Graphentheorie

zum Selbstlernen

Vorwort

Dies ist ein Skript zum Selbststudium. Du kannst hier Grundlagen der Graphentheorie kennenlernen.

Der Text ist im Wesentlichen der Mitschrieb aus einem Online-Kurs *Graphentheorie* im Schülerseminar für Klasse 8-10. Du findest diesen und andere Kurse auf der Seite

`https://pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/iadm/Zirkel/material-Schuelerseminar/`

Falls Du beim Studium des vorliegenden Textes Fragen hast, kannst Du beim Online-Kurs im entsprechenden Video nachsehen, dort gibt es ausführlichere Erklärungen. Um die Verbindung zu finden, ist am Rand des Textes markiert, wann die einzelnen Einheiten des Online-Kurses beginnen.

Die Aufgaben sind auch dieselben wie im Online-Kurs. Im Lerntext sind keine Lösungen dabei, damit Du sie selber lösen kannst. Bei den Aufgaben ist oft Platz, um Deine Lösungen aufzuschreiben. Manchmal musst Du aber auch ein extra Blatt für die Berechnungen dazunehmen. Falls Du Deine Lösungen überprüfen willst, stehen alle Aufgaben mit Lösungen im letzten Kapitel dieses Skripts.

Ich wünsche Dir viel Spaß beim Durcharbeiten des Skripts und bei den Aufgaben!

8. November 2024 Peter Lesky

Inhalt

Auf den nächsten Seiten findest Du das Skript mit Aufgaben zur vierten Einheit *Bäume und bipartite Graphen*. Die weiteren Teile werden bei den entsprechenden Einheiten veröffentlicht.

Beginn Online-Einheit 4

Wir beginnen mit der Umkehrung zum letzten Satz der vorigen Einheit.

Umkehrsatz: Gibt es in einem Graphen von jeder Ecke zu jeder anderen Ecke genau einen Weg, und enthält der Graph keine Schlinge, dann ist dieser Graph ein Baum.

Beweis: Der Graph ist zusammenhängend, da es von jeder Ecke zu jeder anderen einen Weg gibt.
Der Graph enthält keinen Kreis mit 1 Ecke, da er keine Schlinge besitzt.
Er enthält auch keinen Kreis mit mindestens 2 Ecken, denn andernfalls gäbe es zu zwei verschiedenen Ecken dieses Kreises zwei verschiedene Wege, die sie verbinden.
$\Rightarrow$ der Graph ist ein Baum. □

Aufgabe 1
Skizziere Bäume mit 6 Ecken und den jeweils angegebenen Eigenschaften. Wie viele Kanten haben die Bäume?

a) Der Baum hat genau zwei Ecken mit Eckengrad 1,

b) Der Baum hat genau drei Ecken mit Eckengrad 1,

c) Der Baum hat genau vier Ecken mit Eckengrad 1,

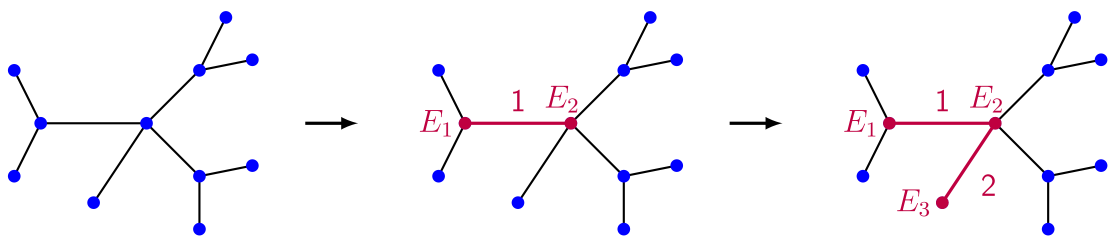
d) Der Baum hat genau fünf Ecken mit Eckengrad 1.

Ein Baum mit sechs Ecken hat offensichtlich immer gleich viele Kanten. Der folgende Satz verallgemeinert diese Aussage.

Satz: Ein Baum mit n Ecken besitzt genau $n-1$ Kanten

Beweis: Es sei ein Graph mit n Ecken gegeben. Wir färben seine Ecken und Kanten, während wir sie zählen.

1) Wähle eine beliebige Ecke E_1 und färbe sie.
2) Wähle eine beliebige Kante, die E_1 mit einer Ecke E_2 verbindet. Da keine Schlinge erlaubt ist, folgt $E_1 \neq E_2$. Färbe die gewählte Kante und E_1. Bisher gezählt: 2 Ecken und 1 Kante.
3) Wähle eine noch nicht gefärbte Kante, die E_1 oder E_2 mit einer Ecke E_3 verbindet. Da der Baum keinen Kreis enthält, gilt $E_3 \neq E_2$ und $E_3 \neq E_1$. Färbe die neue Kante und E_3. Bisher gezählt: 3 Ecken und 2 Kanten.

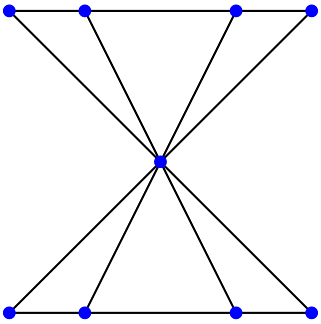


Setze entsprechend fort: In jedem Schritt wird eine neue Kante gefärbt, die eine der bereits gefärbten Ecken mit einer Ecke verbindet. Diese Ecke ist noch nicht gefärbt, da es im Baum keinen Kreis gibt, und wird jetzt gefärbt. Es kommt 1 Kante und 1 Ecke dazu.
Mit dieser Methode wird jede Ecke des Baumes gefärbt, da er zusammenhängend ist.
Nach n Schritten haben wir n Ecken und $n-1$ Kanten gezählt. Der Graph besitzt keine weiteren

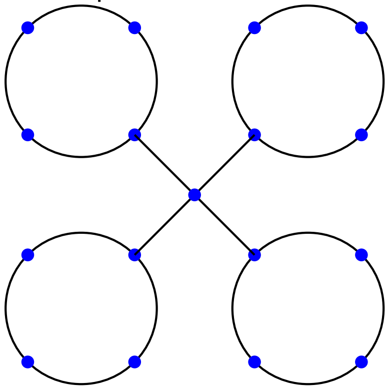
Kanten, denn jede weitere Kante müsste eine der bereits gefärbten Ecken mit einer neuen Ecke verbinden. Weitere Ecken besitzt der Graph nicht, also haben wir alle Ecken und Kanten des Graphen gezählt. □

Aufgabe 2
Streiche in den angegebenen Graphen jeweils so viele Kanten, dass der entstehende Teilgraph ein Baum ist und alle Ecken des gegebenen Graphen enthält.

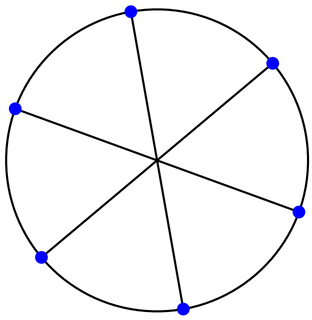
a)



b)



c)

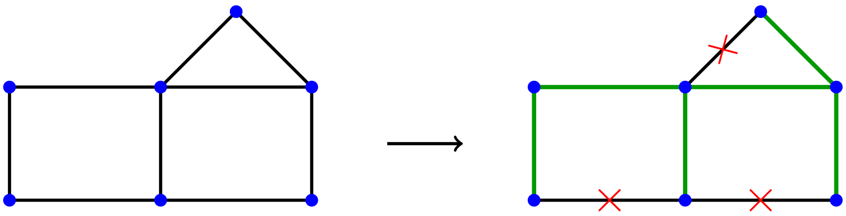


Definition: Ist ein Teilgraph eines Graphen ein Baum, der alle Ecken des Graphen enthält, so heißt er aufspannender Baum des Graphen.

Satz: Jeder zusammenhängende Graph besitzt einen aufspannenden Baum.

Beweis: Sei ein zusammenhängender Graph gegeben. Wenn er keinen Kreis enthält, ist er ein Baum und sein eigener aufspannender Baum.
Enthält er einen Kreis, so entferne eine Kante des Kreises aus dem Graphen. Der entstehende Teilgraph ist weiterhin zusammenhängend, da der Kreis zusammenhängend bleibt. Wiederhole diesen Schritt so oft, bis der entstehende Teilgraph keinen Kreis mehr enthält. Dieser ist ein aufspannender Baum des Graphen. □

Veranschaulichung:



Folgerung: Jeder zusammenhängende Graph mit n Ecken besitzt mindestens $n-1$ Kanten.

Beweis: Der Graph besitzt einen aufspannenden Baum mit n Ecken. Dieser hat $n-1$ Kanten, die alle im Graphen enthalten sind. □

Folgerung: Entfernt man aus einem Baum eine Kante, so ist er nicht mehr zusammenhängend.

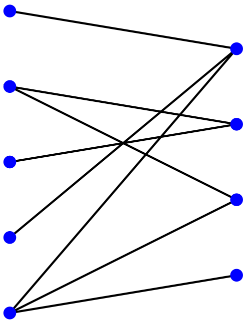
Beweis: Betrachte einen Baum mit n Ecken. Er hat $n-1$ Kanten. Entfernt man eine Kante, so hat der enstehende Teilgraph n Ecken und $n-2$ Kanten. Der Teilgraph kann nicht zusammenhängend sein, denn sonst müsste er mindestens $n-1$ Kanten besitzen.

Folgerung: Besitzt ein zusammenhängender Graph mit n Ecken genau $n-1$ Kanten, so ist der Graph ein Baum.

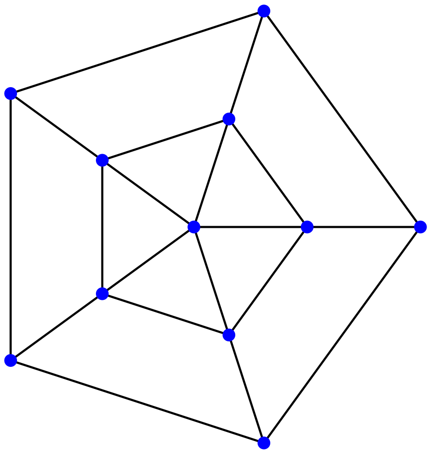
Beweis: Sei ein zusammenhängender Graph mit n Ecken und $n-1$ Kanten gegeben.
Letzter Satz $\Rightarrow$ Er enthält einen aufspannenden Baum. Dieser hat $n-1$ Kanten.
$\Rightarrow$ Der Graph ist gleich seinem aufspannenden Baum, ist also selber ein Baum.

Aufgabe 3
Zeichne in die beiden Graphen jeweils einen aufspannenden Baum ein.

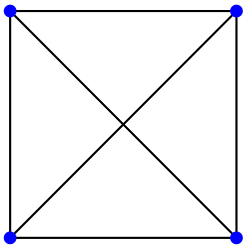
a)



b)



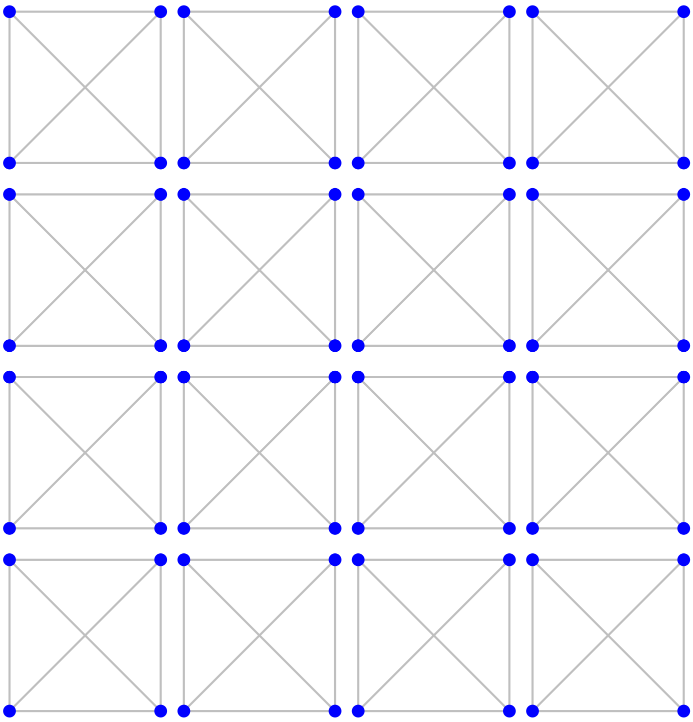
Aufgabe 4
Gegeben ist ein vollständiges Viereck.



a) Der Graph besitzt 16 verschiedene aufspannende Bäume. Skizziere sie.

b) Wie viele nicht zueinander isomorphe aufspannende Bäume gibt es? Skizziere alle nicht zueinander isomorphen aufspannenden Bäume.

Lösung zu a):

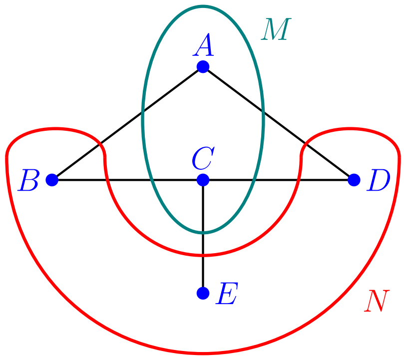


Lösung zu b):

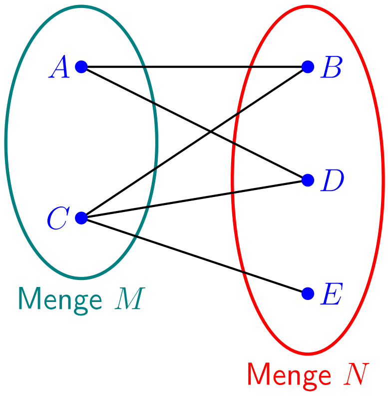
8 Bipartite Graphen

Definition: 1) In einem Graphen heißen zwei Ecken benachbart, falls sie durch mindestens eine Kante verbunden sind.
2) Ein Graph heißt bipartit, wenn die Menge seiner Ecken in zwei nichtleere Teilmengen M und N aufgeteilt werden kann, so dass nur Ecken aus verschiedenen Mengen benachbart sind. Kanten, die zwei Ecken derselben Teilmenge verbinden, gibt es nicht.

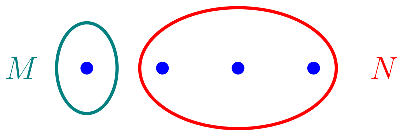
Beispiel: bipartiter Graph



isomporpher Graph



Bemerkungen: 1) Ein bipartiter Graph besitzt mindestens zwei Ecken, denn sowohl in M als auch in N muss mindestens eine Ecke enthalten sein.
2) Ein Graph ohne Kanten mit mindestens zwei Ecken ist bipartit (aber langweilig).



3) Ein bipartiter Graph enthält keine Schlinge, denn jede Ecke mit einer Schlinge ist zu sich selbst benachbart.
4) Sind zwei Graphen isomorph, so sind entweder beide bipartit oder beide nicht bipartit.

Die Färbemethode:

Gegeben: Ein zusammenhängender Graph mit mindestens zwei Ecken.

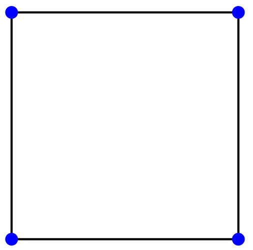
Ziel: Entscheide, ob dieser Graph bipartit ist.

Vorgehen: 1) Wähle eine Ecke des Graphen und färbe sie grün.
2) Färbe alle ihre Nachbarn rot.
3) Färbe deren benachbarte Ecken wieder grün, usw.

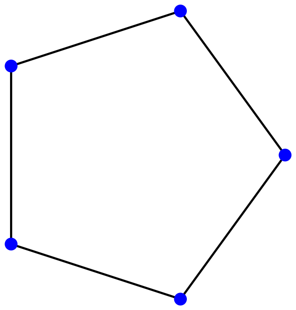
Ergeben sich gleichfarbige benachbarte Ecken, so ist der Graph nicht bipartit.
Gelingt es, alle Ecken so zu färben, dass benachbarte Ecken verschieden gefärbt sind, dann ist der Graph bipartit. Die grünen Ecken bilden die Menge M, die roten die Menge N.

Aufgabe 5
Stelle mit Hilfe der Färbemethode fest, ob die Graphen bipartit sind oder nicht. Trage in die Tabelle J für Ja, N für Nein ein.

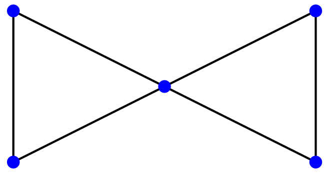
Graph 1:



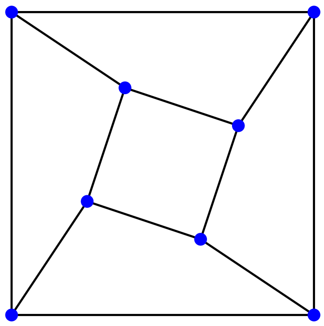
Graph 2:



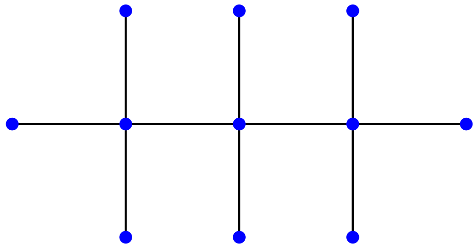
Graph 3:



Graph 4:



Graph 5:



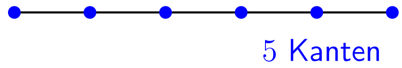
Graph	Graph 1	Graph 2	Graph 3	Graph 4	Graph 5
ist bipartit					

Lösungen der Aufgaben

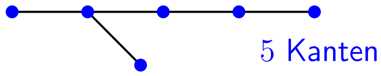
Aufgabe 1

Skizziere Bäume mit 6 Ecken und den jeweils angegebenen Eigenschaften. Wie viele Kanten haben die Bäume?

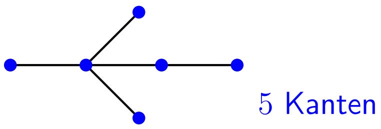
a) Der Baum hat genau zwei Ecken mit Eckengrad 1,



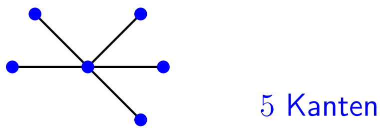
b) Der Baum hat genau drei Ecken mit Eckengrad 1,



c) Der Baum hat genau vier Ecken mit Eckengrad 1,



d) Der Baum hat genau fünf Ecken mit Eckengrad 1.

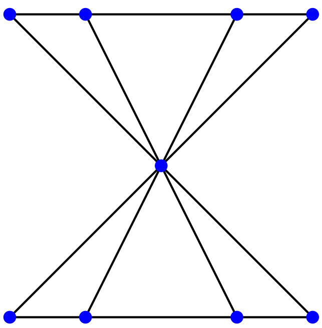


Lösung: Ist bereits im Aufgabentext enthalten.

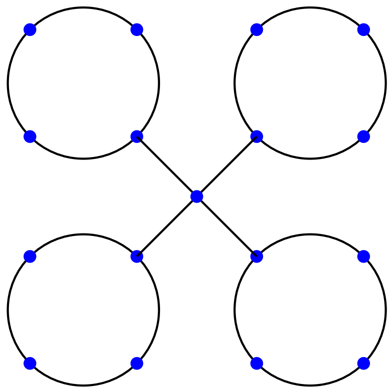
Aufgabe 2

Streiche in den angegebenen Graphen jeweils so viele Kanten, dass der entstehende Teilgraph ein Baum ist und alle Ecken des gegebenen Graphen enthält.

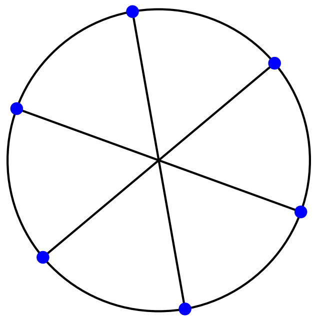
a)



b)



c)



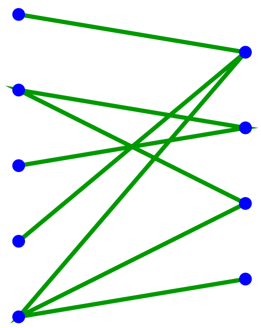
Weiter auf nächster Seite

Aufgabe 3

Zeichne in die beiden Graphen jeweils einen aufspannenden Baum ein.

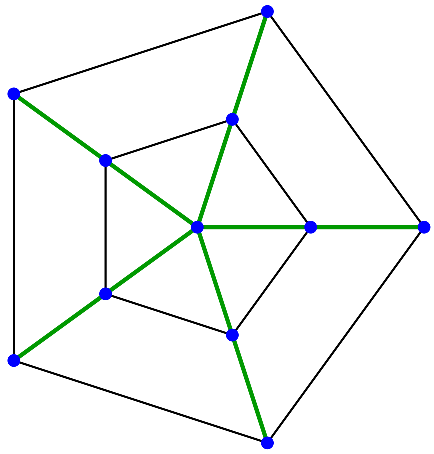
Lösung: *Hinweise:* Der Graph aus Teil a) ist zusammenhängend, besitzt 9 Ecken und 8 Kanten. Also ist er ein Baum.
In Teil b) hat der Graph 11 Ecken. Ein aufspannender Baum muss also 10 Kanten enthalten.

a)



Dieser Graph ist bereits ein Baum

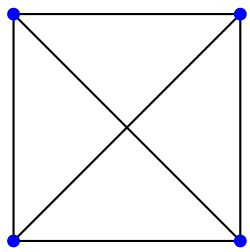
b)



Ein aufspannender Baum besteht aus allen Ecken und den grünen Kanten. Es gibt noch andere Lösungen.

Aufgabe 4

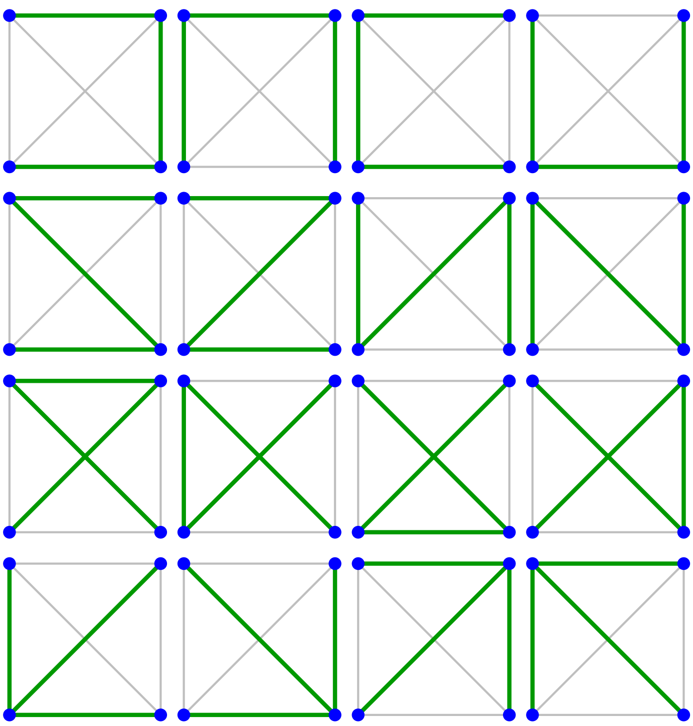
Gegeben ist ein vollständiges Viereck.



a) Der Graph besitzt 16 verschiedene aufspannende Bäume. Skizziere sie.

b) Wie viele nicht zueinander isomorphe aufspannende Bäume gibt es? Skizziere alle nicht zueinander isomorphen aufspannenden Bäume.

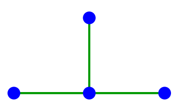
Lösung zu a):



Lösung zu b):

Alle aufspannenden Bäume der ersten drei Zeilen sind isomorph zu

Alle aufspannenden Bäume der letzten Zeile sind isomorph zu

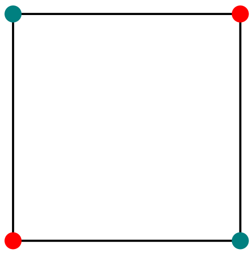


Aufgabe 5

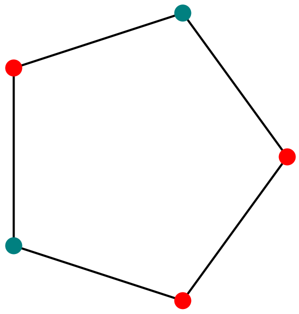
Stelle mit Hilfe der Färbemethode fest, ob die Graphen bipartit sind oder nicht. Trage in die Tabelle J für Ja, N für Nein ein.

Lösung:

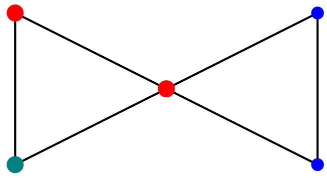
Graph 1:



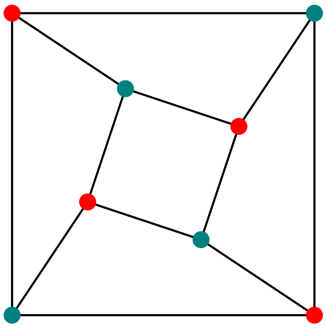
Graph 2:



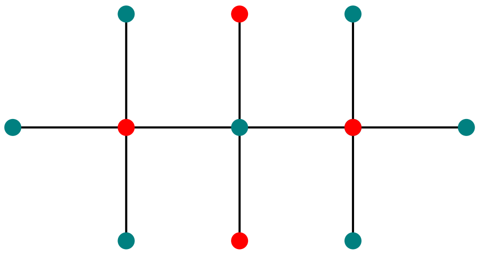
Graph 3:



Graph 4:



Graph 5:



Graph	Graph 1	Graph 2	Graph 3	Graph 4	Graph 5
ist bipartit	J	N	N	J	J