei Komponenten, Graph 1 aus einer.

Aufgabe 2
Welcher der Graphen ist Teilgraph von einem oder von mehreren der skizzierten Graphen? Trage Deine Antworten in die Tabelle ein. Überlege Dir, ob ein Graph Teilgraph von sich selber sein kann (eventuell Definition nachsehen).

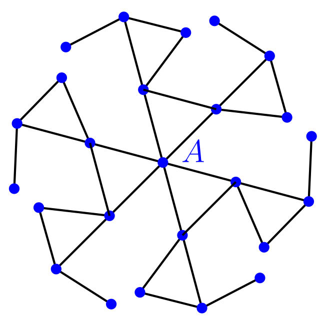


Graph 1 Graph 2 Graph 3 Graph 4 Graph 5

Graph 1 ist Teilgraph des Graphen	
Graph 2 ist Teilgraph des Graphen	
Graph 3 ist Teilgraph des Graphen	
Graph 4 ist Teilgraph des Graphen	
Graph 5 ist Teilgraph des Graphen	

Aufgabe 3
In wie viele Komponenten zerfällt nebenstehender Graph, wenn die Ecke A gelöscht wird?

Antwort: In $\boxed{}$ Komponenten

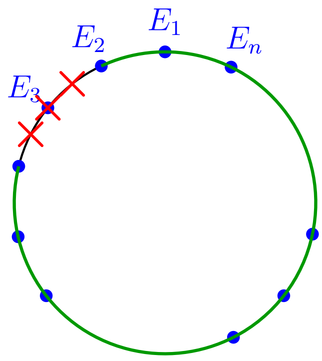


Wir sehen oben, dass der hamiltonsche Graph 1 nach dem Löschen zweier Ecken in zwei Komponenten zerfällt. Der folgende Satz beschreibt dies allgemeiner.

Satz: In einem hamiltonschen Graphen mit n Ecken gelten:
1) Löscht man eine Ecke, so ist der entstehende Teilgraph zusammenhängend.
2) Löscht man zwei Ecken, so zerfällt der entstehende Teilgraph in höchstens zwei Komponenten.
3) Löscht man m Ecken ($m < n$), so zerfällt der entstehende Teilgraph in höchstens m Komponenten.

Zur Veranschaulichung der Beweisidee verwenden wir einen hamiltonschen Graphen mit möglichst wenig Kanten.

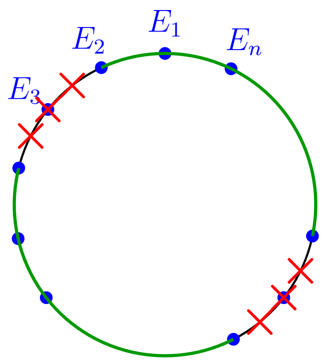
Beweisidee für den Satz über Eckenlöschen in hamiltonschen Graphen:



Löschen **einer** Ecke:

Der entstehende Graph

ist zusammenhängend

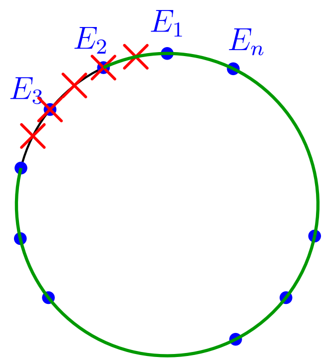


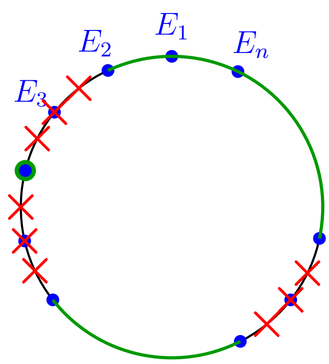
Löschen von **zwei** Ecken:

Der entstehende Graph

zerfällt in zwei Komponenten

oder bleibt zusammenhängend





Löschen von **drei** Ecken:

Der entstehende Graph

zerfällt in drei Komponenten

oder zerfällt in zwei Komponenten

oder bleibt zusammenhängend

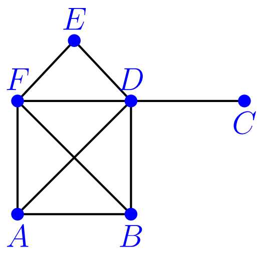
Wir sehen, dass beim Löschen einer Ecke höchstens eine Komponente in zwei Komponenten aufgeteilt werden kann. Beim Löschen einer Ecke erhöht sich also die Anzahl der Komponenten höchstens um 1. Damit folgt die Aussage des Satzes.

Wenn der Graph mehr Kanten besitzt, dann zerfällt er beim Löschen von Ecken eventuell in weniger Komponenten. Aber er zerfällt sicher nicht in mehr Komponenten.

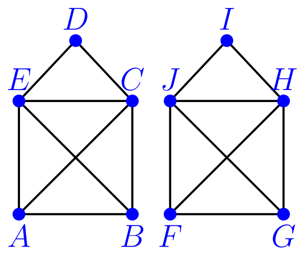
Umgekehrt bedeutet dieser Satz z.B.: Zerfällt ein Graph nach dem Löschen von 2 Ecken in drei Komponenten, dann ist er nicht hamiltonsch.

Aufgabe 4
Gib für jeden der Graphen unter Verwendung eines der letzten beiden Sätze eine Begründung dafür an, dass er nicht hamiltonsch ist.

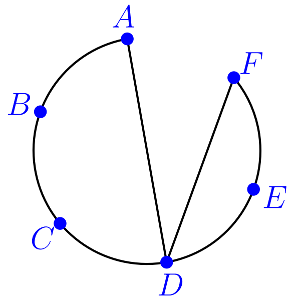
a)



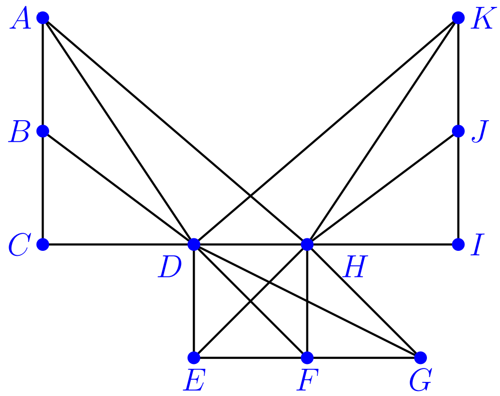
b)



c)



d)

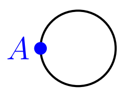


6 Wege und Kreise

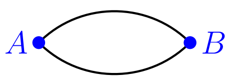
Definition: Ein Kantenzug heißt Weg, wenn er jede Ecke des Graphen höchstens ein Mal durchläuft und jede Kante höchstens ein Mal benützt. Anfangs- und End-Ecke dürfen übereinstimmen (diese Ecke wird auch nur ein Mal durchlaufen).

Definition: Ein Kreis ist ein Weg, der geschlossen ist.

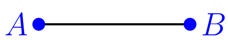
Beispiele:



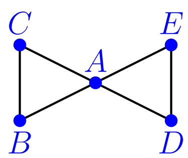
A-A: kleinst möglicher Kreis



A-B-A: Kreis mit zwei Ecken und zwei Kanten



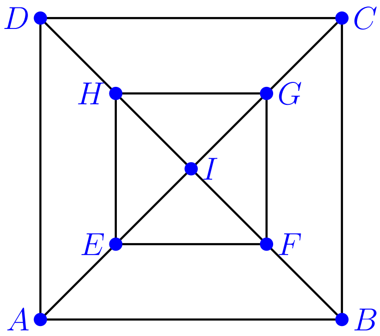
A-B-A: Kein Weg, kein Kreis



A-B-C-A-D-E-A: kein Weg und kein Kreis

Beachte: Jeder hamiltonsche Kreis ist ein Kreis, aber nicht umgekehrt.

Aufgabe 5
Gib im folgenden Graphen einen hamiltonschen Kreis und drei verschiedene nicht hamiltonsche Kreise an.

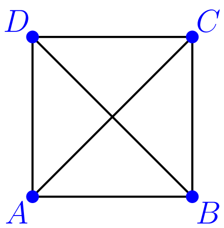


Hamiltonscher Kreis:

Nicht hamiltonsche Kreise:

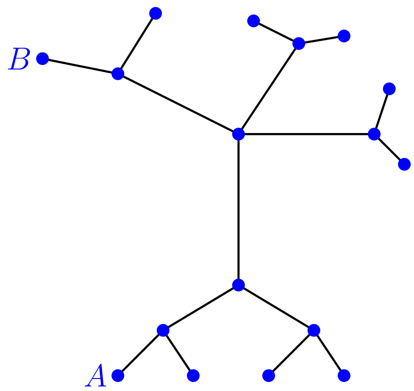
Aufgabe 6
Wie viele verschiedene Wege gibt es jeweils, die A und B verbinden?

a)



Antwort: Es gibt ☐ Weg(e)

b)



Antwort: Es gibt ☐ Weg(e)

7 Bäume

Definition: Ein Graph, der zusammenhängend ist und keinen Kreis enthält, heißt Baum

Folgerung: Ein Baum enthält keine Schlingen und keine parallelen Kanten.

Warum ergibt sich die Folgerung direkt aus dem Beweis?

Satz: In einem Baum gibt es von jeder Ecke zu jeder anderen Ecke genau einen Weg.

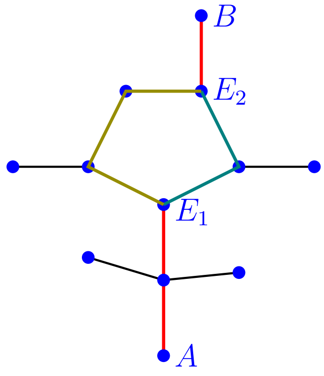
Beweis: Betrachte einen Baum.

1) Da der Baum zusammenhängend ist, gibt es von jeder Ecke zu jeder anderen mindestens einen Weg.

2) Nun beweisen wir, dass es von jeder Ecke zu jeder anderen höchstens einen Weg gibt. Dazu führen wir einen Widerspruchsbeweis.

Annahme: Es gibt im Baum zwei Ecken A und B, so dass mindestens zwei verschiedene Wege von A nach B existieren.

Wir gehen von A aus beide Wege so lange entlang, bis wir die erste Ecke erreicht haben, bei der sich die Wege trennen. Diese nennen wir E_1. Falls sich die Wege bereits in der ersten Kante unterscheiden, nennen wir A um in E_1. Dann gehen wir beide Wege so lange entlang, bis wir auf der erste Ecke stoßen, die sie wieder gemeinsam haben. Wir nennen diese Ecke E_2.



$\Rightarrow$ Der zusammengesetzte Weg von E_1 nach E_2 entlang des einen Weges und von E_2 nach E_1 entlang des anderen Weges ist ein Kreis.

Also gibt es im Baum einen Kreis $\lightning$

Also war die Annahme falsch, und für beliebige Ecken A, B gibt es nicht mehr als einen Weg von A nach B. $\square$

Aufgabe 7

Zeichne jeweils einen Graphen, der ein Baum ist und die angegebenen Eigenschaften besitzt.

a) Der Baum besitzt 7 Ecken und eine davon hat Eckengrad 5.

b) Der Baum besitzt 10 Ecken und zwei davon haben Eckengrad 5.

Aufgabe 8

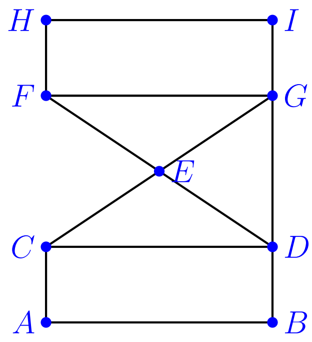
a) Zeichne einen einfachen Graphen mit 8 Ecken und 8 Kanten, der hamiltonsch ist und nach Löschen einer Ecke ein Baum ist.

b) Zeichne einen einfachen Graphen mit 8 Ecken und 13 Kanten, der hamiltonsch ist und nach Löschen einer Ecke ein Baum ist.

Lösungen der Aufgaben

Aufgabe 1

Gegeben ist der nebenstehende einfache Graph.



a) Gib einen Kantenzug an, der A und F verbindet.

Antwort: $A - C - E - F$

b) Warum ist der Graph hamiltonsch?

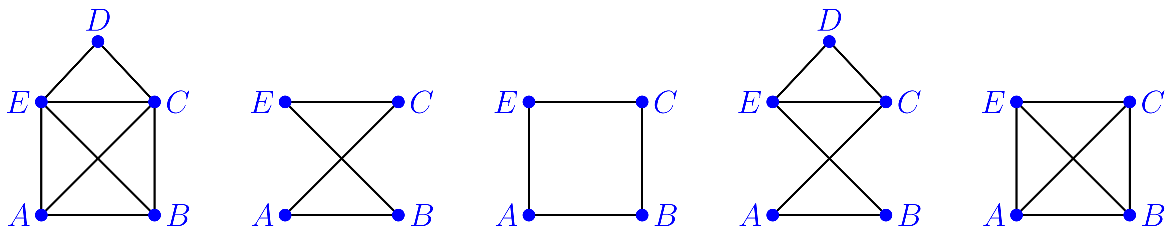
Antwort: Er enthält einen hamiltonschen Kreis: $A - B - D - G - I - H - F - E - C - A$

c) Gib einen geschlossenen Kantenzug an, der durch alle Ecken des Graphen verläuft, keine Kante zwei Mal benützt und trotzdem kein hamiltonscher Kreis ist.

Antwort: Z.B. $A - B - D - E - G - I - H - F - E - C - A$

Aufgabe 2

Welcher der Graphen ist Teilgraph von einem oder von mehreren der skizzierten Graphen? Trage Deine Antworten in die Tabelle ein. Überlege Dir, ob ein Graph Teilgraph von sich selber sein kann (eventuell Definition nachsehen).



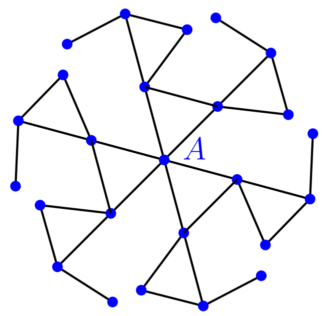
Lösung:

Graph 1 ist Teilgraph des Graphen	1
Graph 2 ist Teilgraph des Graphen	1, 2, 4, 5
Graph 3 ist Teilgraph des Graphen	1, 3, 5
Graph 4 ist Teilgraph des Graphen	1, 4
Graph 5 ist Teilgraph des Graphen	1, 5

Aufgabe 3

In wie viele Komponenten zerfällt nebenstehender Graph, wenn die Ecke A gelöscht wird?

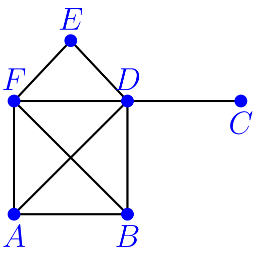
Antwort: In 3 Komponenten



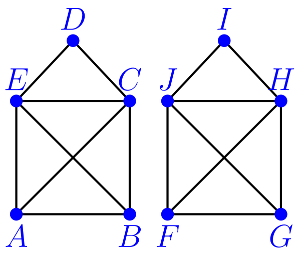
Aufgabe 4

Gib für jeden der Graphen unter Verwendung eines der letzten beiden Sätze eine Begründung dafür an, dass er nicht hamiltonsch ist.

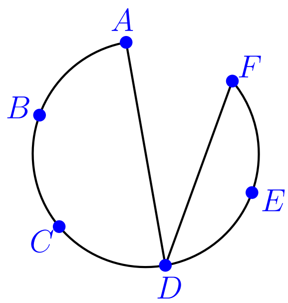
a)



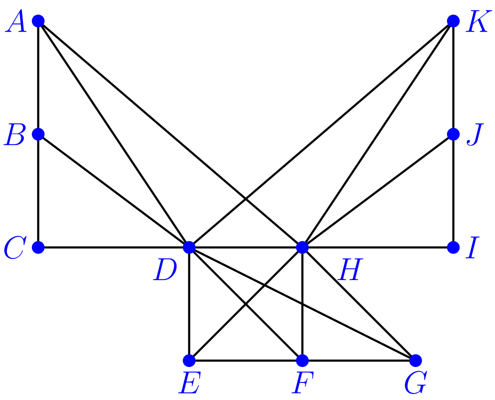
b)



c)



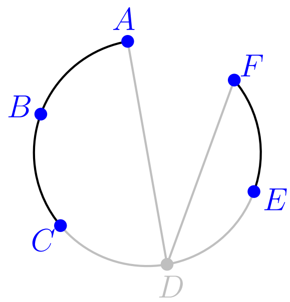
d)



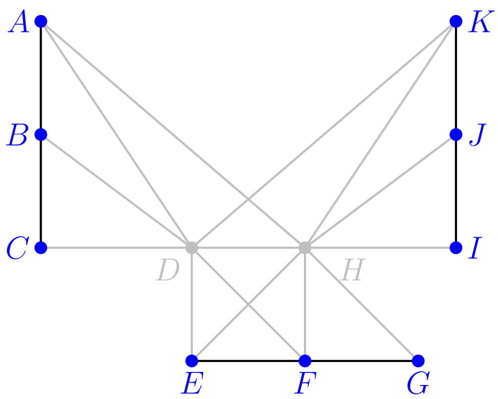
Lösung: **a)** $\mathrm{Grad}(C) = 1 \;\Rightarrow\;$ der Graph ist nicht hamiltonsch.

b) Der Graph ist nicht zusammenhängend $\Rightarrow$ der Graph ist nicht hamiltonsch.

c) Durch Löschen von D zerfällt der Graph in zwei Komponenten, er ist dann nicht mehr zusammenhängend.
$\Rightarrow$ der Graph ist nicht hamiltonsch.

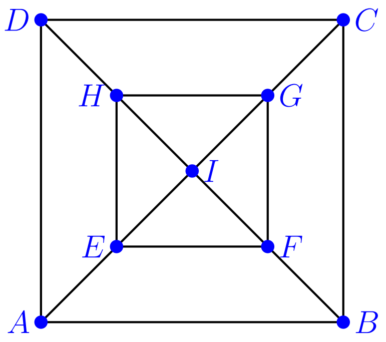


d) Durch Löschen von **zwei** Ecken D und H zerfällt der Graph in **drei** Komponenten.
$\Rightarrow$ der Graph ist nicht hamiltonsch.



Aufgabe 5

Gib im folgenden Graphen einen hamiltonschen Kreis und drei verschiedene nicht hamiltonsche Kreise an.



Hamiltonscher Kreis:

$A - B - C - D - H - J - G - F - E - A$

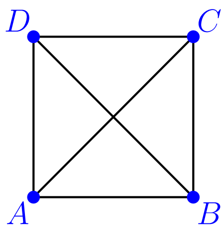
Nicht hamiltonsche Kreise:

$A - B - C - D - A$
$I - F - G - I$
$F - G - H - E - F$

Aufgabe 6

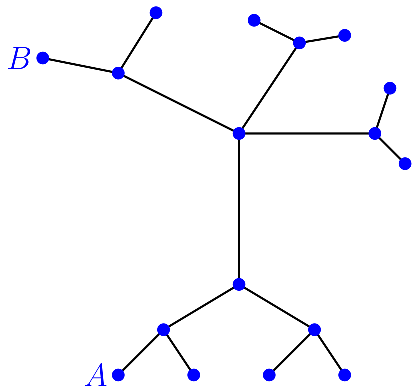
Wie viele verschiedene Wege gibt es jeweils, die A und B verbinden?

a)



Antwort: Es gibt $\boxed{5}$ Weg(e)

b)



Antwort: Es gibt $\boxed{1}$ Weg(e)

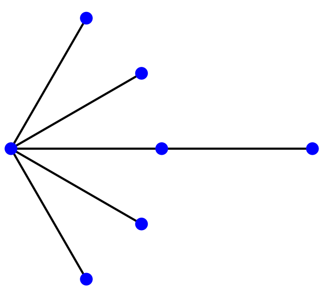
Aufgabe 7

Zeichne jeweils einen Graphen, der ein Baum ist und die angegebenen Eigenschaften besitzt.

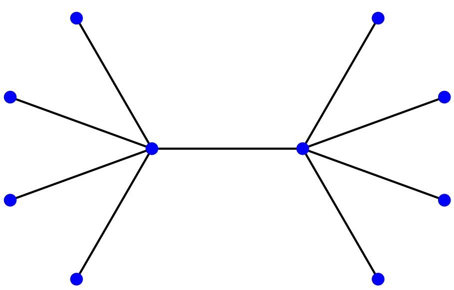
a) Der Baum besitzt 7 Ecken und eine davon hat Eckengrad 5.

b) Der Baum besitzt 10 Ecken und zwei davon haben Eckengrad 5.

Lösung: a)



b)

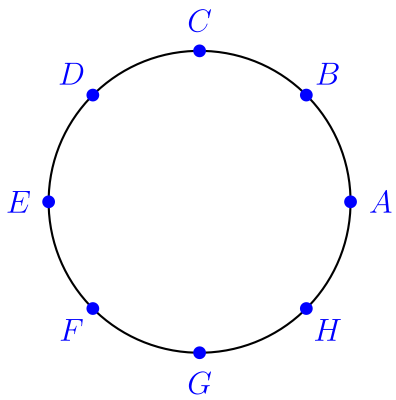


Aufgabe 8

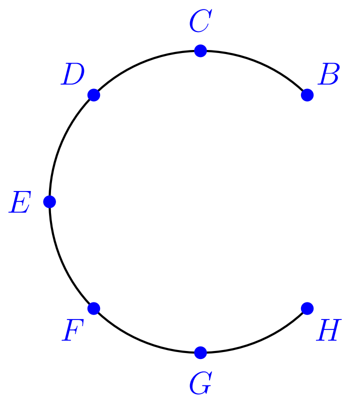
a) Zeichne einen einfachen Graphen mit 8 Ecken und 8 Kanten, der hamiltonsch ist und nach Löschen einer Ecke ein Baum ist.

b) Zeichne einen einfachen Graphen mit 8 Ecken und 13 Kanten, der hamiltonsch ist und nach Löschen einer Ecke ein Baum ist.

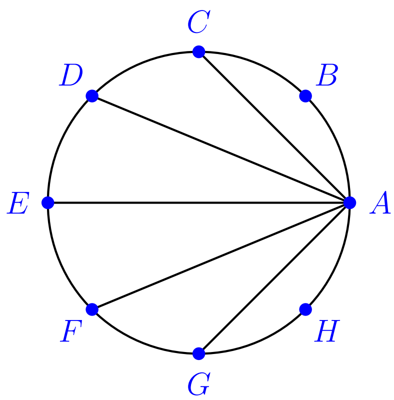
Lösung: **a)**



Löschen der Ecke A ergibt einen Baum.



b)



Löschen der Ecke A ergibt einen Baum.