# Graphentheorie

## zum Selbstlernen

## Vorwort

Dies ist ein Skript zum Selbststudium. Du kannst hier Grundlagen der Graphentheorie kennenlernen.

Der Text ist im Wesentlichen der Mitschrieb aus einem Online-Kurs *Graphentheorie* im Schülerseminar für Klasse 8-10. Du findest diesen und andere Kurse auf der Seite

`https://pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/iadm/Zirkel/material-Schuelerseminar/`

Falls Du beim Studium des vorliegenden Textes Fragen hast, kannst Du beim Online-Kurs im entsprechenden Video nachsehen, dort gibt es ausführlichere Erklärungen. Um die Verbindung zu finden, ist am Rand des Textes markiert, wann die einzelnen Einheiten des Online-Kurses beginnen.

Die Aufgaben sind auch dieselben wie im Online-Kurs. Im Lerntext sind keine Lösungen dabei, damit Du sie selber lösen kannst. Bei den Aufgaben ist oft Platz, um Deine Lösungen aufzuschreiben. Manchmal musst Du aber auch ein extra Blatt für die Berechnungen dazunehmen. Falls Du Deine Lösungen überprüfen willst, stehen alle Aufgaben mit Lösungen im letzten Kapitel dieses Skripts.

Ich wünsche Dir viel Spaß beim Durcharbeiten des Skripts und bei den Aufgaben!

11. Oktober 2024 Peter Lesky

## Inhalt

Auf den nächsten Seiten findest Du das Skript mit Aufgaben zur zweiten Einheit *Einfache und hamiltonsche Graphen*. Die weiteren Teile werden bei den entsprechenden Einheiten veröffentlicht.

**Copyright:** © Schülerzirkel Mathematik, Universität Stuttgart, 2024
Dieses Dokument steht unter der der Creative Commons Lizenz **BY NC SA**,
siehe `https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/legalcode`

## 4 Einfache Graphen

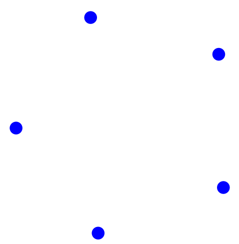
Beginn Online-Einheit 2

Definition: 1) Ein Graph heißt einfach, wenn er keine Schlingen und keine parallelen Kanten besitzt.

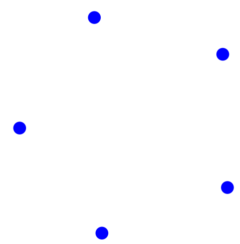
**Aufgabe 1**

**a)** Ergänze den Graphen 1, so dass er einfach ist und genau vier Kanten besitzt (Lösung ist nicht eindeutig).

**b)** Ergänze den Graphen 2, so dass er einfach ist und möglichst viele Kanten besitzt.



Graph 1



Graph 2

Definition: 2) Ein Graph heißt vollständiges Vieleck, wenn er einfach ist und jede Ecke mit jeder anderen durch eine Kante verbunden ist.

**Aufgabe 2**

**a)** Zeichne ein vollständiges $6$-Eck, also einen vollständigen Graphen mit $6$ Ecken. Wie viele Kanten besitzt es?

**b)** Wie viele Kanten besitzt ein vollständiges $10$-Eck?

**Aufgabe 3**

Welche vollständigen $n$-Ecke sind eulersch?

Satz: Ein vollständiger Graph mit $n$ Ecken besitzt $\frac{1}{2}n(n-1)$ Kanten.

Beweis: Jede Ecke ist mit jeder der anderen $n-1$ Ecken durch eine Kante verbunden.
$\Rightarrow$ $\mathrm{Grad}(E) = n-1$ für jede Ecke $E$ im Graphen
$\Rightarrow$ Summe der Eckengrade ist $n \cdot (n-1)$
Hierbei wird jede Kante zwei Mal gezählt
$\Rightarrow$ der Graph besitzt $\frac{1}{2}n(n-1)$ Kanten. $\square$

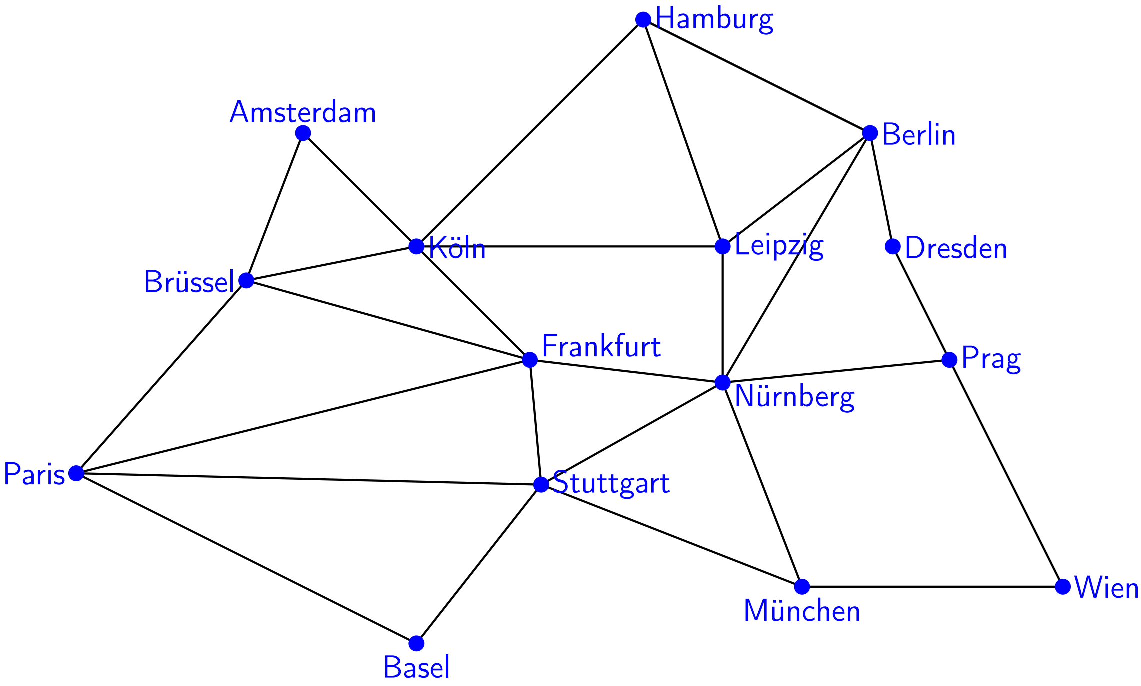
Ein vollständiges $n$-Eck heißt *vollständig*, weil ein einfacher Graph mit $n$ Ecken nicht mehr Kanten besitzen kann. Daher liefert uns der letzte Satz eine Aussage über die Maximalzahl an Kanten, die ein einfacher Graph besitzen kann.

Folgerung: Ein einfacher Graph mit $n$ Ecken besitzt höchstens $\frac{1}{2}n(n-1)$ Kanten.

# 5 Hamiltonsche Graphen

**Aufgabe 4**

Eine Freundesgruppe möchte eine Rundreise durch die in der Karte eingezeichneten Städte machen. Dabei wollen sie durch jede Stadt nur ein Mal reisen. Sie können nur die eingezeichneten Verbindungen benützen.




**a)** Gib es eine Rundreise, die in Berlin startet und anschließend durch Nürnberg und dann durch Leipzig geht?

**b)** Gibt es eine Rundreise, die in Berlin startet und anschließend durch Leipzig und dann durch Köln geht?

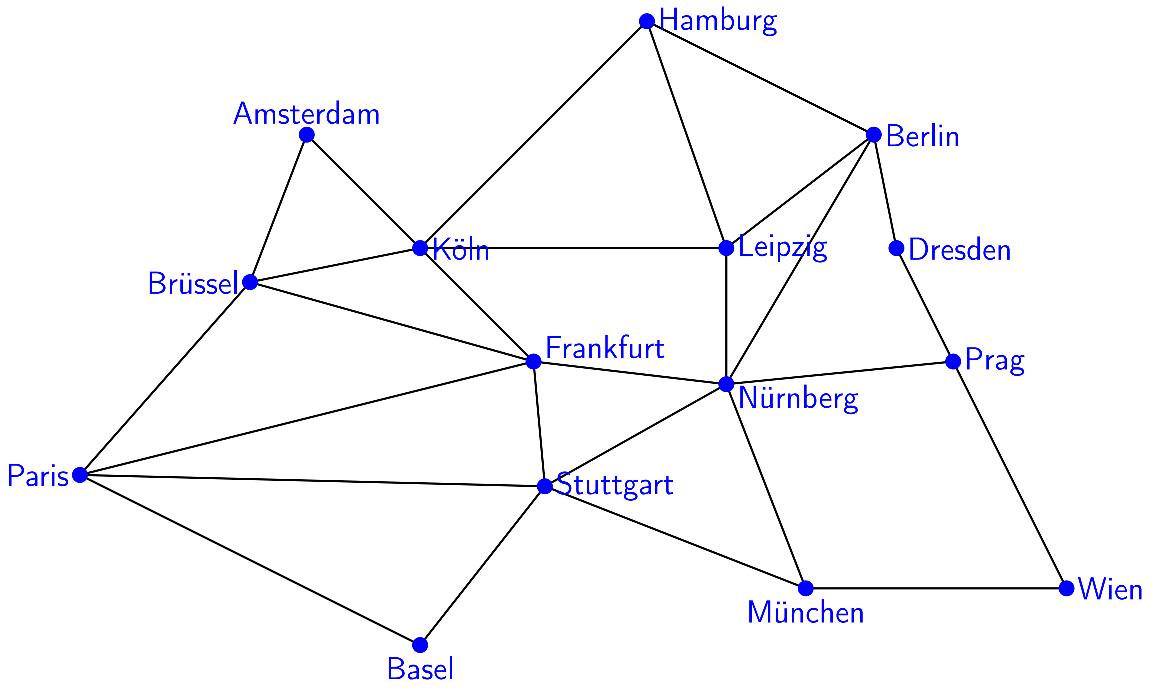
**c)** Gibt es eine Rundreise, die in Stuttgart losgeht, dann nach Basel, nach Paris und anschließend nach Brüssel?

**d)** Gibt es eine Rundreise, die in Berlin startet und anschließend nach Nürnberg und dann nach München geht?

Weiter auf nächster Seite

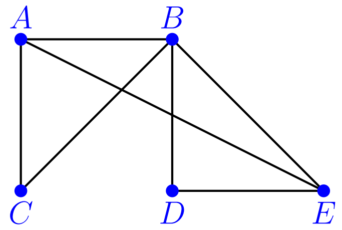
**Aufgabe 5**

Wie viele Kanten muss man im unten stehenden Graphen mindestens ergänzen, damit der Graph eulersch wird? Zeichne diese Kanten ein.

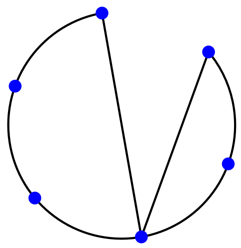



Definition: Ein geschlossener Kantenzug, der jede Ecke des Graphen genau ein Mal durchläuft und keine Kante zwei Mal benützt, heißt Hamiltonscher Kreis
Ein Graph, der einen Hamiltonschen Kreis enthält, heißt Hamiltonscher Graph.

Beispiele:




Graph 1:
Hamiltonscher Kreis:
$A - C - B - D - E - A$
$\Rightarrow$ hamiltonsch



Graph 2: nicht hamiltonsch

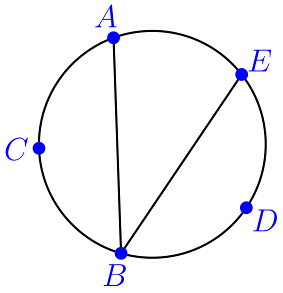
Um nachzuweisen, dass ein Graph hamiltonsch ist, reicht es, einen Hamiltonkreis anzugeben. Schwieriger ist der Nachweis, dass ein Graph nicht hamiltonsch ist. Bei Graph 2 sieht man, dass jeder Hamiltonkreis durch die unterste Ecke kommen muss und dann ein zweites Mal durch diese Ecke gehen müsste, was nicht erlaubt ist.

Bei einem Hamiltonkreis muss jede Ecke genau einmal durchlaufen werden im Unterschied zur eulerschen Tour, bei der jede Kante genau einmal benützt werden muss.

Erinnerung: Zwei Graphen sind isomorph, wenn sie die selbe Tabelle besitzen (bei geeigneter Bezeichnung ihrer Ecken). Oder wenn der eine Graph so verbogen werden kann, dass der andere ensteht.

Satz: Jeder hamiltonsche Graph ist isomorph zu einem Graphen, dessen Ecken auf einem Kreis liegen, und der die Kreislinie als Kantenzug enthält.

Beispiel:

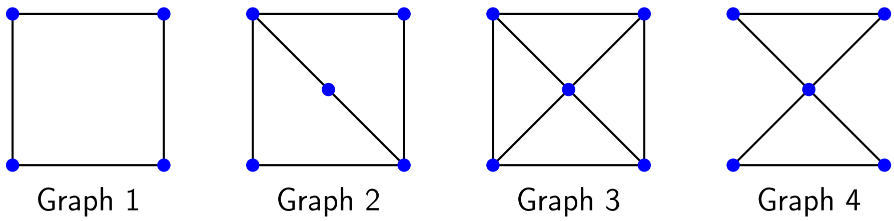



Graph 3: isomorph zu Graph 1

Man erhält den Graphen 3, indem man den hamiltonschen Kreis des Graphen 1 entlang geht und die Ecken in dieser Reihenfolge auf einem Kreis einzeichnet. Anschließend ergänzt man weitere Kanten, bis es zu jeder Kante des Graphen 1 eine Entsprechung im Graphen 3 gibt.

**Aufgabe 6**

Untersuche, welcher der folgenden Graphen eulersch oder hamiltonsch ist. Trage in die Tabelle „j“ für ja, „n“ für nein ein.

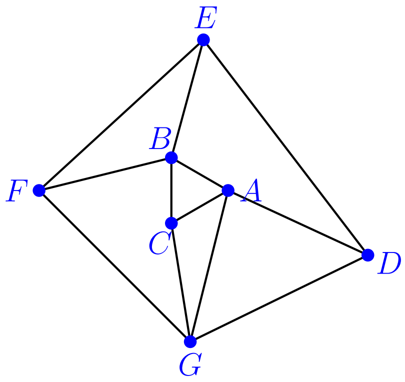


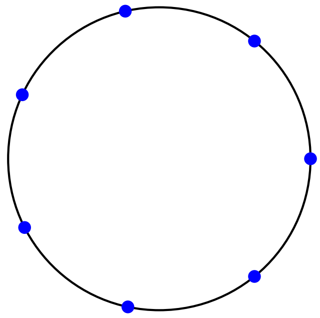

| | Graph 1 | Graph 2 | Graph 3 | Graph 4 |
|---|---|---|---|---|
| ist eulersch | | | | |
| ist hamiltonsch | | | | |

Weiter auf nächster Seite

**Aufgabe 7**

Gegeben sind die folgenden zwei Graphen.



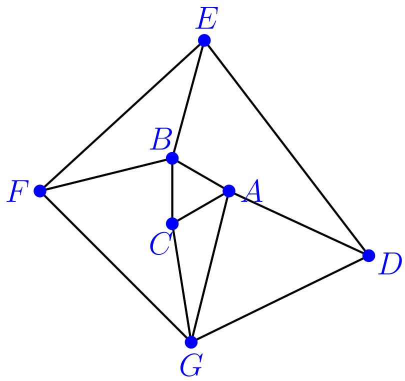
**a)** Finde im linken Graphen einen hamiltonschen Kreis.

Hamiltonscher Kreis:

**b)** Zeichne im rechten Graphen geeignete Bezeichnungen für die Ecken und weitere Kanten ein, so dass der fertige Graph isomorph zum linken Graphen ist.

**Aufgabe 8**

Gegeben ist nochmals der Graph aus der letzten Aufgabe.



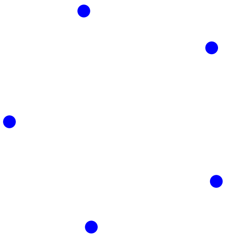

Gib möglichst viele verschiedene hamiltonsche Kreise des Graphen an. Hierbei bedeutet *verschieden*, dass die Reihenfolge unterschiedlich ist und nicht nur der Anfangspunkt im Kreis verschoben wurde.

## Lösungen der Aufgaben

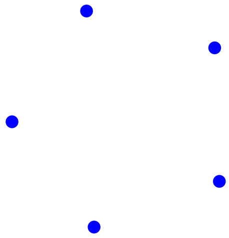
### Aufgabe 1

**a)** Ergänze den Graphen 1, so dass er einfach ist und genau vier Kanten besitzt (Lösung ist nicht eindeutig).

**b)** Ergänze den Graphen 2, so dass er einfach ist und möglichst viele Kanten besitzt.

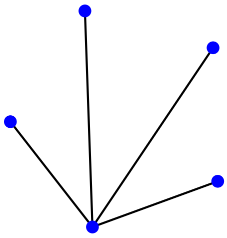


Graph 1

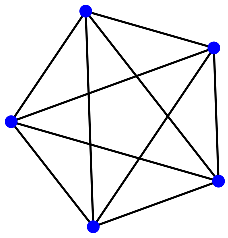


Graph 2

**Lösung:**



Graph 1



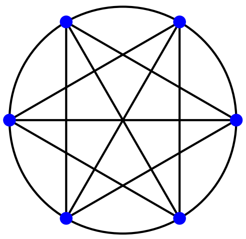
Graph 2

### Aufgabe 2

**a)** Zeichne ein vollständiges $6$-Eck, also einen vollständigen Graphen mit $6$ Ecken. Wie viele Kanten besitzt es?

**b)** Wie viele Kanten besitzt ein vollständiges $10$-Eck?

**Lösung: a)**



$15$ Kanten

**b)** $9 + 8 + 7 + \ldots + 1 = 45$ Kanten

### Aufgabe 3

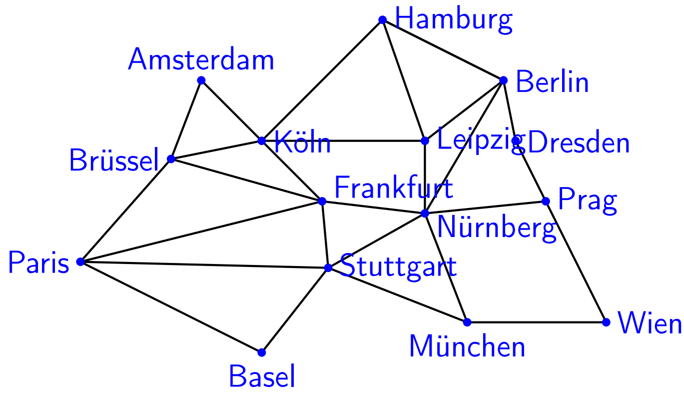
Welche vollständigen $n$-Ecke sind eulersch?

**Lösung:** Beim vollständigen $n$-Eck ist der Eckengrad jeder Ecke $\mathrm{Grad}(E) = n - 1$. Außerdem ist jedes vollständige $n$-Eck zusammenhängend. Nach dem Satz von Euler gilt also:

- Ist $n \geq 2$ ungerade, dann ist das vollständige $n$-Eck ein eulerscher Graph,
- Ist $n \geq 2$ gerade, dann ist das vollständige $n$-Eck nicht eulersch.

**Aufgabe 4**

Eine Freundesgruppe möchte eine Rundreise durch die in der Karte eingezeichneten Städte machen. Dabei wollen sie durch jede Stadt nur ein Mal reisen. Sie können nur die eingezeichneten Verbindungen benützen.



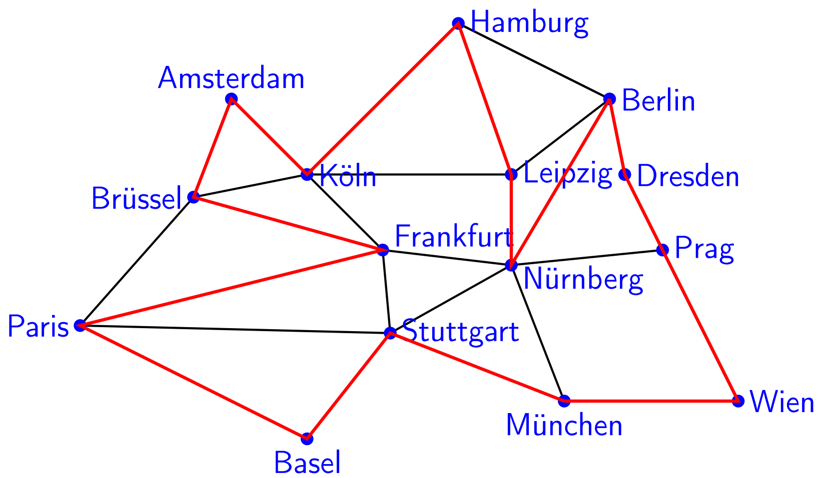

**a)** Gib es eine Rundreise, die in Berlin startet und anschließend durch Nürnberg und dann durch Leipzig geht?

**b)** Gibt es eine Rundreise, die in Berlin startet und anschließend durch Leipzig und dann durch Köln geht?

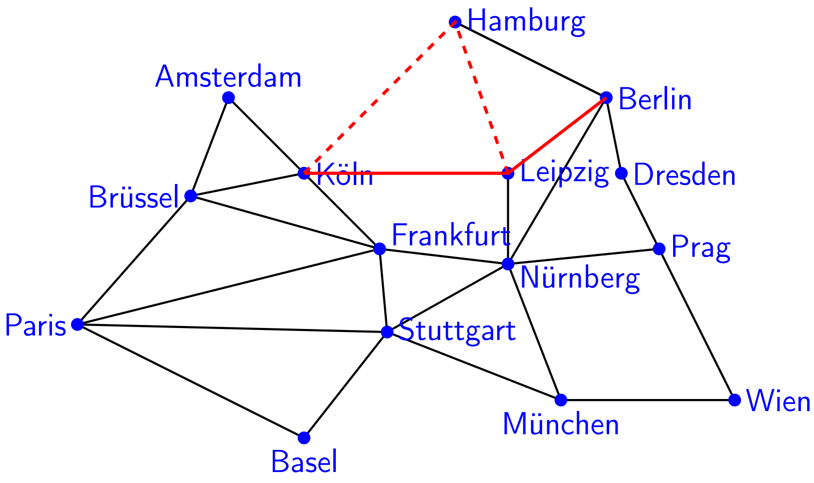
**c)** Gibt es eine Rundreise, die in Stuttgart losgeht, dann nach Basel, nach Paris und anschließend nach Brüssel?

**d)** Gibt es eine Rundreise, die in Berlin startet und anschließend nach Nürnberg und dann nach München geht?

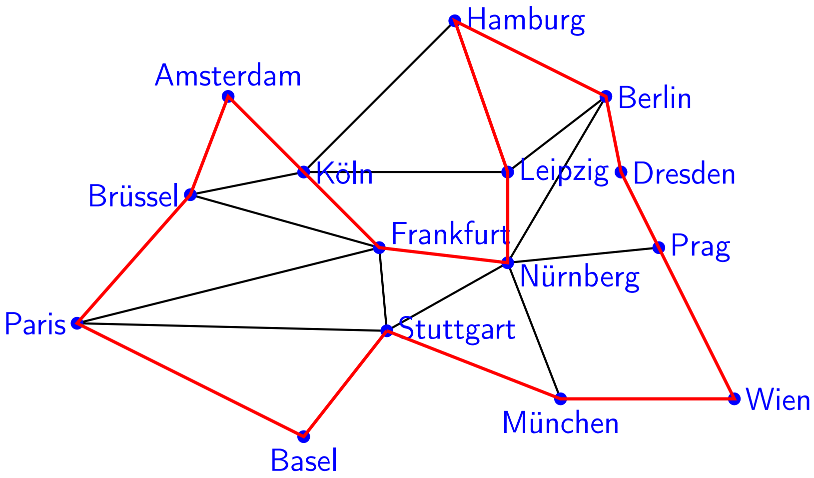
**Lösung:** **a)** Ja:



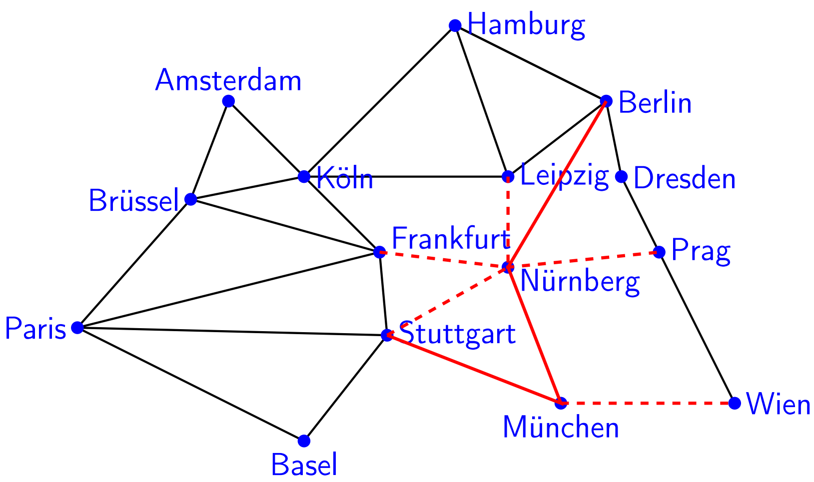

**b)** Nein. Man kann nicht von Köln nach Hamburg fahren, denn dann bleibt nur noch der Rückweg nach Berlin übrig. Fährt man von Köln zu einer anderen Stadt, so können die Verbindungen Köln–Hamburg und Leipzig–Hamburg nicht mehr verwendet werden, so dass Hamburg nicht mehr in der Rundreise vorkommen kann.




**c)** Ja:

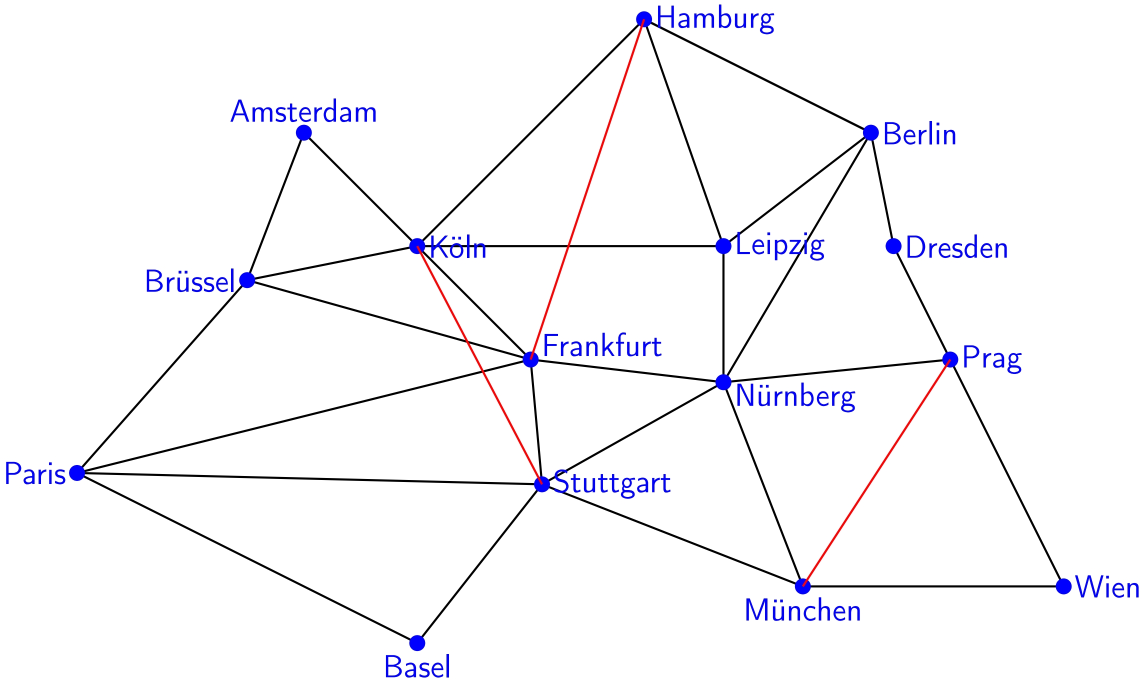



**d)** Nein. Von München aus kann man entweder nach Wien fahren. Dann kann die Reise nur noch durch Prag und Dresden nach Berlin zurück gehen. Oder man fährt von München nach Stuttgart. Dann kommt man nicht mehr nach Wien, siehe Bild.



### Aufgabe 5

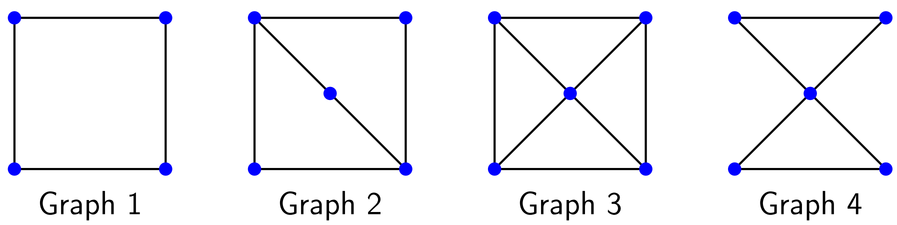
Wie viele Kanten muss man im unten stehenden Graphen mindestens ergänzen, damit der Graph eulersch wird? Zeichne diese Kanten ein.




**Lösung:** Man muss mindestens drei Kanten ergänzen, siehe rot ergänzte Kanten. Dann haben alle Knoten einen geraden Eckengrad. Und der Graph ist zusammenhängend. Also ist er eulersch.

### Aufgabe 6

Untersuche, welcher der folgenden Graphen eulersch oder hamiltonsch ist. Trage in die Tabelle „j" für ja, „n" für nein ein.

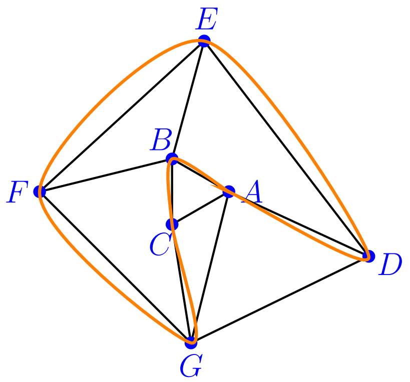


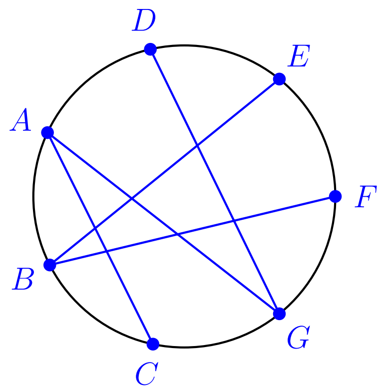

**Lösung:**

| | Graph 1 | Graph 2 | Graph 3 | Graph 4 |
|---|---|---|---|---|
| ist eulersch | J | N | N | J |
| ist hamiltonsch | J | N | J | N |

### Aufgabe 7

Gegeben sind die folgenden zwei Graphen.



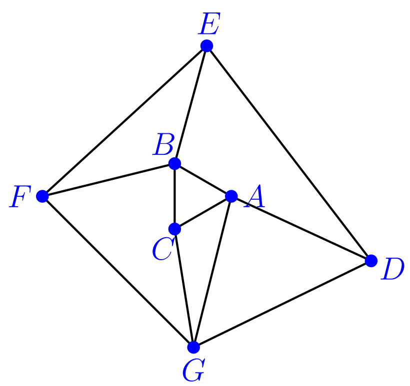

**a)** Finde im linken Graphen einen hamiltonschen Kreis.

Hamiltonscher Kreis: $\boxed{A - B - C - G - F - E - D - A}$

**b)** Zeichne im rechten Graphen geeignete Bezeichnungen für die Ecken und weitere Kanten ein, so dass der fertige Graph isomorph zum linken Graphen ist.

### Aufgabe 8

Gegeben ist nochmals der Graph aus der letzten Aufgabe.




Gib möglichst viele verschiedene hamiltonsche Kreise des Graphen an. Hierbei bedeutet *verschieden*, dass die Reihenfolge unterschiedlich ist und nicht nur der Anfangspunkt im Kreis verschoben wurde.

**Lösung:** Da jeder hamiltonsche Kreis durch $A$ geht, reicht es, nur hamiltonsche Kreise anzugeben, die in $A$ starten und enden.

Alle möglichen verschiedenen hamiltonschen Kreise sind:

| eine Richtung | umgekehrt |
|---|---|
| $A - B - C - G - F - E - D - A$ | $A - D - E - F - G - C - B - A$ |
| $A - B - F - E - D - G - C - A$ | $A - C - G - D - E - F - B - A$ |
| $A - C - B - E - F - G - D - A$ | $A - D - G - F - E - B - C - A$ |
| $A - C - B - F - E - D - G - A$ | $A - G - D - E - F - B - C - A$ |
| $A - C - G - F - B - E - D - A$ | $A - D - E - B - F - G - C - A$ |
| $A - D - E - F - B - C - G - A$ | $A - G - C - B - F - E - D - A$ |