Graphentheorie

zum Selbstlernen

Vorwort

Dies ist ein Skript zum Selbststudium. Du kannst hier Grundlagen der Graphentheorie kennenlernen.

Der Text ist im Wesentlichen der Mitschrieb aus einem Online-Kurs *Graphentheorie* im Schülerseminar für Klasse 8-10. Du findest diesen und andere Kurse auf der Seite

`https://pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/iadm/Zirkel/material-Schuelerseminar/`

Falls Du beim Studium des vorliegenden Textes Fragen hast, kannst Du beim Online-Kurs im entsprechenden Video nachsehen, dort gibt es ausführlichere Erklärungen. Um die Verbindung zu finden, ist am Rand des Textes markiert, wann die einzelnen Einheiten des Online-Kurses beginnen.

Die Aufgaben sind auch dieselben wie im Online-Kurs. Im Lerntext sind keine Lösungen dabei, damit Du sie selber lösen kannst. Bei den Aufgaben ist oft Platz, um Deine Lösungen aufzuschreiben. Manchmal musst Du aber auch ein extra Blatt für die Berechnungen dazunehmen. Falls Du Deine Lösungen überprüfen willst, stehen alle Aufgaben mit Lösungen im letzten Kapitel dieses Skripts.

Ich wünsche Dir viel Spaß beim Durcharbeiten des Skripts und bei den Aufgaben!

3. Dezember 2024 Peter Lesky

Inhalt

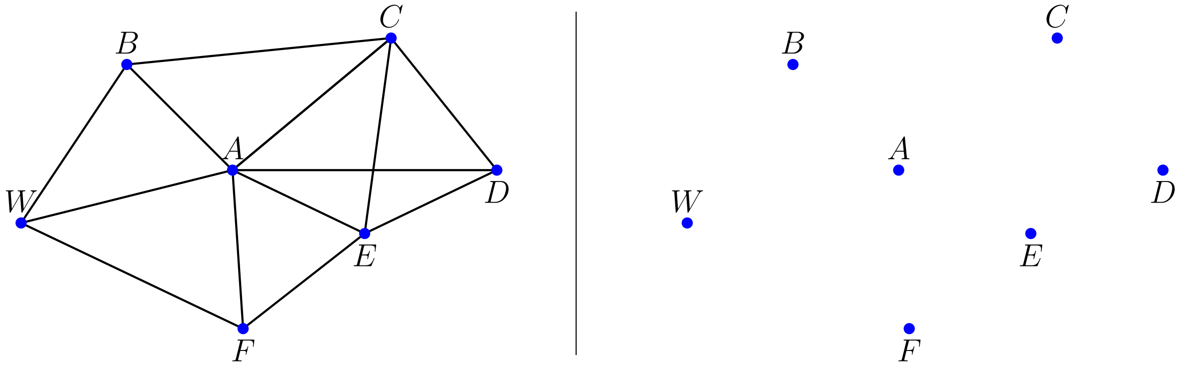
Auf den nächsten Seiten findest Du das Skript mit Aufgaben zur fünften Einheit *Bipartite und ebene Graphen*. Die weiteren Teile werden bei den entsprechenden Einheiten veröffentlicht.

Diese Einheit startet mit einer Aufgabe.

Beginn Online-Einheit 5

Aufgabe 1

a) Neben einem kleinen Bergdorf wurde ein Wasserwerk W zur Versorgung der Häuser $A, \ldots, F$ gebaut. In der Graphik unten links siehst Du die Häuser und die möglichen Wasserleitungen. Aus Kostengründen sollen möglichst wenig Leitungen gebaut werden. Streiche aus dem Graphen möglichst viele Kanten, so dass noch alle Häuser mit Wasser versorgt werden können. Zeichne dann die Kanten des entstehenden Teilgraphen rechts ein.



b) Wie heißt die Eigenschaft eines Graphen, die in unserem Beispiel garantiert, dass jedes Haus mit Wasser versorgt wird?

Antwort: Der Graph ist $\boxed{}$.

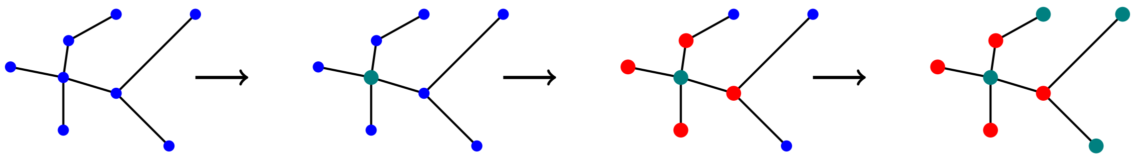
c) Wie heißt der Teilgraph, den Du im Aufgabenteil a) gezeichnet hast, in Bezug auf den ursprünglichen Graphen?

Antwort:

Der Teilgraph ist ein $\boxed{}$ des linken Graphen.

d) Die Wasserleitungsfirma hat nun Rohre geliefert, die zwei verschiedene Enden haben. Am einen Ende Anschlusstyp 1, am anderen den Anschlusstyp 2. Das bedeutet, dass nur Häuser mit verschiedenen Anschlüssen verbunden werden können. Außerdem ist vorgegeben, dass in jedem Haus nur einer der beiden Anschlusstypen verbaut werden kann. Zeige, dass die Wasserversorgung mit diesen Vorgaben gebaut werden kann. Färbe dazu die Häuser grün, die den Anschlusstyp 1 haben, und die anderen mit rot. Beachte, dass auch das Wasserwerk nur einen Anschlusstyp besitzen darf.

Beweisidee:



Beweis: Betrachte einen beliebigen Baum mit mindestens zwei Ecken.
Färbe eine beliebige Ecke grün. Laufe von dieser Ecke aus den Baum entlang und färbe die Ecken abwechselnd rot und grün.
Man erreicht jede Ecke, da der Baum zusammenhängend ist.
Jede Ecke wird nur über einen Weg erreicht. Daher treten keine Konflikte auf.
$\Rightarrow$ Der Baum ist bipartit. $\square$

Wann sind Graphen, die nur aus Ecken auf einem Kreis bestehen, bipartit?
Wir untersuchen folgende Fragestellung: *Für welche natürlichen Zahlen n ist ein Graph, der nur aus n Ecken auf einem Kreis besteht, bipartit?*

Schritt 1: Untersuche Beispiele für „kleine“ n von 2 bis 7.

n	2	3	4
Graph			
bipartit?			

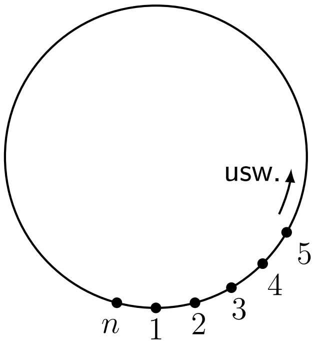
n	5	6	7
Graph			
bipartit?			

Schritt 2: Stelle eine Vermutung auf, wie die obige Frage beantwortet werden kann.
Vermutung:
Gegeben ist ein Graph, der nur aus n Ecken auf einem Kreis besteht.

Falls n eine [ ] Zahl ist, dann ist der Graph bipartit.

Falls n eine [ ] Zahl ist, dann ist der Graph nicht bipartit.

Schritt 3: Beweise deine Vermutung durch geeignetes Färben der Ecken.
Die Ecken benennen wir hierzu gegen den Uhrzeigersinn mit den Zahlen 1 bis n. Beginne nun mit dem Färben, indem du Ecke 1 grün färbst und gegen den Uhrzeigersinn fortfährst. Welche Farbe haben dann die Ecken 2, 3, 4 usw.?



Für die Ecke mit der Nummer k ergibt sich folgender Zusammenhang:

Falls k eine [ ] Zahl ist, dann ist die Ecke k grün.

Falls k eine [ ] Zahl ist, dann ist die Ecke k rot.

Weiter auf nächster Seite

Zwischen welchen beiden benachbarten Ecken kann überhaupt ein Konflikt bei der Färbung auftreten?
Zwischen der Ecke mit der Nummer $\boxed{}$ und der Ecke mit der Nummer $\boxed{}$.

Falls n $\boxed{}$ ist, sind beide Ecken unterschiedlich gefärbt, und es gibt keinen Konflikt. In diesem Fall ist der Graph bipartit.
Falls n $\boxed{}$ ist, sind beide Ecken gleich gefärbt, und es gibt einen Konflikt. In diesem Fall ist der Graph nicht bipartit.

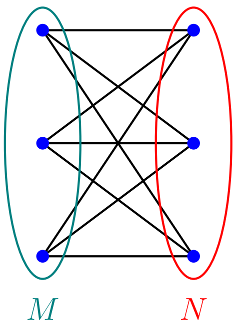
Damit hast Du den folgenden Satz bewiesen.

Satz: Ein Graph mit n Ecken, der nur aus einem Kreis besteht, ist genau dann bipartit, wenn n gerade ist.

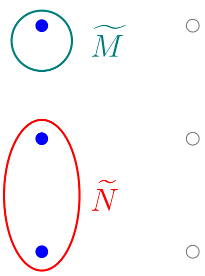
Satz: Jeder Teilgraph eines bipartiten Graphen, der mindestens zwei Ecken enthält, ist bipartit.

Beweis:

bipartiter Graph:

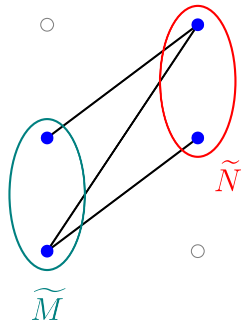


Fall 1: Nur Ecken aus M



Fall 2: Nur Ecken aus N
Analog

Fall 3: Aus M und N mindestens eine Ecke



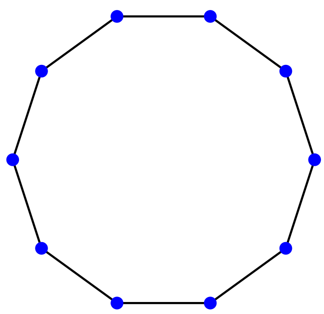
In den Fällen 1 und 2 kann man die Ecken beliebig auf die Mengen $\widetilde{M}$ und $\widetilde{N}$ verteilen.

Im Fall 3 enthält die Menge $\widetilde{M}$ alle Ecken von M, die im Teilgraph enthalten sind, und die Menge $\widetilde{N}$ alle Ecken von N, die im Teilgraphen enthalten sind. □

Wir formulieren diesen Satz um, damit wir ihn besser benützen können.

Folgerung: Enthält ein Graph einen Teilgraphen mit mindestens zwei Ecken, der nicht bipartit ist, dann ist der Graph auch nicht bipartit.
Spezialfall: Enthält ein Graph einen Kreis mit einer ungeraden Anzahl von Ecken, so ist er nicht bipartit.

Aufgabe 2
Gegeben ist der nebenstehende bipartite Graph. Ergänze eine Kante, so dass der Graph nicht mehr bipartit ist.

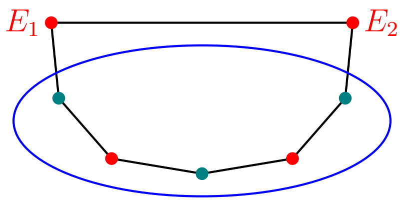


Satz: Ein Graph mit mindestens zwei Ecken ist genau dann bipartit, wenn er keinen Kreis mit ungerader Eckenzahl enthält.

Beweis: Aus Spezialfall: Ist ein Graph bipartit, so enthält er keinen Kreis mit ungerader Eckenzahl.

Betrachte einen Graphen, der keinen Kreis mit ungerader Eckenzahl enthält. Zeige: Der Graph ist bipartit.
Wir nehmen an, dass der Graph zusammenhängend ist.
Schritt 1: Konstruiere einen aufspannenden Baum. Der Baum ist bipartit. Färbe die Ecken, um sie den Mengen M und N zuzuordnen. Damit sind alle Ecken des Graphen gefärbt!
Schritt 2: Ergänze nun die restlichen Kanten des Graphen. Es gibt keine Kante, die gleich gefärbte Ecken verbindet, denn:

Annahme: Eine Kante verbindet zwei rote Ecken E_1, E_2.
Im Baum gibt es einen Weg, der E_1 und E_2 verbindet.
E_1, E_2 haben dieselbe Farbe und der Baum ist bipartit
$\Rightarrow$ der Weg hat eine ungerade Anzahl an Ecken.
Durch die Kante, die E_1 mit E_2 verbindet, entsteht ein Kreis mit ungerader Eckenzahl $\lightning$

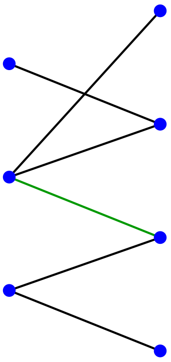


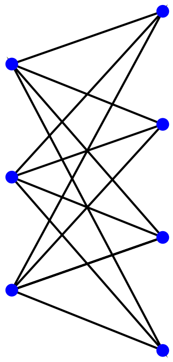
Weg im Baum
von E_1 nach E_2

Definition: 1) Ein zusammenhängender bipartiter Graph heißt m–n–Graph, wenn seine zwei Eckenteilmengen M und N m Ecken bzw. n Ecken enthalten.

2) Ein bipartiter Graph ohne parallele Kanten, bei dem jede Ecke aus M mit jeder Ecke aus N benachbart ist, heißt vollständiger bipartiter Graph.

Veranschaulichung:


3–4–Graph


vollständiger 3–4–Graph

Frage: Warum ist der linke Graph ohne die grüne Kante kein 3–4–Graph? Man kann die Eckenmenge offensichtlich in eine Menge M mit 3 Ecken und eine Menge N mit 4 Ecken aufteilen, so dass die Definition *bipartit* erfüllt ist. Was fehlt dann?

Antwort: Ein m–n–Graph muss zusammenhängend sein. Ohne die grüne Kante ist der Graph nicht zusammenhängend.

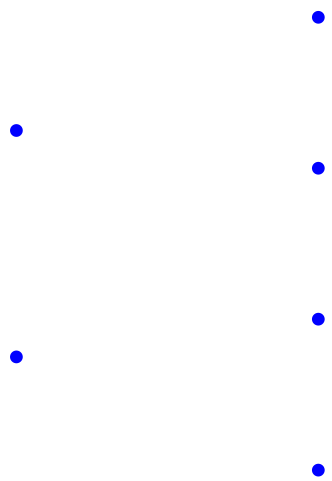
Aufgabe 3

a) Zeichne einen vollständigen 2–4–Graphen. Wie viele Kanten besitzt er?

b) Wie viele Kanten besitzt ein vollständiger m–n–Graph?

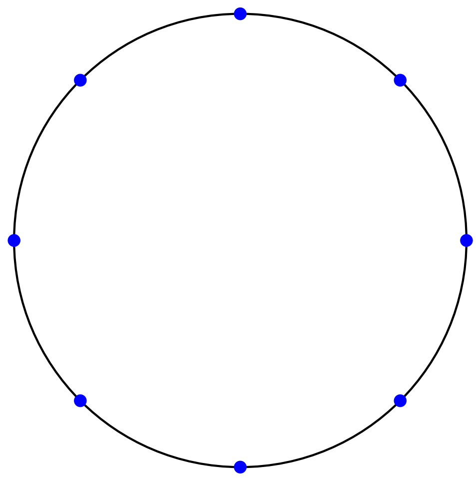
c) Ergänze im Achteck Kanten (keine Ecken), bis ein vollständiger bipartiter Graph ensteht. Welcher vollständige m–n–Graph entsteht hierdurch?

Lösung zu a)



Der Graph besitzt ☐ Kanten.

Lösung zu c)



Vollständiger ☐ – ☐ –Graph.

Aufgabe 4

Zeichne alle vollständigen bipartiten Graphen mit 6 Ecken, die nicht zueinander isomorph sind.

Aufgabe 5

Zeichne einen Baum, der ein

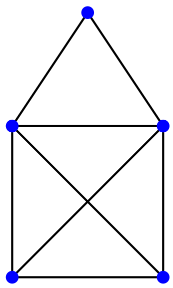
a) 2–3–Graph ist.

b) 1–4–Graph ist.

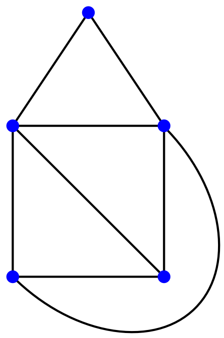
c) 4–9–Graph ist.

9 Ebene Graphen

Das Haus vom Nikolaus



Isomorpher Graph

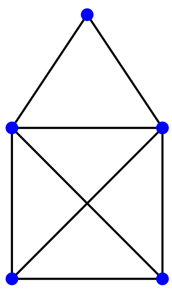


Im *Haus vom Nikolaus* kreuzen sich zwei Kanten, ohne dass der Kreuzungspunkt eine Ecke ist. Wir stellen uns vor, dass die eine Kante über der anderen verläuft. Das bedeutet, dass der Graph nicht ganz in der Zeichenebene enthalten ist, sondern in die dritte Dimension geht. Man kann den Graphen jedoch isomorph umzeichnen, so dass kein Kreuzungspunkt vorkommt, der keine Ecke ist.

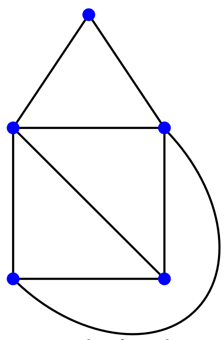
In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit Graphen, die sich so umzeichnen lassen.

<u>Definition:</u> 1) Ein in der Ebene gezeichneter Graph heißt <u>eben</u>, wenn seine Kanten keine Punkte gemeinsam haben außer Ecken.
2) Ein Graph heißt <u>plättbar</u>, wenn er isomorph zu einem ebenen Graphen ist.

Nochmal die beiden isomorphen Graphen von oben:



nicht eben, aber plättbar

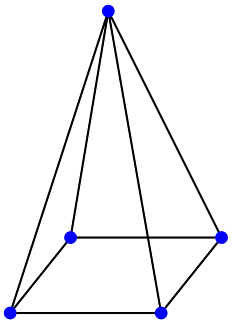


eben und plättbar

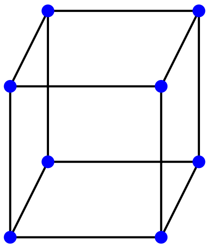
Weiter auf nächster Seite

Aufgabe 6
Gegeben sind die folgenden Graphen, die Begrenzungen dreidimensionaler Körper darstellen. Zeige, dass die Graphen plättbar sind, indem Du jeweils einen isomorphen ebenen Graphen zeichnest.

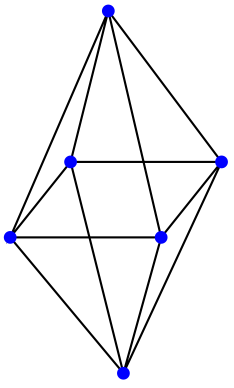
a) In dieser Teilaufgabe gibt es zwei verschiedene Lösungen!



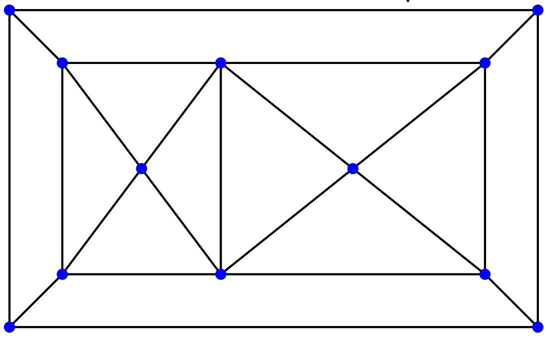
b)



c)



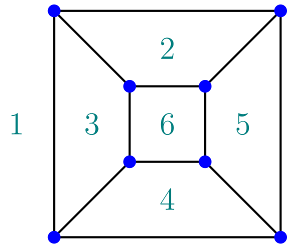
Aufgabe 7
Zeichne neben den ebenen Graphen ein Gebäude, das zu dem Graphen gehören könnte.



Weiter auf nächster Seite

Beobachtung: Ein ebener Graph unterteilt die Zeichenebene in Flächen, eine Außenfläche und keine, eine oder mehrere Innenflächen.

Beispiel:

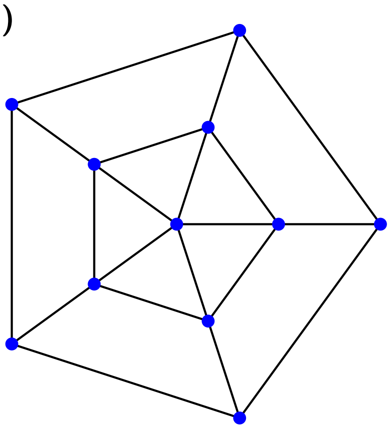


Dieser Graph unterteilt die Zeichenebene in 5 Innenflächen und die mit 1 nummerierte Außenfläche.

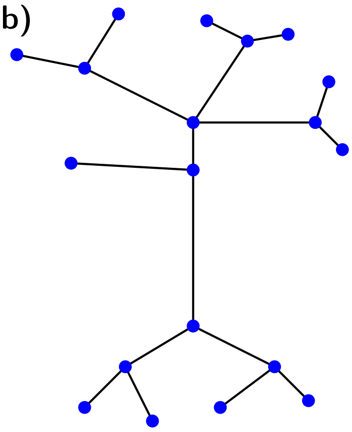
Aufgabe 8

Trage in die Graphen eine Nummerierung der Flächen ein, in die die Ebene durch den Graphen unterteilt wird. Vergiss die Außenfläche nicht. Fülle dann die Tabelle aus.

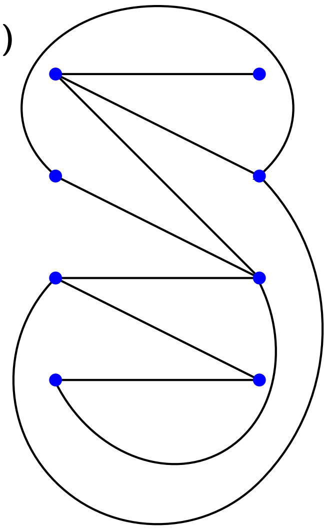
a)



b)



c)



Graph	Anzahl Ecken	Anzahl Kanten	Anzahl Flächen	$e - k + f$
a)	$e =$	$k =$	$f =$	
b)	$e =$	$k =$	$f =$	
c)	$e =$	$k =$	$f =$	
Baum mit n Ecken	$e =$	$k =$	$f =$	

Aufgabe 9

Zeichne zusammenhängende Graphen mit jeweils vier Kanten, die

a) eine Außenfläche und keine Innenfläche,

b) eine Außenfläche und eine Innenfläche,

c) eine Außenfläche und zwei Innenflächen,

d) eine Außenfläche und drei Innenflächen,

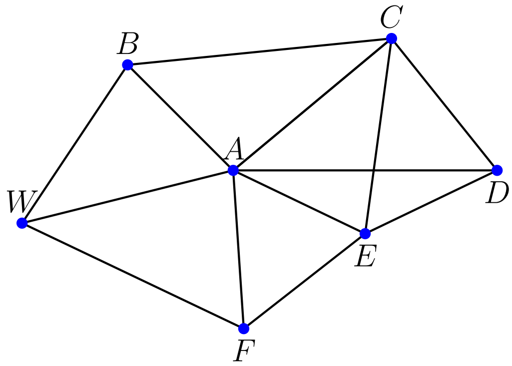
e) eine Außenfläche und vier Innenflächen

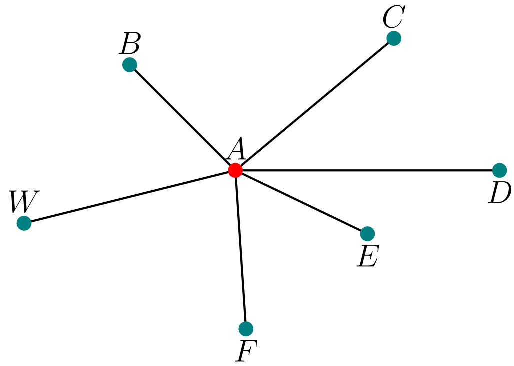
besitzen.

Lösungen der Aufgaben

Aufgabe 1

a) Neben einem kleinen Bergdorf wurde ein Wasserwerk W zur Versorgung der Häuser $A, \ldots, F$ gebaut. In der Graphik unten links siehst Du die Häuser und die möglichen Wasserleitungen. Aus Kostengründen sollen möglichst wenig Leitungen gebaut werden. Streiche aus dem Graphen möglichst viele Kanten, so dass noch alle Häuser mit Wasser versorgt werden können. Zeichne dann die Kanten des entstehenden Teilgraphen rechts ein.





Dies ist nur eine von vielen Lösungen

b) Wie heißt die Eigenschaft eines Graphen, die in unserem Beispiel garantiert, dass jedes Haus mit Wasser versorgt wird?

Antwort: Der Graph ist $\boxed{\text{zusammenhängend}}$.

c) Wie heißt der Teilgraph, den Du im Aufgabenteil a) gezeichnet hast, in Bezug auf den ursprünglichen Graphen?

Antwort:
Der Teilgraph ist ein $\boxed{\text{aufspannender Baum}}$ des linken Graphen.

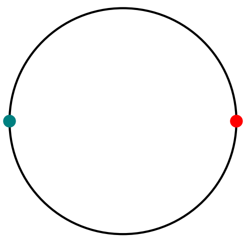
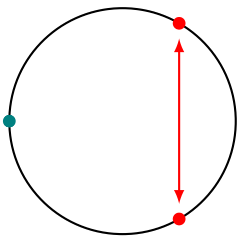
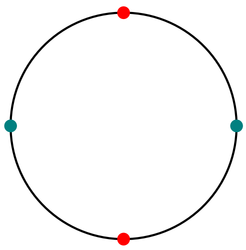
d) Die Wasserleitungsfirma hat nun Rohre geliefert, die zwei verschiedene Enden haben. Am einen Ende Anschlusstyp 1, am anderen den Anschlusstyp 2. Das bedeutet, dass nur Häuser mit verschiedenen Anschlüssen verbunden werden können. Außerdem ist vorgegeben, dass in jedem Haus nur einer der beiden Anschlusstypen verbaut werden kann. Zeige, dass die Wasserversorgung mit diesen Vorgaben gebaut werden kann. Färbe dazu die Häuser grün, die den Anschlusstyp 1 haben, und die anderen mit rot. Beachte, dass auch das Wasserwerk nur einen Anschlusstyp besitzen darf.

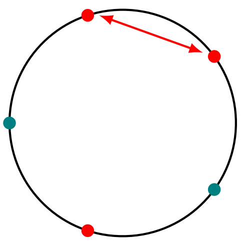
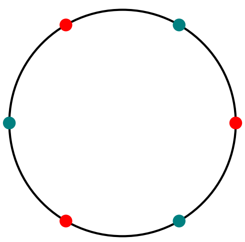
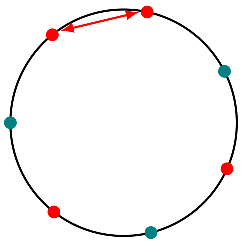
Die Ecken wurden oben entsprechend gefärbt.
Für andere Lösungen von Teil a) müssen die Färbungen entsprechend abgeändert werden.

Weiter auf nächster Seite

Wann sind Graphen, die nur aus Ecken auf einem Kreis bestehen, bipartit?
Wir untersuchen folgende Fragestellung: *Für welche natürlichen Zahlen n ist ein Graph, der nur aus n Ecken auf einem Kreis besteht, bipartit?*

Schritt 1: Untersuche Beispiele für „kleine“ n von 2 bis 7.

n	2	3	4
Graph			
bipartit?	Ja	Nein	Ja

n	5	6	7
Graph			
bipartit?	Nein	Ja	Nein

Schritt 2: Stelle eine Vermutung auf, wie die obige Frage beantwortet werden kann.

Vermutung:

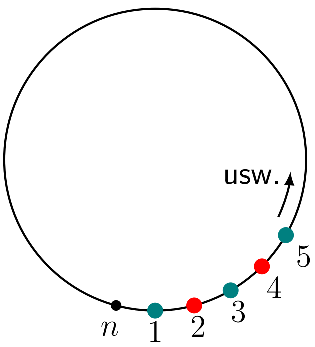
Gegeben ist ein Graph, der nur aus n Ecken auf einem Kreis besteht.

Falls n eine gerade Zahl ist, dann ist der Graph bipartit.

Falls n eine ungerade Zahl ist, dann ist der Graph nicht bipartit.

Schritt 3: Beweise deine Vermutung durch geeignetes Färben der Ecken.

Die Ecken benennen wir hierzu gegen den Uhrzeigersinn mit den Zahlen 1 bis n. Beginne nun mit dem Färben, indem du Ecke 1 grün färbst und gegen den Uhrzeigersinn fortfährst. Welche Farbe haben dann die Ecken 2, 3, 4 usw.?



Für die Ecke mit der Nummer k ergibt sich folgender Zusammenhang:

Falls k eine ungerade Zahl ist, dann ist die Ecke k grün.

Falls k eine gerade Zahl ist, dann ist die Ecke k rot.

Zwischen welchen beiden benachbarten Ecken kann überhaupt ein Konflikt bei der Färbung auftreten?

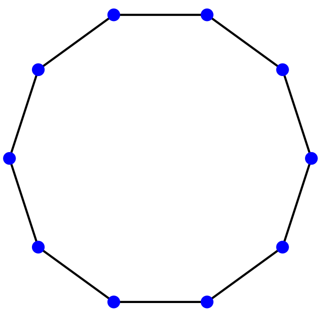
Zwischen der Ecke mit der Nummer $\boxed{1}$ und der Ecke mit der Nummer $\boxed{n}$.

Falls n $\boxed{\text{gerade}}$ ist, sind beide Ecken unterschiedlich gefärbt, und es gibt keinen Konflikt. In diesem Fall ist der Graph bipartit.

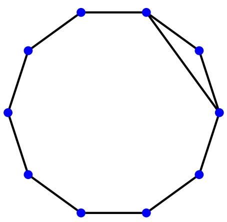
Falls n $\boxed{\text{ungerade}}$ ist, sind beide Ecken gleich gefärbt, und es gibt einen Konflikt. In diesem Fall ist der Graph nicht bipartit.

Aufgabe 2

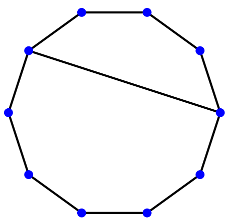
Gegeben ist der nebenstehende bipartite Graph. Ergänze eine Kante, so dass der Graph nicht mehr bipartit ist.



Lösung: Z.B.



oder



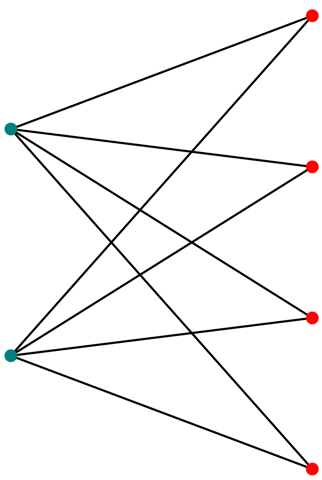
Aufgabe 3

a) Zeichne einen vollständigen 2–4–Graphen. Wie viele Kanten besitzt er?

b) Wie viele Kanten besitzt ein vollständiger m–n–Graph? Antwort: $m \cdot n$ Kanten

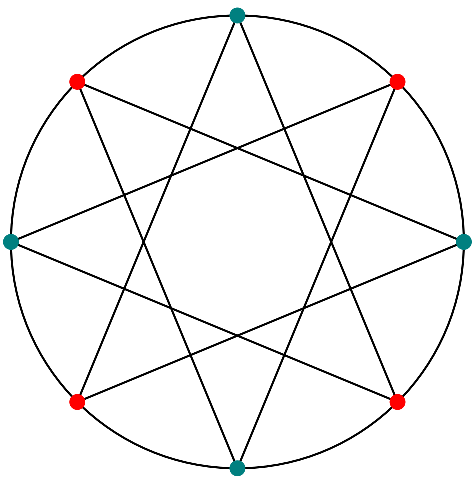
c) Ergänze im Achteck Kanten (keine Ecken), bis ein vollständiger bipartiter Graph ensteht. Welcher vollständige m–n–Graph entsteht hierdurch?

Lösung zu a)



Der Graph besitzt $\boxed{8}$ Kanten.

Lösung zu c)



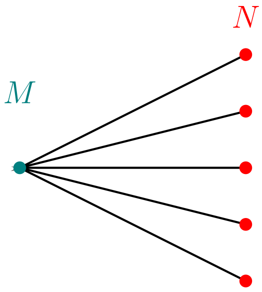
Vollständiger $\boxed{4}$ – $\boxed{4}$ –Graph.

Aufgabe 4

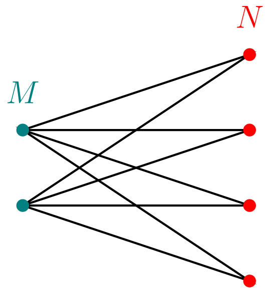
Zeichne alle vollständigen bipartiten Graphen mit 6 Ecken, die nicht zueinander isomorph sind.

Lösung:

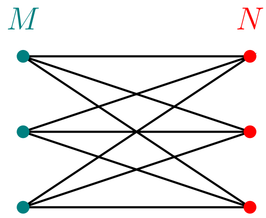
M mit 1 Ecke
N mit 5 Ecken



M mit 2 Ecken
N mit 4 Ecken



M mit 3 Ecken
N mit 3 Ecken

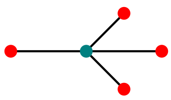


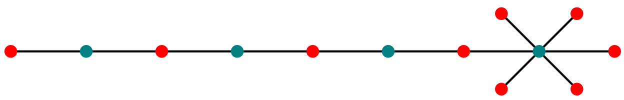
Alle vollständigen bipartiten Graphen mit 6 Ecken sind isomorph zu einem dieser Graphen. Es gibt nicht mehr mögliche Eckenverteilungen außer Vertauschung von M und N.

Aufgabe 5

Zeichne einen Baum, der ein

a) 2–3–Graph ist. Lösung:

b) 1–4–Graph ist. Lösung: 

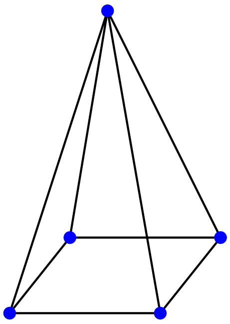
c) 4–9–Graph ist. Lösung: 

Weiter auf nächster Seite

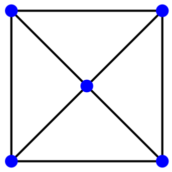
Aufgabe 6

Gegeben sind die folgenden Graphen, die Begrenzungen dreidimensionaler Körper darstellen. Zeige, dass die Graphen plättbar sind, indem Du jeweils einen isomorphen ebenen Graphen zeichnest.

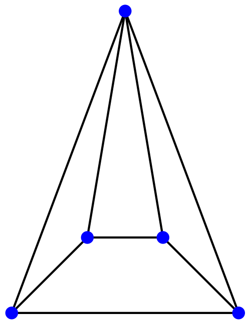
Lösung: **a)** In dieser Teilaufgabe gibt es zwei verschiedene Lösungen!



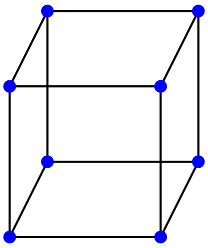
isomorphe Graphen:



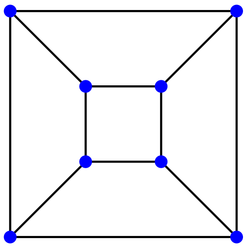
oder



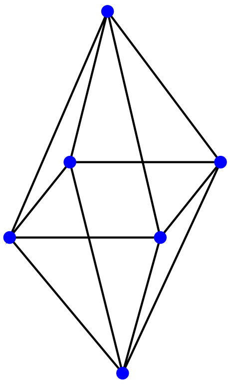
b)



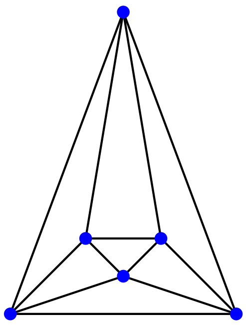
isomorpher Graph:



c)

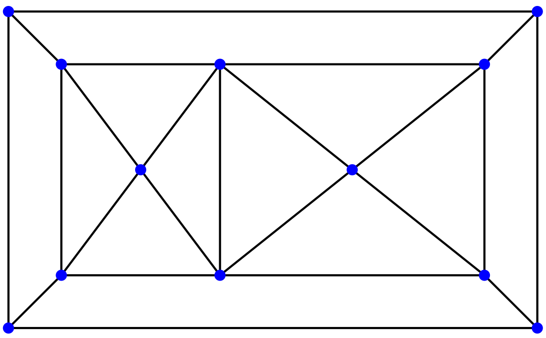


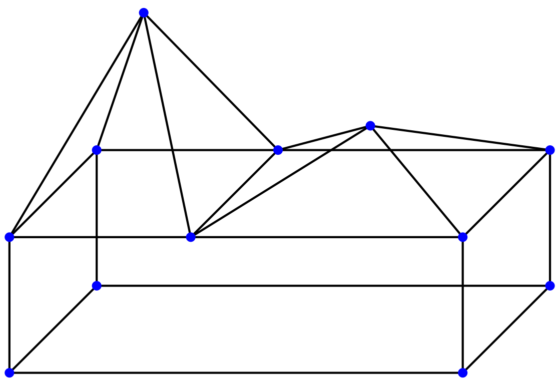
isomorpher Graph:



Aufgabe 7

Zeichne neben den ebenen Graphen ein Gebäude, das zu dem Graphen gehören könnte.

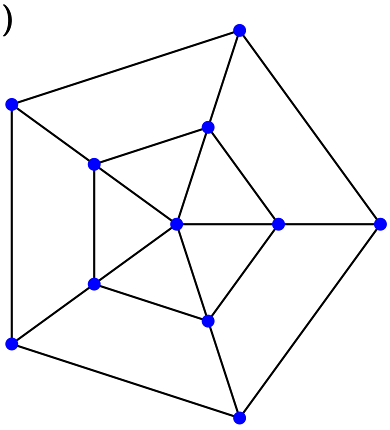


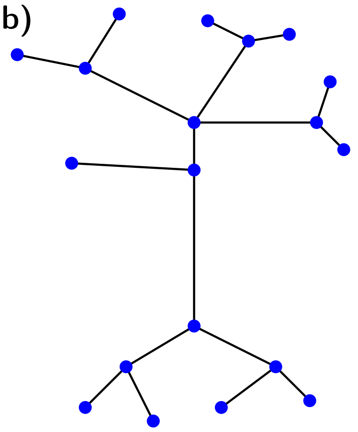


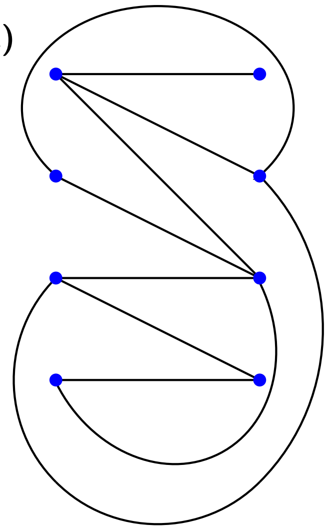
Weiter auf nächster Seite

Aufgabe 8

Trage in die Graphen eine Nummerierung der Flächen ein, in die die Ebene durch den Graphen unterteilt wird. Vergiss die Außenfläche nicht. Fülle dann die Tabelle aus.

a) 

b) 

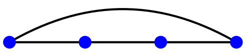
c) 

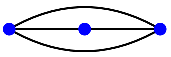
Graph	Anzahl Ecken	Anzahl Kanten	Anzahl Flächen	$e - k + f$
a)	$e =$ 11	$k =$ 20	$f =$ 11	2
b)	$e =$ 19	$k =$ 18	$f =$ 1	2
c)	$e =$ 8	$k =$ 10	$f =$ 4	2
Baum mit n Ecken	$e = n$	$k = n - 1$	$f =$ 1	2

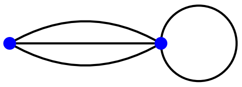
Aufgabe 9

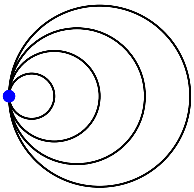
Zeichne zusammenhängende Graphen mit jeweils vier Kanten, die

a) eine Außenfläche und keine Innenfläche, Lösung:

b) eine Außenfläche und eine Innenfläche, Lösung: 

c) eine Außenfläche und zwei Innenflächen, Lösung: 

d) eine Außenfläche und drei Innenflächen, Lösung: 

e) eine Außenfläche und vier Innenflächen Lösung: 

besitzen.