Graphentheorie

zum Selbstlernen

Vorwort

Dies ist ein Skript zum Selbststudium. Du kannst hier Grundlagen der Graphentheorie kennenlernen.

Der Text ist im Wesentlichen der Mitschrieb aus einem Online-Kurs *Graphentheorie* im Schülerseminar für Klasse 8-10. Du findest diesen und andere Kurse auf der Seite

`https://pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/iadm/Zirkel/material-Schuelerseminar/`

Falls Du beim Studium des vorliegenden Textes Fragen hast, kannst Du beim Online-Kurs im entsprechenden Video nachsehen, dort gibt es ausführlichere Erklärungen. Um die Verbindung zu finden, ist am Rand des Textes markiert, wann die einzelnen Einheiten des Online-Kurses beginnen.

Die Aufgaben sind auch dieselben wie im Online-Kurs. Im Lerntext sind keine Lösungen dabei, damit Du sie selber lösen kannst. Bei den Aufgaben ist oft Platz, um Deine Lösungen aufzuschreiben. Manchmal musst Du aber auch ein extra Blatt für die Berechnungen dazunehmen. Falls Du Deine Lösungen überprüfen willst, stehen alle Aufgaben mit Lösungen im letzten Kapitel dieses Skripts.

Ich wünsche Dir viel Spaß beim Durcharbeiten des Skripts und bei den Aufgaben!

1. Oktober 2024 Peter Lesky

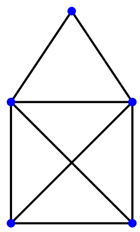
Inhalt

Auf den nächsten Seiten findest Du das Skript mit Aufgaben zur ersten Einheit *Graphen und Rundwege*. Die weiteren Teile werden bei den entsprechenden Einheiten veröffentlicht.

1 Was ist ein Graph?

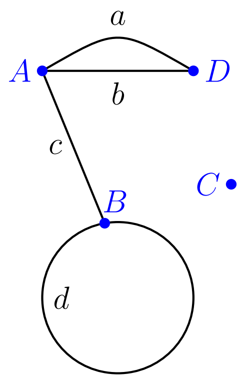
Beginn Online-Einheit 1

Du kennst sicher die Aufgabe, das Haus vom Nikolaus in einem Zug zu zeichnen, ohne eine Linie doppelt zu zeichnen. Das Gebilde, das dabei herauskommt, hat Ecken und verbindende Linien. So ein Gebilde nennt man *Graph*. Aber nun genauer.



Definition: Ein Graph besteht aus Ecken und Kanten. Er muss mindestens eine Ecke besitzen. Jede Kante verbindet zwei verschiedene Ecken oder eine Ecke mit sich selber.

Bezeichnungen:



C: isolierte Ecke
d: Schlinge
a, b: parallele Kanten
$\mathrm{Grad}(A) = 3$
$\mathrm{Grad}(B) = 3$
$\mathrm{Grad}(C) = 0$
$\mathrm{Grad}(D) = 2$

Definition: Eine Ecke, an der keine Kante endet, heißt isoliert.
Eine Kante, die eine Ecke mit sich selbst verbindet, heißt Schlinge.
Zwei Kanten, die die selben Ecken verbinden, heißen parallel.
Der Grad einer Ecke ist die Anzahl der Endpunkte von Kanten in dieser Ecke.

Bemerkung: Der kleinste Graph besteht aus einer Ecke. Der ist aber langweilig.

Aufgabe 1

a) Zeichne einen Graphen mit 2 Ecken mit Grad 1 und 7.

b) Zeichne einen Graphen mit 5 Ecken mit Grad $1, 2, 2, 2, 3$.

c) Zeichne zwei verschiedene Graphen mit jeweils 4 Ecken, wovon zwei den Grad 2 und zwei den Grad 3 haben.

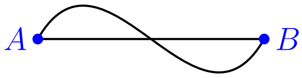
d) Fülle die Tabelle aus:

	a)	b)	c_1)	c_2)
Summe Eckengrade				
Anzahl Kanten				

e) Wie hängen die Eckengrade und die Zahl der Kanten zusammen?

f) Warum gibt es keinen Graphen mit drei Ecken mit den Graden $4, 5, 6$?

Vereinbarung: Kreuzen sich zwei Kanten, ohne dass dort eine Ecke eingezeichnet ist, so stellen wir uns vor, dass die Kanten übereinander verlaufen, ohne sich zu schneiden.



Graph mit zwei Ecken und zwei parallelen Kanten

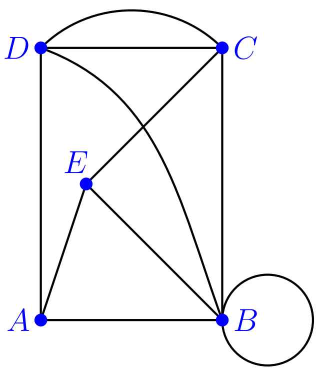
Beim *Haus vom Nikolaus* haben wir bei der Kreuzung der Diagonalen keine Ecke eingezeichnet. Also schneiden sich die Diagonalen nicht.

2 Graphen als Tabellen

Methode: Zeichne eine Tabelle, die für jede Ecke sowohl eine Spalte als auch eine Zeile enthält. Trage in das Feld der Zeile B und Spalte C ein, wie viele Kanten B und C verbinden.

Aufgabe 2

Trage in die Tabelle ein, wie viele Kanten die jeweiligen Ecken verbinden.



	A	B	C	D	E	Grad
A						
B						
C						
D						
E						

Aufgabe 3

Zeichne zwei verschieden aussehende Graphen, die die folgende Tabelle besitzen.

	A	B	C	D
A	1	0	1	1
B	0	0	0	2
C	1	0	2	1
D	1	2	1	0

Definition: Zwei Graphen heißen isomorph, wenn sie bei geeigneter Bezeichnung der Ecken dieselbe Tabelle besitzen.
Anschaulich: Der eine Graph kann so „verbogen" werden, dass der andere entsteht.

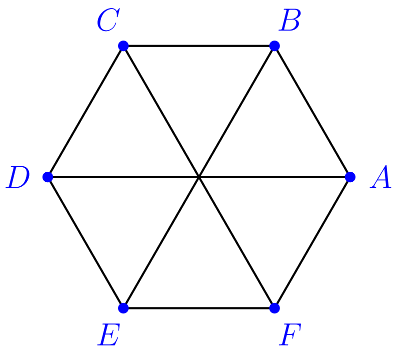
Satz: Sind zwei Graphen isomorph, so haben sie dieselbe

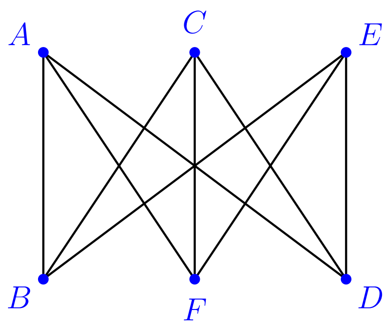
- Anzahl von Ecken
- Anzahl von Kanten
- Anzahl von Schlingen
- Anzahl paralleler Kanten
- Liste der Eckengrade bis auf Reihenfolge

Umgekehrt: Ist einer dieser Punkte nicht erfüllt, so sind die Graphen nicht isomorph.

Aufgabe 4

Zeige, dass die folgenden Graphen isomorph sind:





	A	B	C	D	E	F
A						
B						
C						
D						
E						
F						

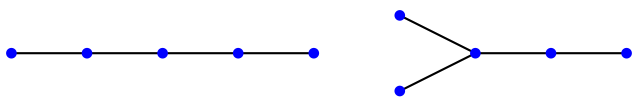
	A	B	C	D	E	F
A						
B						
C						
D						
E						
F						

Die Graphen sind isomorph, denn ....

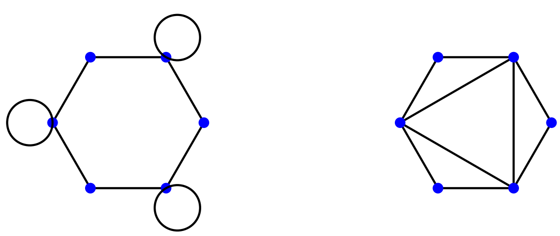
Aufgabe 5

Warum sind die folgenden Graphen jeweils nicht isomorph?

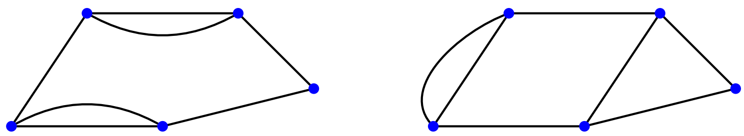
a)



b)



c)



3 Rundwege

Definition: 1) Ein Kantenzug in einem Graphen ist eine Folge von Kanten, die nacheinander ohne Absetzen gezeichnet werden können.
Beim Nachfahren eines Kantenzugs wird die Ecke, in der die erste Kante beginnt, über den Kantenzug mit der Ecke, in der die letzte Kante endet, verbunden.

2) Ein Graph heißt zusammenhängend, wenn es zu je zwei beliebig gewählten Ecken immer einen Kantenzug gibt, der sie verbindet.

3) Ein Kantenzug heißt geschlossen, wenn Anfangsecke = Endecke.

4) Ein Kantenzug, der

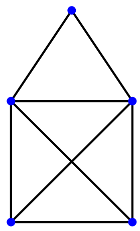
- jede Kante genau ein Mal benützt und
- geschlossen ist,

heißt eulersche Tour.

5) Ein Graph, der eine eulersche Tour enthält, heißt eulerscher Graph.

Anschaulich: Einen eulerschen Graphen ohne isolierte Ecke kann man zeichnen ohne abzusetzen, ohne eine Kante doppelt abzufahren und so, dass man bei der Anfangsecke endet.

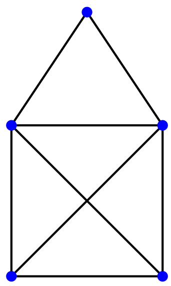
Betrachte nochmal das *Haus vom Nikolaus*. Beim Zeichnen geht man einen Kantenzug entlang. Da man durch alle Ecken kommt, ist der Graph zusammenhängend. Der Kantenzug ist jedoch nicht geschlossen, also keine eulersche Tour.

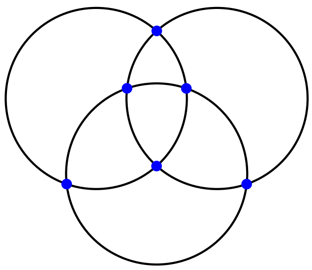


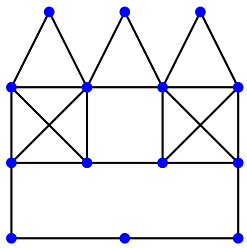
Achtung: Bei eulerschen Touren oder eulerschen Graphen geht es nur um die Kanten. Isolierte Ecken darf es geben.

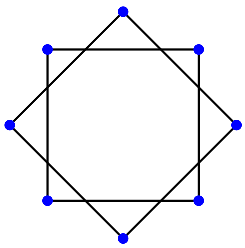
Aufgabe 6

In welchem der Graphen gibt es eine eulersche Tour?

a) 

b) 

c) 

d) 

Bei großen Graphen kann es sehr mühsam sein, eine eulersche Tour zu finden. Wir lernen nun eine einfache Bedingung kenne, die garantiert, dass ein Graph eulersch ist.

Satz: In einem eulerschen Graphen sind alle Eckengrade geradzahlig.

Beweis: Ist E eine isolierte Ecke, dann gilt $\mathrm{Grad}(E) = 0$, und 0 ist gerade.

Ist E eine nicht isolierte Ecke, so betrachte eine eulersche Tour. Diese geht durch E. Sei n die Zahl, wie oft die Tour durch E kommt. Dann gilt $\mathrm{Grad}(E) = 2n$, da die Tour E immer auf einer Kante erreicht und auf einer anderen Kante verlässt und beim nächsten Durchgang neue Kanten verwendet werden. Das selbe Argument stimmt auch, wenn E die Anfangsecke ist. Denn dann ist E auch die Endecke. Diese beiden Kanten addieren 2 zum Eckengrad von E dazu. Und für die restlichen Durchgänge gilt das Argument wie vorher.

Satz von Euler: Ein Graph ohne isolierte Ecke ist genau dann eulersch, wenn er zusammenhängend ist und alle Eckengrade gerade sind.

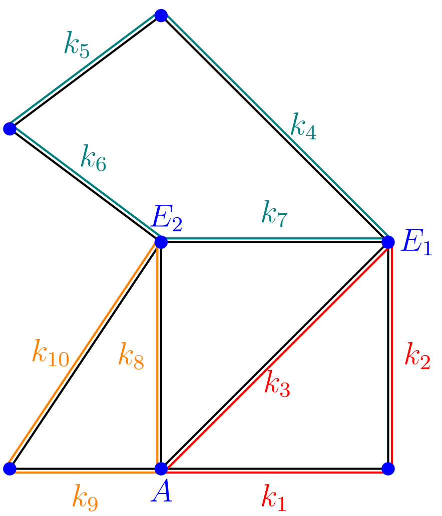
Beweis: Ist der Graph eulersch, so gilt:
- Nach dem letzten Satz sind alle Eckengrade gerade.
- Sind zwei Ecken gegeben, dann kann man von der einen Ecke aus so lange eine eulersche Tour entlanggehen, bis man bei der anderen Ecke ankommt, da keine der Ecken isoliert ist. Dann hat man einen Kantenzug gefunden, der die beiden Ecken verbindet. Also ist der Graph zusammenhängend. (Da es keine isolierten Ecken gibt, geht jede eulersche Tour durch die beiden Ecken.)

Jetzt setze voraus: Alle Eckengrade sind gerade und der Graph ist zusamenhängend.
Beweise: Es gibt eine eulersche Tour. Dazu geben wir eine Methode an, wie man in jedem solchen Graphen eine eulersche Tour findet.

Schritt 1: Wähle irgendeine Ecke A als Anfangsecke. Bilde einen Kantenzug, bis die Anfangsecke wieder erreicht ist. Dies geht, da jede andere Ecke, die man erreicht, auch wieder auf einer anderen Kante verlassen werden kann (gerader Eckengrad).

Schritt 2: Falls noch nicht alle Kanten benützt wurden, gehe auf dem bisherigen Kantenzug bis zur ersten Ecke E_1, von der eine nicht benutzte Kante abzweigt. Da der Eckengrad eine gerade Zahl ist, müssen sogar zwei Kanten abzweigen. Gehe eine dieser Kanten entlang und bilde einen Kantenzug aus lauter noch nicht verwendeten Kanten, bis wieder E_1 erreicht wird. Füge diesen neuen Kantenzug in den alten ein.

Wiederhole nun Schritt 2 so oft, bis alle Kanten verbraucht sind. Da der Graph zusammenhängend ist, bleibt keine Kante übrig.



Erster Kantenzug:

$$A - k_1 - k_2 - k_3 - A$$

Erste Erweiterung:

$$A - k_1 - k_2 - E_1 - k_4 - k_5 - k_6 - k_7 - E_1 - k_3 - A$$

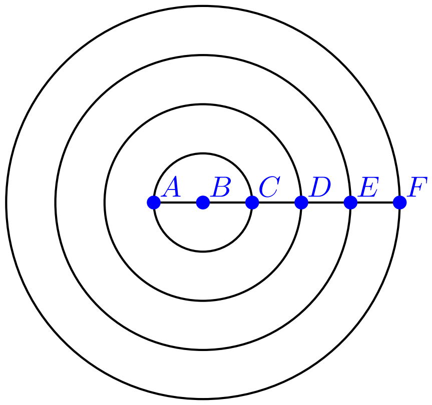
Zweite Erweiterung:

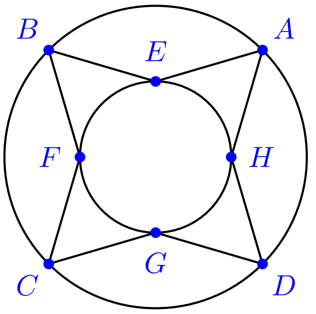
$$\begin{aligned} &A - k_1 - k_2 - E_1 - k_4 - k_5 - k_6 - E_2 \\ &- k_8 - k_9 - k_{10} - E_2 - k_7 - E_1 - k_3 - A \end{aligned}$$

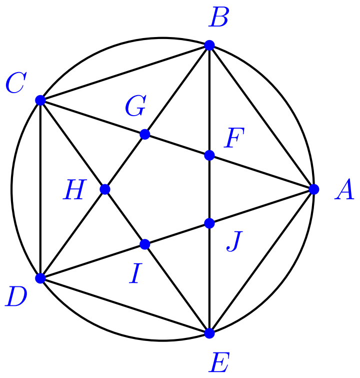
Nun sind alle Kanten verbraucht und wir haben eine eulersche Tour gefunden.

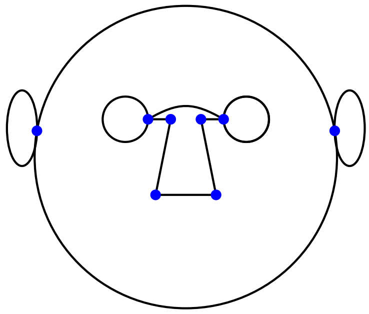
Aufgabe 7

Welcher der folgenden Graphen ist eulersch? Trage Deine Antwort in die Tabelle ein.

a) 

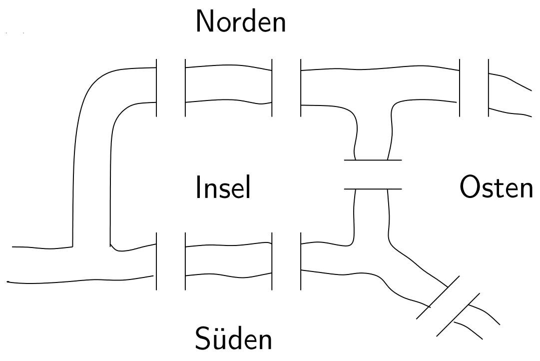
b) 

c) 

d) 

	eulersch	nicht eulersch weil
Graph a)		
Graph b)		
Graph c)		
Graph d)		

Aufgabe 8



Das Königsberger Brückenproblem: In Königsberg gibt es 7 Brücken über die Pregel, wie im nebenstehenden Stadtplan dargestellt. Die Frage ist nun, ob es einen Rundweg durch Königsberg gibt, so dass jede der Brücken genau ein Mal überquert wird. Zeichne einen Graphen, der zu diesem Problem passt: Die Brücken sollen als Kanten dargestellt werden, da man sie genau einmal überqueren soll. Entscheide dann, ob ein solcher Rundweg möglich ist.

Lösungen der Aufgaben

Aufgabe 1

a) Zeichne einen Graphen mit 2 Ecken mit Grad 1 und 7.

b) Zeichne einen Graphen mit 5 Ecken mit Grad $1, 2, 2, 2, 3$.

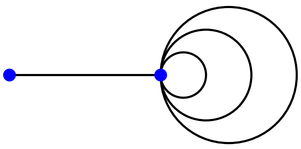
c) Zeichne zwei verschiedene Graphen mit jeweils 4 Ecken, wovon zwei den Grad 2 und zwei den Grad 3 haben.

d) Fülle die Tabelle aus:

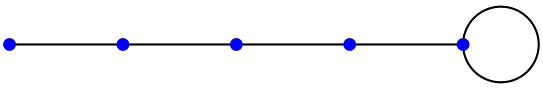
e) Wie hängen die Eckengrade und die Zahl der Kanten zusammen?

f) Warum gibt es keinen Graphen mit drei Ecken mit den Graden $4, 5, 6$?

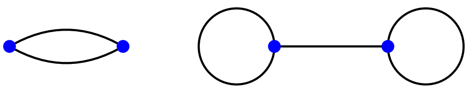
Lösung: **a)**



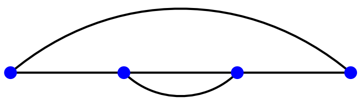
b)



d$_1$)



d$_2$)



d)

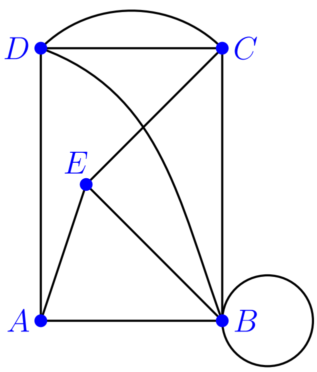
	a)	b)	c_1)	c_2)
Summe Eckengrade	8	10	10	10
Anzahl Kanten	4	5	5	5

e) Summe der Eckengrade $=2$ Mal Anzahl der Kanten.

f) Die Summe der Eckengrade kann nicht ungerade sein (vgl. vorige Teilaufgabe). Hier sollte sie $4+5+6=15$ sein, das geht nicht.

Aufgabe 2

Trage in die Tabelle ein, wie viele Kanten die jeweiligen Ecken verbinden.



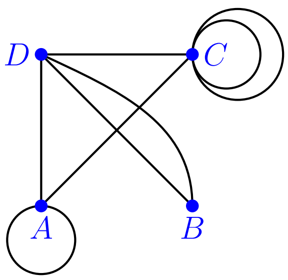
	A	B	C	D	E	Grad
A	0	1	0	1	1	3
B	1	1	1	1	1	6
C	0	1	0	2	1	4
D	1	1	2	0	0	4
E	1	1	1	0	0	3

Aufgabe 3

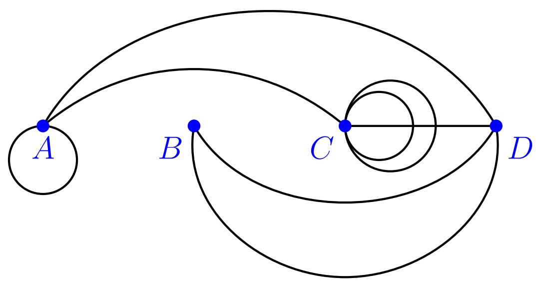
Zeichne zwei verschieden aussehende Graphen, die die folgende Tabelle besitzen.

	A	B	C	D
A	1	0	1	1
B	0	0	0	2
C	1	0	2	1
D	1	2	1	0

Lösung: Eine Lösung:

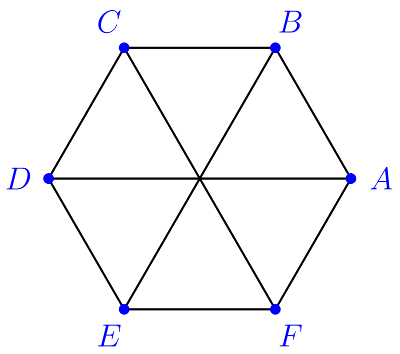


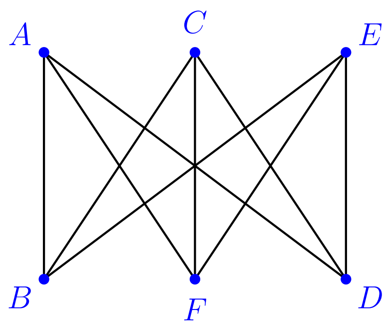
Eine anders aussehende Lösung:



Aufgabe 4

Zeige, dass die folgenden Graphen isomorph sind:





Lösung: Linker Graph:

	A	B	C	D	E	F
A		1		1		1
B	1		1		1	
C		1		1		1
D	1		1		1	
E		1		1		1
F	1		1		1	

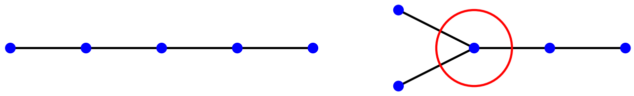
Rechter Graph:

	A	B	C	D	E	F
A		1		1		1
B	1		1		1	
C		1		1		1
D	1		1		1	
E		1		1		1
F	1		1		1	

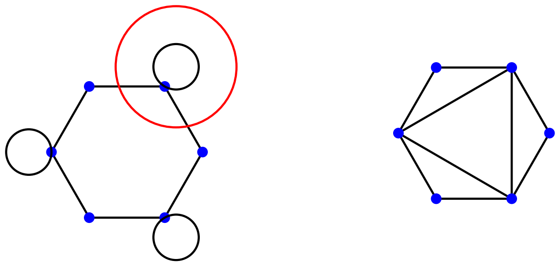
Die Graphen sind isomorph, denn die Tabellen sind gleich.
(Nullen wurden in den Tabellen weggelassen)

Aufgabe 5

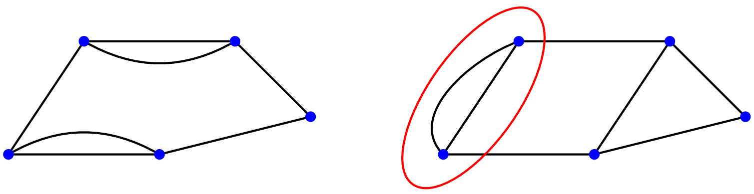
Warum sind die folgenden Graphen jeweils nicht isomorph?

Lösung: a) 

Eckengrad 3 kommt nur im rechten Graphen vor.

b) 

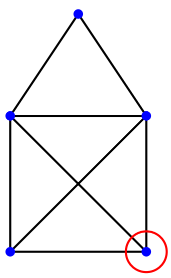
Der linke Graph hat Schlingen, der rechte hat keine.

c) 

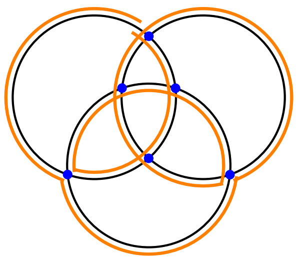
Der linke Graph hat zwei Paare paralleler Kanten, der rechte hat nur ein Paar.

Aufgabe 6

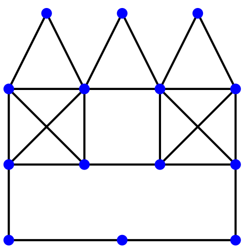
In welchem der Graphen gibt es eine eulersche Tour?

Lösung: a) 

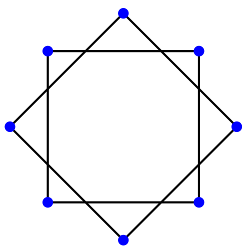
Es gibt keine eulersche Tour, denn wenn man rechts unten startet, endet man immer in der linken unteren Ecke.

b) 

Eine eulersche Tour ist eingezeichnet.

c) 

Es gibt eine eulersche Tour.

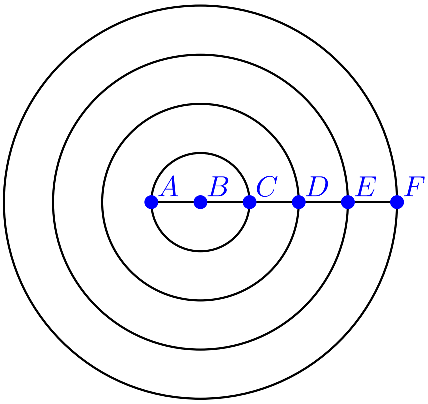
d) 

Es gibt keine eulersche Tour, denn man kommt nicht von dem einen Rechteck zum anderen.

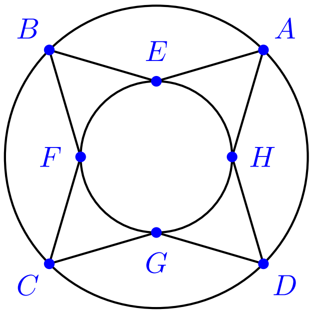
Aufgabe 7

Welcher der folgenden Graphen ist eulersch? Trage Deine Antwort in die Tabelle ein.

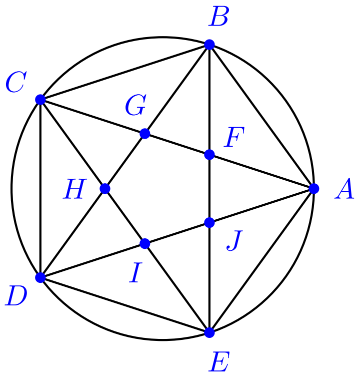
a)



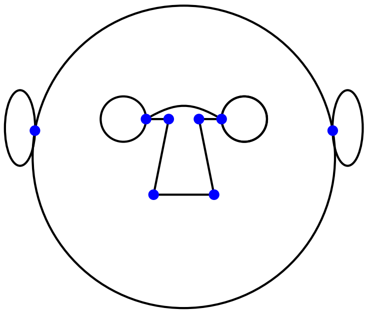
b)



c)



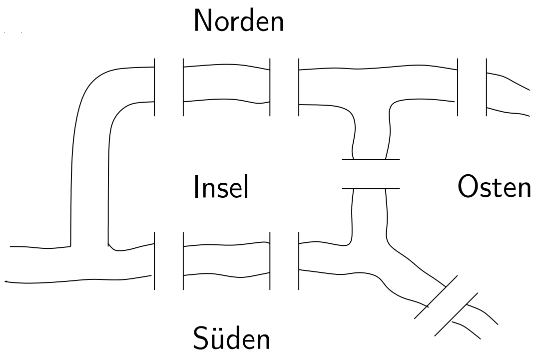
d)



Lösung:

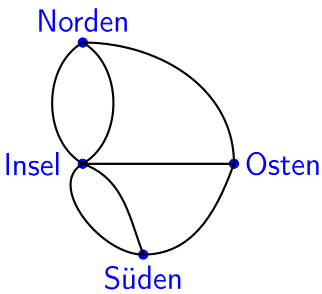
	eulersch	nicht eulersch weil
Graph a)		$\mathrm{Grad}(F) = 3$ ist ungerade
Graph b)	Ja	
Graph c)	Ja	
Graph d)		nicht zusammenhängend

Aufgabe 8



Das Königsberger Brückenproblem: In Königsberg gibt es 7 Brücken über die Pregel, wie im nebenstehenden Stadtplan dargestellt. Die Frage ist nun, ob es einen Rundweg durch Königsberg gibt, so dass jede der Brücken genau ein Mal überquert wird. Zeichne einen Graphen, der zu diesem Problem passt: Die Brücken sollen als Kanten dargestellt werden, da man sie genau einmal überqueren soll. Entscheide dann, ob ein solcher Rundweg möglich ist.

Lösung:



Ein solcher Rundweg wäre eine eulersche Tour.
Es gibt aber keine eulersche Tour zu dem Graphen, da es ungerade Eckengrade gibt (es sind sogar alle Eckengrade ungerade).
Also gibt es keinen Rundweg durch Königsberg, bei dem jede Brücke genau ein Mal überquert wird.