

Priv.-Doz. Dr. Jens Wirth
Institut für Analysis, Dynamik und Modellierung
Universität Stuttgart

Partielle Differentialgleichungen

1. Auflage

Stuttgart, den 25. März 2016

Inhaltsverzeichnis

0	Einleitung	5
1	Vier wichtige Beispiele	9
1.1	Transportgleichungen	9
1.2	Laplace- und Poissongleichung	10
1.3	Wärmeleitungsgleichung	28
1.4	Wellengleichung	35
2	Anfangswertprobleme	45
2.1	Problemstellung	45
2.2	Die Sätze von Cauchy–Kowalewskaja und Holmgren	46
2.3	Korrektheit	51
2.4	Hyperbolische Cauchyprobleme mit konstanten Koeffizienten	57
2.5	Symmetrisch hyperbolische Cauchyprobleme mit variablen Koeffizienten	67
3	Randwertprobleme	71
3.1	Dirichletprobleme für elliptische Operatoren zweiter Ordnung	71
3.2	Regularität	79
3.3	Neumann- und Robinprobleme für elliptische Operatoren zweiter Ordnung	88

0 Einleitung

Partielle Differentialgleichungen sind Gleichungen für Funktionen, die neben der zu bestimmenden Funktion noch ihre partiellen Ableitungen enthalten. Das mag konzeptionell einfach klingen, besitzt aber einige inhärente Schwierigkeiten, welche wir im Verlaufe dieses Semesters diskutieren wollen. Im Gegensatz zu gewöhnlichen Differentialgleichungen, bei denen Funktionen einer reellen (oder komplexen) Veränderlichen gesucht sind und eine recht übersichtliche Existenz- und Eindeigkeitstheorie existiert, sind allgemeine Aussagen über partielle Differentialgleichungen schwer und jeder Typ partieller Differentialgleichungen verlangt nach einer eigenen Theorie. Wir werden dies später genauer sehen.

Zuerst zu einigen Beispielen, die ebenso einen Teil der verwendeten Notation erklären.

0.1. Wir betrachten Funktionen $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ und Vektorfelder $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Einfachste partielle Differentialgleichungen kennt man aus der Grundvorlesung. So gilt

$$\nabla \varphi = \begin{pmatrix} \partial_1 \varphi \\ \partial_2 \varphi \\ \partial_3 \varphi \end{pmatrix} = 0 \quad (0.1)$$

genau dann, wenn φ konstant ist. Hierbei bezeichne ∂_j die partielle Ableitung nach der Koordinate x_j . Etwas spannender ist die Frage, wann

$$\nabla \varphi = \vec{v} \quad (0.2)$$

für das gegebene Vektorfeld $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)^\top$ gilt. Da für stetig differenzierbare Funktionen (und auch Distributionen) partielle Ableitungen kommutieren, muß dafür zumindest

$$\partial_2 v_1 = \partial_1 v_2, \quad \partial_3 v_1 = \partial_1 v_3, \quad \partial_3 v_2 = \partial_2 v_3 \quad (0.3)$$

gelten. Auf einfach zusammenhängenden Gebieten ist dies auch hinreichend und als Integrabilitätsbedingung des Vektorfeldes \vec{v} bekannt. Unter dieser Voraussetzung sind Kurvenintegrale des Vektorfeldes wegunabhängig und es gilt (modulo Konstanten)

$$\varphi(x) = \int_{x_0}^x \vec{v} \cdot \vec{d}s. \quad (0.4)$$

Die *Integrabilitätsbedingung* schreibt sich auch kurz als $\text{rot } \vec{v} = 0$, wobei

$$\text{rot } \vec{v} = \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix} \quad (0.5)$$

die *Rotation* des Vektorfeldes \vec{v} bezeichnet.

0.2. Eine Grundaufgabe der Elektrostatik besteht darin, zu gegebenen Ladungsverteilungen mit Dichte $\rho: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ das zugehörige elektrische Feld \vec{E} zu berechnen. Dieses erfüllt

$$\operatorname{div} \vec{E} = \partial_1 E_1 + \partial_2 E_2 + \partial_3 E_3 = \rho, \quad (0.6)$$

ρ ist also die *Divergenz* von \vec{E} . Der Integralsatz von Gauß¹ macht daraus die Integralbeziehung

$$\oint_{\partial\Omega} \vec{E} \cdot \vec{d}\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} = \int_{\Omega} \rho \quad (0.7)$$

für jedes Gebiet $\Omega \in \mathbb{R}^3$ mit glattem Rand $\partial\Omega$. Hier bezeichnet $\vec{d}\sigma$ das nach außen gerichtete vektorielle Flächenelement; wir integrieren also den Normalenanteil des elektrischen Feldes \vec{E} über $\partial\Omega$, erhalten das aus Ω herausfließende Feld und dieses ist gleich der integrierten Ladungsdichte, also der in Ω befindlichen Gesamtladung.

Die Gleichung $\operatorname{div} \vec{E} = \rho$ genügt noch nicht, um \vec{E} zu bestimmen. In der Elektrostatik sind \vec{E} -Felder wirbelfrei, es gilt also

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0. \quad (0.8)$$

Damit existiert nach dem bisher Gezeigten eine Funktion $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\vec{E} = \nabla \varphi$. Setzt man diese in (0.6) ein, so ergibt sich

$$\operatorname{div} \nabla \varphi = \Delta \varphi = \rho \quad (0.9)$$

mit dem *Laplaceoperator*²

$$\Delta \varphi = \partial_1^2 \varphi + \partial_2^2 \varphi + \partial_3^2 \varphi. \quad (0.10)$$

Gleichung (0.9) wird als *Poissongleichung*³ bezeichnet.

0.3. Der Integralsatz von Gauß ist für die Formulierung von Erhaltungssätzen von Bedeutung. Dazu ein Beispiel, wir modellieren die Wärmeleitung. Dazu bezeichne ϑ die Temperaturverteilung (z.B. in einem Raum, Körper oder ähnlichem), welche proportional zu einer Energiedichte verstanden werden kann. Die thermische Energie ist also durch Integrale über $c\vartheta$ gegeben. Desweiteren glauben wir an das Fouriersche Gesetz⁴ und erwarten, dass die thermische Energie proportional zum Temperaturgradienten transportiert wird. Es gilt also für jedes Volumen Ω mit hinreichend glattem Rand $\partial\Omega$ und alle Zeiten $t_0 < t_1$

$$\int_{\Omega} c\vartheta(t_1) - \int_{\Omega} c\vartheta(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \oint_{\partial\Omega} \alpha \nabla \vartheta \cdot \vec{d}\sigma = \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} \operatorname{div}(\alpha \nabla \vartheta) \quad (0.11)$$

unter Ausnutzung des Integralsatzes von Gauß und damit

$$\partial_t(c\vartheta) = \operatorname{div}(\alpha \nabla \vartheta). \quad (0.12)$$

Nimmt man nun an, daß c und α Konstanten (und der Einfachheit halber auch =1) sind, so ergibt sich die *Wärmeleitungsgleichung*

$$\partial_t \vartheta = \Delta \vartheta. \quad (0.13)$$

¹CARL FRIEDRICH GAUSS, 1777–1855

²PIERRE-SIMON LAPLACE, 1749–1827

³SIMÉON DENIS POISSON, 1781–1840

⁴JEAN-BAPTISTE JOSEPH FOURIER, 1768–1830

0.4. Wir geben noch weitere Typen linearer partieller Differentialgleichungen an; die Auflistung will nicht vollständig sein, aber zeigen welche Vielfalt an Gleichungen uns später begegnen wird. Neben der oben schon erwähnten Laplace- und Poissongleichung spielt die *Helmholtzgleichung*⁵

$$\Delta u + \lambda u = 0 \quad (0.14)$$

eine wichtige Rolle. Dabei ist λ ein reeller oder komplexer Parameter. Ähnlich zur Wärmeleitungsgleichung wirkt die *Schrödingergleichung*⁶

$$i\partial_t \varphi + \Delta \varphi = 0, \quad (0.15)$$

die aber ein vollkommen anderes Verhalten zeigt. Schwingungsvorgänge führen auf die *Wellengleichung*

$$\partial_t^2 u - \Delta u = 0 \quad (0.16)$$

oder die *Plattengleichung*

$$\partial_t^2 u + \Delta^2 u = 0. \quad (0.17)$$

0.5. Die gesuchten Funktionen können vektorwertig sein. So erfüllt die elastische Deformation eines isotropen Festkörpers im Gleichgewichtszustand die *Lamégleichung*⁷

$$(\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} \vec{u} + \mu \vec{\Delta} \vec{u} = 0 \quad (0.18)$$

und die *Maxwellgleichungen*⁸ der Elektrodynamik

$$\partial_t \vec{E} + \vec{j} = \operatorname{rot} \vec{B}, \quad \partial_t \vec{B} = -\operatorname{rot} \vec{E}, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{E} = \rho \quad (0.19)$$

beschreiben den Zusammenhang zwischen zeitabhängigen elektrischen und magnetischen Feldern. Hierbei bezeichnet \vec{j} die Stromdichte und ρ die Ladungsdichte.

⁵HERMANN VON HELMHOLTZ, 1821–1894

⁶ERWIN SCHRÖDINGER, 1887–1961

⁷GABRIEL LÉON JEAN BAPTISTE LAMÉ, 1795–1870

⁸JAMES CLERK MAXWELL, 1831–1879

Notation

Wir fassen noch kurz die verwendete Notation zusammen.

$B_r(x)$	$= \{y : x - y < r\}$	Kugel mit Radius r um x
∂_j	$= \frac{\partial}{\partial x_j}$	partielle Ableitungen nach kartesischen Koordinaten
$ \Omega $	$= \int_{\Omega} dx$	(Lebesgue-) Maß der Menge Ω
$f_{\Omega} f(x) dx$	$= \frac{1}{ \Omega } \int_{\Omega} f(x) dx$	Mittelwert einer Funktion / Integralmittel
$\oint_{\Sigma} f(x) d\sigma(x)$		Integral über eine geschlossene Fläche Σ
$\vec{d}\sigma(x)$		(nach aussen gerichtetes) vektorielles Oberflächenelement

Wenn die Situation klar ist, verwenden wir keine verschiedenen Bezeichnungen für dieselben Funktionen in verschiedenen Koordinatensystemen. Wenn eine Funktion $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kartesisch als $u(x_1, x_2)$ geschrieben wird, so schreiben wir in Polarkoordinaten auch nur $u(r, \varphi)$. Partielle Ableitungen in Polarkoordinaten werden als ∂_r und ∂_{φ} geschrieben.

Weiter weisen wir nochmals auf den Integralsatz von Gauß hin. Für jedes Vektorfeld $\vec{u} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und jedes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit glattem Rand $\partial\Omega$ gilt

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{u}(x) dx = \oint_{\partial\Omega} \vec{u}(x) \cdot \vec{d}\sigma(x). \quad (0.20)$$

1 Vier wichtige Beispiele

Um ein Gefühl für partielle Differentialgleichungen zu entwickeln, beschäftigen wir uns zuerst mit einigen explizit lösbaren Problemen und der zugehörigen Lösungstheorie. Das Kapitel wird später als Sammlung von Beispielen dienen. Wir folgen dem Buch von Evans, [Ev], Kapitel 2.

1.1 Transportgleichungen

1.1.1. Transportgleichungen sind die einfachsten partiellen Differentialgleichungen. Für einen gegebenen Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ betrachten wir die Gleichung

$$\partial_t u + b \cdot \nabla u = 0 \quad (1.1.1)$$

für eine unbekannte Funktion $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Transportgleichungen sind nichts anderes als gewöhnliche Differentialgleichungen in Verkleidung. Ist u eine differenzierbare Funktion und gilt (1.1.1), so gilt für jedes feste $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und die Funktion

$$z(s) = u(t + s, x + sb) \quad (1.1.2)$$

offenbar

$$\dot{z}(s) = \frac{d}{ds} z(s) = \partial_t u(t + s, x + sb) + b \cdot \nabla u(t + s, x + sb) = 0. \quad (1.1.3)$$

Die Lösung u ist also entlang jeder der Geraden $\{(t + s, x + sb) : s \in \mathbb{R}\}$ konstant. Kennt man die Werte von u an einem Punkt jeder der Geraden, so kennt man die Lösung.

1.1.2. Das führt uns dazu, für Gleichung (1.1.1) ein *Anfangswertproblem* zu formulieren. Suchen wir Lösungen zu

$$\begin{cases} \partial_t u + b \cdot \nabla u = 0, & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \\ u(0, \cdot) = g, & \text{auf } \{t = 0\} \end{cases} \quad (1.1.4)$$

für eine differenzierbare Funktion $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$, so sind diese explizit durch

$$u(t, x) = g(x - tb) \quad (1.1.5)$$

gegeben. Wenn (1.1.4) eine hinreichend glatte Lösung besitzt, so ist obiges Argument anwendbar und diese muss durch (1.1.5) gegeben sein. Umgekehrt sieht man sofort, dass jede durch (1.1.5) gegebene Lösung für differenzierbares g die Gleichung erfüllt.

1.1.3. Wir betrachten noch ein inhomogenes Anfangswertproblem für (1.1.1), also

$$\begin{cases} \partial_t u + b \cdot \nabla u = f, & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \\ u(0, \cdot) = g, & \text{auf } \{t = 0\} \end{cases} \quad (1.1.6)$$

zu gegebenem $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Angenommen, u löst dieses Problem. Dann betrachtet man wiederum zu gegebenem (t, x) die Funktion $z(s)$ und erhält

$$\dot{z}(s) = \partial_t u(t+s, x+sb) + b \cdot \nabla u(t+s, x+sb) = f(t+s, x+sb). \quad (1.1.7)$$

Nach Integration in s liefert dies

$$u(t, x) - g(x - tb) = z(0) - z(-t) = \int_{-t}^0 f(t+s, x+sb) ds = \int_0^t f(s, x+(s-t)b) ds \quad (1.1.8)$$

und damit die Lösungsdarstellung

$$u(t, x) = g(x - tb) + \int_0^t f(s, x+(s-t)b) ds. \quad (1.1.9)$$

Lösungen sind nicht immer so einfach zu konstruieren, allerdings wird uns das hier genutzte Verfahren später als *Methode der Charakteristiken* wieder begegnen.

1.2 Laplace- und Poissongleichung

1.2.1. Als zweites betrachten wir die *Laplacegleichung*¹ $\Delta u = 0$ sowie ihre inhomogene Version, die *Poissongleichung*² $\Delta u = f$. Im klassischen Fall ist dabei u jeweils eine auf einem Gebiet Ω differenzierbare Funktion mit stetiger Fortsetzung auf $\bar{\Omega}$. Wir werden die Existenz von Lösungen konstruktiv zeigen und ihre Eindeutigkeit bei vorgegebenen Randwerten beweisen.

Harmonische Funktionen

Reellwertige Funktionen $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\Delta u = 0$ werden als auf Ω *harmonisch* bezeichnet. Harmonische Funktionen haben einige bemerkenswerte Eigenschaften, denen wir uns zuerst zuwenden wollen.

1.2.2 Satz (Mittelwerteigenschaft). *Sei $u \in C^2(\Omega)$ harmonisch. Dann gilt für jedes $x \in \Omega$ und jedes r mit $B_r(x) \subset \Omega$*

$$u(x) = \int_{\partial B_r(x)} u(y) d\sigma(y) = \int_{B_r(x)} u(y) dy. \quad (1.2.1)$$

Gilt umgekehrt für ein reellwertiges $u \in C^2(\Omega)$, alle $x \in \Omega$ und alle hinreichend kleinen $r > 0$

$$u(x) = \int_{\partial B_r(x)} u(y) d\sigma(y) \quad (1.2.2)$$

so ist dieses u harmonisch.

Beweis. Für die Hinrichtung betrachten die Hilfsfunktion

$$\varphi(r) = \int_{\partial B_r(x)} u(y) d\sigma(y) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} u(x+r\omega) d\sigma(\omega). \quad (1.2.3)$$

¹PIERRE-SIMON LAPLACE, 1749–1827

²SIMÉON DENIS POISSON, 1781–1840

Diese erfüllt aufgrund der Stetigkeit harmonischer Funktionen $\varphi(0) = u(x)$ und ebenso

$$\varphi'(r) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \omega \cdot \nabla u(x + r\omega) d\sigma(\omega) = \frac{r}{n} \int_{\partial B_r(x)} \nabla u(y) \cdot \vec{d}\sigma(y), \quad (1.2.4)$$

also mit dem Integralsatz von Gauß

$$\varphi'(r) = \frac{r}{n} \int_{B_r(x)} \Delta u(y) dy = 0. \quad (1.2.5)$$

Also gilt $\varphi(r) = u(x)$ für alle (hinreichend kleinen) r und der erste Teil der Behauptung ist gezeigt. Weiter gilt unter Ausnutzung von Polarkoordinaten

$$\int_{B_r(x)} u(y) dy = \int_0^r \int_{\mathbb{S}^{n-1}} u(x + s\omega) d\sigma(\omega) s^{n-1} ds = u(x) |\mathbb{S}^{n-1}| \int_0^r s^{n-1} ds = u(x) |B_r(x)|. \quad (1.2.6)$$

Für die Rückrichtung nehmen wir an, $\Delta u(x) \neq 0$. Da u reellwertig ist, können wir ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit annehmen, dass $\Delta u(x) > 0$ gilt und damit finden wir insbesondere ein hinreichend kleines r mit $\Delta u(y) > 0$ auf $B_r(x)$. Dann gilt aber für obiges φ

$$0 = \varphi'(r) = \frac{r}{n} \int_{B_r(x)} \Delta u(y) dy > 0. \quad (1.2.7)$$

Widerspruch! □

1.2.3 Korollar (Maximumprinzip). Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ harmonisch in Ω . Dann gilt

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \max_{x \in \partial\Omega} u(x). \quad (1.2.8)$$

Beweis. Angenommen, es existiert ein Punkt $x_0 \in \Omega$ mit $u(x_0) = M = \max_{x \in \Omega} u(x)$. Dann gilt für alle $0 < r < \text{dist}(x_0, \partial\Omega)$

$$M = u(x_0) = \int_{B_r(x_0)} u(y) dy \leq M \quad (1.2.9)$$

mit Gleichheit genau dann, wenn u auf $B_r(x_0)$ konstant ist. Betrachtet man nun die Menge $\{x \in \Omega : u(x) = M\}$, so ist diese damit offen (und abgeschlossen, da u ja stetig ist) und somit gleich einer Zusammenhangskomponenten von Ω . Daraus folgt die Behauptung. □

1.2.4 Korollar. Sei Ω zusammenhängend und $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ harmonisch. Existiert dann ein $x_0 \in \Omega$ mit $u(x_0) = \max_{x \in \Omega} u(x)$, so ist u konstant in Ω .

1.2.5. Eine Folgerung aus dem Maximumprinzip betrifft die Eindeutigkeit von (klassischen) Lösungen zu Randwertproblemen der Form

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \text{in } \Omega, \\ u = g, & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.2.10)$$

zu gegebenen stetigen Funktionen $f \in C(\Omega)$ und $g \in C(\partial\Omega)$. Lösen zwei Funktionen $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ dieses Problem so erfüllt ihre Differenz

$$\begin{cases} \Delta(u_1 - u_2) = 0, & \text{in } \Omega, \\ u_1 - u_2 = 0, & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.2.11)$$

und nach dem Maximumprinzip gilt $u_1(x) - u_2(x) \leq 0$ für alle $x \in \Omega$. Ebenso folgt die umgekehrte Ungleichung und wir erhalten $u_1(x) = u_2(x)$ für alle $x \in \Omega$.

1.2.6 Satz (Weylsches³ Lemma). *Angenommen, $u \in C(\Omega)$ erfüllt die Mittelwerteigenschaft (1.2.2). Dann gilt $u \in C^\infty(\Omega)$ und u ist harmonisch.*

Beweis. Sei $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ radialsymmetrisch, kompakt getragen in $B_1(0)$ und gelte $\int \eta(x) dx = 1$. Sei weiter $\eta_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\eta(x/\varepsilon)$ und für $x \in \Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$ die Faltung

$$u^\varepsilon(x) = \int_{\Omega} \eta_\varepsilon(x-y)u(y) dy \quad (1.2.12)$$

definiert. Die Funktion u^ε ist nach Konstruktion beliebig oft differenzierbar und es gilt aufgrund der Mittelwerteigenschaft

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(x) &= \int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x-y)u(y) dy = \varepsilon^{-n} \int_0^\varepsilon \eta(r/\varepsilon)r^{n-1} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} u(x+r\omega) d\sigma(\omega) dr \\ &= |\mathbb{S}^{n-1}| \int_0^1 \eta(r)r^{n-1} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} u(x+r\omega) d\sigma(\omega) dr \\ &= u(x)|\mathbb{S}^{n-1}| \int_0^1 \eta(r)r^{n-1} dr = u(x). \end{aligned} \quad (1.2.13)$$

Also gilt $u \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ und da ε beliebig klein gewählt werden kann, ist die Aussage gezeigt. \square

1.2.7. Jede harmonische Funktion ist beliebig oft differenzierbar und alle ihre partiellen Ableitungen sind wieder harmonisch. Damit gilt

$$\partial_j u(x) = \int_{B_r(x)} \partial_j u(y) dy = \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{\partial B_r(x)} u(y) \vec{e}_j \cdot \vec{d}\sigma(y) \quad (1.2.14)$$

und wir können die Ableitung von u im Punkt x durch die Werte von u auf einer Sphäre um x abschätzen,

$$|\partial_j u(x)| \leq \frac{n}{r} \max_{y \in \partial B_r(x)} |u(y)|. \quad (1.2.15)$$

Als Folgerung aus dieser Abschätzung ergibt sich eine Version des bekannten Liouvilleschen Satzes der Funktionentheorie:

1.2.8 Satz. *Jede auf ganz \mathbb{R}^n harmonische und beschränkte Funktion ist konstant.*

Beweis. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig und $M = \|u\|_\infty$. Dann gilt für jede partielle Ableitung

$$|\partial_j u(x)| \leq \frac{n}{r} \max_{y \in \partial B_r(x)} |u(y)| \leq \frac{Mn}{r} \quad (1.2.16)$$

und mit $r \rightarrow \infty$ folgt die Behauptung. \square

Addenda

1.2.9. Als Hilfsmittel benötigen wir noch einige spezielle Differentialoperatoren, welche insbesondere im Zusammenhang mit Kugelkoordinaten $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \ni x \leftrightarrow (r, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^{n-1}$ von Bedeutung sind. Das betrifft zum Einen den *Euleroperator*⁴

$$E = x \cdot \nabla = \sum_j x_j \partial_j, \quad (1.2.17)$$

³HERMANN WEYL, 1885–1955

⁴LEONHARD EULER, 1707–1783

sowie die *Rotationsableitungen*

$$L_{i,j} = x_i \partial_j - x_j \partial_i. \quad (1.2.18)$$

In Polarkoordinaten schreibt sich der Euleroperator offenbar als $E = r \partial_r$, während die Operatoren $L_{i,j}$ Ableitungen nach Rotationen der i - j -Ebene darstellen und somit auf die Sphäre \mathbb{S}^{n-1} eingeschränkt werden können. Für letzteres beachte man, dass in der x - y -Ebene und mit Polarkoordinaten $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$ die Beziehung $\partial_\phi = x \partial_y - y \partial_x$ gilt.

Im folgenden Lemma fassen wir einige elementare Eigenschaften dieser Operatoren zusammen. Zur Notation: Für zwei Operatoren A und B bezeichne $[A, B] = AB - BA$ den Kommutator. Es gilt also insbesondere $[\partial_i, \partial_j] = 0$ und ebenso $[\partial_i, x_j] = \delta_{i,j}$ mit dem Kronecker-Delta⁵ $\delta_{i,j} = 0$ für $i \neq j$ und $\delta_{i,i} = 1$.

1.2.10 Lemma. (i) (Kommutatorrelationen) *Es gilt $[E, L_{i,j}] = 0$ und $[L_{i,j}, L_{j,k}] = L_{i,k}$.*

(ii) (Zusammenhang zum Laplaceoperator) *Es gilt*

$$|x|^2 \Delta = E^2 + (n-2)E + \sum_{i < j} L_{i,j}^2. \quad (1.2.19)$$

Beweis. (i) erfolgt durch Nachrechnen. Es gilt

$$\begin{aligned} [E, L_{i,j}] &= \left(\sum_k x_k \partial_k \right) (x_i \partial_j - x_j \partial_i) - (x_i \partial_j - x_j \partial_i) \left(\sum_k x_k \partial_k \right) \\ &= x_i (\partial_i x_i) \partial_i - x_j (\partial_j x_j) \partial_j - x_i (\partial_j x_j) \partial_j + x_j (\partial_i x_i) \partial_i = 0 \end{aligned} \quad (1.2.20)$$

da nur tatsächlich ausgeführte Ableitungen zu dem Kommutator beitragen können. Entsprechend ergibt sich

$$\begin{aligned} [L_{i,j}, L_{j,k}] &= (x_i \partial_j - x_j \partial_i) (x_j \partial_k - x_k \partial_j) - (x_j \partial_k - x_k \partial_j) (x_i \partial_j - x_j \partial_i) \\ &= x_i \partial_k - x_k \partial_i = L_{i,k}. \end{aligned} \quad (1.2.21)$$

(ii) Wiederum wegen $[\partial_i, x_j] = \delta_{i,j}$ folgt

$$E^2 = \left(\sum_j x_j \partial_j \right)^2 = \left(\sum_i x_i \partial_i \right) \left(\sum_j x_j \partial_j \right) = 2 \sum_{i < j} x_i x_j \partial_i \partial_j + \sum_j x_j^2 \partial_j^2 + \sum_j x_j \partial_j. \quad (1.2.22)$$

Weiterhin gilt

$$|x|^2 \Delta = \left(\sum_i x_i^2 \right) \left(\sum_j \partial_j^2 \right) = \sum_{i,j} x_i^2 \partial_j^2 \quad (1.2.23)$$

und

$$\sum_{i < j} L_{i,j}^2 = \sum_{i < j} (x_i \partial_j - x_j \partial_i)^2 = \sum_{i < j} (x_i^2 \partial_j^2 - 2x_i x_j \partial_i \partial_j + x_j^2 \partial_i^2 - x_i \partial_i - x_j \partial_j). \quad (1.2.24)$$

Ein Vergleich von (1.2.24) mit (1.2.23) liefert mit (1.2.22) die Behauptung. \square

1.2.11. Der Euleroperator charakterisiert homogene Funktionen. Wir sagen $u \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ sei positiv homogen vom Grad λ , falls $u(\rho x) = \rho^\lambda u(x)$ für alle $\rho > 0$ und alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt. Für den Euleroperator bedeutet das

$$Eu = \lambda u, \quad (1.2.25)$$

homogene Funktionen sind also gerade die *Eigenfunktionen* von E .

⁵LEOPOLD KRONECKER, 1823–1891

1.2.12. Der Operator

$$\Delta_\omega = \sum_{i < j} L_{i,j}^2 \quad (1.2.26)$$

wird als *Laplace-Beltrami-Operator*⁶ der Sphäre \mathbb{S}^{n-1} bezeichnet. Wegen Lemma 1.2.10 (i) ist der Operator Δ_ω invariant unter allen Rotationen der Sphäre.

Lemma. *Es gilt $[\Delta_\omega, L_{i,j}] = 0$. Weiterhin gilt für alle Funktionen $u, v \in C^2(\mathbb{S}^{n-1})$*

$$\oint_{\mathbb{S}^{n-1}} u(\omega) \Delta_\omega v(\omega) d\sigma(\omega) = \oint_{\mathbb{S}^{n-1}} v(\omega) \Delta_\omega u(\omega) d\sigma(\omega). \quad (1.2.27)$$

Beweis. Erfolgt durch elementares Nachrechnen. Die Kommutatorrelation folgt unter Ausnutzung von Lemma 1.2.10 (i)

$$\begin{aligned} [\sum_{i < j} L_{i,j}^2, L_{k,l}] &= \sum_{i < j} [L_{i,j}^2, L_{k,l}] = \sum_{i < j} L_{i,j} L_{i,j} L_{k,l} - L_{i,j} L_{k,l} L_{i,j} + L_{i,j} L_{k,l} L_{i,j} - L_{k,l} L_{i,j} L_{i,j} \\ &= \sum_{i < j} (\delta_{j,k} (L_{i,j} L_{i,l} + L_{i,l} L_{i,j}) - \delta_{j,l} (L_{i,j} L_{i,k} + L_{i,k} L_{i,j}) \\ &\quad + \delta_{i,l} (L_{i,j} L_{j,k} + L_{j,k} L_{i,j}) - \delta_{i,k} (L_{i,j} L_{j,l} + L_{j,l} L_{i,j})) \\ &= \sum_{i < k} (L_{i,k} L_{i,l} + L_{i,l} L_{i,k}) - \sum_{i < l} (L_{i,l} L_{i,k} + L_{i,k} L_{i,l}) \\ &\quad + \sum_{l < j} (L_{l,j} L_{j,k} + L_{j,k} L_{l,j}) - \sum_{k < j} (L_{k,j} L_{j,l} + L_{j,l} L_{k,j}) \\ &= \sum_i (L_{i,k} L_{i,l} + L_{i,l} L_{i,k}) - \sum_i (L_{i,l} L_{i,k} + L_{i,k} L_{i,l}) = 0. \end{aligned} \quad (1.2.28)$$

Für die Symmetrie des Operators Δ_ω genügt es, entsprechende Integralidentitäten für die Rotationsableitungen $L_{i,j}$ zu beweisen. Einerseits gilt

$$\oint_{\mathbb{S}^{n-1}} L_{i,j} u(\omega) d\sigma(\omega) = \int \left(\int_0^{2\pi} \partial_\varphi u(\varphi, \omega') d\varphi \right) \iota(\omega') d\sigma(\omega') = 0 \quad (1.2.29)$$

mit einer geeigneten Dichtefunktion $\iota(\omega')$ und der Interpretation von \mathbb{S}^{n-1} als Rotationskörper mit Rotationen in der i - j -Ebene. Weiter gilt für die Rotationsableitungen $L_{i,j}$ die Produktregel

$$L_{i,j}(uv) = (L_{i,j}u)v + u(L_{i,j}v) \quad (1.2.30)$$

und es folgt

$$\oint_{\mathbb{S}^{n-1}} u(\omega) L_{i,j} v(\omega) d\sigma(\omega) = - \oint_{\mathbb{S}^{n-1}} v(\omega) L_{i,j} u(\omega) d\sigma(\omega) \quad (1.2.31)$$

und damit

$$\oint_{\mathbb{S}^{n-1}} u(\omega) L_{i,j}^2 v(\omega) d\sigma(\omega) = \oint_{\mathbb{S}^{n-1}} v(\omega) L_{i,j}^2 u(\omega) d\sigma(\omega). \quad (1.2.32)$$

Summation über $i < j$ liefert die Behauptung. \square

1.2.13. Weiter gilt

$$E^2 = (r\partial_r)^2 = r^2\partial_r^2 + r\partial_r \quad (1.2.33)$$

und Lemma 1.2.10 (ii) impliziert die Darstellung des Laplaceoperators in Kugelkoordinaten

$$\Delta = \partial_r^2 + \frac{n-1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\Delta_\omega. \quad (1.2.34)$$

Wir werden diese Darstellung gelegentlich benötigen.

⁶EUGENIO BELTRAMI, 1835–1900

1.2.14. Bezeichne

$$\Pi_{=k}(\mathbb{R}^n) = \left\{ u : u(x) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha x^\alpha, \quad a_\alpha \in \mathbb{R} \right\} \quad (1.2.35)$$

den Vektorraum der reellwertigen homogenen Polynome vom Grad k . Hier (und später) verwenden wir Multiindexschreibweise. Ein Polynom u gehört genau dann zu dieser Menge, wenn $Eu = ku$ gilt. Weiterhin gilt offenbar

$$\Delta : \Pi_{=k}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Pi_{=k-2}(\mathbb{R}^n), \quad k \geq 2, \quad (1.2.36)$$

als lineare Abbildung. Da für $n \geq 2$ die Dimension des Bildraumes stets kleiner als die des Ausgangsraumes ist, ist

$$\mathcal{H}_k(\mathbb{R}^n) = \{ u \in \Pi_{=k}(\mathbb{R}^n) : \Delta u = 0 \} \quad (1.2.37)$$

für alle $k \geq 2$ nichttrivial. Wir bezeichnen Einschränkungen der Elemente von $\mathcal{H}_k(\mathbb{R}^n)$ auf \mathbb{S}^{n-1} als *Kugelfunktionen*. Aufgrund der Darstellung des Laplace-Operators in Kugelkoordinaten erfüllen diese

$$0 = |x|^2 \Delta u = E^2 u + (n-2)Eu + \Delta_\omega u = k(k+n-2)u + \Delta_\omega u, \quad (1.2.38)$$

sie sind also Eigenfunktionen des Laplace-Beltrami-Operators zum Eigenwert $-k(k+n-2)$. Da der Operator Δ_ω symmetrisch ist, folgt

$$\begin{aligned} k_1(k_1+n-2) \oint_{\mathbb{S}^{n-1}} u(\omega)v(\omega) d\sigma(\omega) &= - \oint_{\mathbb{S}^{n-1}} \Delta_\omega u(\omega)v(\omega) d\sigma(\omega) \\ &= - \oint_{\mathbb{S}^{n-1}} u(\omega)\Delta_\omega v(\omega) d\sigma(\omega) = k_2(k_2+n-2) \oint_{\mathbb{S}^{n-1}} u(\omega)v(\omega) d\sigma(\omega) \end{aligned} \quad (1.2.39)$$

für $u \in \mathcal{H}_{k_1}(\mathbb{R}^n)$ und $v \in \mathcal{H}_{k_2}(\mathbb{R}^n)$ und ihre Einschränkungen auf die Sphäre. Also folgt für $k_1 \neq k_2$ die Orthogonalitätsrelation

$$\oint_{\mathbb{S}^{n-1}} u(\omega)v(\omega) d\sigma(\omega) = 0. \quad (1.2.40)$$

Man kann ebenso zeigen, dass die Menge der Kugelfunktionen total im $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ ist.

Fundamentallösung und Integraldarstellungen

1.2.15. Wir suchen zuerst Beispiele besonders einfacher harmonischer Funktionen, nämlich solche, die $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ abbilden und radialsymmetrisch sind. In Polarkoordinaten (r, ω) gilt dann

$$0 = \Delta u = \partial_r^2 u + \frac{n-1}{r} \partial_r u \quad (1.2.41)$$

und damit

$$\partial_r u = cr^{1-n}, \quad c \in \mathbb{R}, \quad (1.2.42)$$

also nach nochmaliger Integration

$$u(r, \omega) = \begin{cases} c_1 \log r + c_2, & n = 2, \\ c_1 r^{2-n} + c_2, & n \neq 2, \end{cases} \quad (1.2.43)$$

mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Wir wählen c_2 als Null und

$$c_1 = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & n = 2, \\ \frac{-1}{(n-2)|\mathbb{S}^{n-1}|}, & n > 2, \end{cases} \quad (1.2.44)$$

und bezeichnen die so erhaltene Funktion im Folgenden als *Fundamentallösung* Φ . Dann gilt

1.2.16 Satz. Sei $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ zweifach stetig differenzierbar und kompakt getragen und

$$u(x) = \int \Phi(x-y)f(y) dy = \int \Phi(y)f(x-y) dy. \quad (1.2.45)$$

Dann ist $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ und erfüllt $\Delta u = f$.

Beweis. Das Integral ist absolut konvergent und es bleibt, die Behauptung nachzurechnen. *Schritt 1.* Da f kompakten Träger hat, impliziert die zweite Form der Faltung die Differenzierbarkeit von u , es gilt

$$\partial_j u(x) = \int \Phi(y) \partial_j f(x-y) dy, \quad (1.2.46)$$

sowie

$$\partial_i \partial_j u(x) = \int \Phi(y) \partial_i \partial_j f(x-y) dy \quad (1.2.47)$$

und u sowie seine Ableitungen bis Ordnung zwei sind stetig. *Schritt 2.* Um Δu zu berechnen, müssen wir die erste Form der Faltung nutzen und Φ differenzieren. Da aber die zweiten Ableitungen von Φ nicht lokal um die Null integrierbar sind, zerlegen wir das Integral in zwei Teile

$$\Delta u(x) = \int_{B_\varepsilon(0)} \Phi(y) \Delta_x f(x-y) dy + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} \Phi(y) \Delta_x f(x-y) dy = I_\varepsilon(x) + J_\varepsilon(x) \quad (1.2.48)$$

für gegebenes $\varepsilon > 0$ und betrachten diese separat. Es gilt

$$|I_\varepsilon(x)| \leq M \int_{B_\varepsilon(0)} |\Phi(y)| dy \leq M \begin{cases} C\varepsilon^2 |\log \varepsilon|, & n = 2 \\ C\varepsilon^2, & n > 2 \end{cases} \quad (1.2.49)$$

mit $M = \max_x |\Delta f(x)| < \infty$. Dieser Term wird also klein für kleine ε . Für den zweiten Term integrieren wir partiell

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(x) &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} \Phi(y) \Delta_y f(x-y) dy \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} \nabla \Phi(y) \cdot \nabla_y f(x-y) dy + \oint_{\partial B_\varepsilon(0)} \Phi(y) \nabla_y f(x-y) \cdot \vec{d}\sigma(y) \\ &= K_\varepsilon(x) + L_\varepsilon(x) \end{aligned} \quad (1.2.50)$$

und wiederum sieht man, dass

$$|L_\varepsilon(x)| \leq M' \oint_{\partial B_\varepsilon(0)} |\Phi(y)| d\sigma(y) \leq M' \begin{cases} C\varepsilon |\log \varepsilon|, & n = 2 \\ C\varepsilon, & n > 2 \end{cases} \quad (1.2.51)$$

diesmal mit $M' = \max_x |\nabla f(x)|$. Wiederum wird L_ε klein für kleine ε . Für K_ε integrieren wir nochmals partiell und erhalten aufgrund von $\Delta\Phi = 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$K_\varepsilon(x) = \oint_{\partial B_\varepsilon(0)} f(x-y) \nabla \Phi(y) \cdot \vec{d}\sigma(y). \quad (1.2.52)$$

Nun gilt aber auf $\partial B_\varepsilon(0)$ nach Konstruktion der Fundamentallösung $|\mathbb{S}^{n-1}| \nabla \Phi(y) = y/\varepsilon^n$ und der Normaleneinheitsvektor ist durch y/ε gegeben. Damit folgt

$$K_\varepsilon(x) = \int_{\partial B_\varepsilon(0)} f(x-y) d\sigma(y) \longrightarrow f(x), \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (1.2.53)$$

und durch den Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ folgt die Behauptung. \square

1.2.17. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand und seien $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Dann gilt wegen

$$\operatorname{div}(u \nabla v) = u \operatorname{div} \nabla v + \nabla u \cdot \nabla v \quad (1.2.54)$$

die erste *Greensche Identität*⁷

$$\oint_{\partial\Omega} u(x) \nabla v(x) \cdot \vec{d}\sigma(x) = \int_{\Omega} u(x) \Delta v(x) dx + \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx. \quad (1.2.55)$$

Vertauscht man u und v und bildet die Differenz so ergibt sich die zweite *Greensche Identität*

$$\int_{\Omega} (u(x) \Delta v(x) - v(x) \Delta u(x)) dx = \oint_{\partial\Omega} (u(x) \nabla v(x) - v(x) \nabla u(x)) \cdot \vec{d}\sigma(x). \quad (1.2.56)$$

Ersetzt man x durch y und setzt speziell für v die Fundamentallösung $\Phi(x - \cdot)$ ein, so liefert die Argumentation des letzten Beweises

$$u(x) = \int_{\Omega} \Phi(x-y) \Delta u(y) dy + \oint_{\partial\Omega} (u(y) \nabla \Phi(x-y) - \Phi(x-y) \nabla u(y)) \cdot \vec{d}\sigma(y). \quad (1.2.57)$$

Diese Formel rekonstruiert u aus Δu in Ω sowie den Randwerten von u auf $\partial\Omega$ und der äußeren Normalenableitung $\partial_{\vec{\nu}} u = \vec{\nu} \cdot \nabla u$ auf $\partial\Omega$. Die drei auftretenden Terme werden als *Volumenpotential*, *Doppelschichtpotential* und *Einfachschichtpotential* bezeichnet.

1.2.18 Lemma (Erste Integraldarstellung). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt mit glattem Rand $\partial\Omega$. Angenommen, die Funktion $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ erfüllt

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \text{in } \Omega, \\ u = g, & \text{auf } \partial\Omega, \\ \partial_{\vec{\nu}} u = h, & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.2.58)$$

Dann gilt die Integraldarstellung

$$u(x) = \int_{\Omega} \Phi(x-y) f(y) dy + \oint_{\partial\Omega} g(y) \partial_{\vec{\nu}} \Phi(x-y) d\sigma(y) - \oint_{\partial\Omega} h(y) \Phi(x-y) d\sigma(y). \quad (1.2.59)$$

Allerdings haben wir schon gesehen, dass u durch die Vorgabe von f und g eindeutig bestimmt werden kann. Damit kann h als Funktion von f und g ausgedrückt werden und diese Integraldarstellung ist nicht ausreichend zum Lösen von Randwertproblemen.

⁷GEORGE GREEN, 1793–1841

1.2.19. Jetzt betrachten wir speziell die Kreisscheibe, $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$, und bestimmen die Lösung der Laplacegleichung bei vorgegebenem Randwert g . Wir nutzen Polarkoordinaten $\mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi) \ni (r, \varphi) \leftrightarrow x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und schreiben das Problem als

$$(r\partial_r)^2 u + \partial_\varphi^2 u = 0 \quad (1.2.60)$$

mit Randbedingung $u|_{r=1} = g$. Schreibt man $g = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \exp(ik\varphi)$ in Form einer Fourierreihe und entwickelt u entsprechend als

$$u(r, \varphi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k(r) e^{ik\varphi}, \quad (1.2.61)$$

so ergibt (1.2.60) gewöhnliche Differentialgleichungen für die Fourierkoeffizienten.

$$(r\partial_r)^2 \alpha_k = k^2 \alpha_k, \quad \alpha_k(1) = c_k, \quad (1.2.62)$$

zusammen mit der Zusatzbedingung, dass $\alpha_k(0) = 0$, $k \neq 0$, sowie $\alpha_0(0) = \int g(\varphi) d\varphi$ gilt. Als Lösungen ergeben sich homogene Polynome. Also folgt $\alpha_k(r) = c_k r^{|k|}$ und damit die *Poisson-Lösungsformel*

$$u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k r^{|k|} e^{ik\varphi} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} r^{|k|} \int g(\psi) e^{ik(\varphi - \psi)} d\psi = \int P_r(\varphi - \psi) g(\psi) d\psi \quad (1.2.63)$$

mit dem *Poissonkern*

$$\begin{aligned} P_r(\varphi) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} r^{|k|} e^{ik\varphi} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos(k\varphi) \\ &= \left(1 + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} (x_1 + ix_2)^k = 1 + 2 \operatorname{Re} \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_1 - ix_2} = 1 + 2 \frac{x_1 - x_1^2 - x_2^2}{(1 - x_1)^2 + x_2^2} \right) \\ &= \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \varphi + r^2}. \end{aligned} \quad (1.2.64)$$

Bisher war die Rechnung formal, wir müssen noch nachrechnen, dass wir tatsächlich das gestellte Problem gelöst haben. Einerseits ist die in Polarkoordinaten gegebene Funktion $P(r, \varphi) = P_r(\varphi)$ Realteil einer holomorphen Funktion und damit harmonisch. Darüberhinaus gilt

$$P_r(\varphi) > 0, \quad r < 1, \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} P_r(\varphi) d\varphi = 1, \quad (1.2.65)$$

sowie

$$\lim_{r \rightarrow 1} P_r(\varphi) = 0 \quad (1.2.66)$$

gleichmäßig in $|\varphi| \geq \delta$ für jedes $\delta > 0$. Damit ist für jedes $g \in C_{\text{per}}[0, 2\pi]$ die Funktion

$$u(r, \varphi) = \int g(\psi) P_r(\varphi - \psi) d\psi \quad (1.2.67)$$

harmonisch in Ω und es gilt

$$\begin{aligned} |u(r, \varphi) - g(\varphi)| &= \left| \int (g(\psi) - g(\varphi)) P_r(\varphi - \psi) d\psi \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left(\int_{|\varphi - \psi| \geq \delta} + \int_{|\varphi - \psi| < \delta} \right) |g(\psi) - g(\varphi)| P_r(\varphi - \psi) d\psi \\ &\leq \frac{1}{\pi} \|g\|_\infty \int_{|\varphi - \psi| \geq \delta} P_r(\varphi - \psi) d\psi + \varepsilon \int P_r(\varphi - \psi) d\psi \leq 2\varepsilon, \end{aligned} \quad (1.2.68)$$

wobei δ so klein gewählt wird, dass $|g(\varphi) - g(\psi)| < \varepsilon$ für $|\varphi - \psi| < \delta$ und danach r so groß, dass für alle $|\varphi| \geq \delta$ der Poissonkern $P_r(\varphi) < \pi\varepsilon/\|g\|_\infty$ erfüllt. Also werden die Randwerte (sogar gleichmäßig) angenommen.

Der höherdimensionale Fall kann mit Reihendarstellungen in Kugelfunktionen analog gelöst werden und entspricht einer Zerlegung der Randwerte in homogene harmonische Polynome. Wir verzichten auf die konkrete Rechnung und geben nur die Formel des Poissonkerns im \mathbb{R}^n . Dieser ist durch

$$P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{(1 - 2r \cos \theta + r^2)^{n/2}} \quad (1.2.69)$$

gegeben und erlaubt die Randintegraldarstellung

$$u(x) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} g(y) P_r(\angle(x, y)) d\sigma(y), \quad r = |x|, \quad (1.2.70)$$

für Lösungen des Randwertproblems

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{in } \Omega = B_1(0), \\ u = g, & \text{auf } \partial\Omega = \mathbb{S}^{n-1} = \partial B_1(0). \end{cases} \quad (1.2.71)$$

Analog zum zweidimensionalen Fall zeigt man:

Satz. Sei $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$. Für jedes $g \in C(\mathbb{S}^{n-1})$ besitzt das Randwertproblem (1.2.71) eine eindeutig bestimmte Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ und diese ist durch die Poissonsche Integraldarstellung (1.2.70) gegeben.

1.2.20. Die Lösbarkeit des Randwertproblems (1.2.71) kann man nutzen, um ein *Spiegelungsprinzip* für harmonische Funktionen zu beweisen. Sei dazu Ω ein Gebiet, welches ein ebenes oder sphärisches Randstück Γ besitzt. Dann kann jede harmonische Funktion auf Ω , welche auf Γ verschwindet, durch Spiegeln harmonisch fortgesetzt werden. Sei dazu $x_0 \in \Gamma$ ein Randpunkt aus dem betreffenden Randstück und r so klein, dass Γ die Kugel $B = B_r(x_0)$ in einen inneren und einen äußeren Teil zerschneidet. Sei weiter Σ_+ der in Ω liegende Rand von B und Σ_- der äußere. Auf Σ_+ sei $g(x) = u(x)$ und auf Σ_- entsprechend $g(x) = -u(x')$, wobei x' die Reflektion von x an Γ bezeichne. Dann ist nach Konstruktion g stetig auf ∂B und wir finden eine eindeutig bestimmte harmonische Funktion U auf B mit Randwerten g . Da g symmetrisch unter Spiegeln ist, ist auch U symmetrisch, $U(x) = -U(x')$, und es gilt $U(x) = 0$ auf $\Gamma \cap B$. Damit stimmt aber U auf $\partial(B \cap \Omega)$ mit u überein und wiederum mit dem Maximumprinzip folgt, dass $U = u$ in $B \cap \Omega$ gilt. Damit ist aber U eine harmonische Fortsetzung von u .

Korollar. Eine harmonische Funktion auf einem Gebiet, welches ein flaches oder sphärisches Randstück besitzt, und die auf diesem Randstück verschwindet, kann durch ungerades Spiegeln an diesem Randstück harmonisch fortgesetzt werden.

1.2.21. Wir wollen nun das Randwertproblem

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \text{in } \Omega, \\ u = g, & \text{auf } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.2.72)$$

auf der Kugel $\Omega = B_1(0)$ lösen. Dazu kann man wie folgt vorgehen. Zuerst bestimmen wir eine Funktion v mit $\Delta v = f$ in Ω . Diese ist zum Beispiel durch das Integral

$$v(x) = \int_{\Omega} \Phi(x - y) f(y) dy \quad (1.2.73)$$

gegeben. Die so konstruierte Funktion v ist stetig auf \mathbb{R}^n , erfüllt $\Delta v = f$ in Ω und ist harmonisch im entsprechenden Außengebiet. In einem zweiten Schritt bestimmen wir nun eine harmonische Funktion $w(x)$ mit vorgegebenen Randwerten $w(x) = g(x) - v(x)$ auf $\partial\Omega$. Diese ist durch das Poissonintegral

$$w(x) = \int_{\partial\Omega} (g(y) - v(y)) P_r(\angle(x, y)) d\sigma(y), \quad r = |x|, \quad (1.2.74)$$

gegeben. Nach Konstruktion löst $u = v + w$ das Problem (1.2.72) und wie wir schon wissen, ist dies die einzige Lösung. Ist $g = 0$, kann man einfacher vorgehen und Formel (1.2.73) durch

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\Omega} f(y) \Phi(x - y) dy - \int_{\partial\Omega} \left(\int_{\Omega} f(y) \Phi(z - y) dy \right) P_r(\angle(x, z)) d\sigma(z), \\ &= \int_{\Omega} f(y) \left(\Phi(x - y) - \int_{\partial\Omega} \Phi(z - y) P_r(\angle(x, z)) d\sigma(z) \right) dy, \quad r = |x|, \quad (1.2.75) \\ &= \int_{\Omega} f(y) G(x, y) dy \end{aligned}$$

ersetzen. Das sieht kompliziert aus, ist aber einfach, da wir den Integranden eigentlich kennen! Dieser wird als *Greensche Funktion* bezeichnet und ist für festes $y \in \Omega$ und betrachtet als Funktion in x harmonisch in $\Omega \setminus \{y\}$ und besitzt Nullrandwerte auf der gesamten Sphäre $\partial\Omega$. Nach dem Spiegelungsprinzip ist $G(\cdot, y)$ also harmonisch auf $\mathbb{R}^n \setminus \{y, y'\}$ und (wie man an obiger Darstellung sieht) verhält sich $G(\cdot, y)$ in der Nähe von $y = x$ wie $\Phi(x - y)$. Darüberhinaus ist für $x \neq 0$ die Funktion $G(\cdot, y)$ im Unendlichen beschränkt. Damit folgt mit noch richtig zu wählenden Konstanten c_y und d_y

$$G(x, y) = \Phi(x - y) + c_y \Phi(x - y') + d_y. \quad (1.2.76)$$

Die Konstanten ergeben sich aus der Bedingung $G(x, y) = 0$ für $x \in \partial\Omega$. Für solche x ergibt der Satz des Apollonius

$$\frac{|x - y|}{|x - y'|} = |y|, \quad (1.2.77)$$

und damit im Falle $n = 2$

$$0 = G(x, y) = \frac{1}{2\pi} \log|x - y| + c_y \frac{1}{2\pi} \log \frac{|x - y|}{|y|} + d_y, \quad x \in \partial\Omega, \quad (1.2.78)$$

also $c_y = -1$ und $d_y = -\frac{1}{2\pi} \log|y|$ und damit

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi} (\log|x - y| - \log|x - y'| - \log|y|). \quad (1.2.79)$$

Entsprechend ergibt sich für $n > 2$ und $y \neq 0$

$$0 = G(x, y) = -\frac{1}{(n-2)|\mathbb{S}^{n-1}|} |x - y|^{2-n} - c_y \frac{1}{(n-2)|\mathbb{S}^{n-1}|} \left(\frac{|x - y|}{|y|} \right)^{2-n} + d_y, \quad x \in \partial\Omega, \quad (1.2.80)$$

also $c_y = -|y|^{2-n}$ und $d_y = 0$ und damit

$$G(x, y) = \frac{-1}{(n-2)|\mathbb{S}^{n-1}|} (|x - y|^{2-n} - |y|^{2-n} |x - y'|^{2-n}). \quad (1.2.81)$$

In beiden Fällen erhält man also (etwas überraschend) $G(x, y) = \Phi(x - y) - \Phi(|y|(x - y'))$ als geschlossene Formel für die Greensche Funktion. Für $y = 0$ kann man dies stetig fortsetzen oder man sieht sofort, dass $c_y = 0$ und damit $d_y = 0$ im Falle $n = 2$ und $d_y = \frac{1}{(n-2)|\mathbb{S}^{n-1}|}$ für $n > 2$ gelten muss.

Lösungsmethoden für Dirichletprobleme

1.2.22. Wir wollen im folgenden ein beschränktes Gebiet Ω als *klassisch zulässig* bezeichnen, wenn das Dirichletsche Randwertproblem

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{in } \Omega, \\ u = g, & \text{auf } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.2.82)$$

für gegebene stetige Funktionen $g \in C(\partial\Omega)$ eine eindeutig bestimmte (beschränkte) zweifach stetig differenzierbare Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ besitzt; für beliebige stetige Randwertvorgaben also eine zugehörige auf Ω harmonische Funktion existiert. Kugeln sind klassisch zulässig, wie wir bei der Konstruktion des Poissonkerns gesehen haben.

Im Folgenden sollen einige klassische Lösungsverfahren diskutiert werden. Lösbarkeitsaussagen des Randwertproblems (1.2.82) entsprechen auch Lösbarkeitsaussagen zu

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \text{in } \Omega, \\ u = 0, & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.2.83)$$

dazu bildet man die *Greensche Funktion*

$$G_\Omega(x, y) = \Phi(x - y) - \varphi_y(x) \quad (1.2.84)$$

wobei $\Delta\varphi_y(x) = 0$ für $x \in \Omega$ und $\varphi_y(x) = \Phi(x - y)$ für $x \in \partial\Omega$. Dann löst

$$u(x) = \int_\Omega G_\Omega(x, y)f(y) dy \quad (1.2.85)$$

Problem (1.2.83). Es gilt $G_\Omega(x, y) = G_\Omega(y, x)$ sowie $G_{\Omega_1}(x, y) \geq G_{\Omega_2}(x, y)$ falls $\Omega_1 \subset \Omega_2$.

Die Integralgleichungsmethode

Die Integralgleichungsmethode basiert auf der Sprungrelation für Potentiale. Für Dirichletprobleme reicht die folgende Fassung, für allgemeinere Randwertprobleme benötigt man die entsprechende Aussage für das Springen der Normalenableitung des Einfachschichtpotentials.

1.2.23 Satz (Sprungrelation für Potentiale). *Sei Ω ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand $\partial\Omega$ und seien $g, h \in C(\partial\Omega)$. Seien weiter*

$$\begin{aligned} V(x) &= \oint_{\partial\Omega} h(y)\Phi(x - y) d\sigma(y) \\ W(x) &= \oint_{\partial\Omega} g(y)\partial_{\bar{\nu}(y)}\Phi(x - y) d\sigma(y) \end{aligned} \quad (1.2.86)$$

die zugeordneten Potentiale. Dann sind V und W harmonisch auf $\mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega$ und es gilt $V \in C(\mathbb{R}^n)$ sowie für jedes $x_0 \in \partial\Omega$

$$\begin{aligned} W(x_0)_{\text{aussen}} &= \lim_{x \rightarrow x_0, x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}} W(x) = -\frac{1}{2}g(x_0) + \oint_{\partial\Omega} g(y)\partial_{\bar{\nu}}\Phi(x_0 - y) d\sigma(y) \\ W(x_0)_{\text{innen}} &= \lim_{x \rightarrow x_0, x \in \Omega} W(x) = \frac{1}{2}g(x_0) + \oint_{\partial\Omega} g(y)\partial_{\bar{\nu}}\Phi(x_0 - y) d\sigma(y). \end{aligned} \quad (1.2.87)$$

Beweis. Wir führen den Beweis für $n \geq 2$, für $n = 2$ muss man in Schritt 2 anders argumentieren. *Schritt 1.* Die Potentiale V und W sind beide auf $\mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega$ harmonisch. Dazu rechnet man am einfachsten die Mittelwerteigenschaft nach. Für jede Kugel B mit $B \cap \partial\Omega = \emptyset$ und Mittelpunkt x_0 gilt

$$\begin{aligned} \int_B V(x) dx &= \int_{\partial\Omega} h(y) \int_B \Phi(x-y) dx d\sigma(y) \\ &= \int_{\partial\Omega} h(y) \Phi(x_0-y) d\sigma(y) = V(x_0) \\ \int_B W(x) dx &= \int_{\partial\Omega} h(y) \int_B \nabla_y \Phi(x-y) dx \cdot \vec{d}\sigma(y) \\ &= \int_{\partial\Omega} h(y) \nabla_y \Phi(x_0-y) \cdot \vec{d}\sigma(y) = W(x_0) \end{aligned} \quad (1.2.88)$$

da $\Phi(\cdot - y)$ und $\nabla_y \Phi(\cdot - y)$ in B harmonisch sind. • *Schritt 2.* Die Stetigkeit des Einfachschichtpotentials V in allen Randpunkten $x_0 \in \partial\Omega$ zeigt man durch direktes Nachrechnen. Wir unterscheiden zwei Fälle und betrachten (a) Punkte x , die auf der Normalen zu x_0 liegen, und (b) Punkte x , welche auf $\partial\Omega$ liegen, und einen Abstand kleiner δ von x_0 haben. Ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit sei δ klein und $\partial\Omega$ zerlegt in den Teil F_δ , welcher in $B_{2\delta}(x_0)$ liegt, und den Rest. Für den Restterm impliziert die gleichmäßige Konvergenz des Integranden für $x \rightarrow x_0$

$$\left| \int_{\partial\Omega \setminus F_\delta} h(y) (\Phi(x-y) - \Phi(x_0-y)) d\sigma(y) \right| \rightarrow 0, \quad x \rightarrow x_0. \quad (1.2.89)$$

Es bleibt das Integral über F_δ . Hier nutzt man im Fall (a) die Existenz einer von kleinen δ unabhängigen Konstanten λ mit $|x_0 - y| \leq \lambda|x - y|$ für alle x mit $|x - x_0| < c$ und $y \in F_\delta$ schätzt damit $\Phi(x - y)$ nach oben durch $c_\lambda \Phi(x_0 - y)$ ab. Dies impliziert

$$\begin{aligned} \left| \int_{F_\delta} h(y) (\Phi(x-y) - \Phi(x_0-y)) d\sigma(y) \right| &\leq M \int_{F_\delta} |\Phi(x-y) - \Phi(x_0-y)| d\sigma(y) \\ &\leq M(c_\lambda + 1) \int_{F_\delta} \Phi(x_0-y) d\sigma(y) \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (1.2.90)$$

für $\delta \rightarrow 0$. Dabei bezeichnet M das Maximum von $|h(x)|$. Im Fall (b) genügt es beide Summanden einzeln zu betrachten und die Integrierbarkeit von $\Phi(x_0 - \cdot)$ auf $\partial\Omega$ zu nutzen. • *Schritt 3.* Wir betrachten das spezielle Doppelschichtpotential zu $g(x) = 1$, also

$$\tilde{W}(x) = \int_{\partial\Omega} \partial_{\vec{\nu}} \Phi(x-y) d\sigma(y). \quad (1.2.91)$$

Dann gilt $\tilde{W}(x) = 1$ für alle $x \in \Omega$ aufgrund der Greenschen Identität (1.2.57) angewandt auf die konstante Funktion $u = 1$. Weiter gilt $W(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ als direkte Konsequenz des Integralsatzes von Gauß

$$\int_{\partial\Omega} \partial_{\vec{\nu}} \Phi(x-y) d\sigma(y) = \int_{\Omega} \Delta_y \Phi(x-y) dy = 0, \quad (1.2.92)$$

da die Singularität von $\Phi(x - \cdot)$ nun außerhalb des Gebietes Ω liegt. Es verbleiben die Punkte auf dem Rand. Da für solche x_0 aufgrund der Glattheit des Randes $(x_0 - y) \cdot \vec{\nu}(y) = \mathcal{O}(|x_0 - y|^2)$ gilt, folgt $\partial_{\vec{\nu}} \Phi(x_0 - y) = \mathcal{O}(|x_0 - y|^{2-n})$ und das Integral konvergiert. Weiter gilt

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \partial_{\vec{\nu}} \Phi(x-y) d\sigma(y) &= \left(\int_{\partial(\Omega \setminus B_\varepsilon(x))} + \int_{\partial(\Omega \cap B_\varepsilon(x))} \right) \partial_{\vec{\nu}} \Phi(x-y) d\sigma(y) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\partial B_\varepsilon} \partial_{\vec{\nu}} \Phi(x-y) dy + \mathcal{O}(\varepsilon) \rightarrow \frac{1}{2}, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (1.2.93)$$

wobei das erste Integral verschwindet, da wiederum die Singularität außerhalb liegt, und das zweite Integral zu einer Kugelschale ergänzt werden kann, wobei sich der Randteil herauskürzt und man etwa die Hälfte der Kugel (für $\varepsilon \rightarrow 0$ und glatten Rand und unter der Ausnutzung der Symmetrie von Φ) integriert. • *Schritt 4.* Sei nun x_0 ein fest gewählter Randpunkt. Wir gehen analog zum Schritt 2 vor und betrachten die beiden Fälle, dass (a) ein Punkt x auf der Normalen durch x_0 liegt und (b) auf $\partial\Omega$ liegt und zeigen jeweils die entsprechenden Konvergenzaussagen. Im Fall (a) gilt

$$W(x) = \tilde{W}(x)g(x_0) + w(x) \quad (1.2.94)$$

mit

$$w(x) = \oint_{\partial\Omega} (g(y) - g(x_0)) \partial_{\vec{\nu}} \Phi(x - y) \, d\sigma(y) \quad (1.2.95)$$

und es genügt zu zeigen, dass w stetig entlang der Normalen ist. Im Fall (b) genügt es zu zeigen, dass w stetig auf $\partial\Omega$ ist. Wir wählen wieder Flächenstücke F_δ und schätzen entsprechend ab. Es gilt

$$\begin{aligned} |w(x) - w(x_0)| &= \left| \oint_{\partial\Omega} (g(y) - g(x_0)) (\partial_{\vec{\nu}} \Phi(x - y) - \partial_{\vec{\nu}} \Phi(x_0 - y)) \, d\sigma(y) \right| \\ &\leq \left(\int_{\partial\Omega \setminus F_\delta} + \int_{F_\delta} \right) |g(y) - g(x_0)| |\partial_{\vec{\nu}} \Phi(x - y) - \partial_{\vec{\nu}} \Phi(x_0 - y)| \, d\sigma(y) \end{aligned} \quad (1.2.96)$$

und das erste Integral erfüllt wiederum

$$\left| \int_{\partial\Omega \setminus F_\delta} (g(y) - g(x_0)) (\partial_{\vec{\nu}} \Phi(x - y) - \partial_{\vec{\nu}} \Phi(x_0 - y)) \, d\sigma(y) \right| \rightarrow 0, \quad x \rightarrow x_0. \quad (1.2.97)$$

Für das zweite Wählen wir δ klein genug und nutzen, dass in

$$\begin{aligned} &\left| \int_{F_\delta} (g(y) - g(x_0)) \partial_{\vec{\nu}} (\Phi(x_0 - y) - \Phi(x - y)) \, d\sigma(y) \right| \\ &\leq c \max_{y \in F_\delta} |g(y) - g(x_0)| \int_{F_\delta} \left| \left(\frac{x_0 - y}{|x_0 - y|^n} - \frac{x - y}{|x - y|^n} \right) \cdot \vec{\nu}(y) \right| \, d\sigma(y) \end{aligned} \quad (1.2.98)$$

das verbleibende Integral in x mit $|x - x_0| < c$ gleichmäßig beschränkt ist. Dann impliziert Stetigkeit von g gerade das Kleinwerden dieses Terms für $\delta \rightarrow 0$. Die Schranke an das Integral folgt, da der erste Summand wiederum integrierbar ist und der zweite durch $\mathcal{O}\left(\frac{|x_0 - x|}{|x - y|^n}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x - y|^{n-2}}\right)$ abgeschätzt werden kann, sodass in Polarkoordinaten und für hinreichend klein gewähltes δ

$$\int_{F_\delta} \frac{|x - x_0|}{|x - y|^n} \, d\sigma(y) \leq C \int_0^\delta \frac{hr^{n-2}}{(h^2 + r^2)^{n/2}} \, dr \leq C \int_{h^2}^{h^2 + \delta^2} \frac{h}{s^{3/2}} \, ds = C \frac{\sqrt{h^2 + \delta^2} - h}{\sqrt{h^2 + \delta^2}} < C \quad (1.2.99)$$

gleichmäßig in $h = |x - x_0| < c$. Die zweite Schranke ist absolut integrierbar. Der Fall (b) erfolgt wie in Schritt 2 direkt aus der absoluten Integrierbarkeit des Integralkerns. \square

1.2.24. Die Sprungrelation des Doppelschichtpotentials liefert eine Strategie zur Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{in } \Omega, \\ u = g, & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.2.100)$$

indem man nach Lösungen in Form eines Doppelschichtpotentials

$$u(x) = \oint_{\partial\Omega} \gamma(y) \partial_{\bar{\nu}(y)} \Phi(x-y) d\sigma(y) \quad (1.2.101)$$

mit noch zu bestimmender Dichtefunktion γ sucht. Dann muss für $x_0 \in \partial\Omega$

$$g(x_0) = u(x_0)_{\text{innen}} = \frac{1}{2} \gamma(x_0) + \oint_{\partial\Omega} \gamma(y) \partial_{\bar{\nu}(y)} \Phi(x_0-y) d\sigma(y) \quad (1.2.102)$$

gelten. Das gerade skizzierte Lösungsverfahren wird als *Integralgleichungsmethode* bezeichnet und geht auf Carl Neumann⁸ zurück.

Wir unterscheiden zwei Fälle. Ist Ω und $\partial\Omega$ klein genug, so ist der Integraloperator K

$$K\gamma(x_0) = \oint_{\partial\Omega} \gamma(y) \partial_{\bar{\nu}(y)} \Phi(x_0-y) d\sigma(y) \quad (1.2.103)$$

als Abbildung $K : C(\partial\Omega) \rightarrow C(\partial\Omega)$ kontrahierend und die zu bestimmende Funktion γ als Neumannreihe darstellbar. Für allgemeinere Gebiete muss man den vorherigen Beweis etwas abändern und zeigen, dass K stetige Funktionen auf hölderstetige Funktionen abbildet. Damit ist K nach dem Satz von Arzela–Ascoli kompakt, die Integralgleichung (1.2.102) also eine Fredholmsche⁹ Integralgleichung zweiter Art für die Funktion $\gamma \in C(\partial\Omega)$. Die Gleichung ist für jedes g lösbar, wenn das homogene Problem trivialen Nullraum besitzt (als Operator mit Index 0 ist die Codimension des Bildraumes gleich der Dimension des Nullraumes). Das homogene Problem entspricht (nach der Sprungrelation) aber gerade dem Finden einer harmonischen Funktion in Ω mit Nullrandwerten und ist nur trivial lösbar, die obige Gleichung also stets lösbar. Für Details verweisen wir auf die Vorlesung Funktionalanalysis.

Beschränkte Gebiete mit glattem Rand sind also klassisch zulässig.

Das Dirichletsche Prinzip

1.2.25. Das Dirichletsche Prinzip erlaubt es, ein Randwertproblem der Form

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \text{auf } \Omega, \\ u = g, & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.2.104)$$

als Minimierungsproblem (Variationsproblem) aufzufassen. Sei dazu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und bezeichne für gegebenes $f \in C(\Omega)$, $g \in C(\partial\Omega)$

$$\mathcal{A} = \{w \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}) : w = g \text{ auf } \partial\Omega\} \quad (1.2.105)$$

sowie für $w \in \mathcal{A}$

$$\mathcal{E}(w) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla w(x)|^2 dx + \int_{\Omega} f(x)w(x) dx. \quad (1.2.106)$$

Dann gilt folgender Satz.

⁸CARL GOTTFRIED NEUMANN, 1832–1925

⁹ERIK IVAR FREDHOLM, 1866–1927

1.2.26 Satz (Dirichlet-Prinzip). *Angenommen, $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ löst (1.2.104). Dann gilt*

$$\mathcal{E}(u) = \min_{w \in \mathcal{A}} \mathcal{E}(w). \quad (1.2.107)$$

Umgekehrt löst jedes $u \in \mathcal{A}$, welches das Energiefunktional \mathcal{E} minimiert, das Problem (1.2.104).

Beweis. Schritt 1. Sei $w \in \mathcal{A}$ beliebig und u eine Lösung zu (1.2.104). Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &= - \int_{\Omega} (\Delta u(x) - f(x))(u(x) - w(x)) \, dx \\ &= \int_{\Omega} (\nabla u(x) \cdot \nabla(u(x) - w(x)) + f(x)(u(x) - w(x))) \, dx \end{aligned} \quad (1.2.108)$$

und damit

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (|\nabla u(x)|^2 + f(x)u(x)) \, dx &= \int_{\Omega} (\nabla u(x) \cdot \nabla w(x) + f(x)w(x)) \, dx \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 \, dx + \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla w(x)|^2 + f(x)w(x) \right) \, dx \end{aligned} \quad (1.2.109)$$

unter Ausnutzung von $|\nabla u \cdot \nabla w| \leq |\nabla u| |\nabla w| \leq \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} |\nabla w|^2$. Das ist aber gerade die Behauptung $\mathcal{E}(u) \leq \mathcal{E}(w)$. • *Schritt 2.* Angenommen, $u \in \mathcal{A}$ ist ein Minimierer. Dann gilt für jedes $\varphi \in C_c^\infty(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega) : \text{supp } \varphi \Subset \Omega \text{ kompakt}\}$ und alle $\varepsilon \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{E}(u) \leq \mathcal{E}(u + \varepsilon\varphi). \quad (1.2.110)$$

Versteht man die rechte Seite als Funktion von ε , so muss damit die Ableitung nach ε in $\varepsilon = 0$ verschwinden. Das entspricht aber gerade

$$0 = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x) \, dx + \int_{\Omega} f(x)\varphi(x) \, dx = - \int_{\Omega} (\Delta u(x) - f(x))\varphi(x) \, dx \quad (1.2.111)$$

und damit (da $u \in C^2(\Omega)$) gerade der Behauptung $\Delta u = f$. \square

Das gerade formulierte Dirichletprinzip erlaubt es *nicht*, die Existenz von Lösungen zu beweisen, da ein Minimierer von \mathcal{E} in der Menge \mathcal{A} nicht existieren muss. Allerdings kann für jedes klassisch zulässige Gebiet die Lösung durch Minimieren von \mathcal{E} bestimmt werden. Im Allgemeinen sind auftretende Minimierer nur *schwache Lösungen*.

Das alternierende Verfahren nach Schwarz

Auf Schwarz¹⁰ geht ein Verfahren zurück, welches es erlaubt, aus klassisch zulässigen Gebieten neue klassisch zulässige Gebiete zu konstruieren. Wir wollen dies kurz skizzieren. Das nachfolgende Lemma verallgemeinert die von Schwarz gegebene zweidimensionale Variante.

1.2.27 Lemma (Hilfslemma von Schwarz). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein klassisch zulässiges Gebiet mit stückweise glattem Rand und $\Sigma \subset \bar{\Omega}$ eine stückweise glatte Fläche, welche $\partial\Omega$ transversal schneidet und $\partial\Omega = \Gamma_1 \dot{\cup} (\Sigma \cap \partial\Omega) \dot{\cup} \Gamma_2$ in Teile Γ_0 und Γ_1 zerteilt. Dann existiert eine Zahl $q < 1$, so dass für jede harmonische Funktion $u \in C(\bar{\Omega})$ mit $u = 0$ auf Γ_0 und $|u(x)| < 1$ auf Γ_1*

$$\max_{x \in \Sigma} |u(x)| < q. \quad (1.2.112)$$

gilt.

¹⁰HERMANN AMANDUS SCHWARZ, 1843–1921

Beweisskizze. Wir folgen der Beweisidee von Zaremba¹¹ und konstruieren uns eine geeignete Vergleichsfunktion. *Schritt 1:* Sei

$$v(x) = 2 \int_{\Gamma_1} \partial_{\bar{\nu}(y)} \Phi(x-y) d\sigma(y), \quad x \in \Omega, \quad (1.2.113)$$

und sei $w(x)$ die Lösung des Dirichletproblems $\Delta w = 0$ in Ω zum (stetigen!) Randwert

$$w(x) = \int_{\Gamma_1} \partial_{\bar{\nu}(y)} \Phi(x-y) d\sigma(y), \quad x \in \partial\Omega. \quad (1.2.114)$$

Dann ist $u_*(x) = v(x) - w(x)$ harmonisch in Ω und es gilt nach Konstruktion $u_*(x) = 0$ auf Γ_0 und $u_*(x) = 1$ auf Γ_1 im Sinne nichttangentialer Grenzwerte. • *Schritt 2.* Randverhalten von u_* auf Σ . Dies ist nachzurechnen und hängt vom Winkel zwischen Σ und $\partial\Omega$ ab und ist linear. Damit impliziert aber die Harnacksche Ungleichung (vgl. Übung), dass $\max_{x \in \Sigma} u_*(x) = q < 1$ gilt. • *Schritt 3.* Nach Voraussetzung gilt $\pm u(x) \leq u_*(x)$ auf $\partial\Omega$ und damit nach Maximumprinzip $\pm u(x) \leq u_*(x)$ in Ω also insbesondere auch auf Σ . \square

1.2.28 Satz (Schwarz). *Seien Ω_1 und Ω_2 klassisch zulässige Gebiete mit stückweise glattem Rand und nichtleerem Schnitt derart, dass sich die Ränder $\partial\Omega_1$ und $\partial\Omega_2$ transversal schneiden. Dann ist $\Omega_1 \cup \Omega_2$ klassisch zulässig.*

Beweis. Sei $\Gamma_1 = (\partial\Omega_1) \cap \Omega_2$ und $\Gamma_2 = \Omega_1 \cap (\partial\Omega_2)$. Wir zeigen, dass vorgegebene stetige Randwerte $g \in C(\partial(\Omega_1 \cap \Omega_2))$ so auf Γ_1 und Γ_2 ergänzt werden können, dass die entsprechenden Randwertprobleme auf Ω_1 und Ω_2 eine auf dem Schnitt übereinstimmende Lösung haben.

Sei $\gamma \in C(\Gamma_1)$ derart, dass γ auf $\partial\Gamma_1$ mit g übereinstimmt. Sei dann u_1 die Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} \Delta u_1 = 0, & \text{in } \Omega_1, \\ u_1 = \gamma, & \text{auf } \Gamma_1, \\ u_1 = g, & \text{auf } \partial\Omega_1 \setminus \Gamma_1. \end{cases} \quad (1.2.115)$$

und $T_{12}\gamma = u_1|_{\Gamma_2}$ die Einschränkung der Lösung auf Γ_2 . Nach dem Schwarzschen Hilfslemma gilt $\max_{x \in \Gamma_2} |u_1(x)| \leq q \max_{x \in \Gamma_1} |\gamma(x)|$. In Analogie definieren wir uns die Abbildung T_{21} , die Funktionen auf Γ_2 , welche auf $\partial\Gamma_2$ mit g übereinstimmen auf Funktionen auf Γ_1 abbildet. Nach Verkettung erhalten wir eine Kontraktion $T_{21} \circ T_{12}$ und nach dem Banachschen Fixpunktsatz die Existenz eines γ mit $T_{21}T_{12}\gamma = \gamma$.

Nach Konstruktion stimmt auf $\Omega_1 \cap \Omega_2$ die Lösung u_1 des obigen RWP mit der Lösung u_2 zu

$$\begin{cases} \Delta u_2 = 0, & \text{in } \Omega_2, \\ u_2 = T_{12}\gamma, & \text{auf } \Gamma_2, \\ u_2 = g, & \text{auf } \partial\Omega_2 \setminus \Gamma_2. \end{cases} \quad (1.2.116)$$

überein und wir haben auf $\Omega_1 \cup \Omega_2$ das Problem zum Randwert g gelöst. \square

¹¹STANISŁAW ZAREMBA, 1863–1942

Das Perronsche Verfahren

1.2.29. Eine oberhalbstetige Funktion $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ wird als *subharmonisch* bezeichnet, falls für jedes $x \in \Omega$ und $r > 0$ mit $B_r(x) \subset \Omega$

$$u(x) \leq \int_{B_r(x)} u(y) \, dy \quad (1.2.117)$$

gilt. Subharmonische Funktionen sind eine Verallgemeinerung des Begriffs der konvexen Funktion ins Höherdimensionale. Bedingung (1.2.117) für alle x und r ist äquivalent dazu, dass

$$u(x) \leq \int_{\partial B_r(x)} u(y) \, dy \quad (1.2.118)$$

gilt. Weiterhin ist eine zweifach differenzierbare Funktion $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ genau dann subharmonisch, wenn $\Delta u(x) \geq 0$ in Ω gilt. Dies folgt analog zum Beweis zu Satz 1.2.2. Weitere Eigenschaften subharmonischer Funktionen sind in folgender Proposition zusammengefasst.

Proposition. (i) *Ist eine Funktion $u : \Omega_1 \cup \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ sowohl auf Ω_1 wie auch auf Ω_2 subharmonisch, so ist u auf $\Omega_1 \cup \Omega_2$ subharmonisch.*

(ii) *Sind u, v subharmonische Funktionen auf Ω , so ist auch ihr Maximum $w(x) = \max\{u(x), v(x)\}$ subharmonisch auf Ω .*

(iii) *Ist u subharmonisch auf Ω und $B \Subset \Omega$ eine in Ω enthaltene Kugel. Dann ist die Funktion u_B , die man erhält indem man u in B durch die auf ∂B mit u übereinstimmende harmonische Funktion ersetzt, subharmonisch.*

1.2.30 Satz (Perron¹²). *Sei Ω beschränkt und $g \in C(\partial\Omega)$. Bezeichne weiterhin*

$$\mathcal{S}_g = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \text{ subharmonisch} : \limsup_{z \rightarrow x, z \in \Omega} u(z) \leq g(x) \text{ auf } \partial\Omega\}. \quad (1.2.119)$$

Dann ist

$$u_*(x) = \sup_{u \in \mathcal{S}_g} u(x) \quad (1.2.120)$$

harmonisch in Ω .

Beweis. Da Ω beschränkt ist, ist g nach oben beschränkt und somit $u(x) \leq M$ gleichmäßig in $u \in \mathcal{S}_g$. Damit gilt nach dem Lemma von Fatou für jedes $x \in \Omega$ und alle $r < \text{dist}(x, \partial\Omega)$

$$u_*(x) = \sup_{u \in \mathcal{S}_g} u(x) \leq \sup_{u \in \mathcal{S}_g} \int_{B_r(x)} u(y) \, dy \leq \int_{B_r(x)} \sup_{u \in \mathcal{S}_g} u(y) \, dy = \int_{B_r(x)} u_*(y) \, dy \quad (1.2.121)$$

und u_* ist subharmonisch. [Es gilt nicht notwendig $u_* \in \mathcal{S}_g$, da das Randverhalten nicht ohne weiteres kontrolliert werden kann. Dazu benötigt man Barrieren, siehe unten.]

Sei nun $B \Subset \Omega$ eine Kugel. Um zu zeigen, dass u_* in B harmonisch ist, wählen wir eine in B dichte Folge von Punkten (x_k) . Zu jedem k existiert damit ein $v_k \in \mathcal{S}_g$ mit

$$v_k(x_k) + k^{-1} \geq u_*(x_k) \quad (1.2.122)$$

¹²OSKAR PERRON, 1880–1975

Sei nun $\tilde{v}_1 = (v_1)_B$ und rekursiv $\tilde{v}_{k+1} = (\max\{\tilde{v}_k, v_{k+1}\})_B$. Dann ist nach obiger Proposition $\tilde{v}_k \in \mathcal{S}_g$, harmonisch in B und nach Konstruktion $\tilde{v}_{k+1}(x) \geq \tilde{v}_k(x)$ auf B . Da \tilde{v}_k beschränkt ist, konvergiert \tilde{v}_k punktweise und auf B sogar lokal gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion \tilde{v} . Diese ist in B harmonisch und erfüllt $\tilde{v}(x) \leq u_*(x)$ für alle x .

Nach Konstruktion gilt $\tilde{v}(x_k) + k^{-1} \geq u_*(x_k)$. Angenommen, $\tilde{v}(x) < u_*(x)$ für ein x . Dann gibt es wegen der Oberhalbstetigkeit von u_* ein $\delta > 0$ und ein $r > 0$ mit $u_*(x) \geq \tilde{v}(x) + \delta$ auf $B_r(x) \subset B$. Andererseits ist (x_k) dicht in B , es gibt also ein $k > \delta^{-1}$ mit $x_k \in B_r(x)$. Für dieses gilt $u_*(x_k) \geq \tilde{v}(x_k) + \delta > \tilde{v}(x_k) + k^{-1} \geq u^*(x_k)$. Widerspruch. \square

Bemerkung: Wenn das Gebiet Ω nicht klassisch zulässig ist, so kann man die durch das Perronsche Verfahren konstruierte Funktion u_* als verallgemeinerte Lösung des Dirichletproblems verstehen. Die Beschränkung auf subharmonische Funktionen und die damit verbundene Approximation von unten ist dabei nicht wesentlich, von oben würde man dieselbe verallgemeinerte Lösung approximieren. Es gilt

1.2.31 Satz (Wiener¹³). *Unter den Voraussetzungen des letzten Satzes gilt für jedes $x \in \Omega$*

$$\sup_{u \in \mathcal{S}_g} u(x) = \inf_{-v \in \mathcal{S}_{-g}} v(x). \quad (1.2.123)$$

Norbert Wiener lieferte auch eine Charakterisierung klassisch zulässiger Gebiete: ein Gebiet ist genau dann klassisch zulässig, wenn alle seine Randpunkte regulär sind. Dabei heißt ein Randpunkt $x \in \partial\Omega$ regulär, wenn es ein $r > 0$ und eine stetige subharmonische Funktion v auf $\Omega \cap B_r(x)$ mit

$$\lim_{z \rightarrow x, z \in \Omega} v(z) = 0 \quad (1.2.124)$$

und

$$\sup_{z \in \Omega \cap (B_r(x) \setminus B_\delta(x))} v(z) < 0 \quad (1.2.125)$$

für jedes $0 < \delta < r$ gibt. Solche Funktionen werden als Barrieren bezeichnet.

1.3 Wärmeleitungsgleichung

1.3.1. Die *Wärmeleitungsgleichung* beschreibt die zeitliche Änderung einer Temperaturverteilung, wir betrachten auf $\tilde{\Omega}_T = (0, T] \times \Omega$ die Gleichung

$$\partial_t u - \Delta u = f, \quad (1.3.1)$$

oft versehen mit Randbedingungen auf $(0, T] \times \partial\Omega$ sowie einer Anfangsbedingung für $t = 0$. Man sieht, dass nicht alle Ränder des Gebiets $\tilde{\Omega}_T$ gleich bedeutend sind.

Eigenschaften homogener Lösungen

1.3.2. Wir benötigen einige Bezeichnungen. Sei $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Wir sagen $\tilde{\Omega}$ ist *zulässig* für die Wärmeleitungsgleichung, falls zu jedem $(t, x) \in \tilde{\Omega}$ und $\varepsilon > 0$ auch $(t + \varepsilon, x) \in \tilde{\Omega}$

¹³NORBERT WIENER, 1894–1964

gilt. Weiter bezeichnen wir den Rand $\partial\tilde{\Omega}$ als parabolischen Rand, zu jedem parabolischen Randpunkt (t, x) und $\varepsilon > 0$ ist $(t + \varepsilon, x)$ entweder im Gebiet enthalten oder selbst wieder parabolischer Randpunkt.

Sei nun zu $T > 0$ das Streifengebiet $S_T = (0, T] \times \mathbb{R}^n$ definiert und bezeichne $\tilde{\Omega}_T = \tilde{\Omega} \cap S_T$. Dann heißt wiederum $\partial_t \tilde{\Omega}_T = (\partial\tilde{\Omega}) \cap S_T$ der parabolische Rand von $\tilde{\Omega}_T$.

Für Lösungen der Wärmeleitungsgleichung gilt eine Variante des Maximumprinzips; im Gegensatz zu harmonischen Funktionen tritt dabei aber nur der parabolische Rand auf.

Satz (Parabolisches Maximumprinzip). *Sei $\tilde{\Omega}_T$ ein beschränktes Gebiet. Angenommen, die Funktion $u \in C^2(\tilde{\Omega}_T) \cap C(\overline{\tilde{\Omega}_T})$ ist reellwertig und erfüllt $\partial_t u = \Delta u$. Dann gilt*

$$\max_{(t,x) \in \overline{\tilde{\Omega}_T}} u(t, x) = \max_{(t,x) \in \partial_t \tilde{\Omega}_T} u(t, x). \quad (1.3.2)$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und $v(t, x) = u(t, x) - \varepsilon t$. Da $\overline{\tilde{\Omega}_T}$ kompakt und v stetig ist, nimmt v sein Maximum an. Wir zeigen, dass auch v sein Maximum auf dem parabolischen Rand annehmen muss. Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es einen Punkt $(t_0, x_0) \in \tilde{\Omega}_T$ mit

$$v(t_0, x_0) = \max_{(t,x) \in \overline{\tilde{\Omega}_T}} v(t, x). \quad (1.3.3)$$

Da v zweifach stetig differenzierbar ist, muss die Hessematrix von v im Punkt (t_0, x_0) negativ semi-definit sein und damit

$$\partial_t v(t_0, x_0) = \partial_t u(t_0, x_0) - \varepsilon = \Delta u(t_0, x_0) - \varepsilon \leq -\varepsilon \quad (1.3.4)$$

gelten. Da (t_0, x_0) nicht auf dem parabolischen Rand liegt, existiert damit insbesondere ein $\delta > 0$ mit $\partial_t v(t, x_0) < -\varepsilon/2$ für alle $t_0 - \delta \leq t \leq t_0$ und somit nach Integration

$$v(t_0, x_0) = v(t_0 - \delta, x_0) + \int_{t_0 - \delta}^{t_0} \partial_t v(t, x_0) dt \leq v(t_0 - \delta, x_0) - \varepsilon\delta/2 < v(t_0 - \delta, x_0) \quad (1.3.5)$$

im Widerspruch zur Annahme. Also liegen Maxima von v auf dem parabolischen Rand und, da ε beliebig war, auch die Maxima von u . \square

1.3.3 Korollar. *Angenommen, eine Lösung u der Wärmeleitungsgleichung verschwindet auf dem parabolischen Rand $\partial_t \tilde{\Omega}_T$. Dann gilt $u = 0$ in $\tilde{\Omega}_T$.*

Fundamentallösung

1.3.4. Wir betrachten zuerst den Fall $\Omega = \mathbb{R}^n$ und suchen nach einer geeigneten Lösungsdarstellung für Lösungen des Anfangswertproblems. Wir gehen analog zur Konstruktion harmonischer Funktionen vor und nutzen die *Fundamentallösung* der Wärmeleitungsgleichung. Diese ist durch

$$\Phi(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0, \end{cases} \quad (1.3.6)$$

gegeben. Es gilt nach Konstruktion $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \setminus \{(0, 0)\})$ sowie für $t \geq 0$

$$\int \Phi(t, x) dx = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int e^{-|x|^2} dx = 1. \quad (1.3.7)$$

Weiter gilt für alle $(t, x) \neq (0, 0)$ und unter Ausnutzung von Polarkoordinaten im \mathbb{R}^n

$$\Delta \Phi = \left(\partial_r^2 + \frac{n-1}{r} \partial_r \right) \Phi = \left(\frac{|x|^2}{4t^2} - \frac{n}{2t} \right) \Phi = \partial_t \Phi. \quad (1.3.8)$$

Dass es sich bei Φ um eine Fundamentallösung handelt, ergibt sich aus folgendem Theorem.

1.3.5 Satz. Sei $g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ und sei

$$u(t, x) = \int \Phi(t, x - y) g(y) dy, \quad t > 0. \quad (1.3.9)$$

Dann gilt

- (i) $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ und es gilt;
- (ii) $\partial_t u = \Delta u$ auf $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$; sowie
- (iii) $\lim_{t \rightarrow 0} u(t, x^0) = g(x^0)$ für jedes $x^0 \in \mathbb{R}^n$.

Beweis. (i) und (ii) folgen durch Differenzieren. • (iii) nutzt die Positivität des Wärmeleitungskerns. Sei dazu $x^0 \in \mathbb{R}^n$ fest gewählt und $\varepsilon > 0$. Wir wählen $\delta > 0$ so klein, dass $|g(x^0) - g(y)| < \varepsilon$ für alle y mit $|x^0 - y| < \delta$. Dies existiert, da g stetig ist. Weiter gilt damit für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $|x - x^0| < \delta/2$

$$\begin{aligned} |u(t, x) - g(x^0)| &= \left| \int \Phi(t, x - y) (g(y) - g(x^0)) dy \right| \\ &\leq \int_{B_\delta(x^0)} \Phi(t, x - y) |g(y) - g(x^0)| dy \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(x^0)} \Phi(t, x - y) |g(y) - g(x^0)| dy \\ &= I_\delta(t, x) + J_\delta(t, x) \end{aligned} \quad (1.3.10)$$

unter Ausnutzung von (1.3.9) sowie der Positivität von Φ . Weiter gilt nach Wahl von δ

$$I_\delta(t, x) \leq \varepsilon \int \Phi(t, x - y) dy = \varepsilon, \quad (1.3.11)$$

sowie $|y - x^0| \leq |y - x| + |x - x^0| = |y - x| + \delta/2 \leq |y - x| + |y - x^0|/2$ und damit $|y - x| \geq |y - x^0|/2$, also auch

$$\begin{aligned} J_\delta(t, x) &\leq 2M \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(x^0)} \Phi(t, x - y) dy \leq \frac{2M}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(x^0)} e^{-\frac{|x^0 - y|^2}{16t}} dy \\ &\leq \frac{2\|g\|_\infty}{\pi^{n/2}} \int_{|z| \geq \delta/\sqrt{t}} e^{-|z|^2} dz \longrightarrow 0, \quad t \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

mit $M = \max_{x \in \mathbb{R}^n} |g(x)|$. Also gilt für $|x - x^0| < \delta/2$ und $t > 0$ klein genug die Abschätzung $|u(t, x) - g(x^0)| < 2\varepsilon$ und damit die Behauptung. \square

1.3.6. Die Lösung auf einem Halbraum ist nicht eindeutig bestimmt durch ihre Anfangsbedingung, es gibt ‘physikalische’ und ‘unphysikalische’ Lösungen. Allerdings ist die Lösung eindeutig, wenn man Wachstumsschranken fordert. Wir zeigen dies kurz und nutzen dazu folgende Verallgemeinerung des Maximumprinzips:

Lemma. Angenommen, eine Funktion $u \in C^2((0, T] \times \mathbb{R}^n) \cap C([0, T] \times \mathbb{R}^n)$ erfüllt

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0, & t \in (0, T] \\ u(0, \cdot) = g \end{cases} \quad (1.3.13)$$

zusammen mit der Abschätzung

$$u(t, x) \leq C e^{a|x|^2} \quad (1.3.14)$$

für Konstanten $C, a > 0$. Dann gilt

$$\sup_{(t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R}^n} u(t, x) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} g(x). \quad (1.3.15)$$

Beweis. Es genügt die Aussage für T klein genug zu zeigen, da man den Streifen in schmalere Streifen zerlegen kann. Sei also $4aT < 1$ und $\varepsilon > 0$ so klein gewählt, dass auch $4a(T + \varepsilon) < 1$. Sei weiter $y \in \mathbb{R}^n$. Dann ist für jedes $\mu > 0$

$$v(t, x) = u(t, x) - \frac{\mu}{(T + \varepsilon - t)^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon-t)}} \quad (1.3.16)$$

ebenso eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung, es gilt also $\partial_t v - \Delta v = 0$. Also gilt nach dem parabolischen Maximumprinzip

$$\max_{(t,x) \in (0,T] \times B_r(y)} v(t, x) \leq \max_{(t,x) \in \partial_1((0,T] \times B_r(y))} v(t, x). \quad (1.3.17)$$

Nun gilt auf dem unteren Rand $v(0, x) \leq u(0, x) = g(x)$ und für $|x - y| = r$ und alle $0 < t \leq T$ ebenso

$$\begin{aligned} v(t, x) &= u(t, x) - \frac{\mu}{(T + \varepsilon - t)^{n/2}} e^{-\frac{r^2}{4(T+\varepsilon-t)}} \\ &\leq C e^{a|x|^2} - \frac{\mu}{(T + \varepsilon - t)^{n/2}} e^{-\frac{r^2}{4(T+\varepsilon-t)}} \\ &\leq C e^{a(|y|+r)^2} - \frac{\mu}{(T + \varepsilon)^{n/2}} e^{-\frac{r^2}{4(T+\varepsilon)}} \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} g(x) \end{aligned} \quad (1.3.18)$$

für r hinreichend groß. Also folgt $v(t, y) \leq \sup_x g(x)$ und mit $\mu \rightarrow 0$ die Behauptung. \square

1.3.7. Wir rechnen noch kurz nach, dass die Funktion Φ tatsächlich Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung ist. Es gilt

Lemma. Für jede Testfunktion $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ gilt

$$\int \int \Phi(t, x) (\partial_t \varphi(t, x) + \Delta \varphi(t, x)) dx dt = -\varphi(0, 0). \quad (1.3.19)$$

Beweis. Da $\Phi(t, x) = 0$ für $t \leq 0$ gilt und Φ lokal integrierbar ist, folgt

$$\begin{aligned} & \int \int \Phi(t, x)(\partial_t \varphi(t, x) + \Delta \varphi(t, x)) \, dx \, dt \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \int \Phi(t, x)(\partial_t \varphi(t, x) + \Delta \varphi(t, x)) \, dx \, dt \\ &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \Phi(\varepsilon, x) \varphi(\varepsilon, x) \, dx = -\varphi(0, 0) \end{aligned} \quad (1.3.20)$$

unter Ausnutzung von $\partial_t \Phi - \Delta \Phi = 0$, $\Phi(t, x) > 0$, $\int \Phi(t, x) \, dx = 1$ für $t > 0$ sowie der Tatsache, dass $\lim_{t \rightarrow 0} \Phi(t, x) = 0$ gleichmäßig in $|x| > \delta$. \square

1.3.8. Die Fundamentallösung kann wiederum zum Ausgangspunkt genommen werden, eine Darstellung von Lösungen der inhomogenen Wärmeleitungsgleichung durch Volumen- und Schichtpotentiale abzuleiten. Dazu sei Ω ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand und $\tilde{\Omega}_T = (0, T] \times \Omega$. Dann gilt als Folgerung der zweiten Greenschen Identität (1.2.56)

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} (u(t, x)(\partial_t + \Delta)v(t, x) + v(t, x)(\partial_t - \Delta)u(t, x)) \, dx \, dt \\ &= \int_{\Omega} u(t, x)v(t, x) \, dx \Big|_{t=0}^T + \int_0^T \oint_{\partial\Omega} (u(t, x)\nabla v(t, x) - v(t, x)\nabla u(t, x)) \cdot \vec{d}\sigma(x) \, dt. \end{aligned} \quad (1.3.21)$$

Wir ersetzen t durch s und x durch y und schreiben für v die Fundamentallösung $\Phi(t-s, x-y)$. Dann folgt für Lösungen der Wärmeleitungsgleichung mit Anfangs- und Randdaten

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta)u(t, x) = f(t, x), & \text{in } \tilde{\Omega}_T, \\ u(0, x) = u_0(x), & \text{für } t = 0, \\ u(t, x) = g(t, x), & \text{auf } \partial\Omega, \\ \partial_{\vec{\nu}} u(t, x) = h(t, x) & \text{auf } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.3.22)$$

eine Darstellung der Form

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \int_0^T \int_{\Omega} f(s, y)\Phi(t-s, x-y) \, dy \, ds + \int_{\Omega} u_0(y)\Phi(t, x-y) \, dy \\ &\quad - \int_0^T \oint_{\partial\Omega} g(s, y)\partial_{\vec{\nu}(y)}\Phi(t-s, x-y) \, d\sigma(y) \\ &\quad + \int_0^T \oint_{\partial\Omega} h(s, y)\Phi(t-s, x-y) \, d\sigma(y). \end{aligned} \quad (1.3.23)$$

Wiederum kann man nicht gleichzeitig g und h vorgeben, da die Vorgabe von g und u_0 die Lösung nach dem Maximumprinzip eindeutig bestimmt. Wie im Falle der Laplacegleichung gelten Sprungrelationen für die Wärmepotentiale. Dies führt auf eine Integralgleichungsmethode für die Lösung der Wärmeleitungsgleichung, wir skizzieren dies kurz.

1.3.9 Satz (Sprungrelation für thermische Potentiale). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand.*

(i) *Das thermische Volumenpotential*

$$u(t, x) = \int_0^t \int_{\Omega} f(s, y)\Phi(t-s, x-y) \, dy \, ds \quad (1.3.24)$$

bestimmt für jedes $f \in C([0, T] \times \bar{\Omega})$ eine stetige Funktion $u \in C([0, T] \times \mathbb{R}^n)$, welche für $x \notin \partial\Omega$ und $t \in (0, T)$ glatt ist und dort die Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u - \Delta u = f$ (in Ω) beziehungsweise $\partial_t u = \Delta u$ (in $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$) löst. Darüberhinaus gilt $u(0, x) = 0$.

(ii) Das Integral

$$u(t, x) = \int_{\Omega} u_0(y) \Phi(t, x - y) dy \quad (1.3.25)$$

bestimmt eine auf $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ glatte Funktion, welche die Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u = \Delta u$ löst und $\lim_{t \rightarrow 0} u(t, x) = u_0(x)$ für alle $x \in \Omega$ beziehungsweise $\lim_{t \rightarrow 0} u(t, x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ erfüllt. Für $x \in \partial\Omega$ gilt $\lim_{t \rightarrow 0} u(t, x) = \frac{1}{2}u_0(x)$.

(iii) Das thermische Einfachschichtpotential

$$u(t, x) = \int_0^t \oint_{\partial\Omega} \eta(s, y) \Phi(t - s, x - y) d\sigma(y) ds \quad (1.3.26)$$

bestimmt für jedes $\eta \in C([0, T] \times \partial\Omega)$ eine stetige Funktion $u \in C([0, T] \times \mathbb{R}^n)$, welche für $x \notin \partial\Omega$ und $t \in (0, T)$ glatt ist und die Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u = \Delta u$ löst. Auf $\partial\Omega$ gilt die Sprungrelation der Normalenableitung

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow x, z \in \Omega} \partial_\nu u(t, z) &= \frac{1}{2} \eta(t, x) + \int_0^t \oint_{\partial\Omega} \eta(s, y) \partial_{\bar{\nu}(y)} \Phi(t - s, x - y) d\sigma(y) ds, \\ \lim_{z \rightarrow x, z \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}} \partial_\nu u(t, z) &= -\frac{1}{2} \eta(t, x) + \int_0^t \oint_{\partial\Omega} \eta(s, y) \partial_{\bar{\nu}(y)} \Phi(t - s, x - y) d\sigma(y) ds. \end{aligned} \quad (1.3.27)$$

(iv) Das thermische Doppelschichtpotential

$$u(t, x) = - \int_0^t \oint_{\partial\Omega} \gamma(s, y) \partial_{\bar{\nu}(y)} \Phi(t - s, x - y) d\sigma(y) ds \quad (1.3.28)$$

bestimmt für jedes $\gamma \in C([0, T] \times \partial\Omega)$ eine Funktion $u \in C([0, T] \times (\mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega))$, welche für $x \notin \partial\Omega$ und $t \in (0, T)$ glatt ist und die Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u = \Delta u$ löst. Auf $\partial\Omega$ gilt die Sprungrelation

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow x, z \in \Omega} u(t, z) &= \frac{1}{2} \gamma(t, x) - \int_0^t \oint_{\partial\Omega} \gamma(s, y) \partial_{\bar{\nu}(y)} \Phi(t - s, x - y) d\sigma(y) ds, \\ \lim_{z \rightarrow x, z \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}} u(t, z) &= -\frac{1}{2} \gamma(t, x) - \int_0^t \oint_{\partial\Omega} \gamma(s, y) \partial_{\bar{\nu}(y)} \Phi(t - s, x - y) d\sigma(y) ds. \end{aligned} \quad (1.3.29)$$

Beweis. Erfolgt durch explizites Nachrechnen, wir verzichten hier darauf. \square

1.3.10. Will man nun auf einem beschränkten Gebiet Ω mit glattem Rand $\partial\Omega$ das Randanfangswertproblem

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta)u(t, x) = f(t, x), & \text{in } \tilde{\Omega}_T, \\ u(0, x) = u_0(x), & \text{in } \Omega, \\ u(t, x) = g(t, x), & \text{auf } [0, T] \times \partial\Omega \end{cases} \quad (1.3.30)$$

mit Dirichletrandbedingungen lösen, so kann man wie folgt vorgehen. Zuerst setzt man

$$w(t, x) = \int_0^t \int_{\Omega} f(s, y) \Phi(t - s, x - y) dy ds + \int_{\Omega} u_0(y) \Phi(t, x - y) dy. \quad (1.3.31)$$

Dann erfüllt w

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta)w(t, x) = f(t, x), & \text{in } \tilde{\Omega}_T, \\ w(0, x) = u_0(x), & \text{in } \Omega \end{cases} \quad (1.3.32)$$

und besitzt Randwerte $w(t, x)$ auf $[0, T] \times \partial\Omega$. Eine Lösung u des Ausgangsproblems erhalten wir in Form $u(t, x) = v(t, x) + w(t, x)$, wenn wir eine Funktion v mit

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta)v(t, x) = 0, & \text{in } \tilde{\Omega}_T, \\ v(t, x) = g(t, x) - w(t, x), & \text{auf } [0, T] \times \partial\Omega, \\ v(0, x) = 0, & \text{in } \Omega \end{cases} \quad (1.3.33)$$

finden. Nutzt man den Ansatz

$$v(t, x) = - \int_0^t \oint_{\partial\Omega} \gamma(s, y) \partial_{\bar{\nu}(y)} \Phi(t-s, x-y) d\sigma(y) ds \quad (1.3.34)$$

als thermisches Doppelschichtpotential, so erfüllt v die erste und die dritte Bedingung automatisch und die zweite liefert zusammen mit der Sprungrelation

$$g(t, x) - w(t, x) = \frac{1}{2} \gamma(t, x) - \int_0^t \oint_{\partial\Omega} \gamma(s, y) \partial_{\bar{\nu}(y)} \Phi(t-s, x-y) d\sigma(y) ds. \quad (1.3.35)$$

Dies ist wiederum eine (Volterra-) Fredholmsche Integralgleichung mit eindeutig bestimmter Lösung $\gamma \in C([0, T] \times \partial\Omega)$. Damit haben wir eine Lösung zu (1.3.36) konstruiert. Die gefundene Lösung ist die eindeutig bestimmte Lösung, Eindeutigkeit folgt aus dem Maximumprinzip.

1.3.11. Wir betrachten noch speziell den Fall, dass wir ein Problem mit homogenen Dirichletrandbedingungen und verschwindender rechter Seite

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta)u(t, x) = 0, & \text{in } \tilde{\Omega}_T, \\ u(0, x) = u_0(x), & \text{in } \Omega, \\ u(t, x) = 0, & \text{auf } [0, T] \times \partial\Omega \end{cases} \quad (1.3.36)$$

zu vorgegebenen Anfangsdaten $u_0 \in C(\bar{\Omega})$ lösen wollen. Aufgrund des parabolischen Maximumprinzips ist die Lösung, wenn sie existiert, eindeutig bestimmt und erfüllt

$$|u(t, x)| \leq \max_{y \in \bar{\Omega}} |u_0(y)|. \quad (1.3.37)$$

Ist $\partial\Omega$ glatt genug, so liefert die Integralgleichungsmethode auch die Existenz einer Lösung. Diese ist von der Form

$$u(t, x) = \int_{\Omega} u_0(y) p_{\Omega}(t, x, y) dy \quad (1.3.38)$$

mit dem *Wärmeleitungskern* $p_{\Omega}(t, x, y)$, welcher sich für jedes $y \in \Omega$ aus

$$p_{\Omega}(t, x, y) = \Phi(t, x-y) - \varphi_y(t, x) \quad (1.3.39)$$

mit $\varphi_y(t, x)$ als Lösung der Wärmeleitungsgleichung $(\partial_t - \Delta)\varphi_y = 0$ in $(0, T) \times \Omega$ mit $\varphi_y(0, x) = 0$ und $\varphi_y(t, x) = \Phi(t, x-y)$ für $x \in \partial\Omega$ ergibt.

Für spezielle Gebiete kann man p_Ω direkt angeben, es ist aber wesentlich interessanter, Eigenschaften von p_Ω direkt zu studieren. So gilt $p_\Omega(t, x, y) > 0$ für alle $t > 0$ und $x, y \in \Omega$ (da die Lösung zu $u_0 \geq 0$ nach Maximumprinzip nichtnegativ sein muss),

$$p_\Omega(s + t, x, y) = \int_\Omega p_\Omega(t, x, z)p_\Omega(s, z, y) dz, \quad (1.3.40)$$

(da die Gleichung invariant unter t -Translationen ist), $p_\Omega(t, x, y) = p_\Omega(t, y, x)$, und $p_\Omega(t, x, y) \leq \Phi(t, x - y)$ sowie allgemeiner $p_{\Omega_1}(t, x, y) \leq p_{\Omega_2}(t, x, y)$ falls $\Omega_1 \subset \Omega_2$.

1.3.12. Sei $u \in C(\overline{\mathbb{R}_+ \times \Omega}) \cap C^\infty(\mathbb{R}_+ \times \Omega)$ Lösung zu (1.3.36) auf $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ zu $u_0 \in C(\overline{\Omega})$. Dann gilt (1.3.37) und wir können für alle $x \in \Omega$ die Laplacetransformation $\operatorname{Re} \lambda > 0$

$$w_\lambda(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} u(t, x) dt \quad (1.3.41)$$

betrachten. Die Funktionen w_λ sind nach Konstruktion aus $C(\overline{\Omega}) \cap C^\infty(\Omega)$ und erfüllen

$$\Delta w_\lambda(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \partial_t u(t, x) dt = u_0(x) + \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} u(t, x) dt = u_0(x) + \lambda w_\lambda(x) \quad (1.3.42)$$

sowie $w_\lambda(x) = 0$ auf $\partial\Omega$. Man könnte also auch u bestimmen, indem man

$$\begin{cases} (\Delta - \lambda)w_\lambda(x) = u_0(x), & x \in \Omega \\ w_\lambda(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1.3.43)$$

löst und daraus u über die Inversionsformel der Laplacetransformation

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta - i\infty}^{\delta + i\infty} e^{\lambda t} w_\lambda(x) d\lambda \quad (1.3.44)$$

zusammensetzt. Gleichung (1.3.43) wird als *Helmholtzgleichung* bezeichnet, das so skizzierte Verfahren führt zur Theorie der Operatorhalbgruppen.

1.4 Wellengleichung

Als viertes Beispiel wollen wir die *Wellengleichung*

$$\partial_t^2 u - \Delta u = f \quad (1.4.1)$$

auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ betrachten. Diese Gleichung unterscheidet sich grundlegend von Laplace- und Wärmeleitungsgleichung. Es gelten keine Maximum- und damit keine Vergleichsprinzipien. Den Ersatz dafür liefern hier Energieabschätzungen.

Energieabschätzungen und Abhängigkeitsgebiete

1.4.1. Wir betrachten eine Lösung der homogenen Wellengleichung

$$\partial_t^2 u - \Delta u = 0 \quad (1.4.2)$$

auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ (oder einer Teilmenge) und untersuchen diese auf speziellen Teilgebieten, welche die Form von Kegelstümpfen

$$\Omega_T = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : 0 < t < T \text{ und } |x - x_0| < t_0 - t\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \quad (1.4.3)$$

für gegebenes (x_0, t_0) und $T < t_0$, haben. Weiterhin gilt

$$2\partial_t u(\partial_t^2 u - \Delta u) = -\operatorname{div}(2(\partial_t u)(\nabla u)) + \partial_t((\nabla u)^2 + (\partial_t u)^2) \quad (1.4.4)$$

und damit mit partieller Integration

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \int_{\Omega_T} \partial_t u(t, x)(\partial_t^2 u(t, x) - \Delta u(t, x)) \, dx \, dt \\ &= \int_{\partial\Omega_T} ((\nabla u(t, x))^2 + (\partial_t u(t, x))^2, -2\partial_t u(t, x)\nabla u(t, x))^T \cdot \vec{\nu} \, d\sigma \end{aligned} \quad (1.4.5)$$

für den (fast überall definierten) äußeren Normalenvektor $\vec{\nu}$ an $\partial\Omega_T$. Die einzelnen Teilflächen kann man separat diskutieren. Für die Deckfläche erhält man

$$\int_{B_{t_0-T}(x_0)} (\nabla u(T, x))^2 + (\partial_t u(T, x))^2 \, dx, \quad (1.4.6)$$

für die Grundfläche entsprechend

$$- \int_{B_{t_0}(x_0)} (\nabla u(0, x))^2 + (\partial_t u(0, x))^2 \, dx \quad (1.4.7)$$

und für die Mantelfläche gilt $\vec{\nu} = (\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n)^T$ mit $\sum_{j=1}^n \nu_j^2 = \nu_0^2 = \frac{1}{2}$ wir erhalten (nach Erweitern mit ν_0)

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\nu_0} \int_M \nu_0^2 ((\nabla u(0, x))^2 + (\partial_t u(0, x))^2) - 2\nu_0 \partial_t u(t, x) \sum_{j=1}^n \nu_j \partial_j u(t, x) \, d\sigma \\ &= \frac{1}{\nu_0} \int_M \sum_{j=1}^n (\nu_0 \partial_j u(t, x) - \nu_j \partial_t u(t, x))^2 \, d\sigma \geq 0. \end{aligned} \quad (1.4.8)$$

Also folgt

$$\int_{B_{t_0-T}(x_0)} (\nabla u(T, x))^2 + (\partial_t u(T, x))^2 \, dx \leq \int_{B_{t_0}(x_0)} (\nabla u(0, x))^2 + (\partial_t u(0, x))^2 \, dx. \quad (1.4.9)$$

Diese Ungleichung wird als *Abhängigkeitsgebietsungleichung* bezeichnet. Sie hat einige wichtige Folgerungen.

1.4.2 Satz (Abhängigkeitsgebietsungleichung). **(i)** Sei $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ Lösung der homogenen Wellengleichung $\partial_t^2 u = \Delta u$. Dann gilt für jedes $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $t_0 < t_1$ und $r > 0$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} &\int_{B_r(x_0)} (\nabla u(t_1, x))^2 + (\partial_t u(t_1, x))^2 \, dx \\ &\leq \int_{B_{r+(t_1-t_0)}(x_0)} (\nabla u(t_0, x))^2 + (\partial_t u(t_0, x))^2 \, dx. \end{aligned} \quad (1.4.10)$$

(ii) Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$. Sei weiter $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ Lösung der homogenen Wellengleichung $\partial_t^2 u = \Delta u$. Angenommen, für alle $x \in B_r(x_0)$ gilt $u(0, x) = 0$ sowie $\partial_t u(0, x) = 0$. Dann gilt $u = 0$ in dem Kegel

$$\{(t, x) : 0 < t < r \text{ und } |x - x_0| \leq r - t\}. \quad (1.4.11)$$

(iii) Sei nun $u \in C^2(\overline{\mathbb{R}_+} \times \mathbb{R}^n)$ Lösung der homogenen Wellengleichung $\partial_t^2 u = \Delta u$ und gelte $\text{supp } u(0, \cdot) \subset B_r(x_0)$ und $\text{supp } \partial_t u(0, \cdot) \subset B_r(x_0)$. Dann gilt

$$\text{supp } u \subset \{(t, x) : |x - x_0| \leq r + t\}. \quad (1.4.12)$$

Als Folgerung ergibt sich, dass Lösungen der Wellengleichung, so sie existieren, eindeutig durch die Anfangsdaten $u(0, \cdot)$ und $\partial_t u(0, \cdot)$ bestimmt sind.

Lösungsdarstellungen

1.4.3. Wir betrachten zuerst den Fall $n = 1$ und untersuchen

$$\partial_t^2 u = \partial_x^2 u. \quad (1.4.13)$$

Beim Wechsel des Koordinatensystems zu $\xi = x + t$ und $\eta = x - t$ ist diese Gleichung äquivalent zu

$$\partial_\xi \partial_\eta u = 0, \quad (1.4.14)$$

Lösungen sind also Summen von Funktionen, welche in ξ oder η konstant sind.

Lemma. Jede (klassische) Lösung der Gleichung (1.4.13) ist von der Form

$$u(t, x) = \varphi(x + t) + \psi(x - t) \quad (1.4.15)$$

mit geeigneten (zweifach stetig differenzierbaren) Funktionen φ und ψ .

1.4.4 Korollar (d'Alembertsche¹⁴ Formel). Das Anfangswertproblem für die Wellengleichung

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t, x) = \partial_x^2 u(t, x), & t, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \\ \partial_t u(0, x) = u_1(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1.4.16)$$

zu gegebenen Funktionen $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ und $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$ besitzt die eindeutig bestimmte Lösung

$$u(t, x) = \frac{1}{2}(u_0(t+x) + u_0(t-x)) + \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} u_1(y) dy. \quad (1.4.17)$$

Beweis. Es genügt die Funktionen φ und ψ aus dem vorigen Lemma anhand der Anfangsdaten u_0 und u_1 zu bestimmen. Das führt auf die Gleichungen

$$u_0(x) = \varphi(x) + \psi(x), \quad u_1(x) = \varphi'(x) - \psi'(x), \quad (1.4.18)$$

¹⁴JEAN-BAPTISTE LE ROND D'ALEMBERT, 1717–1783

Integration der zweiten also insbesondere

$$\int_0^x u_1(y) dy = \varphi(x) - \varphi(0) - \psi(x) + \psi(0). \quad (1.4.19)$$

Also folgt

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \left(u_0(x) + \int_0^x u_1(y) dy + \varphi(0) - \psi(0) \right), \quad (1.4.20)$$

sowie

$$\psi(x) = \frac{1}{2} \left(u_0(x) - \int_0^x u_1(y) dy - \varphi(0) + \psi(0) \right). \quad (1.4.21)$$

Addition der beiden Terme ausgewertet in $t+x$ und $t-x$ liefert die Behauptung. \square

Man sieht an der soeben gezeigten d'Alembertschen Formel, dass Lösungen der Wellengleichung im Eindimensionalen genauso glatt sind, wie es die Ausgangsdaten vorgeben. Im Gegensatz zur Laplace- und Wärmeleitungsgleichung tritt kein Glättungseffekt ein.

Im Dreidimensionalen besteht ein Zusammenhang zwischen Lösungen der Wellengleichung und sphärischen Mitteln. Hier gilt

1.4.5 Satz (Kirchhoffsche¹⁵ Formel). Sei $v \in C^k(\mathbb{R}^3)$, $k \geq 2$, und bezeichne

$$u(t, x) = \frac{1}{4\pi t} \oint_{\partial B_t(x)} v(y) d\sigma(y). \quad (1.4.22)$$

Dann gilt $u \in C^k(\overline{\mathbb{R}_+} \times \mathbb{R}^3)$ sowie

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0, & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3, \\ u(0, x) = 0, \quad \partial_t u(0, x) = v(x), & \text{auf } \mathbb{R}^3. \end{cases} \quad (1.4.23)$$

Beweis. Nach Konstruktion gilt

$$u(t, x) = \frac{t}{4\pi} \oint_{\mathbb{S}^2} v(x + t\omega) d\sigma(\omega) \quad (1.4.24)$$

und damit $\lim_{t \rightarrow 0} u(t, x) = 0$ sowie die gewünschte Regularität $u \in C^k(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3)$. Weiter gilt unter Ausnutzung des Gaußschen Satzes

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) &= \frac{1}{4\pi} \oint_{\mathbb{S}^2} v(x + t\omega) d\sigma(\omega) + \frac{t}{4\pi} \oint_{\mathbb{S}^2} \omega \cdot \nabla v(x + t\omega) d\sigma(\omega) \\ &= \frac{1}{4\pi t^2} \oint_{\partial B_t(x)} v(y) d\sigma(y) + \frac{1}{4\pi t} \oint_{\partial B_t(x)} \partial_{\bar{\nu}} v(y) d\sigma(y) \\ &= \frac{1}{t} u(t, x) + \frac{1}{4\pi t} \int_{B_t(x)} \Delta v(y) dy. \end{aligned} \quad (1.4.25)$$

Für die zweite Ableitung folgt entsprechend

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u(t, x) &= -\frac{1}{t^2} u(t, x) + \frac{1}{t} \partial_t u(t, x) - \frac{1}{4\pi t^2} \int_{B_t(x)} \Delta v(y) dy + \frac{1}{4\pi t} \partial_t \int_{B_t(x)} \Delta v(y) dy \\ &= \frac{1}{4\pi t} \partial_t \int_{B_t(x)} \Delta v(y) dy = \frac{1}{4\pi t} \partial_t \int_0^t \oint_{\partial B_\rho(0)} \Delta v(x + \rho\omega) d\sigma(\omega) d\rho \\ &= \frac{1}{4\pi t} \oint_{\partial B_t(x)} \Delta v(y) d\sigma(y) \end{aligned} \quad (1.4.26)$$

¹⁵GUSTAV ROBERT KIRCHHOFF, 1824–1887

und es gilt ebenso

$$\Delta u(t, x) = \frac{1}{4\pi t} \oint_{\partial B_t(x)} \Delta v(y) d\sigma(y). \quad (1.4.27)$$

Also gilt $\partial_t^2 u = \Delta u$. Weiter folgt unter Ausnutzung von $|\partial B_t(x)| = 4\pi t^2$ und $|B_t(x)| = \frac{4}{3}\pi t^3$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \partial_t u(t, x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \oint_{\partial B_t(x)} v(y) d\sigma(y) + \lim_{t \rightarrow \infty} 3t^2 \int_{B_t(x)} \Delta v(y) dy = v(x). \quad (1.4.28)$$

□

1.4.6 Korollar. Seien $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3)$ und $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Dann ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0, & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3, \\ u(0, x) = u_0(x), \quad \partial_t u(0, x) = u_1(x), & \text{auf } \mathbb{R}^3 \end{cases} \quad (1.4.29)$$

ist durch

$$u(t, x) = \frac{1}{4\pi t} \oint_{\partial B_t(x)} u_1(y) d\sigma(y) + \partial_t \left(\frac{1}{4\pi t} \oint_{\partial B_t(x)} u_0(y) d\sigma(y) \right). \quad (1.4.30)$$

gegeben.

Beweis. Ist $u(t, x)$ eine Lösung der Wellengleichung, so auch $\partial_t u(t, x)$. Damit bleiben nur noch die Anfangsbedingungen nachzuweisen. Der erste Summand wurde oben schon betrachtet, für den zweiten gilt damit auch

$$\lim_{t \rightarrow 0} \partial_t \left(\frac{1}{4\pi t} \oint_{\partial B_t(x)} u_0(y) d\sigma(y) \right) = u_0(x) \quad (1.4.31)$$

sowie

$$\lim_{t \rightarrow 0} \partial_t^2 \left(\frac{1}{4\pi t} \oint_{\partial B_t(x)} u_0(y) d\sigma(y) \right) = \lim_{t \rightarrow 0} t \int_{\partial B_t(x)} \Delta u(y) d\sigma(y) = 0. \quad (1.4.32)$$

□

Bemerkung: Auch wenn die Daten als C^3 und C^2 vorausgesetzt werden, ist die Lösung nur C^2 .

1.4.7 Korollar (Poissonsche Formel). Seien $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^2)$ und $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Dann ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0, & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2, \\ u(0, x) = u_0(x), \quad \partial_t u(0, x) = u_1(x), & \text{auf } \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad (1.4.33)$$

durch

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi t} \int_{B_t(x)} \frac{u_1(y)}{\sqrt{t^2 - (y-x)^2}} dy + \partial_t \left(\frac{1}{2\pi t} \int_{B_t(x)} \frac{u_0(y)}{\sqrt{t^2 - (y-x)^2}} dy \right) \quad (1.4.34)$$

gegeben.

Beweis. Wir setzen die Funktionen konstant in der dritten Variablen auf den \mathbb{R}^3 beziehungsweise auf $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3$ fort. Es ist klar, dass solche fortgesetzten Funktionen die Wellengleichung im \mathbb{R}^3 lösen und es verbleibt die Lösungsdarstellung aus dem Dreidimensionalen anzuwenden. □

Es gelten entsprechende Formeln im Höherdimensionalen. Für alle ungeraden Raumdimensionen wird die Lösung durch t -Ableitungen sphärischer Mittel beschrieben, allerdings tritt ein noch wesentlich größerer Regularitätsverlust ein. Lösungsdarstellungen in geraden Raumdimensionen ergeben sich wiederum durch Integration. Wir geben das allgemeine Resultat nur an, Beweise folgen analog zu obiger Rechnung.

Satz (Kirchhoff–Poissonsche Formeln in höheren Dimensionen). **(i)** Sei n ungerade und seien $u_0 \in C^{(n+3)/2}(\mathbb{R}^n)$ und $u_1 \in C^{(n+1)/2}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0, & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = u_0(x), \quad \partial_t u(0, x) = u_1(x), & \text{auf } \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (1.4.35)$$

durch

$$u(t, x) = \frac{1}{3 \cdot 5 \cdots (n-2)} \left(\partial_t \left(\frac{1}{t} \partial_t \right)^{\frac{n-3}{2}} \int_{\partial B_t(x)} u_0(y) \, d\sigma(y) + \left(\frac{1}{t} \partial_t \right)^{\frac{n-3}{2}} \int_{\partial B_t(x)} u_1(y) \, d\sigma(y) \right) \quad (1.4.36)$$

gegeben.

(ii) Sei nun n gerade und seien $u_0 \in C^{(n+4)/2}(\mathbb{R}^n)$ und $u_1 \in C^{(n+2)/2}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0, & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = u_0(x), \quad \partial_t u(0, x) = u_1(x), & \text{auf } \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (1.4.37)$$

durch

$$u(t, x) = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdots (n-2) \cdot n} \left(\partial_t \left(\frac{1}{t} \partial_t \right)^{\frac{n-2}{2}} \int_{B_t(x)} \frac{u_0(y)}{(t^2 - |x-y|^2)^{1/2}} \, dy + \left(\frac{1}{t} \partial_t \right)^{\frac{n-2}{2}} \int_{B_t(x)} \frac{u_1(y)}{(t^2 - |x-y|^2)^{1/2}} \, dy \right) \quad (1.4.38)$$

gegeben.

1.4.8. Im n -dimensionalen gehen wir anders vor und konstruieren die Lösung als Kombination spezieller Lösungen. Dazu nutzen wir *ebene Wellen*, also Lösungen der Form $u(t, x) = h(x \cdot \omega - t)$ zu $h \in C^2(\mathbb{R})$ und mit Richtung $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$. Dass es sich tatsächlich um Lösungen handelt ist einfach nachzurechnen, es gilt

$$\Delta h(x \cdot \omega - t) = \sum_{j=1}^n \omega_j^2 h''(x \cdot \omega - t) = \partial_t^2 h(x \cdot \omega - t). \quad (1.4.39)$$

Interessanter ist die Frage, ob sich alle Lösungen als Überlagerung ebener Wellen mit verschiedener Ausbreitungsrichtung schreiben lassen. Wir suchen also eine (hinreichend glatte) Funktion $h : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ derart, dass

$$u(t, x) = \oint_{\mathbb{S}^{n-1}} h(x \cdot \omega - t, \omega) \, d\sigma(\omega) \quad (1.4.40)$$

die gesuchte Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0, & \text{auf } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = u_0(x), \quad \partial_t u(0, x) = u_1(x), & \text{auf } \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (1.4.41)$$

ist. Dass es sich um eine Lösung der Wellengleichung handelt ist nach Konstruktion klar, was von h zu erfüllen ist, sind die Anfangsbedingungen

$$u_0(x) = \oint_{\mathbb{S}^{n-1}} h(x \cdot \omega, \omega) d\sigma(\omega), \quad (1.4.42)$$

sowie

$$u_1(x) = - \oint_{\mathbb{S}^{n-1}} h'(x \cdot \omega, \omega) d\sigma(\omega). \quad (1.4.43)$$

Dabei bezeichnet $h'(r, \omega) = \partial_r h(r, \omega)$ die partielle Ableitung nach der ersten Variablen. Es gelten Symmetriebeziehungen, substituiert man ω zu $-\omega$, so bleiben die Integrale gleich. Es gilt also

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} h(x \cdot \omega, \omega) d\sigma(\omega) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} h(-x \cdot \omega, -\omega) d\sigma(\omega), \quad (1.4.44)$$

und $u_0(x)$ hängt nur vom geraden Anteil $h_g(r, \omega) = \frac{1}{2}(h(r, \omega) + h(-r, -\omega))$ ab. Entsprechend hängt u_1 nur vom ungeraden Anteil $h_u(r, \omega) = \frac{1}{2}(h(r, \omega) - h(-r, -\omega))$ ab. Ziel ist es also aus u_0 den geraden Anteil h_g von h zu rekonstruieren.

1.4.9. Wir betrachten folgendes Paar von Transformationen

$$\mathcal{R}f(r, \omega) = \int_{\{x: x \cdot \omega = r\}} f(x) d\sigma(x) \quad \text{und} \quad \mathcal{R}^\top h(x) = \oint_{\mathbb{S}^{n-1}} h(x \cdot \omega, \omega) d\sigma(\omega) \quad (1.4.45)$$

für stetige und hinreichend schnell fallende Funktionen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $h: \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$. Die Transformation \mathcal{R} wird als *Radontransformation*¹⁶ bezeichnet, die Transformation \mathcal{R}^\top dazu transponiert. Letzteres ist einfach nachzurechnen, es gilt

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \oint_{\mathbb{S}^{n-1}} h(r, \omega) \mathcal{R}f(r, \omega) d\sigma(\omega) dr \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \oint_{\mathbb{S}^{n-1}} h(r, \omega) \int_{\{x: x \cdot \omega = r\}} f(x) d\sigma(x) d\sigma(\omega) dr \\ &= \oint_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} h(r, \omega) \int_{\{x: x \cdot \omega = r\}} f(x) d\sigma(x) dr d\sigma(\omega) \\ &= \oint_{\mathbb{S}^{n-1}} \int f(x) h(x \cdot \omega, \omega) dx d\sigma(\omega) = \int f(x) \oint_{\mathbb{S}^{n-1}} h(x \cdot \omega, \omega) d\sigma(\omega) dx \\ &= \int f(x) \mathcal{R}^\top h(x) dx, \end{aligned} \quad (1.4.46)$$

wobei wir den \mathbb{R}^n in eine Schar paralleler Hyperebenen mit Normalenvektor ω zerlegt haben und Fubini ausgenutzt haben.

1.4.10 Lemma. Sei $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt für die Radontransformierte $\mathcal{R}f$

- (i) $\mathcal{R}f \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1})$;
- (ii) $\mathcal{R}f(-r, -\omega) = \mathcal{R}f(r, \omega)$;

¹⁶JOHANN RADON, 1887–1956

(iii) die Fouriertransformierte von $\mathcal{R}f$ bezüglich r erfüllt

$$\widehat{\mathcal{R}f}(\rho, \omega) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \widehat{f}(\rho\omega); \quad (1.4.47)$$

(iv) für ungerades n gilt die Inversionsformel

$$2f(x) = \frac{1}{(2\pi i)^{n-1}} \oint_{\mathbb{S}^{n-1}} \partial_r^{n-1} \mathcal{R}f(r, \omega)|_{r=x \cdot \omega} d\sigma(\omega). \quad (1.4.48)$$

Beweis. (i) folgt direkt durch Differenzieren. • (ii) da jede der Ebenen sowohl als $\{x \cdot \omega = r\}$ als auch als $\{-x \cdot \omega = -r\}$ parametrisiert werden kann. • (iii) ist nachzurechnen, wie oben gilt

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{R}f}(\rho, \omega) &= (2\pi)^{-1/2} \int e^{-ir\rho} \mathcal{R}f(r, \omega) dr \\ &= (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ir\rho} \int_{\{x: x \cdot \omega = r\}} f(x) d\sigma(x) dr \\ &= (2\pi)^{-1/2} \int e^{-ix \cdot (\rho\omega)} f(x) dx = (2\pi)^{(n-1)/2} \widehat{f}(\rho\omega). \end{aligned} \quad (1.4.49)$$

(iv) folgt mit der Fourierschen Inversionsformel zusammen mit der aus (ii) folgenden Symmetrie

$$\widehat{\mathcal{R}f}(-\rho, -\omega) = \widehat{\mathcal{R}f}(\rho, \omega). \quad (1.4.50)$$

Es gilt mit Einführen von Polarkoordinaten im Fourierbild

$$\begin{aligned} f(x) &= (2\pi)^{-n/2} \int e^{ix \cdot \xi} \widehat{f}(\xi) d\xi = (2\pi)^{-n/2} \int_0^{\infty} \oint_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{ix \cdot (\rho\omega)} \widehat{f}(\rho\omega) d\sigma(\omega) \rho^{n-1} d\rho \\ &= (2\pi)^{-n+1/2} \int_0^{\infty} \oint_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{ix \cdot (\rho\omega)} \widehat{\mathcal{R}f}(\rho, \omega) d\sigma(\omega) \rho^{n-1} d\rho \\ &= \frac{(2\pi)^{-n+1/2}}{2} \left(\oint_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^{\infty} e^{ix \cdot (\rho\omega)} \widehat{\mathcal{R}f}(\rho, \omega) \rho^{n-1} d\rho d\sigma(\omega) \right. \\ &\quad \left. + \oint_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^{\infty} e^{ix \cdot (\rho\omega)} \widehat{\mathcal{R}f}(-\rho, -\omega) \rho^{n-1} d\rho d\sigma(\omega) \right) \\ &= \frac{(2\pi)^{-n+1/2}}{2} \oint_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix \cdot (\rho\omega)} \widehat{\mathcal{R}f}(\rho, \omega) \rho^{n-1} d\rho d\sigma(\omega) \\ &= \frac{(2\pi)^{1-n}}{2} \oint_{\mathbb{S}^{n-1}} (-i\partial_r)^{n-1} \mathcal{R}f(r, \omega)|_{r=x \cdot \omega} d\sigma(\omega), \end{aligned} \quad (1.4.51)$$

wobei wir obige Symmetrie, die Tatsache, dass n ungerade ist, sowie die Substitution $\omega \mapsto -\omega$ genutzt haben. \square

Die gerade gezeigte Inversionsformel gilt auch allgemeiner, wir haben die Glattheit von f nicht explizit genutzt. Stetigkeit und hinreichend schnelles Fallen sind ausreichend.

1.4.11. Als Konsequenz ergibt sich eine Lösungsformel der Wellengleichung, wir erhalten aus der Bedingung $u_0 = \mathcal{R}^\top h_g$ die Darstellung

$$h_g = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi i)^{n-1}} \partial_r^{n-1} \mathcal{R}u_0 \quad (1.4.52)$$

und entsprechend aus $u_1 = -\mathcal{R}^\top \partial_r h_u$

$$h_u = -\frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi i)^{n-1}} \partial_r^{n-2} \mathcal{R} u_1 \quad (1.4.53)$$

für die geraden und ungeraden Anteile und damit $h = h_g + h_u$, sowie die Lösung

$$u(t, x) = \oint_{\mathbb{S}^{n-1}} h(x \cdot \omega - t, \omega) d\sigma(\omega) \quad (1.4.54)$$

zum Anfangswertproblem (1.4.41).

1.4.12 Korollar (Huygens¹⁷-Prinzip). *Sei $n \geq 3$ ungerade und löse u das Anfangswertproblem (1.4.41) zu Anfangsdaten mit $\text{supp } u_j \subset B_R(0)$ für $j = 0, 1$. Dann gilt*

$$u(t, x) = 0 \quad \text{für } t > R \text{ und } |x| < t - R. \quad (1.4.55)$$

Beweis. Nach Voraussetzung gilt $\mathcal{R} u_j(r, \omega) = 0$ für alle $r > R$ und $j = 0, 1$. Also folgt $h(r, \omega) = 0$ für $r > R$ und damit wegen (1.4.54) die Behauptung. \square

In geraden Raumdimensionen ist diese Aussage falsch.

Kommentare

Das Material in diesem Kapitel entstammt im wesentlichen dem Buch von Evans, [Ev]. Ergänzende Informationen zur Potentialtheorie finden sich bei Leis, [Le], sowie im Buch von Courant und Hilbert, [CH].

Die dargestellte Theorie ist klassisch in mehrerlei Sinne. Einerseits beschäftigen wir uns hier nur mit klassisch differenzierbaren Lösungen (C^k -Lösungstheorie) der genannten Gleichungen und hinterfragen damit nicht den zugrundeliegenden Lösungsbegriff. Dies wird im Verlaufe der folgenden Kapitel schrittweise anders werden. Andererseits sind die meisten der angegebenen Resultate im achtzehnten und neunzehnten Jahrhundert erzielt und damit echte Klassiker. Eine Ausnahme bildet die Diskussion der Radontransformation im Abschnitt zu Wellengleichungen, diese entstammt der ersten Hälfte des zwanzigsten Jahrhunderts.

Die angegebenen klassischen Resultate werden im folgenden hauptsächlich als Beispiele dienen. Wir werden in Kapitel 2 allgemeiner der Frage nachgehen, wann Anfangswertprobleme für Differentialoperatoren sinnvoll sind und welche Korrektheitskonzepte hinter Anfangswertproblemen stehen. In Kapitel 3 diskutieren wir Randwertprobleme für allgemeinere elliptische Operatoren und werden zeigen, wie die Verallgemeinerung des Lösungsbegriffs zu einer einfacheren Lösungstheorie führen kann.

¹⁷CHRISTIAAN HUYGENS, 1629–1695

2 Anfangswertprobleme

Anfangswertprobleme sind uns schon für die Wellengleichung begegnet, wir wollen diese systematischer studieren. Dazu folgen wir dem Buch von Mizohata, [Mi], Kapitel 4.

2.1 Problemstellung

2.1.1. Im Folgenden wollen wir uns mit Cauchyproblemen¹ beschäftigen. Bei einem *Cauchyproblem* handelt es sich um Aufgabenstellungen für allgemeine Differentialoperatoren

$$P(x, \partial) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial^\alpha \quad (2.1.1)$$

in der Form

$$\begin{cases} P(x, \partial)u = f & \text{in } \Omega, \\ \partial_{\bar{\nu}}^j u = u_j, & \text{auf } \Sigma \text{ und für } j = 0, 1, \dots, m-1 \end{cases} \quad (2.1.2)$$

auf einer offenen Menge Ω und für *Cauchydaten* f in Ω und u_j auf einer (hinreichend glatten) Hyperfläche

$$\Sigma = \{x : \varphi(x) = 0\} \cap \Omega \quad (2.1.3)$$

bestimmt durch die gegebene Funktion $\varphi \in C^1$ mit $\nabla\varphi \neq 0$ auf Σ . Die Menge Ω darf von der Lösung abhängen; was man sich vorgibt, ist die Hyperfläche Σ , die rechte Seite f auf einer größeren Menge sowie die Cauchydaten u_j auf Σ .

2.1.2. Wir beginnen damit, das Cauchyproblem auf eine Normalform zu transformieren. Da $\nabla\varphi \neq 0$ auf Σ gilt, kann man die Umgebungen klein genug wählen, so dass eine der partiellen Ableitungen nirgends verschwindet. Ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit sei dies $\partial_1\varphi$. Dann liefert die Koordinatentransformation $x'_1 = \varphi(x_1, \dots, x_n)$, $x'_2 = x_2, \dots, x'_n = x_n$

$$\partial_1 = (\partial_1\varphi)\partial'_1, \quad \partial_j = \partial'_j + (\partial_j\varphi)\partial'_1 \quad (2.1.4)$$

und damit entspricht $P(x, \partial)u = f$ in diesen Koordinaten

$$p(x, \nabla\varphi(x))(\partial'_1)^m u(x') + \sum_{|\alpha| \leq m, \alpha_1 < m} \tilde{a}_\alpha(x') (\partial')^\alpha u(x') = f(x') \quad (2.1.5)$$

mit

$$p(x, \nabla\varphi(x)) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) \prod_{j=1}^n (\partial_j\varphi(x))^{\alpha_j} \quad (2.1.6)$$

und (berechenbaren) Koeffizienten \tilde{a}_α . Man unterscheidet zwei Fälle. Ist $p(x, \nabla\varphi(x)) \neq 0$ auf Σ , so heißt das Problem *nichtcharakteristisch*. Gibt es Punkte $x \in \Sigma$ mit $p(x, \nabla\varphi(x)) = 0$, so

¹AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY, 1789–1857

heißt das Problem entsprechend *charakteristisch*. Wir werden uns im Folgenden nur mit dem nichtcharakteristischen Fall auseinandersetzen. In diesem Fall kann man durch $p(x, \nabla\varphi(x))$ dividieren und erhält ein Problem in *Normalform*.

2.1.3. Zur Notation: Im folgenden werden wir zu einem Differentialoperator $P(x, \partial)$ stets auch das Polynom

$$P(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha \quad (2.1.7)$$

betrachten. Es wird als *Symbol* des Operators bezeichnet. (Laplacesymbol; oft verwendet man $P(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) (-i\xi)^\alpha$ als Symbol, Fouriersymbol)

Das in obiger Rechnung auftretende homogene Polynom

$$p(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) \xi^\alpha \quad (2.1.8)$$

heißt *Hauptsymbol* des Differentialoperators $P(x, \partial)$.

Eine Fläche $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ der Form $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) = 0\}$ mit $\nabla\varphi(x) \neq 0$ auf Σ und

$$p(x, \nabla\varphi(x)) = 0 \quad \text{für } x \in \Sigma \quad (2.1.9)$$

heißt *charakteristisch* für den Differentialoperator $P(x, \partial)$. Weiterhin bezeichnet man eine Richtung $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $p(x, \xi) = 0$ als *charakteristische Richtung* des Operators $P(x, \partial)$ im Punkt x . Die charakteristischen Richtungen im Punkt x bilden den *charakteristischen Kegel* des Operators $P(x, \partial)$ in x . Eine Fläche ist nichtcharakteristisch genau dann, wenn ihre (Ko-) Normale nicht charakteristisch ist.

Sei weiter

$$P^\top(x, \partial)u(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha (a_\alpha(x)u(x)), \quad (2.1.10)$$

so dass

$$\int (v(x)P(x, \partial)u(x) - u(x)P^\top(x, \partial)v(x)) dx = 0 \quad (2.1.11)$$

für alle $v \in C_c^\infty$ gilt. $P^\top(x, \partial)$ wird als zu $P(x, \partial)$ *transponierter Differentialoperator* bezeichnet.

2.1.4 Beispiel. Δ hat das Symbol / Hauptsymbol $\xi^2 = \sum_j \xi_j^2$ und keine charakteristischen Richtungen. Für $\partial_t - \Delta$ mit Symbol $\tau - \xi^2$ ist die t -Richtung charakteristisch. Für $\partial_t^2 - \Delta$ mit Symbol $\tau^2 - \xi^2$ sind es die Richtungen $(\tau, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ mit $\tau^2 = \xi^2$

2.2 Die Sätze von Cauchy–Kowalewskaja und Holmgren

2.2.1. Gegeben sei ein Cauchyproblem in Normalform mit reell analytischen Koeffizienten a_α . Wir verwenden für die erste Variable die Bezeichnung t und die Hyperfläche Σ ist durch $\{t = 0\}$ bestimmt. Das Cauchyproblem hat damit die folgende Form

$$\begin{cases} P(t, x, \partial_t, \partial)u = \partial_t^m u - \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{|\alpha| \leq m-k} a_{k,\alpha}(t, x) \partial_t^k \partial^\alpha u = f & \text{auf } \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ \partial_t^j u(0, x) = u_j(x), \quad j = 0, 1, \dots, m-1, & \text{auf } \Omega \cap \{t = 0\} \end{cases} \quad (2.2.1)$$

mit auf einer Umgebung V von Ω reell analytischen Koeffizienten $a_{k,\alpha}$ und dort ebenso analytischen Funktion f . Wir nehmen weiter an, dass u_j in $\Sigma = V \cap \{t = 0\} \subset \mathbb{R}^n$ reell analytisch sind.

Bis auf eine analytische Koordinatentransformation sind alle nichtcharakteristischen Cauchyprobleme mit analytischen Koeffizienten, analytischem Σ und analytischen Cauchydaten von dieser Form.

2.2.2 Satz (Cauchy–Kowalewskaja²). *Gegeben sei ein nichtcharakteristisches Cauchyproblem $Pu = f$ mit in V analytischen Koeffizienten und analytischen Cauchydaten auf einer analytischen Hyperfläche $\Sigma \subset V$. Sei $x_0 \in \Sigma$. Dann existiert eine Umgebung Ω von x_0 in V , so dass das Cauchyproblem eine in Ω reell analytische Lösung besitzt.*

Beweis. Schritt 1. Es genügt, Cauchyprobleme in Normalform (2.2.1) zu betrachten. Ist u eine Lösung zu (2.2.1) und bezeichne

$$v(t, x) = u(t, x) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{j!} u_j(x) t^j, \quad (2.2.2)$$

so erfüllt v die Gleichung $P(t, x, \partial_t, \partial) v = \tilde{f}$ mit einer neuen (analytischen) rechten Seite \tilde{f} und homogenen Anfangsbedingungen $\partial_t^j v(0, x) = 0$ für $j = 0, \dots, m-1$. Wir können also ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit annehmen, dass $u_j = 0$ für $j = 0, \dots, m-1$ gilt. Weiterhin sei $x_0 = 0$. • *Schritt 2. Formale Lösung.* Wir suchen eine Lösung von (2.2.1) zu homogenen Anfangsdaten in Form einer Potenzreihe

$$u(t, x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} c_j(x) t^j \quad (2.2.3)$$

mit reell analytischen Funktionen c_k als Koeffizienten. Nach Voraussetzung gilt $c_j(x) = 0$ für $j = 0, 1, \dots, m-1$. Weiter gilt für die rechte Seite und die Koeffizienten

$$f(t, x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} d_j(x) t^j, \quad a_{k,\alpha}(t, x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} b_{k,\alpha,j}(x) t^j, \quad (2.2.4)$$

so dass (2.2.1)

$$\begin{aligned} \sum_{j=m}^{\infty} \frac{1}{(j-m)!} c_j(x) t^{j-m} &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} d_j(x) t^j \\ &+ \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{|\alpha| \leq m-k} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} b_{k,\alpha,i}(x) t^i \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{(j-k)!} \partial^\alpha c_j(x) t^{j-k} \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

impliziert. Koeffizientenvergleich liefert für $j = 0, 1, \dots$

$$c_{m+j}(x) = d_j(x) + \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{k+j} \sum_{|\alpha| \leq m-k} \binom{j}{i} b_{k,\alpha,i}(x) \partial^\alpha c_{k+j-i}(x) \quad (2.2.6)$$

²SONJA KOWALEWSKAJA (Софья Васильевна Ковалевская), 1850–1891

und damit eine Rekursion zur Bestimmung aller Koeffizienten. • *Schritt 3. Konvergenz.* Wir sagen eine Potenzreihe wird durch eine zweite Potenzreihe majorisiert, wenn die Koeffizienten der zweiten größer als die Beträge der Koeffizienten der ersten Potenzreihe sind,

$$\sum_{\beta} A_{\beta} z^{\beta} \gg \sum_{\beta} a_{\beta} z^{\beta} \quad \text{falls} \quad \forall_{\beta}: A_{\beta} \geq |a_{\beta}|. \quad (2.2.7)$$

Offensichtlich majorisieren Ableitungen der Majorante auch die gliedweisen Ableitungen der Reihe und jede Potenzreihe mit einer konvergenten Majorante konvergiert.

Weiter sagen wir, dass ein Cauchyproblem durch ein zweites majorisiert wird, wenn sowohl die Koeffizienten als auch die rechte Seite majorisiert werden. Wegen der Rekursion (2.2.6) ist die Lösung des majorisierenden Problems eine Majorante des Ausgangsproblems. Zum Konvergenzbeweis obigen Verfahrens zeigen wir die Existenz eines lösbaren majorisierenden Cauchyproblems.

Wir skalieren t und x so, dass die Koeffizienten $a_{k,\alpha}$ und die rechte Seite in $|x_j| \leq 1$ und $|t| \leq 1$ reell analytisch sind. Da die Taylorkoeffizienten dann Nullfolgen sein müssen, existiert insbesondere eine Zahl M , so dass alle Koeffizienten betragsmäßig kleiner als M sind. Also majorisiert

$$\frac{M}{1 - (x_1 + x_2 + \dots + x_n + \rho t)} \gg a_{k,\alpha}(t, x) \quad (2.2.8)$$

für $\rho > 1$ alle $a_{k,\alpha}(t, x)$ sowie

$$\frac{d}{1 - (x_1 + x_2 + \dots + x_n + \rho t)} \gg f(t, x) \quad (2.2.9)$$

die rechte Seite $f(t, x)$ (mit geeigneter Wahl der Konstanten d). Sei weiter

$$b(\tau, \xi) = M \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{|\alpha|=m-k} \tau^k \xi^{\alpha}, \quad \text{und} \quad c(\tau, \xi) = M \sum_{k+|\alpha|<m} \tau^k \xi^{\alpha}. \quad (2.2.10)$$

Dann majorisiert

$$\partial_t^m w = \frac{1}{1 - (x_1 + \dots + x_n + \rho t)} \left(b(\partial_t, \partial_1, \dots, \partial_n) w + c(\partial_t, \partial_1, \dots, \partial_n) w + d \right) \quad (2.2.11)$$

unser Ausgangsproblem. Wir suchen eine spezielle (majorisierende) Lösung, die nur von der Variablen $s = x_1 + \dots + x_n + \rho t$ abhängt. Mit der Notation $\beta(\rho) = b(\rho, 1, \dots, 1)$ (was ein Polynom vom Grad kleiner oder gleich $m - 1$ ist) ist dies eine gewöhnliche Differentialgleichung

$$\rho^m \tilde{w}^{(m)}(s) = \frac{1}{1-s} \left(\beta(\rho) \tilde{w}^{(m)}(s) + c(\rho \partial_s, \partial_s, \dots, \partial_s) \tilde{w}(s) + d \right), \quad (2.2.12)$$

beziehungsweise nach leichtem Umformen

$$\tilde{w}^{(m)}(s) = \frac{1}{\rho^m (1 - \beta(\rho) \rho^{-m} - s)} \left(c(\rho \partial_s, \partial_s, \dots, \partial_s) \tilde{w}(s) + d \right). \quad (2.2.13)$$

Wir wählen ρ so groß, dass $\beta(\rho) \rho^{-m} < 1$. Dann besitzt diese Gleichung zusammen mit den Anfangsdaten $\tilde{w}(0) = \tilde{w}'(0) = \dots = \tilde{w}^{(m-1)}(0) = 0$ eine eindeutig bestimmte analytische Lösung $\tilde{w}(s)$ für $|s| < 1 - \beta(\rho) \rho^{-m}$. Nach Konstruktion besitzt diese positive Taylorkoeffizienten und $w(t, x) = \tilde{w}(x_1 + \dots + x_n + \rho t)$ majorisiert die Lösung unseres Cauchyproblems. Also konvergiert die formal konstruierte Potenzreihe aus Schritt 2 und der Satz ist bewiesen. \square

2.2.3 Bemerkung. (i) Das gezeigte Konvergenzgebiet $|x_1| + \dots + |x_n| + \rho|t| < 1 - \beta(\rho)\rho^{-m}$ hängt vom Konvergenzgebiet der Koeffizienten, der rechten Seite und von der Konstanten M , aber nicht von der Konstanten d , ab. Dies wird später beim Beweis des Satzes von Holmgren benötigt.

(ii) Der gerade gezeigte Satz kann auf nichtcharakteristische quasilineare Cauchyprobleme der Form

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x, u, \dots, \nabla^{m-1}u) \partial^\alpha u + b(x, u, \dots, \nabla^{m-1}u) = f \quad (2.2.14)$$

mit analytischen Funktionen a_α und b verallgemeinert werden. Für Details wird auf die Übungen verwiesen.

2.2.4 Beispiel (Hadamard³). Die Voraussetzung der Analytizität ist im allgemeinen notwendig um die Lösbarkeit von Cauchyproblemen zu garantieren. Wir betrachten dazu den Laplaceoperator Δ und das Cauchyproblem

$$\begin{cases} \Delta u = \sum_{j=1}^n \partial_j^2 u = 0, & \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ u(0, \cdot) = u_0, & \text{auf } \Sigma = \Omega \cap \{x_1 = 0\}, \\ \partial_1 u(0, \cdot) = 0, & \text{auf } \Sigma = \Omega \cap \{x_1 = 0\}. \end{cases} \quad (2.2.15)$$

Angenommen, es ist lösbar und $0 \in \Omega$. Dann ist die Lösung u in einer Umgebung des Ursprungs harmonisch, insbesondere also reell analytisch, und u_0 als Einschränkung ebenso analytisch. Für nichtanalytisches u_0 ist das Problem damit unlösbar.

Würde man statt Lösbarkeit in einer Umgebung nur die Existenz einer Lösung auf einer Seite von Σ fordern, so wäre das Spiegelungsprinzip anwendbar und ebenso die Analytizität von u_0 folgen.

Aus dem Satz von Cauchy–Kowalewskaja kann eine Eindeutigkeitsaussage für klassische (nichtanalytische!) Lösungen gefolgert werden. Wir formulieren die Aussage wiederum für ein nichtcharakteristisches Cauchyproblem in Normalform um den Ursprung und definieren die speziellen Gebiete

$$\Omega_\varepsilon = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t| + |x|^2 \leq \varepsilon\}. \quad (2.2.16)$$

2.2.5 Satz (Holmgren⁴). *Sei P ein Differentialoperator m -ter Ordnung mit analytischen Koeffizienten, für den $\{t = 0\}$ nichtcharakteristisch ist. Dann existiert ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass für jedes $\varepsilon < \varepsilon_0$ und jedes $u \in C^m(\Omega_\varepsilon)$ mit*

$$\begin{cases} P(t, x, \partial_t, \partial)u = 0, & \text{in } \Omega_\varepsilon \\ \partial_t^j u = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m-1, & \text{in } \Omega_\varepsilon \cap \{t = 0\} \end{cases} \quad (2.2.17)$$

stets $u = 0$ gilt.

Beweis. Schritt 1. Wir können annehmen, dass das Cauchyproblem in Normalform ist. Sei $u \in C^m(\Omega_\varepsilon)$ eine Lösung. Wir betrachten u nur auf $\Omega_\varepsilon \cap \{t \geq 0\}$ und wenden die Holmgrentransformation

$$t' = t + x_1^2 + \dots + x_n^2, \quad x'_j = x_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.2.18)$$

³JACQUES SALOMON HADAMARD, 1865–1963

⁴ERIK ALBERT HOLMGREN, 1873–1943

an. Diese bildet den Halbraum $\{t \geq 0\}$ auf $\{t' \geq |x'|^2\}$ ab.

Nach Voraussetzung verschwindet u auf $\{t = 0\}$ zur Ordnung $m - 1$, aus $P(t, x, \partial_t, \partial)u = 0$ folgt damit, dass auch die m -ten Ableitungen von u verschwinden. Also gilt in transformierten Koordinaten $u(t', x') = 0$ auf $\{t' = |x'|^2\}$ zusammen mit Ableitungen bis zur Ordnung m . Wir können u also auf $t' < |x'|^2$ trivial durch Null fortsetzen und erhalten eine C^m -Funktion. Der Operator P wird ebenso transformiert und es gilt nach Transformation $P'(t', x', \partial'_t, \partial')u = 0$. • **Schritt 2.** Wir schreiben wieder t und x für die Variablen und betrachten Gebiete der Form $V_h = \{(t, x) : x^2 < t < h\}$ für hinreichend kleines h . Sei weiter $P^\top(t, x, \partial_t, \partial)$ der zu $P(t, x, \partial_t, \partial)$ transponierte Operator und v eine Lösung des Cauchyproblems

$$\begin{cases} P^\top(t, x, \partial_t, \partial)v = 0 \\ v(h, x) = \partial_t v(h, x) = \dots = \partial_t^{m-2} v(h, x) = 0 \\ \partial_t^{m-1} v(h, x) = p(x) \end{cases} \quad (2.2.19)$$

für ein gegebenes Polynom $p(x)$. Nach dem Satz von Cauchy-Kowalewskaja existiert für jedes p eine solche Lösung, vorausgesetzt h ist klein genug. Weiter gilt mit partieller Integration

$$0 = \int_{V_h} (u(t, x)P^\top v(t, x) - v(t, x)Pu(t, x)) dt dx = (-1)^m \int u(h, x)\partial_t^{m-1}v(h, x) dx. \quad (2.2.20)$$

Da $\partial_t^{m-1}v(h, x)$ ein beliebig vorgegebenes Polynom war (und Polynome dicht in den stetigen Funktionen mit kompaktem Träger liegen), folgt $u(h, x) = 0$. Da weiter h klein und beliebig war, folgt die Behauptung $u = 0$ in V_h und damit in Originalkoordinaten in $\Omega_\varepsilon \cap \{t \geq 0\}$. • **Schritt 3.** Man ersetze t durch $-t$ um auch $u = 0$ auf $\Omega_\varepsilon \cap \{t \leq 0\}$ zu zeigen. \square

2.2.6 Beispiel (Tychonow⁵). Für charakteristische Probleme ist die Aussage falsch. Ein Beispiel ist die von Tychonow konstruierte nichttriviale klassische Lösung $u(t, x)$ der Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u = \Delta u$ mit $u(t, x) = 0$ für alle $t \leq 0$. Dazu sei $g(t) = \exp(-t^\alpha)$ für ein $\alpha > 1$ und $t > 0$ sowie $g(t) = 0$ für $t \leq 0$. Dann ist $u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} g^{(k)}(t) \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ eine C^∞ -Funktion und löst die Wärmeleitungsgleichung.

2.2.7 Beispiel. Für die Wellengleichung mit kompakt getragenen Cauchydaten ist die Lösung auf Kegeln über den Trägern der Daten getragen, das haben wir schon vorher bei der Diskussion der Wellengleichung gesehen. Die Kegelmäntel sind charakteristisch; die Aussage also nicht im Widerspruch zum Satz von Holmgren.

2.2.8 Beispiel (Pliš⁶). Von Pliš⁶ wurde ein Beispiel eines Differentialoperators mit C^∞ -Koeffizienten konstruiert, für den ein nicht eindeutig lösbares nichtcharakteristisches Cauchyproblem existiert. Die Voraussetzung der Analytizität der Koeffizienten ist also im Allgemeinen notwendig.

⁵ ANDREI NIKOLAJEWITSCH TICHONOW (Андрей Николаевич Тихонов), 1906–1993

⁶ ANDRZEJ PLIŚ, 1929–1991

A. Pliš, *The problem of uniqueness for the solution of a system of partial differential equations*. Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III. 2 (1954), 55–57.

2.3 Korrektheit

2.3.1 Beispiel (Hadamard). Wir betrachten zuerst ein Beispiel: das Cauchyproblem

$$\begin{cases} \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0 & (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}, \\ \partial_y u(x, 0) = 2ne^{-n} \sin(2nx), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (2.3.1)$$

dessen Lösung durch die Funktion

$$u(x, y) = e^{-n} \sin(2nx) \sinh(2ny) \quad (2.3.2)$$

gegeben ist. Obwohl die Cauchydaten sowie alle ihre Ableitungen für $n \rightarrow \infty$ gleichmäßig gegen Null streben, sind die Lösungen für $y \neq 0$ unbeschränkt in n . Lösungen hängen also in diesem Fall nicht stetig von den Cauchydaten ab. Das obige Beispiel geht auf Hadamard zurück, welcher den Begriff eines korrekt gestellten Anfangswertproblems einführte.

2.3.2. Dazu eine Vorbemerkung. Wir versehen die Räume $C^m(V)$ und $C^\infty(V)$ mit ihrer natürlichen Topologie bestimmt durch die Familie von Seminormen

$$\sup_{x \in K} |\partial^\alpha v(x)|, \quad (2.3.3)$$

parametrisiert durch eine (abzählbare und V ausschöpfende) Familie von kompakten Mengen $K \Subset V$ und durch Multiindices α . Die Abzählbarkeit der Menge der Seminormen impliziert Metrisierbarkeit der Topologie. Da $C^m(V)$ und $C^\infty(V)$ damit zu vollständigen metrischen Räumen werden, gilt insbesondere der Satz von Baire: Wenn der gesamte Raum als eine abzählbare Vereinigung abgeschlossener Teilmengen darstellbar ist, so enthält mindestens eine der Mengen einen inneren Punkt. Der Satz wird im Folgenden von Bedeutung sein.

2.3.3 Definition. Bestimme $P(x, \partial)$ und Σ ein nichtcharakteristisches Cauchyproblem.

- (i) Das Cauchyproblem heißt in $x_0 \in \Sigma$ *lokal lösbar* in C^m (in C^∞), falls es zu einer Umgebung V von x_0 und beliebigen Cauchydaten $f \in C^\infty(V)$ und $u_j \in C^\infty(V \cap \Sigma)$ eine Umgebung $\Omega \subset V$ von x_0 und eine Lösung $u \in C^m(\Omega)$ (eine Lösung $u \in C^\infty(\Omega)$) zu

$$\begin{cases} P(x, \partial)u = f, & x \in \Omega, \\ \partial_\nu^j u = u_j, & x \in \Sigma \cap \Omega \end{cases} \quad (2.3.4)$$

gibt.

- (ii) Ein lokal lösbares Cauchyproblem heißt *korrekt gestellt* in C^m (in C^∞), falls die Lösung eindeutig bestimmt ist, Ω von den Daten f und u_j unabhängig gewählt werden kann und die Abbildung

$$\begin{array}{c} C^\infty(V) \\ \times \\ (C^\infty(V \cap \Sigma))^m \end{array} \ni \begin{pmatrix} f \\ u_0 \\ \vdots \\ u_{m-1} \end{pmatrix} \mapsto u \in C^m(\Omega) \quad (\in C^\infty(\Omega)) \quad (2.3.5)$$

stetig ist.

Sind die Koeffizienten des Operators P analytisch, so impliziert der Satz von Holmgren die Eindeutigkeit der Lösung. Es gilt sogar viel mehr:

2.3.4 Satz (Lax⁷). *Sei $P(x, \partial)$ ein Differentialoperator mit analytischen Koeffizienten und bestimme $P(x, \partial)$ und Σ ein nichtcharakteristisches Cauchyproblem. Dann impliziert die lokale Lösbarkeit in C^∞ die Korrektheit in C^∞ .*

Beweis. Wir betrachten ein Cauchyproblem in Normalform und können ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x_0 = 0$ setzen.

Schritt 1. Wir zeigen die Unabhängigkeit des Gebiets Ω von den Cauchydaten. Wir betrachten wieder die speziellen Gebiete $\Omega_\varepsilon = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |x|^2 + |t| < \varepsilon\}$. Nach dem Satz von Holmgren existiert ein ε_0 , so dass für jedes positive $\varepsilon < \varepsilon_0$ höchstens eine Lösung des Cauchyproblems

$$\begin{cases} P(t, x, \partial_t, \partial)u = f, & (t, x) \in \Omega_\varepsilon, \\ \partial_t^j u = u_j, & x \in \Omega_\varepsilon \cap \{t = 0\} \end{cases} \quad (2.3.6)$$

existiert. Sei nun $\varepsilon_0 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots \rightarrow 0$ eine monoton fallende Nullfolge und bezeichne

$$A_{k,p} \subset C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \times C^\infty(\mathbb{R}^n) \quad (2.3.7)$$

die Menge aller Daten (f, u_0, \dots, u_{m-1}) , für die eine Lösung $u \in C^\infty(\Omega_{\varepsilon_k})$ zu (2.3.6) mit

$$\sum_{\alpha_0 + |\alpha| \leq m + \frac{n}{2} + 1} \int_{\Omega_{\varepsilon_k}} |\partial_t^{\alpha_0} \partial^\alpha u(t, x)|^2 dx dt \leq p \quad (2.3.8)$$

existiert. Nach Voraussetzung ist das Cauchyproblem lokal lösbar; da die Ω_{ε_k} eine Umgebungsbasis des Ursprungs bilden und p beliebig ist, gilt also

$$\bigcup_{k,p} A_{k,p} = C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \times C^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (2.3.9)$$

Weiterhin sind die Mengen $A_{k,p}$ symmetrisch, mit (f, u_0, u_1, \dots) ist auch $(-f, -u_0, -u_1, \dots)$ in $A_{k,p}$, konvex und wie wir gleich zeigen werden, ist jedes der $A_{k,p}$ abgeschlossen. Nach dem Satz von Baire enthält also mindestens eine der Mengen A_{k_0, p_0} einen inneren Punkt und wegen Symmetrie und Konvexität ist damit 0 ein solcher. Also existiert zu jedem Cauchydatum (f, u_0, u_1, \dots) eine Zahl $\lambda > 0$, so dass $(\lambda f, \lambda u_0, \lambda u_1, \dots) \in A_{k_0, p_0}$. In $\Omega_{\varepsilon_{k_0}}$ existiert damit zu jedem Cauchydatum eine Lösung.

Es bleibt die Abgeschlossenheit. Dies skizzieren wir kurz. Wir wählen eine in C^∞ konvergente Folge $\Psi_\ell = (f_{(\ell)}, u_{0,(\ell)}, \dots, u_{m-1,(\ell)})$ von Cauchydaten aus $A_{k,p}$, $\Psi_\ell \rightarrow \Psi$, und betrachten die zugehörige Folge von Lösungen $u_{(\ell)}(t, x)$. Diese ist nach Voraussetzung im Hilbertraum

$$H^{m + \frac{n}{2} + 1}(\Omega_{\varepsilon_k}) = \{v \in L^2(\Omega_{\varepsilon_k}) : \forall_{\alpha_0 + |\alpha| \leq m + \frac{n}{2} + 1} \partial_t^{\alpha_0} \partial^\alpha v \in L^2(\Omega_{\varepsilon_k})\} \quad (2.3.10)$$

beschränkt, besitzt also eine schwach konvergente Teilfolge. Bezeichnen wir diese wieder mit $u_{(\ell)}$ und stellen fest, dass ihr schwacher Grenzwert u_* ebenso (2.3.8) erfüllt. Weiter gilt für

⁷PETER DAVID LAX, 1926–

jedes $\psi \in C_c^\infty(\Omega_{\varepsilon_k})$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{\varepsilon_k}} u_*(t, x) P^\top(t, x, \partial_t, \partial) \psi(t, x) dx dt &= \lim_{\ell \rightarrow \infty} \int_{\Omega_{\varepsilon_k}} u_{(\ell)}(t, x) P^\top(t, x, \partial_t, \partial) \psi(t, x) dt dx \\ &= \lim_{\ell \rightarrow \infty} \int_{\Omega_{\varepsilon_k}} \psi(t, x) P(t, x, \partial_t, \partial) u_{(\ell)}(t, x) dt dx \quad (2.3.11) \\ &\quad \int_{\Omega_{\varepsilon_k}} \psi(t, x) f(t, x) dt dx \end{aligned}$$

und u_* erfüllt $P(t, x, \partial_t, \partial)u_* = f$ in diesem schwachen Sinne. Weiterhin gehört u_* zu $C^m(\Omega_{\varepsilon_k})$ (Sobolew-Einbettung) und u_* ist klassisch differenzierbar. Also gilt $P(t, x, \partial_t, \partial)u_* = f$ im klassischen Sinne. Weiterhin konvergiert $u_{(\ell)} \rightarrow u_*$ in $H^{m+\frac{n}{2}}(\Omega_{\varepsilon_k})$ (Satz von Rellich) und damit die Einschränkung von $\partial_t^j u_{(\ell)}$ auf $\{t=0\}$ in $C^{m-j}(\Omega_{\varepsilon_k} \cap \{t=0\})$ gegen die Einschränkung von $\partial_t^j u_*$ und damit gilt

$$\partial_t^j u_*(0, \cdot) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \partial_t^j u_{(\ell)}(t, \cdot) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} u_{j,(\ell)} = u_j. \quad (2.3.12)$$

Also löst u_* das Cauchyproblem zu den Daten Ψ und die Menge $A_{k,p}$ ist abgeschlossen. • *Schritt 2. Stetigkeit der Lösungsabbildung.* Hier nutzen wir den Satz vom abgeschlossenen Graphen. Angenommen, eine Folge von Cauchydaten konvergiert in $C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \times C^\infty(\mathbb{R}^n)$ gegen Null und die zugehörige Folge von Lösungen konvergiert gegen eine Funktion u_* in $C^\infty(\Omega)$. Dann ist u_* die nach dem Satz von Holmgren die eindeutig bestimmte Lösung zu den Nulldaten, also $u_* = 0$, und der Graph der Lösungsabbildung ist abgeschlossen. Nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen ist diese Abbildung damit stetig. \square

2.3.5 Bemerkung. (i) Die Voraussetzung, dass die Koeffizienten des Operators analytisch sind, haben wir nur dazu genutzt um den Satz von Holmgren anzuwenden und damit die Eindeutigkeit der Lösung des Cauchyproblems zu garantieren. Wenn man die Eindeutigkeit mit einem anderen Argument garantieren kann, impliziert Lösbarkeit ebenso Korrektheit. Typische andere Argumente sind Energieabschätzungen.

(ii) Die Korrektheit von Cauchyproblemen in C^∞ impliziert die Existenz von Abhängigkeitsgebieten. Wir nutzen die Bezeichnungen aus Definition 2.3.3. Wegen der Stetigkeit des Lösungsoperators ist dieser bezüglich der Seminormen beschränkt. Zu jedem $K \Subset \Omega$ existiert damit ein $L \Subset V$, so dass für die Lösung zu $P(x, \partial)u = f$ in Ω mit $\partial_{\bar{y}}^j u = u_j$ auf $\Sigma \cap \Omega$

$$\sup_{x \in K} |u(x)| \leq C \sum_{|\beta| \leq M} \left(\sup_{x \in L} |\partial^\beta f(x)| + \sum_j \sup_{x \in L \cap \Sigma} |\partial^\beta u_j(x)| \right) \quad (2.3.13)$$

mit geeigneten, von den Cauchydaten unabhängigen, Konstanten C und M gilt. Insbesondere gilt damit

$$L \cap \text{supp } f = \emptyset, \quad \forall_j \quad (L \cap \Sigma) \cap \text{supp } u_j = \emptyset \quad \Rightarrow \quad K \cap \text{supp } u = \emptyset. \quad (2.3.14)$$

Hier kann K beliebig gewählt werden. Für die Wellengleichung ist uns dies schon im Zusammenhang mit der Abhängigkeitsgebietenungleichung begegnet.

Ein Differentialoperator $P(x, \partial)$ wird als *elliptisch* bezeichnet, falls sein Hauptsymbol $p(x, \xi) \neq 0$ für alle $\xi \neq 0$ erfüllt.

2.3.6 Korollar. Sei $P(x, \partial)$ ein elliptischer Differentialoperator mit analytischen Koeffizienten. Dann ist das zugehörige Cauchyproblem für keine Hyperfläche Σ lokal in C^∞ lösbar und damit auch für kein Σ in C^∞ korrekt gestellt.

Beweis. Gegenannahme, wir nehmen an, das Problem wäre in C^∞ korrekt gestellt. Wir wählen ein $K \Subset \Omega$ mit nichtleerem Inneren, $f = 0$ und Cauchydaten u_j kompakt getragen auf Σ außerhalb L . Sei weiter $u_0 \neq 0$ nicht die Nullfunktion. Dann verschwindet die zugehörige Lösung in K identisch. Wählt man nun eine Kurve, welche einen Punkt im Inneren von K mit einem Punkt aus dem Träger von u_0 verbindet, so ist diese kompakt. Wir betrachten eine relativ kompakte Umgebung der Kurve und eine Familie von nichtcharakteristischen Flächen, die diese Umgebung ausschöpft (und die selbst ihren Rand in K besitzen) und wenden den Satz von Holmgren an. Dieser zeigt, dass aus $u = 0$ auf einer Seite der Flächen $u = 0$ in einer Umgebung folgt und wir erhalten nach Konstruktion $u = 0$ im Träger von u_0 . Widerspruch. \square

2.3.7 Satz (Lax, Mizohata⁸). Sei $P(x, \partial)$ ein Differentialoperator mit C^∞ -Koeffizienten auf V und sei Σ glatt und nichtcharakteristisch für P . Angenommen, das durch $P(x, \partial)$ und Σ bestimmte Cauchyproblem ist C^∞ -korrekt. Dann gilt

$$\{\tau \in \mathbb{C} : p(x, \xi + \tau \vec{v}_x) = 0\} \subset \mathbb{R} \quad (2.3.15)$$

für alle x aus Σ , dem Normalenvektor \vec{v}_x in x an Σ und alle $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Der Beweis dieses Satzes ist recht schwierig. Wir beweisen nur eine vereinfachte Version des Satzes für Cauchyprobleme in Normalform und mit konstanten Koeffizienten.

2.3.8 Satz (Hadamard, Petrowski⁹). Angenommen, das nichtcharakteristische Cauchyproblem

$$\begin{cases} P(\partial_t, \partial)u = 0, \\ \partial_t^j u(0, x) = u_j(x), \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \end{cases} \quad (2.3.16)$$

für einen Differentialoperator

$$P(\partial_t, \partial) = \partial_t^m + \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{|\alpha| \leq m-k} a_{k,\alpha} \partial_t^k \partial^\alpha \quad (2.3.17)$$

mit konstanten Koeffizienten $a_{k,\alpha} \in \mathbb{C}$ ist in C^∞ korrekt gestellt. Dann sind die Nullstellen $\tau(\xi)$ des Polynoms

$$p(\tau, \xi) = \tau^m + \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{|\alpha| \leq m-k} a_{k,\alpha} \tau^k \xi^\alpha = 0 \quad (2.3.18)$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ reell.

Beweis. Wir zeigen, dass $\text{Im } \tau_1(\xi_*) = -c < 0$ für ein $\xi_* \in \mathbb{R}^n$ im Widerspruch zur stetigen Abhängigkeit der Lösung von den Cauchydaten steht. *Schritt 1. Konstruktion einer Lösungsfolge.* Ist $\tau_*(\xi)$ eine Nullstelle des vollen Symbols

$$P(\tau, i\xi) = p(\tau, i\xi) + \sum_{k+|\alpha| \leq m-1} a_{k,\alpha} \tau^k (i\xi)^\alpha = 0 \quad (2.3.19)$$

⁸SIGERU MIZOHATA, 1924–

⁹IWAN GEORGIJEWITSCH PETROWSKI (Иван Георгиевич Петровский), 1901–1973

so erfüllt Funktion

$$u_\xi(t, x) = e^{\tau_*(\xi)t} e^{ix \cdot \xi} \quad (2.3.20)$$

die Gleichung $P(\partial_t, \partial)u_\xi(t, x) = P(\lambda, i\xi)u_\xi(t, x) = 0$. Wir skalieren und schreiben $\xi = \lambda\xi_*$ und zeigen, dass es eine Wahl der Nullstelle τ_* gibt, so dass

$$\operatorname{Re} \tau_*(\lambda\xi_*) \geq \frac{1}{2}c\lambda \quad (2.3.21)$$

für hinreichend große λ gilt. Substituiert man $\xi = \lambda\xi_*$, so folgt für $\tilde{\tau}(\lambda) = \tau_*(\lambda\xi_*)/\lambda$ die Gleichung

$$\lambda^m \left(p(\tilde{\tau}, i\xi_*) + \frac{1}{\lambda} Q(\tilde{\tau}, \lambda) \right) = 0 \quad (2.3.22)$$

mit einem Polynom Q vom Grad $m - 1$ in $\tilde{\tau}$ und Koeffizienten, die Polynome in $1/\lambda$ sind. Nun besitzt $p(\tilde{\tau}, i\xi)$ die Nullstelle $i\tau_1(\xi)$. Wir betrachten in der $\tilde{\tau}$ -Ebene einen Kreis vom Radius $\rho < c/2$ um $i\tau_1(\xi_*)$, so dass im Inneren des Kreises keine weiteren Nullstellen von $p(\tilde{\tau}, i\xi)$ liegen. Auf dem Rand des Kreises ist damit $|p(\tilde{\tau}, i\xi_*)| \geq \delta > 0$ und für λ groß genug gilt $\lambda^{-1}|Q(\tilde{\tau}, \lambda)| < \delta$. Nach dem Satz von Rouché existiert also im Inneren des Kreises eine Nullstelle $\tilde{\tau}(\lambda)$ zu (2.3.22). Für diese gilt also

$$\operatorname{Re} \tilde{\tau}(\lambda) \geq \frac{1}{2}c > 0. \quad (2.3.23)$$

Also gilt für $\tau_*(\xi) = \tau_*(\lambda\xi_*) = \lambda\tilde{\tau}(\lambda)$ die Abschätzung (2.3.21). • *Schritt 2.* Die so konstruierte Familie von Lösungen $u_{\lambda\xi_*}(t, x)$ widerspricht der Korrektheit des Problems. Dazu müsste es zu jedem x und jedem hinreichend kleinen $t \neq 0$ ein Kompaktum $K \Subset \mathbb{R}^n$ und Konstanten C und M mit

$$|u(t, x)| \leq C \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{|\beta| \leq M} \sup_{y \in K} |\partial^\beta u_j(y)| \quad (2.3.24)$$

für jede Lösung u von (2.3.16) geben. Die oben konstruierten Lösungen verhalten sich aber

$$|u_{\lambda\xi_*}(t, x)| = |e^{\tau_*(\lambda\xi_*)t}| = e^{\operatorname{Re} \tau_*(\lambda\xi_*)t} \geq e^{\frac{1}{2}c\lambda t} \quad (2.3.25)$$

exponentiell wachsend in λ . Während die betrachteten Seminormen der Anfangsdaten wegen

$$\partial_t^\alpha \partial_t^j u_{\lambda\xi_*}(0, x) = \tau_*(\lambda\xi_*)^j (i\lambda\xi_*)^\alpha e^{i\lambda x \cdot \xi_*} \quad (2.3.26)$$

von der Form $\lambda^{|\alpha|+j}$, also polynomiell sind. Damit kann es eine Abschätzung der Form nicht geben. \square

Differentialoperatoren, die die Behauptung obiger Sätze erfüllen, werden als *hyperbolisch* (im Sinne von Petrowski) bezeichnet.

2.3.9 Beispiel. (i) Das Standardbeispiel ist die Wellengleichung mit $p(\tau, \xi) = \tau^2 - |\xi|^2$ und damit den reellen Nullstellen $\tau_\pm(\xi) = \pm|\xi|$.

(ii) Weitere Beispiele ergeben sich als Systeme partieller Differentialgleichungen, wir betrachten speziell

$$\partial_t \vec{U} = \sum_{j=1}^n A_j \partial_j \vec{U} + B \vec{U} \quad (2.3.27)$$

für selbstadjungierte Matrizen $A_j \in \mathbb{C}^{d \times d}$ und eine Matrix $B \in \mathbb{C}^{d \times d}$. Das zugeordnete (matrixwertige) Hauptsymbol

$$\tau - \sum_{j=1}^n A_j \xi_j \quad (2.3.28)$$

ist hyperbolisch in dem Sinne, dass die Nullstellen der Determinante

$$p(\tau, \xi) = \det \left(\tau - \sum_{j=1}^n A_j \xi_j \right) \quad (2.3.29)$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ reell sind. Ein solches System wird als *symmetrisch-hyperbolisches System* bezeichnet.

Ist nun

$$P(\tau, \xi) = \det \left(\tau - \sum_{j=1}^n A_j \xi_j - B \right) = \sum_{k=0}^d P_k(\xi) \tau^k \quad (2.3.30)$$

die Determinante des vollen Symbols, so gilt für jeden Eintrag u_k des Vektors \vec{U} die Gleichung $P(\partial_t, \partial) u_k = 0$ als Folgerung des Satzes von Cayley–Hamilton. Wir rechnen dies kurz nach. Cayley–Hamilton impliziert, dass eine Matrix ihr charakteristisches Polynom erfüllt,

$$0 = P \left(\sum_{j=1}^n A_j \xi_j + B, \xi \right) = \sum_{k=0}^d P_k(\xi) \left(\sum_{j=1}^n A_j \xi_j + B \right)^k, \quad (2.3.31)$$

also folgt komponentenweise angewandt auf den Vektor \vec{U}

$$P(\partial_t, \partial) \vec{U} = \sum_{k=0}^d P_k(\partial) \partial_t^k \vec{U} = \sum_{k=0}^d P_k(\partial) \left(\sum_{j=1}^n A_j \partial_j + B \right)^k \vec{U} = 0. \quad (2.3.32)$$

Bei dieser Rechnung haben wir wesentlich genutzt, dass die Koeffizienten der Operatoren konstant sind.

(iii) Beispiele symmetrisch-hyperbolischer Systeme sind

$$\partial_t \vec{u} = \text{i rot } \vec{u} \quad (2.3.33)$$

mit dem Hauptsymbol

$$p(\tau, \xi) = \det \left(\tau - \text{i} \begin{pmatrix} & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_3 & & -\xi_1 \\ -\xi_2 & \xi_1 & \end{pmatrix} \right), \quad (2.3.34)$$

sowie das Maxwellsche System

$$\partial_t \vec{E} = \text{rot } \vec{B}, \quad \partial_t \vec{B} = -\text{rot } \vec{E} \quad (2.3.35)$$

(ohne Divergenzfreiheit der Felder), für welches das Hauptsymbol durch

$$p(\tau, \xi) = \det \left(\tau - \begin{pmatrix} & & & -\xi_3 & \xi_2 \\ & & \xi_3 & & -\xi_1 \\ & \xi_3 & -\xi_2 & \xi_1 & \\ -\xi_3 & & \xi_1 & & \\ \xi_2 & -\xi_1 & & & \end{pmatrix} \right) \quad (2.3.36)$$

bestimmt ist.

2.4 Hyperbolische Cauchyprobleme mit konstanten Koeffizienten

Wir betrachten weiter Cauchyprobleme in Normalform mit konstanten Koeffizienten.

2.4.1 Definition. (i) Ein Differentialoperator

$$P(\partial_t, \partial) = \partial_t^m + \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{|\alpha| \leq m-k} a_{k,\alpha} \partial_t^k \partial^\alpha \quad (2.4.1)$$

heißt *hyperbolisch*, falls für jedes $\xi \in \mathbb{R}^n$ das Hauptsymbol

$$p(\tau, \xi) = \tau^m + \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{|\alpha|=m-k} a_{k,\alpha} \tau^k \xi^\alpha \quad (2.4.2)$$

nur reelle Nullstellen $\tau(\xi)$ besitzt. In diesem Fall bezeichnet man das Polynom $P(\tau, \xi)$ als *hyperbolisches Polynom*.

(ii) Er/es heißt *strikt hyperbolisch*, falls die Nullstellen für $\xi \neq 0$ paarweise verschieden sind.

(iii) Ein System erster Ordnung (in t) der Form

$$\partial_t - \sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha \partial^\alpha \quad (2.4.3)$$

mit matrixwertigen Koeffizienten $A_\alpha \in \mathbb{C}^{d \times d}$ heißt *hyperbolisch*, falls

$$P(\tau, \xi) = \det \left(\tau - \sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha \xi^\alpha \right) \quad (2.4.4)$$

ein Polynom vom Grad d in beiden Variablen τ und ξ und dieses hyperbolisch ist. Es heißt *strikt hyperbolisch*, falls das Polynom strikt hyperbolisch ist, also nur reelle Nullstellen der Vielfachheit Eins besitzt.

2.4.2 Lemma. Jeder (strikt) hyperbolische Operator der Ordnung m lässt sich in ein (strikt) hyperbolisches System umschreiben, genauer:

(i) Angenommen, eine Funktion $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ erfüllt $P(\partial_t, \partial)u = \partial_t^m + \sum_{k=0}^{m-1} \partial_t^k P_k(\partial)u = 0$. Dann gilt für den Vektor bestehend aus den partiellen Ableitungen

$$\vec{U} = (u, \partial_t u, \dots, \partial_t^{m-1} u)^\top \quad (2.4.5)$$

die Identität

$$\partial_t \vec{U} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & & \\ & 0 & -1 & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & -1 \\ P_0(\partial) & P_1(\partial) & \cdots & P_{m-2}(\partial) & P_{m-1}(\partial) \end{pmatrix} \vec{U} = 0. \quad (2.4.6)$$

Dieses System ist genau dann (strikt) hyperbolisch, wenn der Operator $P(\partial_t, \partial)$ (strikt) hyperbolisch ist.

(ii) Angenommen, eine vektorwertige Funktion $\vec{U} \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ erfüllt

$$\partial_t \vec{U} = \sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha \partial^\alpha \vec{U} \quad (2.4.7)$$

mit Matrizen $A_\alpha \in \mathbb{C}^{d \times d}$. Dann gilt für jede Komponente u_k von \vec{U} die Identität $P(\partial_t, \partial)u_k = 0$, wobei $P(\tau, \xi)$ durch (2.4.4) gegeben ist.

Beweis. (i) folgt, da die angegebene Matrix gerade der Begleitmatrix zum Polynom $P(\tau, \xi)$ entspricht. • (ii) ergibt sich direkt aus dem Satz von Cayley–Hamilton. Wir schreiben

$$P(\tau, \xi) = \sum_{k=0}^d P_k(\xi) \tau^k, \quad (2.4.8)$$

so dass nach Einsetzen der entsprechenden Matrix

$$0 = P\left(\sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha \xi^\alpha, \xi\right) = \sum_{k=0}^d P_k(\xi) \left(\sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha \xi^\alpha\right)^k. \quad (2.4.9)$$

Also folgt

$$P(\partial_t, \partial)\vec{U} = \sum_{k=0}^d P_k(\partial) \partial_t^k \vec{U} = \sum_{k=0}^d P_k(\partial) \left(\sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha \partial^\alpha\right)^k \vec{U} = 0. \quad (2.4.10)$$

Hier wurde explizit genutzt, dass A_α Konstanten sind. □

2.4.3 Satz (Hadamard). Das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} P(\partial_t, \partial)u = 0, \\ \partial_t^j u(0, x) = u_j(x), \end{cases} \quad (2.4.11)$$

sei C^∞ -korrekt. Dann ist das Polynom $P(\tau, \xi)$ hyperbolisch und alle Nullstellen $\tau(\xi)$ von $P(\tau, \xi) = 0$ erfüllen die Hadamardbedingung

$$|\operatorname{Re} \tau(\xi)| \leq C \log(e + |\xi|), \quad \xi \in i\mathbb{R}^n \quad (2.4.12)$$

mit einer geeigneten Konstanten C .

Beweis. Wir beweisen dies indirekt. Angenommen, für jedes $\lambda > 0$ existiert ein $\xi_* \in \mathbb{R}^n$, so dass für ein τ_* mit $P(\tau_*, i\xi_*) = 0$

$$\operatorname{Re} \tau_* \geq \lambda \log(e + |\xi_*|) \quad (2.4.13)$$

gilt. Wir definieren

$$u(t, x) = \exp(t\tau_* + ix \cdot \xi_*). \quad (2.4.14)$$

Dann gilt die Gleichung $P(\partial_t, \partial)u = 0$ und die so angegebene Lösung erfüllt für jedes fest gewählte $t > 0$

$$|u(t, 0)| = e^{t \operatorname{Re} \tau_*} \geq (e + |\xi_*|)^{\lambda t} \quad (2.4.15)$$

und (da alle Nullstellen von $P(\tau, \xi)$ die Abschätzung $|\tau(\xi)| \leq C|\xi|$ erfüllen müssen)

$$\sum_{j=0}^{m-1} \sum_{|\beta| \leq M} |\partial_t^j \partial^\beta u(0, x)| = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{|\beta| \leq M} |\tau_*|^j |\xi_*|^{|\beta|} \leq C(e + |\xi_*|)^{m-1+M}. \quad (2.4.16)$$

Da $\lambda > 0$ beliebig war widerspricht dies aber der C^∞ -Korrektheit. □

Gårding¹⁰ hat gezeigt, dass die Hadamardbedingung äquivalent zu

$$|\operatorname{Re} \tau(\xi)| \leq C, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \quad (2.4.17)$$

ist. Der Beweis ist algebraisch-geometrisch.

2.4.4 Satz (Petrowski). *Angenommen, für die Nullstellen eines hyperbolischen Polynoms $P(\tau, \xi)$ gilt die Hadamardbedingung (2.4.12). Dann ist das Anfangswertproblem (2.4.11) für den zugehörigen Operator C^∞ -korrekt.*

Beweis. Der Beweis ist konstruktiv, wir erklären zuerst die Grundidee. Wenn das Problem C^∞ -korrekt ist, sind Lösungen zu Cauchydaten $u_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ für festes t kompakt getragen in x . Damit liegt es nahe, statt der zu findenden Lösung $u(t, x)$ ihre Fouriertransformierte

$$\widehat{u}(t, \xi) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{-ix \cdot \xi} u(t, x) dx \quad (2.4.18)$$

zu betrachten. Diese ist (falls das Problem C^∞ -korrekt ist) eine Schwartzfunktion in ξ , welche glatt von t abhängt. Darüberhinaus muss für sie

$$P(\partial_t, i\xi)\widehat{u} = \partial_t^m \widehat{u} + \sum_{k=0}^{m-1} P_k(i\xi) \partial_t^k \widehat{u} = 0 \quad (2.4.19)$$

gelten. Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung mit Parameter $\xi \in \mathbb{R}^n$, welche zusammen mit den Anfangsdaten $\partial_t^j \widehat{u}(0, \xi) = \widehat{u}_j(\xi)$ die Funktion $\widehat{u}(t, \xi)$ eindeutig bestimmt. Wir werden zeigen, dass jede solche Lösung Fouriertransformierte einer kompakt getragenen C^∞ -Funktion ist und diese stetig von den Anfangsdaten abhängt.

Schritt 1. Transformation. Wir betrachten das zugehörige System erster Ordnung, welches im Fourierbild durch

$$\partial_t \widehat{U} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} i^{|\alpha|} A_\alpha \xi^\alpha \right) \widehat{U} = A(i\xi) \widehat{U}, \quad \widehat{U}(0, \xi) = \widehat{U}_0(\xi) \quad (2.4.20)$$

gegeben sei. Wie wir später sehen werden, ist es wichtig dieses System für beliebige $\xi \in \mathbb{C}^n$ lösen zu können. Wir betrachten vorerst allerdings nur $\xi \in \mathbb{R}^n$. Mit der Matrixexponentialfunktion gilt

$$\widehat{U}(t, \xi) = \exp(tA(i\xi)) \widehat{U}_0(\xi), \quad (2.4.21)$$

es bleibt diese abzuschätzen. Dazu transformieren wir die Matrix $A(i\xi)$ auf untere Dreiecksform¹¹, wir finden Matrizen $M(i\xi)$, so dass

$$M(i\xi)A(i\xi) = \begin{pmatrix} b_{1,1}(i\xi) & 0 & \cdots & 0 \\ b_{2,1}(i\xi) & b_{2,2}(i\xi) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ b_{d,1}(i\xi) & \cdots & \cdots & b_{d,d}(i\xi) \end{pmatrix} M(i\xi) \quad (2.4.22)$$

¹⁰LARS JACOB GÅRDING, 1919–2014

¹¹Wir nutzen folgendes Lemma. Der Beweis ist eine einfache Übung zur Linearen Algebra.

Lemma. *Zu jeder Matrix $B = (b_{i,j}) \in \mathbb{C}^{d \times d}$ existiert eine invertierbare Matrix $M = (m_{i,j}) \in \mathbb{C}^{d \times d}$, so dass $MBM^{-1} = C$ von unterer Dreiecksform ist und*

- (i) $|\det M| = 1$ und $|m_{i,j}| \leq 1$; sowie
- (ii) für $i > j$ die Einträge der Dreiecksmatrix $|c_{i,j}| \leq (d-1)! 2^d \max_{\mu, \nu} |b_{i,\nu}|$ erfüllen.

gilt. Die entstehenden Diagonaleinträge $b_{ii}(i\xi)$ sind gerade Eigenwerte von $A(i\xi)$, erfüllen also nach Voraussetzung die Hadamardabschätzung

$$|\operatorname{Re} b_{ii}(i\xi)| \leq C \log(e + |\xi|), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (2.4.23)$$

die Matrix $M(i\xi)$ kann so gewählt werden, dass ihre Einträge durch 1 beschränkt sind und sie $|\det M(i\xi)| = 1$ erfüllt. Weiter sind die Einträge $b_{i,j}(i\xi)$ polynomial beschränkt, es gilt

$$|b_{i,j}(i\xi)| \leq (d-1)! 2^d \max_{\mu,\nu} |a_{\mu,\nu}(i\xi)| \leq C(1 + |\xi|)^\ell. \quad (2.4.24)$$

Betrachtet man nun $M(i\xi)\widehat{U}(t, \xi)$, so erfüllen die Einträge ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen in Dreiecksform, welches schrittweise gelöst werden kann. Die Cramersche Regel in Verbindung mit der Hadamardungleichung liefert für die inverse Matrix $M(i\xi)^{-1}$ ebenso eine Schranke gleichmäßig in ξ und wir erhalten

$$\|\widehat{U}(t, \xi)\| \leq C(1 + |\xi|)^\ell \|\widehat{U}_0(\xi)\|, \quad t \in (-T, T), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (2.4.25)$$

punktweise in ξ mit von ξ unabhängigen Konstanten C und ℓ .

Schritt 2. Korrektheit in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Wir zeigen, dass das Anfangswertproblem korrekt im Schwartzraum ist, es also zu $U_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ eine eindeutig bestimmte Lösung $U \in C^\infty((-T, T); \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$ gibt. Da es sich bei der Fouriertransformation um einen Isomorphismus des Schwartzraumes handelt, ist dies äquivalent zu entsprechenden Abschätzungen für $\widehat{U}(t, \cdot)$, also etwa¹²

$$\|\partial_\xi^\beta \widehat{U}(t, \xi)\| \leq C_\beta \sum_{|\gamma| \leq M(\beta)} (1 + |\xi|)^{\ell(\beta)} \|\partial_\xi^\gamma \widehat{U}_0(\xi)\|, \quad t \in (-T, T), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (2.4.26)$$

mit geeigneten Konstanten C_β , $M(\beta)$ und $\ell(\beta)$. Wir zeigen diese per Induktion. Für $\beta = 0$ ist dies gerade (2.4.25), für $\beta > 0$ differenzieren wir die Differentialgleichung und erhalten

$$\partial_t \partial_\xi^\beta \widehat{U} = A(i\xi) \widehat{U} + \sum_{\gamma < \beta} \binom{\beta}{\gamma} (\partial_\xi^{\beta-\gamma} A(i\xi)) \partial_\xi^\gamma \widehat{U}. \quad (2.4.27)$$

Zusammen mit den Anfangsdaten $\partial_\xi^\beta \widehat{U}(0, \xi) = \partial_\xi^\beta \widehat{U}_0(\xi)$ erhält man mittels der Duhamelschen Formel (Variation der Konstanten) und unter Ausnutzung der Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} \|\partial_\xi^\beta \widehat{U}(t, \xi)\| &\leq C(1 + |\xi|)^\ell \|\partial_\xi^\beta \widehat{U}_0(\xi)\| \\ &\quad + C(1 + |\xi|)^\ell \sum_{\gamma < \beta} \binom{\beta}{\gamma} T \|\partial_\xi^{\beta-\gamma} A(i\xi)\| C_\gamma \sum_{|\delta| \leq M(\gamma)} (1 + |\xi|)^{\ell(\gamma)} \|\partial_\xi^\delta \widehat{U}_0(\xi)\| \end{aligned} \quad (2.4.28)$$

gleichmäßig in $t \in (-T, T)$ und damit die gesuchte Abschätzung.

Ohne Fouriertransformation erhält man also

$$\|\partial^\beta U(t, x)\| \leq \tilde{C}_\beta \sum_{|\gamma| \leq \tilde{\ell}(\beta)} \sup_{y \in \mathbb{R}^n} (1 + |y|)^{\tilde{M}(\beta)} \|\partial^\gamma U_0(y)\| \quad (2.4.29)$$

¹²Da ξ ein Parameter in der Differentialgleichung ist, schreiben wir auf der rechten Seite kein Supremum über die ξ , nehmen aber an, dass die Konstanten C_β und $M(\beta)$ nicht von ξ abhängen.

mit anderen Konstanten \tilde{C}_β , $\tilde{M}(\beta)$ und $\tilde{\ell}(\beta)$.

Schritt 3. Korrektheit in C^∞ . Da wir schon Abschätzung (2.4.29) haben, genügt es zu zeigen, dass die Lösung U in einer Kugel $B_{R'}$ schon allein durch die Daten in einer Kugel B_R bestimmt sind. Dies ist äquivalent dazu, dass Anfangsdaten mit kompaktem Träger zu Lösungen mit kontrolliertem kompaktem Träger führen.

Mit dem Satz von Paley¹³–Wiener¹⁴ folgt¹⁵, dass \widehat{U}_0 eine ganze Funktion auf \mathbb{C}^n mit der Exponentialtypabschätzung

$$\|q(\xi)\widehat{U}_0(\xi)\| \leq C_q e^{R|\operatorname{Im}\xi|}, \quad \xi \in \mathbb{C}^n, \quad (2.4.30)$$

für beliebige Polynome q ist. Die zugehörige Lösung

$$\widehat{U}(t, \xi) = \exp(tA(i\xi))\widehat{U}_0(\xi) \quad (2.4.31)$$

ist ganz (da die Matrixexponentialfunktion eine auf ganz \mathbb{C}^n konvergente Taylorreihe liefert) und es genügt, eine Abschätzung der Form

$$\|\exp(tA(i\xi))\| \leq C(1 + |\xi|)^\ell e^{c|\operatorname{Im}\xi|}, \quad \xi \in \mathbb{C}^n, \quad (2.4.32)$$

mit geeigneten C und ℓ zu beweisen. Dazu nutzen wir das Phragmén¹⁶–Lindelöf¹⁷-Prinzip¹⁸ der Funktionentheorie und reduzieren das Problem auf den komplex eindimensionalen Fall.

¹³RAYMOND PALEY, 1907–1933

¹⁴NORBERT WIENER, 1894–1964

¹⁵Der hier genutzte Satz von Paley–Wiener charakterisiert glatte Funktionen mit kompaktem Träger. Zu einer Menge $K \Subset \mathbb{R}^n$ sei

$$s_K(\omega) = \max_x \in K x \cdot \omega$$

die Stützfunktion. Diese charakterisiert die konvexe Hülle von K und es gilt

Satz (Paley–Wiener). *Die folgenden beiden Aussagen sind äquivalent:*

- (i) $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$;
- (ii) die Fouriertransformierte $\widehat{\varphi}(\xi)$ besitzt eine analytische Fortsetzung auf \mathbb{C}^n und diese erfüllt

$$|q(\xi)\widehat{\varphi}(\xi)| \leq C_q e^{s_K(\operatorname{Im}\xi)}, \quad \xi \in \mathbb{C}^n,$$

für jedes Polynom q .

¹⁶LARS EDVARD PHRAGMÉN, 1863–1937

¹⁷ERNST LEONARD LINDELÖF, 1870–1946

¹⁸Hier geht es um Wachstumsschranken für holomorphe Funktionen. Es gilt

Satz (Phragmén–Lindelöf). *Sei $f : \mathbb{C}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph auf $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ und stetig auf dem Abschluss und gelte $|f(x)| \leq 1$ für $x \in \mathbb{R}$ zusammen mit*

$$|f(z)| \leq C e^{c|z|^{1-\varepsilon}}$$

für ein $\varepsilon > 0$. Dann folgt $|f(z)| \leq 1$ auf \mathbb{C}_+ .

Speziell für die Viertelräume $\mathbb{C}_{++} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0, \pm \operatorname{Re} z > 0\}$ ergibt sich daraus zusammen mit der Nichtexistenz lokaler Maxima

Satz (Phragmén–Lindelöf-Prinzip). *Sei $f : \mathbb{C}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und stetig auf dem Abschluss. Gilt dann $|f(x)| \leq 1$ für $x \in \mathbb{R}$ und $|f(iy)| \leq e^{cy}$ für $y \gg 1$ groß, sowie eine exponentielle Schranke $|f(z)| \leq M e^{C|z|^{2-\varepsilon}}$, so folgt $|f(z)| \leq e^{c\operatorname{Im}z}$ für alle $z \in \mathbb{C}_+$.*

Für beliebige normierte Vektoren $\vec{e}, \vec{f} \in \mathbb{C}^m$ und für $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{C}$ betrachten wir die skalare Funktion $\Phi(z) = \vec{f} \cdot \exp(tA(i(\xi + z\eta)))\vec{e}$. Diese ist holomorph und erfüllt nach Schritt 1 für das Polynom

$$r(z) = C \left(\sum_{j=1}^n (\text{isign } \eta_j + \xi_j + z\eta_j)^2 \right)^{\ell/2} \quad (2.4.33)$$

(ohne Nullstellen in $\overline{\mathbb{C}_+}$ und mit ℓ gerade) die Abschätzung

$$\left| \frac{1}{r(z)} \Phi(z) \right| \leq 1, \quad z \in \mathbb{R}, \quad (2.4.34)$$

sowie mit $c > \max\{|\tau| : p(\tau, \xi) = 0, \xi \in \mathbb{S}^{n-1}\}$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} e^{-c|\eta|y} \frac{1}{r(iy)} \Phi(iy) = 0. \quad (2.4.35)$$

Dies folgt wiederum durch Transformation der Matrix A auf untere Dreiecksform (2.4.22) und der Tatsache, dass sich die Diagonaleinträge für $z \rightarrow \infty$ wie die Nullstellen des Hauptsymbols verhalten und damit durch $c|\eta| \text{Im } z$ abgeschätzt werden können. Weiterhin existiert mit derselben Argumentation eine Schranke der Form

$$|\Phi(z)| \leq C e^{M|z|^{1+\varepsilon}}, \quad z \in \mathbb{C}_+, \quad (2.4.36)$$

und nach dem Phragmén–Lindelöf-Prinzip gilt

$$\left| \frac{1}{r(z)} \Phi(z) \right| \leq e^{c|\eta| \text{Im } z}, \quad z \in \mathbb{C}_+. \quad (2.4.37)$$

Da \vec{e}, \vec{f} sowie ξ, η beliebig waren, folgt für $z = i$ die gesuchte Normabschätzung. □

2.4.5. Wir geben einen alternativen Beweis zu Schritt 3 unter Ausnutzung des Satzes von Holmgren. Eine Hyperebene in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ist genau dann charakteristisch für $P(\partial_t, \partial)$, wenn ihr Normalenvektor (τ, ξ) die Gleichung $p(\tau, \xi) = 0$ löst. Nach Voraussetzung gibt es für jedes $\xi \neq 0$ mit Vielfachheit gezählt genau m Werte $\tau_1(\xi) \leq \dots \leq \tau_m(\xi)$ für die dies zutrifft. Aufgrund der Homogenität des Hauptsymbols bilden diese Schalen eines Doppelkegels, wobei der Vektor $(\tau, 0)$ im Inneren der innersten Kegelschale liegt, vgl. Bild 2.1. Es existiert also eine Zahl c , so dass alle Vektoren der Form (τ, ξ) mit $|\xi| < c|\tau|$ im Inneren der innersten Kegelschale liegen.

Angenommen, die Cauchydaten sind in einer Kugel B_R getragen und sei

$$C(B_R) = \{(t, x) : |x| > R + c|t|\} \quad (2.4.38)$$

ein sich öffnender Kegel über B_R mit dem c von oben. Dann kann das Komplement von $C(B_R)$ durch eine Familie von glatten Hyperflächen Σ_t ausgeschöpft werden, für die $\Sigma_t \cap \{t \geq 0\}$ kompakt ist, die stetig von t abhängt und jeweils der Normalenvektor nichtcharakteristisch für $P(\partial_t, \partial)$ ist. Damit folgt aber nach dem Satz von Holmgren (analog zum Beweis von Korollar 2.3.6), dass die zugehörige Lösung zu unseren Cauchydaten in $C(B_R)$ getragen ist.

2.4.6 Beispiele. (i) Das System

$$\partial_t U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} U \quad (2.4.39)$$

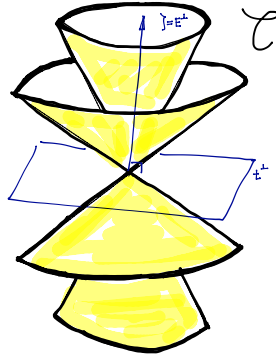


Abbildung 2.1: Charakteristische Kegel

entspricht der Wellengleichung und ist C^∞ -korrekt. Die Nullstellen des zugeordneten Polynoms $P(\tau, \xi) = \tau^2 - \xi^2$ sind rein reell. Entsprechendes gilt für das System

$$\partial_t U = i \operatorname{rot} U, \quad x \in \mathbb{R}^3 \quad (2.4.40)$$

mit zugeordnetem Polynom

$$P(\tau, \xi) = \det \begin{pmatrix} \tau & i\xi_3 & -i\xi_2 \\ -i\xi_3 & \tau & i\xi_1 \\ i\xi_2 & -i\xi_1 & \tau \end{pmatrix} = \tau^3 - \tau(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2) = \tau(\tau^2 - \xi^2), \quad (2.4.41)$$

dessen Nullstellen $\tau = 0$ und $\tau = \pm|\xi|$ ebenso reell sind.

(ii) Das System

$$\partial_t U = \begin{pmatrix} \partial_x & ia \\ \partial_x & \partial_x \end{pmatrix} U, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.4.42)$$

ist hyperbolisch, da das Hauptsymbol $p(\tau, \xi) = (\tau - \xi)^2$ nur die doppelte reelle Nullstelle $\tau = \xi$ besitzt. Allerdings ist dieses System nur für $a = 0$ auch C^∞ -korrekt. Dazu betrachten wir das Polynom

$$P(\tau, \xi) = \det \begin{pmatrix} \tau - \xi & -ia \\ -\xi & \tau - \xi \end{pmatrix} = (\tau - \xi)^2 - ia\xi = \tau^2 - 2\tau\xi + \xi(\xi - ia) \quad (2.4.43)$$

mit Nullstellen

$$\tau = \xi \pm \sqrt{-ia\xi} \quad (2.4.44)$$

und prüfen die Hadamardbedingung. Für $\xi > 0$ gilt $\operatorname{Re}(i\xi \pm \sqrt{-a\xi}) = \pm\sqrt{\xi} \operatorname{Re}\sqrt{-a}$, was nur für $\operatorname{Im}\sqrt{a} = 0$ der Hadamardbedingung genügt. Entsprechend erhält man für $\xi < 0$ aus $\operatorname{Re}(i\xi \pm \sqrt{-a\xi}) = \pm\sqrt{-\xi} \operatorname{Im}\sqrt{a}$ und die Hadamardbedingung liefert $\operatorname{Re}\sqrt{a} = 0$. Damit muss aber $\sqrt{a} = 0$ und somit $a = 0$ gelten.

2.4.7 Korollar. Jedes strikt hyperbolische Anfangswertproblem der Form (2.4.11) ist C^∞ -korrekt.

Beweis. Es genügt, die Hadamardbedingung nachzuweisen. Sei $P(\tau, \xi)$ ein Polynom vom Grad m mit Hauptteil $p(\tau, \xi)$. Angenommen, $p(\tau, \xi)$ besitzt für alle $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ genau m

paarweise verschiedene Nullstellen. Wir bezeichnen diese mit $\tau_1(\xi), \dots, \tau_m(\xi)$. Sei weiter $\delta = \min_{i \neq j} \inf_{\xi \in \mathbb{S}^{n-1}} |\tau_i(\xi) - \tau_j(\xi)| > 0$ der minimale Abstand dieser Nullstellen für ξ aus der Einheitskugel. Dann gilt für $|\xi| = 1$, $\lambda \geq 1$ und $\tau \in \mathbb{C}$ mit $|\tau - i\tau_j(\xi)| = \delta/\lambda$

$$|p(\tau, i\xi)| \geq c_0 \lambda^{-1}, \quad (2.4.45)$$

da die Nullstellen ja nach Voraussetzung einfach sind und die Kugel \mathbb{S}^{n-1} kompakt ist. Weiter gilt für

$$\lambda^{-m} P(\lambda\tau, i\lambda\xi) = p(\tau, i\xi) + \lambda^{-m} \sum_{k+|\alpha| < m} \lambda^{k+|\alpha|} a_{k,\alpha} \tau^k \xi^\alpha \quad (2.4.46)$$

die Abschätzung

$$\left| \lambda^{-m} \sum_{k+|\alpha| < m} \lambda^{k+|\alpha|} a_{k,\alpha} \tau^k \xi^\alpha \right| \leq M \lambda^{-1}. \quad (2.4.47)$$

Mit dem Satz von Rouché folgt, dass für jedes j und hinreichend großes λ in jeder der Kreisscheiben $|\tau - i\tau_j(\xi)| \leq M\delta/(c_0\lambda)$ eine Nullstelle von $P(\lambda\tau, i\lambda\xi) = 0$ liegt. Da die Kreisscheiben nach Konstruktion disjunkt sind, enthält jede genau eine Nullstelle und jede Nullstelle liegt in einer solchen.

Ist nun $P(\tau, \xi)$ strikt hyperbolisch, so folgt für jede Lösung von $P(\tau, i\xi) = 0$ mit $|\xi| \gg 1$ die Abschätzung $|\operatorname{Re} \tau| \leq M\delta/c_0$ und damit die Hadamardbedingung. \square

2.4.8. Zum Schluss diskutieren wir noch kurz Energieabschätzungen für hyperbolische Systeme. Speziell für symmetrisch-hyperbolische Systeme

$$\partial_t U = \sum_{j=1}^n A_j \partial_j U + BU, \quad U(0, \cdot) = U_0, \quad (2.4.48)$$

mit selbstadjungierten Matrizen $A_j \in \mathbb{C}^{d \times d}$ und beliebigem $B \in \mathbb{C}^{d \times d}$ (und mit (\cdot, \cdot) dem Skalarprodukt des \mathbb{C}^d) gilt für Lösungen zu kompakt getragenen Anfangsdaten

$$\begin{aligned} \partial_t \int_{\mathbb{R}^n} \|U(t, x)\|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^n} ((\partial_t U(t, x), U(t, x))_{\mathbb{C}^d} + (U(t, x), \partial_t U(t, x))_{\mathbb{C}^d}) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^n ((A_j \partial_j U(t, x), U(t, x))_{\mathbb{C}^d} + (U(t, x), A_j \partial_j U(t, x))_{\mathbb{C}^d}) dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} ((BU(t, x), U(t, x))_{\mathbb{C}^d} + (U(t, x), BU(t, x))_{\mathbb{C}^d}) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} ((B + B^*)U(t, x), U(t, x))_{\mathbb{C}^d} dx \leq \|B + B^*\| \int_{\mathbb{R}^n} \|U(t, x)\|^2 dx \end{aligned} \quad (2.4.49)$$

und damit unter Ausnutzung der Gronwallschen Ungleichung¹⁹

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|U(t, x)\|^2 dx \leq e^{t\|B+B^*\|} \int_{\mathbb{R}^n} \|U_0(x)\|^2 dx. \quad (2.4.50)$$

2.4.9. Für allgemeine strikt hyperbolische Systeme mit konstanten Koeffizienten gelten ähnliche Energieabschätzungen. Diese basieren auf Symmetrisierern. Wir betrachten also ein strikt hyperbolisches System der Form

$$\partial_t U = \sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha \partial^\alpha U, \quad U(0, \cdot) = U_0 \quad (2.4.51)$$

auf dem \mathbb{R}^n und mit Koeffizienten $A_\alpha \in \mathbb{C}^{d \times d}$. Wie zuvor bezeichnen wir

$$A(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha \xi^\alpha. \quad (2.4.52)$$

Da das System strikt hyperbolisch ist, sind für $\xi \in \mathbb{C}^n$ mit $|\xi| > R$ für ein $R > 0$ die Eigenwerte der Matrix $A(\xi)$ alle einfach und für $\xi \in i\mathbb{R}^n$ mit $|\xi| > R$ ist darüberhinaus ihr Realteil gleichmäßig beschränkt.

Wir bezeichnen eine Funktion $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}^{d \times d}$ als Symmetrisierer des Systems, falls $H(\xi)$ für jedes $\xi \in \mathbb{R}^n$ positiv definit ist und es ein $c \in \mathbb{R}$ mit

$$2 \operatorname{Re}(H(\xi)A(i\xi)) - cH(\xi) \leq 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \quad (2.4.53)$$

im Sinne selbstadjungierter Matrizen gibt. Gibt es einen Symmetrisierer, so kann man mit seiner Hilfe Energieabschätzungen beweisen. Es gilt (vorerst formal) und mit der eindeutig bestimmten positiv-definiten Wurzel $\sqrt{H(\xi)}$ des Symmetrisierers

$$\begin{aligned} \partial_t \int_{\mathbb{R}^n} \|\sqrt{H(\xi)}\widehat{U}(t, \xi)\|^2 d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} ((\sqrt{H(\xi)}\partial_t \widehat{U}(t, \xi), \sqrt{H(\xi)}\widehat{U}(t, \xi))_{\mathbb{C}^d} \\ &\quad + (\sqrt{H(\xi)}\widehat{U}(t, \xi), \sqrt{H(\xi)}\partial_t \widehat{U}(t, \xi))_{\mathbb{C}^d}) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} ((H(\xi)A(i\xi) + A(i\xi)^*H(\xi))\widehat{U}(t, \xi), \widehat{U}(t, \xi))_{\mathbb{C}^d} d\xi \\ &\leq c \int_{\mathbb{R}^n} \|\sqrt{H(\xi)}U(t, \xi)\|^2 d\xi \end{aligned} \quad (2.4.54)$$

und damit

$$\|U(t, \cdot)\|_{\mathbb{E}}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \|\sqrt{H(\xi)}\widehat{U}(t, \xi)\|^2 d\xi \leq e^{ct} \int_{\mathbb{R}^n} \|\sqrt{H(\xi)}\widehat{U}_0(\xi)\|^2 d\xi = e^{ct} \|U_0\|_{\mathbb{E}}^2 \quad (2.4.55)$$

als Abschätzung im Energieraum

$$\mathbb{E} = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^d) : \|f\|_{\mathbb{E}}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (H(\xi)\widehat{f}(\xi), \widehat{f}(\xi))_{\mathbb{C}^d} d\xi < \infty \right\}. \quad (2.4.56)$$

¹⁹THOMAS HAKON GRÖNWALL, 1877–1932

Die Gronwallsche Ungleichung ist immer dann wichtig, wenn Energieabschätzungen zu beweisen sind. Wir geben sie der Vollständigkeit halber an.

Lemma (Gronwall). *Seien $u, \alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $\beta : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ stetig und gelte*

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)u(s) ds, \quad t \in [a, b].$$

Dann folgt

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \alpha(s)\beta(s)e^{\int_s^t \beta(\theta) d\theta} ds, \quad t \in [a, b].$$

Lemma. *Strikt hyperbolische Systeme besitzen einen Symmetrisierer.*

Beweis. Es genügt den Symmetrisierer für $|\xi| \geq R$, $R \gg 1$ zu konstruieren, für kleine $|\xi|$ ist $A(i\xi)$ beschränkt und ein Vielfaches der Identität erfüllt das gewünschte. Nach Voraussetzung besitzt $A(i\xi)$ für $|\xi| \geq R$ genau d paarweise verschiedene Eigenwerte, wir bezeichnen diese mit $\tau_j(i\xi)$, $j = 1, \dots, d$. Zu jedem dieser Eigenwerte sei

$$Q_j(\xi) = \prod_{k \neq j} \frac{A(i\xi) - \tau_k(i\xi)}{\tau_j(i\xi) - \tau_k(i\xi)}, \quad |\xi| \geq R, \quad (2.4.57)$$

der zugehörige Eigenprojektor und

$$H(\xi) = \sum_{j=1}^d Q_j(\xi)^* Q_j(\xi), \quad |\xi| \geq R. \quad (2.4.58)$$

Dann gilt (da $A(i\xi)$ und $Q_j(\xi)$ kommutieren und $A(i\xi)Q_j(\xi) = \tau_j(i\xi)Q_j(\xi)$)

$$\begin{aligned} H(\xi)A(i\xi) &= \sum_{j=1}^d Q_j(\xi)^* A(i\xi)Q_j(\xi) = \sum_{j=1}^d \tau_j(i\xi)Q_j(\xi)^* Q_j(\xi) \\ A(i\xi)^* H(\xi)^* &= \sum_{j=1}^d A(i\xi)^* Q_j(\xi)^* Q_j(\xi) = \sum_{j=1}^d \overline{\tau_j(i\xi)} Q_j(\xi)^* Q_j(\xi) \end{aligned} \quad (2.4.59)$$

und damit wegen $|\operatorname{Re} \tau_j(i\xi)| \leq c$ gleichmäßig in ξ die Behauptung. \square

2.4.10 Beispiel. Ein Beispiel dazu: Betrachtet man die Wellengleichung $v_{tt} - \Delta v = 0$ und schreibt sie als hyperbolisches System für den Vektor $U = (v, v_t)^\top$, also als

$$\partial_t U = \begin{pmatrix} v_t \\ v_{tt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} U, \quad A(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \xi^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.4.60)$$

so sind die charakteristischen Wurzeln gerade $\tau_\pm(\xi) = \pm\sqrt{\xi^2}$ und der Symmetrisierer besitzt die Darstellung

$$Q_\pm(\xi) = \pm \frac{1}{2i|\xi|} \begin{pmatrix} \pm i|\xi| & 1 \\ -|\xi|^2 & \pm i|\xi| \end{pmatrix} \quad (2.4.61)$$

$$\begin{aligned} H(\xi) &= Q_+(\xi)^* Q_+(\xi) + Q_-(\xi)^* Q_-(\xi) \\ &= \begin{pmatrix} 1 + |\xi|^2 & 0 \\ 0 & 1 + |\xi|^{-2} \end{pmatrix}, \quad |\xi| \gg 1. \end{aligned} \quad (2.4.62)$$

Es gilt also $\mathbb{E} = H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ und die Aufgabe des Symmetrisierers ist es, die Ordnungen der Einträge des Vektors U entsprechend auszugleichen.

2.4.11 Beispiel. Für symmetrisch hyperbolische Systeme ergibt die Konstruktion $H(\xi) = I$ und der Energieraum ist gerade $\mathbb{E} = L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^d)$.

2.5 Symmetrisch hyperbolische Cauchyprobleme mit variablen Koeffizienten

Ohne Fouriertransformation ist es schwer allgemeine Aussagen zu beweisen, wir skizzieren nur kurz wie man trotz allem Existenz- und Korrektheitsbeweise führen kann.

2.5.1. Im folgenden betrachten wir Systeme partieller Differentialgleichungen der Form

$$\begin{cases} \partial_t U &= \sum_{j=1}^n A_j(t, x) \partial_j U + B(t, x)U + F(t, x), \\ U(0, x) &= U_0(x), \end{cases} \quad (2.5.1)$$

auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und mit glatt von t und x abhängenden Koeffizienten $A_j, B \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{C}^d)$. Wir nehmen an, dass das System symmetrisch hyperbolisch ist, also $A_j(t, x)$ für jedes t und x eine selbstadjungierte Matrix darstellt. Darüberhinaus fordern wir für gegebenes $T > 0$

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\sum_{j=1}^n \|A_j(t, x)\| + \sum_{k,j=1}^n \|\partial_k A_j(t, x)\| + \|B(t, x)\| + \|\partial_t B(t, x)\| + \sum_{j=1}^n \|\partial_j B(t, x)\| \right) < \infty. \quad (2.5.2)$$

Damit gelten zumindest für alle hinreichend schnell abfallenden glatten Lösungen Energieabschätzungen. Wie schon im Falle konstanter Koeffizienten erhält man

$$\begin{aligned} \partial_t \int_{\mathbb{R}^n} \|U(t, x)\|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_t U(t, x), U(t, x))_{\mathbb{C}^d} + (U(t, x), \partial_t U(t, x))_{\mathbb{C}^d} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} ((B(t, x) + B(t, x)^* - \sum_{j=1}^n (\partial_j A_j)(t, x)) U(t, x), U(t, x))_{\mathbb{C}^d} dx \\ &\quad + 2 \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^n} (F(t, x), U(t, x))_{\mathbb{C}^d} dx \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \|U(t, x)\|^2 dx + 2 \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|U(t, x)\|^2 dx \int_{\mathbb{R}^n} \|F(t, x)\| dx \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

wobei die Ableitungen der Koeffizientenmatrizen durch das Vertauschen von Ableitung und Matrixmultiplikation entsteht. Mit der Gronwallschen Ungleichung folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|U(t, x)\|^2 dx \leq e^{Ct} \int_{\mathbb{R}^n} \|U_0(x)\|^2 dx + 2 \int_0^t e^{C(t-s)} \int_{\mathbb{R}^n} \|F(s, x)\|^2 dx ds. \quad (2.5.4)$$

Nochmals integriert ergibt sich mit der Notation $S = [0, T] \times \mathbb{R}^n$ für den Streifen der Breite T und mit neuen Konstanten C_1 und C_2

$$\int_S \|U(t, x)\|^2 dx dt \leq C_1 \int_{\mathbb{R}^n} \|U_0(x)\|^2 dx + C_2 \int_S \|F(t, x)\|^2 dx dt. \quad (2.5.5)$$

Es liegt also nahe, Lösungen nicht im Raum der differenzierbaren Funktionen zu suchen, sondern direkt im $L^2(S; \mathbb{C}^d)$ zu denken. Dazu führen wir zwei neue Lösungsbegriffe ein.

2.5.2 Definition. Seien $F \in L^2(S; \mathbb{C}^d)$ und $U_0 \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^d)$.

- (i) Eine Funktion $U \in L^2(S; \mathbb{C}^d)$ heißt *starke Lösung* des Cauchyproblems (2.5.1), falls es eine Folge $U^{(j)} \in C^1(S; \mathbb{C}^d) \cap L^2(S; \mathbb{C}^d)$ mit

$$\begin{aligned} U^{(j)} &\longrightarrow U && \text{in } L^2(S; \mathbb{C}^d) \\ \partial_t U^{(j)} - \sum_{k=1}^n A_k(t, x) \partial_k U^{(j)} - B(t, x) U^{(j)} &\longrightarrow F(t, x) && \text{in } L^2(S; \mathbb{C}^d) \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

sowie

$$U^{(j)}(0, \cdot) \longrightarrow U_0 \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^d) \quad (2.5.7)$$

gibt.

- (ii) Eine Funktion $U \in L^2(S; \mathbb{C}^d)$ heißt *schwache Lösung* des Cauchyproblems (2.5.1), falls für jede Testfunktion $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{C}^d)$ mit $\text{supp } \varphi \cap \{t = T\} = \emptyset$

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n} (U_0(x), \varphi(0, x))_{\mathbb{C}^d} dx - \int_S (U(t, x), \partial_t \varphi(t, x))_{\mathbb{C}^d} dx dt \\ &= \int_S (U(t, x), -\sum_{j=1}^n \partial_j (A_j(t, x) \varphi(t, x)) + B(t, x)^* \varphi(t, x))_{\mathbb{C}^d} dx dt \\ &\quad + \int_S (F(t, x), \varphi(t, x))_{\mathbb{C}^d} dx dt \end{aligned} \quad (2.5.8)$$

gilt.

2.5.3 Lemma. Für starke Lösungen zu (2.5.1) gilt die Energieabschätzung (2.5.5).

Beweis. Folgt direkt aus der Definition und der Gültigkeit der oben gezeigten Energieabschätzung (2.5.5) für klassische Lösungen. \square

Insbesondere folgt die Eindeutigkeit starker Lösungen. Es gilt sogar (und das ist wesentlich):

2.5.4 Lemma. Schwache Lösungen zu (2.5.1) sind eindeutig durch ihre Daten bestimmt.

Beweis. Sei U eine schwache Lösung zu (2.5.1) mit $U_0(x) = 0$ und $F(t, x) = 0$, gelte also für jedes $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{C}^d)$ mit $\text{supp } \varphi \cap \{t = T\} = \emptyset$

$$\begin{aligned} &\int_S (U(t, x), \partial_t \varphi(t, x))_{\mathbb{C}^d} dx dt \\ &= \int_S (U(t, x), \sum_{j=1}^n \partial_j (A_j(t, x) \varphi(t, x)) - B(t, x)^* \varphi(t, x))_{\mathbb{C}^d} dx dt. \end{aligned} \quad (2.5.9)$$

Wir regularisieren U durch Falten und nutzen dazu eine Funktion $\psi \in C_c^\infty([-1, 1])$ mit $\psi(s) \geq 0$ und $\int \psi(s) ds = 1$ und konstruieren uns für $\varepsilon > 0$ den Faltungskern

$$\psi_\varepsilon(t, x) = \varepsilon^{-n-1} \psi(\varepsilon^{-1}t - 2) \prod_{i=1}^n \psi(\varepsilon^{-1}x) \quad (2.5.10)$$

mit $\text{supp } \psi_\varepsilon \subseteq [\varepsilon, 3\varepsilon] \times [-\varepsilon, \varepsilon]^n$ und damit die Funktionen

$$U^{(\varepsilon)}(t, x) = \psi_\varepsilon * U(t, x) = \int_S U(s, y) \psi_\varepsilon(t - s, x - y) ds dy. \quad (2.5.11)$$

Nach Konstruktion ist $U^{(\varepsilon)} \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ und es gilt $U^{(\varepsilon)} \rightarrow U$ in $L^2(S)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$. Wir bezeichnen weiter mit J_ε den Integraloperator $U \mapsto \psi_\varepsilon * U$ sowie mit P den Differentialoperator

$$P = \partial_t - \sum_{j=1}^n A_j(t, x) \partial_j - B(t, x). \quad (2.5.12)$$

Dann gilt für jede Testfunktion φ mit $\text{supp } \varphi \cap \{t \geq T\} = \emptyset$

$$\begin{aligned} & \int_S (\varphi(t, x), PU^{(\varepsilon)}(t, x))_{\mathbb{C}^d} dt dx \\ &= \int_S (J_\varepsilon^* P^* \varphi(t, x), U(t, x))_{\mathbb{C}^d} dt dx + \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi(T, x), U^{(\varepsilon)}(T, x))_{\mathbb{C}^d} dx \\ & \quad - \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi(0, x), U^{(\varepsilon)}(0, x))_{\mathbb{C}^d} dx \\ &= \int_S (P^* J_\varepsilon^* \varphi(t, x), U(t, x))_{\mathbb{C}^d} dt dx + \int_S (\varphi(t, x), [P, J_\varepsilon]U(t, x))_{\mathbb{C}^d} dt dx \end{aligned} \quad (2.5.13)$$

und da $\text{supp } J_\varepsilon^* \varphi \cap \{t = T\} = \emptyset$ somit

$$\int_S (\varphi(t, x), PU^{(\varepsilon)}(t, x))_{\mathbb{C}^d} dt dx = \int_S (\varphi(t, x), [P, J_\varepsilon]U(t, x))_{\mathbb{C}^d} dt dx. \quad (2.5.14)$$

Also ist $U^{(\varepsilon)}$ (klassische!) Lösung zu $PU^{(\varepsilon)}(t, x) = [P, J_\varepsilon]U(t, x)$ und es gilt die Energieabschätzung

$$\|U^{(\varepsilon)}\|_{L^2(S)} \leq C \|[P, J_\varepsilon]U\|_{L^2(S)}. \quad (2.5.15)$$

Zum Beweis des Lemmas bleibt $[P, J_\varepsilon] \rightarrow 0$ als starke Konvergenz in $L^2(S)$ zu zeigen. Der Kommutator $[P, J_\varepsilon]$ ist ein Integraloperator mit dem Integralkern

$$- \sum_{j=1}^n \partial_{y_j} (A_j(t, x) - A_j(s, y)) \psi_\varepsilon(t - s, x - y) - (B(t, x) - B(s, y)) \psi_\varepsilon(t - s, x - y), \quad (2.5.16)$$

wir betrachten die Terme einzeln. Der Operator zum Kern $(B(t, x) - B(s, y)) \psi_\varepsilon(t - s, x - y)$ ist aufgrund der Differenzierbarkeit der Matrizen B ,

$$B(t, x) - B(s, y) = \int_0^1 (t - s, x - y) \cdot \nabla B(\theta t + (1 - \theta)s, \theta x + (1 - \theta)y) d\theta, \quad (2.5.17)$$

und der Trägergröße von ψ_ε in der Norm $\mathcal{O}(\varepsilon)$.

Der Operator zum Kern $\partial_{y_j} (A_j(t, x) - A_j(s, y)) \psi_\varepsilon(t - s, x - y)$ zerfällt in die Summanden $(-\partial_j A_j)(s, y) \psi_\varepsilon(t - s, x - y)$ und $(A_j(t, x) - A_j(s, y)) \partial_{y_j} \psi_\varepsilon(t - s, x - y)$. Beide sind in der Operatornorm nur $\mathcal{O}(1)$, der erste da $\partial_j A_j$ nur beschränkt ist und der zweite, da die Ableitungen $\partial_j \psi_\varepsilon(t - s, x - y) \sim \varepsilon^{-1}$. Ist nun $\chi \in C_c^\infty(S)$ eine Testfunktion mit hinreichend kleinem Träger, so gilt für die Anwendung dieses Operators (mit einer partiellen Integration)

$$\int_S (A_j(t, x) - A_j(s, y)) \psi_\varepsilon(t - s, x - y) \partial_j \chi(s, y) dy ds \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (2.5.18)$$

punktweise (da A_j stetig ist) und da das Integral in t und x in einer ε -Umgebung des Trägers von χ getragen ist auch als Konvergenz im $L^2(S)$. Da diese Testfunktionen einen dichten Teilraum aufspannen, folgt zusammen mit der gleichmäßigen Normschränke die gewünschte starke Konvergenz und das Lemma ist bewiesen. \square

2.5.5 Satz (Friedrichs²⁰). *Zu jedem $F \in L^2(S; \mathbb{C}^d)$ und jedem $U_0 \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^d)$ existiert eine eindeutig bestimmte starke Lösung zu (2.5.1).*

Beweis. Bezeichne

$$\mathcal{W} = \{(F, U_0) \in L^2(S; \mathbb{C}^d) \times L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^d) : \exists U \in L^2(S; \mathbb{C}^d) \text{ mit (2.5.1) stark}\} \quad (2.5.19)$$

die Menge der Cauchydaten F und U_0 , für welche eine starke Lösung zu (2.5.1) existiert. Aufgrund der Energieabschätzung und der Definition der starken Lösung ist \mathcal{W} ein abgeschlossener Teilraum des Hilbertraums $L^2 \times L^2$. Es genügt also zu zeigen, dass \mathcal{W} dicht ist. Sei also $(G, V_0) \perp \mathcal{W}$. Dann gilt für jede Testfunktion $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{C}^d)$ und mit der Bezeichnung P aus (2.5.12) aufgrund der Orthogonalitätsbedingung

$$(P\varphi, G)_{L^2(S; \mathbb{C}^d)} + (\varphi(0, \cdot), V_0)_{L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^d)} = 0. \quad (2.5.20)$$

Wählt man speziell φ mit $\text{supp } \varphi \cap \{t = 0\} = \emptyset$, so heißt das gerade, dass G eine schwache Lösung des Problems

$$P^*G = 0, \quad G(T, \cdot) = 0 \quad (2.5.21)$$

(für den ebenso symmetrisch-hyperbolischen Operator P^* und mit Cauchydaten am anderen Streifenenden $t = T$) ist. Wegen der Eindeutigkeit der schwachen Lösung folgt $G = 0$. Wählt man nun beliebige φ ohne die Trägerbedingung, so folgt $G(0, \cdot) = -V_0$ und damit $V_0 = 0$. Also folgt $\mathcal{W} = L^2 \times L^2$ und der Satz ist bewiesen. \square

2.5.6 Korollar. *Jede schwache Lösung im Sinne von Definition 2.5.2 ist eine starke Lösung im Sinne von Definition 2.5.1.*

²⁰KURT OTTO FRIEDRICHS, 1901–1982

3 Randwertprobleme

In diesem Kapitel sollen Randwertprobleme für elliptische Operatoren zweiter Ordnung im Mittelpunkt stehen.

3.1 Dirichletprobleme für elliptische Operatoren zweiter Ordnung

3.1.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Wir betrachten für Funktionen $u \in C_c^\infty(\Omega)$ die folgenden Normen

$$\|u\| = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \quad \|u\|_{(1)} = \|u\| + |u|_{(1)}, \quad |u|_{(1)} = \left(\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \right)^{1/2} \quad (3.1.1)$$

und stellen zuerst fest, dass $L^2(\Omega)$ die Vervollständigung von $C_c^\infty(\Omega)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|$ ist. Weiter sei $H_0^1(\Omega)$ die Menge aller Funktionen $u \in L^2(\Omega)$, so dass es eine Folge $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega)$ gibt, die bezüglich $\|\cdot\|_{(1)}$ Cauchyfolge ist und bezüglich $\|\cdot\|$ gegen u konvergiert. Dann konvergieren insbesondere auch $\partial_j u_k$ im $L^2(\Omega)$ und wir bezeichnen die entstehenden Grenzwerte $\partial_j u = \lim_{k \rightarrow \infty} \partial_j u_k$ als schwache Ableitungen der Funktion u . Die schwachen Ableitungen sind wohldefiniert, da sie unabhängig von der Wahl der Folge u_k sind:

Lemma. Angenommen, $u_k \in C_c^\infty(\Omega)$ erfüllt $u_k \rightarrow 0$ sowie $\partial_j u_k \rightarrow v_j$ in $L^2(\Omega)$. Dann gilt $v_j = 0$.

Beweis. Für jede Testfunktion $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ gilt

$$0 = - \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_k(x) \partial_j \varphi(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (\partial_j u_k(x)) \varphi(x) dx = \int_{\Omega} v_j(x) \varphi(x) dx \quad (3.1.2)$$

und damit $v_j(x) = 0$ fast überall. □

Damit wird $\partial_j : H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ zu einem beschränkten linearen Operator mit

$$\|\partial_j u\| \leq |u|_{(1)} \leq \|u\|_{(1)}. \quad (3.1.3)$$

Wir bezeichnen weiter mit $H^{-1}(\Omega)$ den Dualraum zu $H_0^1(\Omega)$ und mit $\partial_j : L^2(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ den adjungierten Operator zu $-\partial_j : H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$. Weiter liefert die dichte Einbettung $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ durch Transponieren eine Einbettung $L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$.

Weiter bezeichne (\cdot, \cdot) das L^2 -Innenprodukt und wir nutzen ebenso das Innenprodukt für die Dualität zwischen $H_0^1(\Omega)$ und $H^{-1}(\Omega)$. Jede Linearform $F \in H^{-1}(\Omega)$ ist von der Form $F = f + \sum_{j=1}^n \partial_j f_j$ mit $f, f_j \in L^2(\Omega)$, wobei

$$(u, F) = (u, f) - \sum_{j=1}^n (\partial_j u, f_j) = \int_{\Omega} u(x) \overline{f(x)} dx - \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} (\partial_j u(x)) \overline{f_j(x)} dx. \quad (3.1.4)$$

3.1.2 Lemma (Friedrichs¹). Sei Ω beschränkt. Dann gilt für alle $u \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \leq (\text{diam}(\Omega))^2 \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx. \quad (3.1.5)$$

Beweis. Es gilt für $u \in C_c^\infty(\Omega)$

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_1} \partial_1 u(t, x_2, \dots, x_n) dt \quad (3.1.6)$$

und damit nach Integration und Anwendung von Fubini

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx &= \int_{\Omega} \left| \int_{-\infty}^{x_1} \partial_1 u(t, x_2, \dots, x_n) dt \right|^2 dx \\ &= \sup_{v \in L^2(\Omega), \|v\|=1} \left| \int_{\Omega} \int_{-\infty}^{x_1} \partial_1 u(t, x_2, \dots, x_n) dt v(x) dx \right|^2 \\ &= \sup_{v \in L^2(\Omega), \|v\|=1} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Omega \cap \{x_1 \geq t\}} \partial_1 u(t, x_2, \dots, x_n) v(x) dx dt \right|^2 \\ &\leq \left(\int_{m_1}^{M_1} \int_{\Omega \cap \{x_1 \geq t\}} |\partial_1 u(t, x_2, \dots, x_n)|^2 dx dt \right) \\ &\quad \left(\int_{m_1}^{M_1} \int_{\Omega \cap \{x_1 \geq t\}} |v(x)|^2 dx dt \right) \\ &\leq (M_1 - m_1)^2 \int_{\Omega} |\partial_1 u(x)|^2 dx \leq \text{diam}(\Omega)^2 \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

sowie der Ausnutzung der Ungleichung von Cauchy–Schwarz. Hierbei bezeichnet $m_1 = \inf_{x \in \Omega} x_1$ und $M_1 = \sup_{x \in \Omega} x_1$. \square

3.1.3. Im folgenden soll der Operator

$$P_0 u(x) = - \sum_{i,j=1}^n \partial_i (a_{i,j}(x) \partial_j u(x)) \quad (3.1.8)$$

mit beschränkten Koeffizienten $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$ und der Voraussetzung $a_{i,j}(x) = \overline{a_{j,i}(x)}$ untersucht werden. Nach Konstruktion bildet dieser $P_0 : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ stetig ab, wir fragen uns, ob zu allen $F \in H^{-1}(\Omega)$ Funktionen $u \in H_0^1(\Omega)$ mit

$$P_0 u = F \quad (3.1.9)$$

existieren. Wir benötigen eine weitere Voraussetzung. Angenommen, die Koeffizienten erfüllen

$$\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x) \overline{\xi_i} \xi_j \geq c_0 |\xi|^2, \quad \xi \in \mathbb{C}^n \quad (3.1.10)$$

gleichmäßig in $x \in \Omega$, so gilt (indem man für ξ_j einfach $\partial_j u(x)$ einsetzt)

$$\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x) \overline{\partial_i u(x)} \partial_j u(x) \geq c_0 |\nabla u(x)|^2 \quad (3.1.11)$$

¹KURT OTTO FRIEDRICHS, 1901–1982

und nach Integration in x

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \overline{\partial_i u(x)} a_{i,j}(x) \partial_j u(x) \, dx \geq c_0 \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 \, dx = c_0 |u|_{(1)}^2. \quad (3.1.12)$$

Ebenso impliziert die Beschränktheit der Koeffizienten $a_{i,j}(x)$ sofort die obere Abschätzung

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \overline{\partial_i u(x)} a_{i,j}(x) \partial_j u(x) \, dx \leq c_1 \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 \, dx = c_1 |u|_{(1)}^2. \quad (3.1.13)$$

Die Abschätzung (3.1.10) wird als *gleichmäßige Elliptizität* des Operators P_0 bezeichnet.

3.1.4 Satz. *Sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ beschränkt. Angenommen, der Operator P_0 aus (3.1.8) erfüllt (3.1.10). Dann existiert zu jedem $F \in H^{-1}(\Omega)$ genau ein $u \in H_0^1(\Omega)$ mit $P_0 u = F$.*

Beweis. Wegen (3.1.12) in Kombination mit (3.1.13) und der Friedrichsschen Ungleichung definiert

$$\llbracket u, v \rrbracket_{P_0} = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{i,j}(x) \overline{\partial_i v(x)} \partial_j u(x) \, dx \quad (3.1.14)$$

auf $H_0^1(\Omega)$ ein äquivalentes Innenprodukt. Löst nun u die Gleichung $P_0 u = F$, so gilt für jedes $v \in H_0^1(\Omega)$

$$(P_0 u, v) = \llbracket u, v \rrbracket_{P_0} = (F, v) \quad (3.1.15)$$

und u ist das bezüglich $\llbracket \cdot, \cdot \rrbracket_{P_0}$ darstellende Element des Funktionals F . Umgekehrt existiert zu jedem $F \in H^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))'$ nach dem Darstellungssatz von Fréchet–Riesz² genau ein Element $u \in H_0^1(\Omega)$ mit $\llbracket u, v \rrbracket_{P_0} = (F, v)$ für jedes v und dieses löst nach Konstruktion gerade $P_0 u = F$. \square

Im folgenden soll allgemeiner der Operator P mit

$$Pu(x) = - \sum_{i,j=1}^n \partial_i (a_{i,j}(x) \partial_j u(x)) + \sum_{i=1}^n (\partial_i (a_i(x) u(x)) + b_i(x) \partial_i u(x)) + a(x) u(x) \quad (3.1.16)$$

für $u \in H_0^1(\Omega)$ und mit Koeffizienten $a_{i,j}, b_i, a \in L^\infty(\Omega)$, für die $a_{j,i}(x) = \overline{a_{i,j}(x)}$ gilt, betrachtet werden. Dieser ist wiederum stetig als Abbildung $P : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$. Bevor wir die zugehörige Lösungstheorie genauer untersuchen wollen, benötigen wir weitere Hilfsmittel.

3.1.5 Lemma (Poincaré³). *Sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und konvex. Dann gilt für jedes $u \in C^1(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ mit $\nabla u \in L^2(\Omega)$ die Ungleichung*

$$\int_{\Omega} \left| u(x) - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(y) \, dy \right|^2 \, dx \leq C \operatorname{diam}(\Omega)^2 \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 \, dx, \quad (3.1.17)$$

wobei C unabhängig von Ω gewählt werden kann.

²MAURICE RENÉ FRÉCHET, 1878–1973 und FRIGYES RIESZ, 1880–1956

Satz (Fréchet–Riesz). *Sei H ein Hilbertraum und $\varphi : H \rightarrow \mathbb{C}$ antilinear und stetig. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Element $u_\varphi \in H$ mit $\phi(v) = (u_\varphi, v)$ für alle $v \in H$.*

³JULES HENRI POINCARÉ, 1854–1912

Beweis. Wir folgen dem Originalbeweis von Poincaré. Da beide Seiten der Ungleichung unverändert bleiben wenn wir Konstanten addieren, genügt es, die Ungleichung für Funktionen $u(x)$ mit $\int_{\Omega} u(x) dx = 0$ zu beweisen. Wir nehmen weiter ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass die Funktionen reellwertig sind. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx &= \frac{1}{2|\Omega|} \int_{\Omega} \int_{\Omega} (u(x) - u(y))^2 dx dy \\
 &= \frac{1}{2|\Omega|} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \left(\int_0^1 (x-y) \cdot \nabla u(\theta x + (1-\theta)y) d\theta \right)^2 dx dy \\
 &\leq \frac{(\text{diam}(\Omega))^2}{2|\Omega|} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \int_0^1 |\nabla u(\theta x + (1-\theta)y)|^2 d\theta dx dy \\
 &\leq \frac{(\text{diam}(\Omega))^2}{2|\Omega|\theta^n} \int_0^1 \int_{\Omega} \int_{\Omega} 1_{\theta\Omega+(1-\theta)y}(z) |\nabla u(z)|^2 dz dy d\theta \\
 &\leq \frac{(\text{diam}(\Omega))^2}{2|\Omega|} \int_{\Omega} \left(\int_0^1 \theta^{-n} \int_{\Omega} 1_{\theta\Omega+(1-\theta)y}(z) dy d\theta \right) |\nabla u(z)|^2 dz \\
 &\leq C(\text{diam}(\Omega))^2 \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx
 \end{aligned} \tag{3.1.18}$$

mit der expliziten Konstanten

$$C = \frac{1}{2|\Omega|} \int_0^1 \max\{\theta^{-n}, (1-\theta)^{-n}\} d\theta, \tag{3.1.19}$$

da

$$\int_{\Omega} 1_{\theta\Omega+(1-\theta)y}(z) dy = |\Omega \cap (1-\theta)^{-1}(z - \theta\Omega)| \leq \max\left\{1, \frac{\theta^n}{(1-\theta)^n}\right\} |\Omega|. \tag{3.1.20}$$

□

3.1.6 Satz (Rellich⁴). Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ beschränkt. Dann ist die Einbettung $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ kompakt, jede in der Norm $|\cdot|_{(1)}$ beschränkte Folge aus $H_0^1(\Omega)$ besitzt eine in $L^2(\Omega)$ konvergente Teilfolge.

Beweis. Wir können Funktionen aus $H_0^1(\Omega)$ auf einen größeren Quader Q durch Null isometrisch zu Funktionen aus $H_0^1(Q)$ fortsetzen. Zerlegt man den Quader Q in Teilquader Q_j mit $\text{diam}(Q_j) < \varepsilon$, $Q_i \cap Q_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und $Q = \cup_j Q_j$ modulo Nullmengen, so gilt einerseits als Folgerung der Ungleichung von Poincaré

$$\int_{Q_j} |u(x)|^2 dx \leq \frac{1}{|Q_j|} \left(\int_{Q_j} u(x) dx \right)^2 + C(\text{diam}(Q_j))^2 \int_{Q_j} |\nabla u(x)|^2 dx \tag{3.1.21}$$

für $u \in H_0^1(\Omega)$ und nach Summation über j damit

$$\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx = \sum_j \int_{Q_j} |u(x)|^2 dx \leq \sum_j \frac{1}{|Q_j|} \left(\int_{Q_j} u(x) dx \right)^2 + C\varepsilon^2 \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx. \tag{3.1.22}$$

⁴FRANZ RELLICH, 1906–1955

Sei nun $u_k \in H_0^1(\Omega)$ gegeben mit $|u_k|_{(1)} \leq 1$. Dann gilt $\|u_k\| \leq 1$ und es existiert somit eine in L^2 schwach konvergente Teilfolge. Sei diese wiederum mit u_k bezeichnet. Für diese gilt

$$\|u_k - u_\ell\|^2 \leq \sum_j \frac{1}{|Q_j|} \left(\int_{Q_j} u_k(x) - u_\ell(x) dx \right)^2 + C\varepsilon^2 |u_k - u_\ell|_{(1)}^2. \quad (3.1.23)$$

Der zweite Summand ist kleiner als $2C\varepsilon^2$, während der erste aufgrund der schwachen Konvergenz

$$\int_{Q_j} u_k(x) - u_\ell(x) dx = \int_{\Omega} 1_{Q_j}(x) (u_k(x) - u_\ell(x)) dx \longrightarrow 0, \quad k, \ell \rightarrow 0, \quad (3.1.24)$$

gegen Null strebt. Damit ist aber u_k eine Cauchyfolge in der L^2 -Norm und somit konvergent. \square

3.1.7. Wir betrachten die Gleichung

$$Pu = F \quad (3.1.25)$$

für den Operator $P = P_0 + R$ aus (3.1.16) und fragen, unter welchen Voraussetzungen zu gegebenem $F \in H^{-1}(\Omega)$ eine Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ existiert und wann diese eindeutig bestimmt ist. Wir nehmen wiederum an, dass Ω beschränkt ist, und versehen den Hilbertraum $H_0^1(\Omega)$ mit dem äquivalenten Innenprodukt $\llbracket \cdot, \cdot \rrbracket_{P_0}$, es gilt also für beliebige $u, v \in H_0^1(\Omega)$

$$(P_0 u, v) = \llbracket u, v \rrbracket_{P_0} \quad (3.1.26)$$

und zu $R: H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ existiert ein Operator $K: H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ mit

$$(Ru, v) = \llbracket Ku, v \rrbracket_{P_0}, \quad (3.1.27)$$

nämlich $K = P_0^{-1}R$. Darüberhinaus wird das Funktional $F \in H^{-1}(\Omega)$ durch $f = P_0^{-1}F \in H_0^1(\Omega)$ dargestellt,

$$(F, v) = \llbracket f, v \rrbracket_{P_0}. \quad (3.1.28)$$

Damit gilt für jede Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ und beliebiges $v \in H_0^1(\Omega)$

$$0 = (Pu - F, v) = \llbracket u, v \rrbracket_{P_0} + \llbracket Ku, v \rrbracket_{P_0} - \llbracket f, v \rrbracket_{P_0} \quad (3.1.29)$$

und die Gleichung $Pu = F$ ist äquivalent zu

$$u + Ku = f. \quad (3.1.30)$$

3.1.8 Lemma. *Der so konstruierte Operator $K: H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ ist kompakt.*

Beweis. Der Beweis basiert auf dem Satz von Rellich. Sei dazu $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)$ eine schwach konvergente Folge. Da K stetig ist, ist ebenso $(Ku_k)_{k \in \mathbb{N}}$ schwach konvergent und nach Satz 3.1.6 sind $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sowie $(Ku_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in L^2 normkonvergent.

Weiterhin gilt nach Definition von R

$$\begin{aligned} \llbracket Ku, v \rrbracket_{P_0} &= (Ru, v) \\ &= \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} (b_j(x) \partial_j u(x) \overline{v(x)} - a_i(x) u(x) \overline{\partial_j v(x)}) dx + \int_{\Omega} a(x) u(x) \overline{v(x)} dx \end{aligned} \quad (3.1.31)$$

und damit die Abschätzung

$$|\llbracket Ku, v \rrbracket_{P_0}| \leq C_1 |u|_{(1)} \|v\| + C_2 \|u\| |v|_{(1)} + C_3 \|u\| \|v\| \quad (3.1.32)$$

mit entsprechenden Konstanten $C_1, C_2, C_3 > 0$. Also folgt

$$\begin{aligned} \llbracket K(u_k - u_\ell), K(u_k - u_\ell) \rrbracket_{P_0} &\leq C_1 |u_k - u_\ell|_{(1)} \|Ku_k - Ku_\ell\| \\ &\quad + C_2 \|u_k - u_\ell\| |Ku_k - Ku_\ell|_{(1)} \\ &\quad + C_3 \|u_k - u_\ell\| \|Ku_k - Ku_\ell\| \\ &\longrightarrow 0, \quad k, \ell \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (3.1.33)$$

da $\|u_k - u_\ell\| \rightarrow 0$, $\|Ku_k - Ku_\ell\| \rightarrow 0$ und andererseits $|u_k - u_\ell|_{(1)}$ und $|Ku_k - Ku_\ell|_{(1)}$ beschränkt sind. Damit konvergiert aber $(Ku_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in der H_0^1 -Norm und das Lemma ist bewiesen. \square

Zusammen mit P betrachten wir den (formal) adjungierten Operator

$$P^*u(x) = - \sum_{i,j=1}^n \partial_i (a_{i,j}(x) \partial_j u(x)) - \sum_{i=1}^n (\partial_i (\overline{b_i(x)} u(x)) + \overline{a_i(x)} \partial_i u(x)) + \overline{a(x)} u(x), \quad (3.1.34)$$

dieser bildet $P^* : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ ab und erfüllt für alle $u, v \in H_0^1(\Omega)$

$$(Pu, v) = (u, P^*v). \quad (3.1.35)$$

Weiter bezeichnen wir zu einer Menge $N \subset H_0^1(\Omega)$ durch

$${}^\perp N = \{F \in H^{-1}(\Omega) : \forall_{u \in N} (F, u) = 0\} \quad (3.1.36)$$

ihren Annihilator im Dualraum.

3.1.9 Satz (Fredholm⁵). *Sei Ω beschränkt und erfülle der Operator $P : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ aus (3.1.16) die Elliptizitätsbedingung (3.1.10). Dann gelten die folgenden Aussagen.*

- (i) *Der Nullraum des Operators $\ker(P) = \{u \in H_0^1(\Omega) : Pu = 0\}$ ist endlichdimensional.*
- (ii) *Das Bild $\text{ran}(P) = \{Pu : u \in H_0^1(\Omega)\}$ ist abgeschlossen.*
- (iii) *Es gilt $\text{ran}(P) = {}^\perp \ker(P^*)$.*
- (iv) *Es gilt $\dim \ker(P) = \dim \ker(P^*)$.*

Beweis. Wir versehen $H_0^1(\Omega)$ mit dem äquivalenten Innenprodukt $\llbracket \cdot, \cdot \rrbracket_{P_0}$ und betrachten das äquivalente Problem $u + Ku = f$. Dann gilt $\ker(P) = \ker(I + K)$ und eingeschränkt auf $\ker(P)$ gilt $I = -K$. Da die Identität nur auf endlichdimensionalen Räumen kompakt sein kann, muß $\dim \ker(P) < \aleph_0$ gelten und (i) ist gezeigt. • (ii) Der Operator $P_0 : \text{ran}(I + K) \rightarrow \text{ran}(P)$ ist ein Isomorphismus. Damit ist $\text{ran} P$ abgeschlossen genau dann, wenn $\text{ran}(I + K)$ abgeschlossen ist. Für einen Beweis dieser Aussage nutzen wir, dass in einem Hilbertraum kompakte Operatoren Normgrenzwerte endlichdimensionaler Operatoren sind, es also insbesondere einen endlichdimensionalen Operator E mit $\|K - E\| < 1$ gibt. Damit ist $I + K - E$ stetig invertierbar mit Inverser

$$(I + K - E)^{-1} = I + \sum_{k=1}^{\infty} (E - K)^k \quad (3.1.37)$$

⁵ERIK IVAR FREDHOLM, 1866–1927

und es gilt mit $\tilde{E} = (I + K - E)^{-1}E$

$$\operatorname{ran}(I + K) = (I + K - E) \operatorname{ran}(I + \tilde{E}). \quad (3.1.38)$$

Also ist $\operatorname{ran}(I + K)$ genau dann abgeschlossen, wenn $\operatorname{ran}(I + \tilde{E})$ abgeschlossen ist. Zerlegt man nun den Raum in den endlichdimensionalen Teil $\operatorname{ran}(\tilde{E}) + \operatorname{ran}(\tilde{E}^*)$ und sein orthogonales Komplement $(\operatorname{ran}(\tilde{E}) + \operatorname{ran}(\tilde{E}^*))^\perp \subset \ker \tilde{E}$, so stimmt auf letzterem $I + \tilde{E}$ mit der Identität überein und auf ersterem ist der Bildraum (da der Teilraum endlichdimensional ist) abgeschlossen. Damit ist aber $\operatorname{ran}(I + \tilde{E})$ als orthogonale direkte Summe eines endlichdimensionalen Raumes und eines abgeschlossenen Teilraumes abgeschlossen. • **(iii)** Dies entspricht der Fredholmschen Alternative. Es gilt $v \in \ker(P^*)$ genau dann, wenn für jedes $u \in H_0^1(\Omega)$

$$0 = (u, P^*v) = (Pu, v) \quad (3.1.39)$$

und somit $v \in {}^\perp \operatorname{ran}(P)$. Da $\operatorname{ran}(P)$ abgeschlossen ist, ist das zu $\operatorname{ran}(P) = {}^\perp \ker(P^*)$ äquivalent.

• **(iv)** Es genügt, die äquivalente Aussage $\dim \ker(I + K) = \dim(I + K^*)$ zu beweisen. Diese folgt aus der Argumentation von **(ii)** zusammen mit $\dim \ker(I + \tilde{E}) = \dim \ker(I + \tilde{E}^*)$ als bekannte Aussage über Matrizen im endlichdimensionalen Raum $\operatorname{ran}(\tilde{E}) + \operatorname{ran}(\tilde{E}^*)$. \square

3.1.10. Zum Schluß betrachten wir noch Probleme der Form

$$Pu - \lambda u = F \quad (3.1.40)$$

zu Parametern $\lambda \in \mathbb{C}$ und untersuchen Lösbarkeitsaussagen in Abhängigkeit von λ . Die Gleichung ist wiederum äquivalent zu

$$u + Ku - \lambda Lu = f \quad (3.1.41)$$

mit dem durch

$$(u, v) = \llbracket Lu, v \rrbracket_{P_0}, \quad u, v \in H_0^1(\Omega), \quad (3.1.42)$$

bestimmten kompakten Operator $L : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ und $f = P_0^{-1}F$. Wir werden wieder zwischen beiden Darstellungen wechseln, um Aussagen zu beweisen.

Lemma. *Sei Ω beschränkt. Dann existiert ein $M > 0$, so dass für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} \lambda \leq -M$ der Operator $P - \lambda : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ stetig invertierbar ist.*

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}((P - \lambda)u, u) &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{i,j}(x) \partial_j u(x) \overline{\partial_i u(x)} dx \\ &\quad + \operatorname{Re} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} (b_i(x) \partial_i u(x) \overline{u(x)} - a_i(x) u(x) \overline{\partial_i u(x)}) dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \operatorname{Re}(a(x) - \lambda) u(x) \overline{u(x)} dx \\ &\geq c_0 |u|_{(1)}^2 - c_1 |u|_{(1)} \|u\| - (c_2 + \operatorname{Re} \lambda) \|u\|^2 \end{aligned} \quad (3.1.43)$$

und für hinreichend negativen Realteil von λ ist die rechte Seite nach unten durch ein positives Vielfaches von $|u|_{(1)}^2$ abschätzbar. Damit ist aber $P - \lambda$ injektiv und somit nach obigem Theorem stetig invertierbar. \square

3.1.11 Satz (Fredholm). *Sei Ω beschränkt und erfülle der Operator $P : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ aus (3.1.16) die Elliptizitätsbedingung (3.1.10). Dann gelten die folgenden Aussagen.*

- (i) *Es existiert eine diskrete Teilmenge $\Sigma \subset \mathbb{C}$ ohne Häufungspunkte in \mathbb{C} , so dass für alle $\lambda \notin \Sigma$ der Operator $P - \lambda : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ stetig invertierbar ist.*
- (ii) *Für $\lambda \in \Sigma$ ist $\dim \ker(P - \lambda) = \text{codim} \text{ran}(P - \lambda) > 0$ und der Operator ist weder injektiv noch surjektiv.*

Beweis. Sei λ_0 so gewählt, dass $I + K - \lambda_0 L$ stetig invertierbar ist. Wir schreiben (3.1.41) als

$$u + Ku - \lambda_0 Lu = (\lambda - \lambda_0)Lu + f. \quad (3.1.44)$$

Diese Gleichung ist äquivalent zu

$$u - (\lambda - \lambda_0)(I + K - \lambda_0 L)^{-1}Lu = (I + K - \lambda_0 L)^{-1}f. \quad (3.1.45)$$

Da L kompakt war, ist auch $(I + K - \lambda_0 L)^{-1}L$ kompakt. Ist nun

$$\Sigma = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker((I + K - \lambda_0 L)^{-1}L - (\lambda - \lambda_0)^{-1}) \neq \{0\}\} \quad (3.1.46)$$

die Menge aller Zahlen λ , für die $(\lambda - \lambda_0)^{-1}$ ein Eigenwert des Operators $(I + K - \lambda_0 L)^{-1}L$ ist, so impliziert der Spektralsatz für kompakte Operatoren gerade die Aussagen (i) und (ii). \square

Ist P sogar selbstadjungiert, stimmt also mit dem Operator P^* aus (3.1.34) überein, so gilt noch mehr. Wir wählen $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ hinreichend groß, so dass $((P + \lambda_0)u, u) > 0$ für alle $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ ist. Dann bestimmt

$$\llbracket u, v \rrbracket_P = (Pu, v) + \lambda_0(u, v) \quad (3.1.47)$$

auf $H_0^1(\Omega)$ ein äquivalentes Innenprodukt. Damit gilt

3.1.12 Korollar (Spektralsatz). *Angenommen es gilt zusätzlich $a_i(x) = -\overline{b_i(x)}$ und $a(x)$ sei reellwertig. Dann ist*

$$\Sigma = \{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R} \quad (3.1.48)$$

(die λ_k mehrfach vorkommend entsprechend ihrer Vielfachheit $\dim \ker(P - \lambda_k)$) und es existiert eine Folge $u_k \in \ker(P - \lambda_k)$ mit der Normierung

$$(u_k, u_\ell) = \delta_{k,\ell}, \quad (3.1.49)$$

so dass für jedes $u \in H_0^1(\Omega)$

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\llbracket u, u_k \rrbracket_P}{\llbracket u_k, u_k \rrbracket_P} u_k = \sum_{k=1}^{\infty} (u, u_k) u_k \quad (3.1.50)$$

als H_0^1 -konvergente Reihe und ebenso für jedes $v \in L^2(\Omega)$

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} (v, u_k) u_k \quad (3.1.51)$$

als L^2 -konvergente Reihe gilt.

Beweis. Sei B der durch

$$(u, v) = \llbracket Bu, v \rrbracket_P, \quad u, v \in H_0^1(\Omega) \quad (3.1.52)$$

definierte Operator. Dieser ist kompakt, selbstadjungiert und positiv. Weiter gilt für beliebiges $u, v \in H_0^1(\Omega)$

$$((P - \lambda)u, v) = \llbracket u, v \rrbracket_P - (\lambda + \lambda_0)\llbracket Bu, v \rrbracket_P \quad (3.1.53)$$

und $\ker(P - \lambda) = \ker(I - (\lambda + \lambda_0)B)$. Damit kann der Spektralsatz für kompakte selbstadjungierte Operatoren angewandt werden und dieser liefert die Existenz einer Nullfolge μ_k und von paarweise $\llbracket \cdot, \cdot \rrbracket_P$ -orthogonalen Eigenfunktionen $u_k \in \ker(B - \mu_k)$ mit

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\llbracket u, u_k \rrbracket_P}{\llbracket u_k, u_k \rrbracket_P} u_k. \quad (3.1.54)$$

Mit $(\lambda_k + \lambda_0)^{-1} = \mu_k$ folgt die erste Behauptung (3.1.49). Wir normieren die Funktionen u_k so, dass $\llbracket u_k, u_k \rrbracket_P = 1$ gilt. Weiter gilt

$$\llbracket u_k, u_\ell \rrbracket_P = (\lambda_k + \lambda_0)(u_k, u_\ell) = 0, \quad (3.1.55)$$

was die L^2 -Orthogonalität impliziert. Da $H_0^1(\Omega)$ dicht in $L^2(\Omega)$ ist, folgt (3.1.51). \square

3.1.13 Beispiel. Betrachtet man speziell $P = -\Delta$ auf einem beschränkten Gebiet Ω , so ergibt sich die Existenz einer Folge von Dirichlet-Eigenfunktionen $u_k \in H_0^1(\Omega)$ zu einer Folge von Eigenwerten $\lambda_k > 0$, $\lambda_k \nearrow \infty$,

$$-\Delta u_k(x) = -\sum_{j=1}^n \partial_j^2 u_k(x) = \lambda_k u_k(x), \quad (3.1.56)$$

welche eine Orthonormalbasis des $L^2(\Omega)$ sowie (eine nicht normierte) Orthogonalbasis des $H_0^1(\Omega)$ zum zur $|\cdot|_{(1)}$ passenden Innenprodukt

$$\llbracket u, v \rrbracket_{-\Delta} = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \overline{\nabla v(x)} \, dx = -(\Delta u, v) = -(u, \Delta v) \quad (3.1.57)$$

darstellt. Die optimale Konstante in der Friedrichsschen Ungleichung ist durch den ersten Eigenwert λ_1 ausdrückbar, da für jedes $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 \, dx &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\llbracket u, u_k \rrbracket_{-\Delta}|^2}{|\llbracket u_k, u_k \rrbracket_{-\Delta}|} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|(u, \Delta u_k)|^2}{|(u_k, \Delta u_k)|} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |(u, u_k)|^2 \\ &\geq \lambda_1 \sum_{k=1}^{\infty} |(u, u_k)|^2 = \lambda_1 \int_{\Omega} |u(x)|^2 \, dx \end{aligned} \quad (3.1.58)$$

gilt. Die Optimalität folgt durch Einsetzen von u_1 für u .

3.2 Regularität

Bisher haben wir Probleme der Form $Pu = f$ zu $f \in H^{-1}(\Omega)$ betrachtet und eine Lösungstheorie für Lösungen in $H_0^1(\Omega)$ aufgebaut. Es stellt sich die Frage, ob für $f \in L^2(\Omega)$ die Lösungen regulärer sind.

3.2.1. Spezialfall. Wir betrachten zuerst den Fall des Laplaceoperators auf einem konvexen beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit glattem Rand $\partial\Omega$ und zeigen, dass aus $\Delta u \in L^2(\Omega)$ zusammen mit Dirichletrandbedingungen L^2 -Schranken für alle zweiten Ableitungen folgen. Die Grundidee des Beweises ist partielles Integrieren. Sei dazu $u \in C^3(\overline{\Omega})$ reellwertig mit $u|_{\partial\Omega} = 0$. Wegen der bekannten Identität

$$(\Delta u(x))(\Delta u(x)) = \operatorname{div}((\Delta u(x))\nabla u(x)) - \nabla \Delta u(x) \cdot \nabla u(x) \quad (3.2.1)$$

zusammen mit

$$\begin{aligned} \nabla \Delta u(x) \cdot \nabla u(x) &= \sum_{i=1}^n \left(\partial_i \sum_{j=1}^n \partial_j^2 u \right) \partial_i u(x) \\ &= \sum_{j=1}^n \partial_j \left(\sum_{i=1}^n \partial_i \partial_j u(x) \partial_i u(x) \right) - \sum_{i,j=1}^n \partial_i \partial_j u(x) \partial_j \partial_i u(x) \\ &= \operatorname{div}(H_u(x)\nabla u(x)) - \operatorname{tr}(H_u(x)H_u(x)^\top) \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

für die Hessematrix $H_u(x)$ der Funktion $u(x)$ folgt dann

$$\int_{\Omega} (\Delta u(x))^2 dx = \oint_{\partial\Omega} ((\Delta u(x))\nabla u(x) - H_u(x)\nabla u(x)) \cdot \vec{d}\sigma + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} |\partial_i \partial_j u(x)|^2 dx. \quad (3.2.3)$$

Um damit die partiellen zweiten Ableitungen durch Δu kontrollieren zu können, ist das Randintegral abzuschätzen. Dazu zeigen wir, dass der Integrand in jedem Randpunkt aufgrund der Konvexität des Gebietes und der Randbedingung für u nichtnegativ ist.

Sei dazu $x_* \in \partial\Omega$ fix. Wir führen lokal um x_* Koordinaten ein (beziehungsweise verschieben und drehen das Gebiet), in denen x_* gerade $y = 0$ entspricht, die Normalenrichtung mit der y_n -Richtung zusammenfällt und der Rand $\partial\Omega$ durch $y_n = \omega(y_1, \dots, y_{n-1})$ parametrisiert wird. Dabei ist $\partial\omega/\partial y_j = 0$ in $y = 0$ und durch Differenzieren der Identität

$$u(y_1, \dots, y_{n-1}, \omega(y_1, \dots, y_{n-1})) = 0 \quad (3.2.4)$$

folgt für $j = 1, \dots, n-1$

$$0 = \frac{\partial u}{\partial y_j} + \frac{\partial u}{\partial y_n} \frac{\partial \omega}{\partial y_j}, \quad \text{also für } y = 0 \text{ insbesondere } \frac{\partial u}{\partial y_j} = 0. \quad (3.2.5)$$

Weiter folgt durch nochmaliges Differenzieren für $i, j = 1, \dots, n-1$

$$0 = \frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial y_j} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial y_n} \frac{\partial \omega}{\partial y_j} + \frac{\partial u}{\partial y_n} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y_i \partial y_j} \quad (3.2.6)$$

also für $y = 0$ insbesondere

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial y_j} = -\frac{\partial u}{\partial y_n} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y_i \partial y_j}, \quad i, j = 1, \dots, n-1. \quad (3.2.7)$$

Damit kann man den Integranden des Randintegrals bestimmen. Es gilt im Punkt $y = 0$ und mit dem Normalenvektor $\vec{\nu}$

$$\Delta u \nabla u \cdot \vec{\nu} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y_n^2} - \frac{\partial u}{\partial y_n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y_j^2} \right) \frac{\partial u}{\partial y_n} \quad (3.2.8)$$

sowie wegen $\nabla u = (0, \dots, 0, \partial_{y_n} u)^\top$

$$(H_u \nabla u) \cdot \vec{\nu} = \frac{\partial^2 u}{\partial y_n^2} \frac{\partial u}{\partial y_n}. \quad (3.2.9)$$

Also folgt

$$((\Delta u) \nabla u - H_u \nabla u) \cdot \vec{\nu} = - \left(\frac{\partial u}{\partial y_n} \right)^2 \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y_j^2} \geq 0 \quad (3.2.10)$$

aufgrund der Konvexität des Randes und der daraus folgenden Konvexität von $-\omega$. Damit haben wir gezeigt, dass für $u \in C^3(\overline{\Omega})$ mit $u|_{\partial\Omega} = 0$ die Abschätzung

$$|u|_{(2)} \leq \|\Delta u\| \quad (3.2.11)$$

für die Sobolev-Seminorm

$$|u|_{(2)}^2 = \sum_{|\alpha|=2} \int_{\Omega} |\partial^\alpha u(x)|^2 dx \quad (3.2.12)$$

gilt. Die Abschätzung (3.2.11) überträgt sich nicht automatisch auf alle Funktionen $u \in H_0^1(\Omega)$ mit $\Delta u \in L^2(\Omega)$, dazu benötigt es weiterer Dichtheitsaussagen. Wir werden das im Anschluß an den allgemeinen Fall diskutieren.

3.2.2. Allgemeiner Fall. Wir nehmen nun an, dass die Koeffizienten $a_{i,j} = \overline{a_{j,i}}$ und a_i beschränkte Ableitungen besitzen und betrachten (die nun allgemeinen) Operatoren der Form

$$Pu(x) = - \sum_{i,j=1}^n \partial_i (a_{i,j}(x) \partial_j u(x)) + \sum_{j=1}^n a_j(x) \partial_j u(x) + a(x) u(x). \quad (3.2.13)$$

Wir setzen wiederum gleichmäßige Elliptizität sowie Glattheit des Randes von $\partial\Omega$ voraus. Differenzierbarkeit der Koeffizienten wird für die partielle Integration benötigt.

Lemma (Ladyshenskaja⁶). *Sei P aus (3.2.13) gleichmäßig elliptisch auf einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit glattem Rand. Dann existieren Konstanten $C_1, C_2 > 0$, so dass für jede Funktion $u \in C^3(\overline{\Omega})$ mit $u|_{\partial\Omega} = 0$*

$$\sum_{|\alpha|=2} \int_{\Omega} |\partial^\alpha u(x)|^2 dx \leq C_1 \int_{\Omega} |Pu(x)|^2 dx + C_2 \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \quad (3.2.14)$$

gilt.

Beweis. Der Beweis beruht wieder auf zweifachem partiellem Integrieren. Um die Notation zu vereinfachen, verzichten wir im folgenden auf Terme niedriger Ordnung der Form $\int_{\Omega} \partial^\alpha u(x) \partial^\beta u(x) dx$ mit $|\alpha + \beta| \leq 3$, $|\alpha|, |\beta| \leq 2$, diese kann man in die verbleibenden Terme (bei Änderung der Konstanten) absorbieren. Terme dieser Form werden im im Folgenden einfach durch *l.o.t.* abgekürzt.

⁶OLGA LADYSHENSKAJA (Ольга Александровна Ладыженская), 1922–2004

Sei also $u \in C^3(\bar{\Omega})$ und gelte $u|_{\partial\Omega} = 0$. Dann liefert partielles Integrieren⁷

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} Pu(x)\overline{Pu(x)} dx &= \sum_{i,j,k,l=1}^n \int_{\Omega} a_{i,j}(x)\partial_i\partial_j u(x)\overline{a_{k,l}(x)\partial_k\partial_l u(x)} dx + l.o.t. \\ &= \sum_{i,j,k,l=1}^n \int_{\Omega} a_{i,j}(x)\partial_k\partial_j u(x)\overline{a_{k,l}(x)\partial_i\partial_l u(x)} dx + l.o.t. \\ &\quad + \sum_{i,j,k,l=1}^n \oint_{\partial\Omega} a_{i,j}(x)(\partial_i\partial_j u(x)\nu_k - \partial_k\partial_j u(x)\nu_i)\overline{a_{k,l}(x)\partial_l u(x)} d\sigma \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

mit dem Normalenvektor $\vec{\nu}(x)$ in Randpunkten $x \in \partial\Omega$. Wir betrachten die Terme einzeln. Für das erste Integral nutzen wir die gleichmäßige Elliptizität von P in der Form

$$\sum_{i,j,k,l=1}^n a_{i,j}(x)\partial_k\partial_j u(x)\overline{a_{k,l}(x)\partial_i\partial_l u(x)} \geq \tilde{c}_0 \sum_{i,j} |\partial_i\partial_j u(x)|^2, \quad (3.2.16)$$

genauer: für jedes $x \in \Omega$ finden wir lokal eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^n , in der die Matrix A Diagonalf orm besitzt; in dieser Basis sind die Diagonaleinträge von A sämtliche positiv und die Hessematrizen durchlaufen ebenso eine Ähnlichkeitstransformation, so dass die Ungleichung aus $\text{tr}(AH_u H_u^* A^*) = \text{tr}(A^* A H_u H_u^*) \geq \tilde{c}_0 \text{tr}(H_u H_u^*)$ folgt. Damit folgt nach Integration

$$\sum_{i,j,k,l=1}^n \int_{\Omega} a_{i,j}(x)\partial_k\partial_j u(x)\overline{a_{k,l}(x)\partial_i\partial_l u(x)} dx \geq \tilde{c}_0 |u|_{(2)}. \quad (3.2.17)$$

Als nächstes betrachten wir den Randterm und suchen zuerst nach einer geeigneten punktw eisen Abschätzung des Integranden. Lokal um einen Randpunkt $x_* \in \partial\Omega$ wählen wir wieder Koordinatensystem, in welchem x_* dem Punkt $y = 0$ entspricht und $\partial\Omega$ der Graph $y_n = \omega(y_1, \dots, y_{n-1})$ einer glatten Funktion mit $\omega(0) = 0$ und $\partial_{y_j}\omega(0) = 0$ ist. Dann gilt wiederum (3.2.5) und (3.2.7) in $y = 0$ und wir erhalten für den Integranden in diesen Koordinaten

$$\begin{aligned} \sum_{i,j,k,l=1}^n a_{i,j}(\nu_k\partial_i\partial_j u - \nu_i\partial_k\partial_j u)\overline{a_{k,l}\partial_l u} &= \sum_{i,j,k=1}^n a_{i,j}(\nu_k\partial_i\partial_j u - \nu_i\partial_k\partial_j u)\overline{a_{k,n}\partial_n u} \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}\partial_i\partial_j u\overline{a_{n,n}\partial_n u} - \sum_{j,k=1}^n a_{n,j}\partial_k\partial_j u\overline{a_{k,n}\partial_n u} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{i,j}\partial_i\partial_j u\overline{a_{n,n}\partial_n u} - \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{n,j}\partial_i\partial_j u\overline{a_{i,n}\partial_n u} \\ &= \left(- \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{i,j} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y_i \partial y_j} \overline{a_{n,n}} - \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{n,j} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y_i \partial y_j} \overline{a_{i,n}} \right) |\partial_n u|^2 \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

unter Ausnutzung von $\partial_j u = 0$ und $\nu_j = 0$ für $j \neq n$, der Symmetrie $a_{i,j} = \overline{a_{j,i}}$, sowie den Darstellungen für die verbleibenden zweiten Ableitungen. Der Ausdruck in Klammern besitzt kein

⁷In Matrixschreibweise wird die Analogie zum Fall des Laplace deutlicher. Modulo *l.o.t.* gilt

$$\int_{\Omega} Pu\overline{Pu} dx = \int_{\Omega} \text{div}(A\nabla u)\overline{\text{div}(A\nabla u)} dx = \int_{\Omega} \text{tr}(AH_u(AH_u)^*) dx + \int_{\partial\Omega} (\text{div}(A\nabla u)\overline{A\nabla u} - AH_u\overline{A\nabla u}) \cdot \vec{d}\sigma$$

offensichtliches Vorzeichen, ist also entlang des (kompakten) Randes $\partial\Omega$ nur eine beschränkte Funktion. Wir bezeichnen diese mit $b \in C(\partial\Omega)$ und erhalten

$$\sum_{i,j,k,l=1}^n \oint_{\partial\Omega} a_{i,j}(x) (\partial_i \partial_j u(x) \nu_k - \partial_k \partial_j u(x) \nu_i) \overline{a_{k,l}(x) \partial_l u(x)} = \oint_{\partial\Omega} b(x) |\partial_{\bar{\nu}} u(x)|^2 d\sigma. \quad (3.2.19)$$

Wir nutzen nun folgende Hilfsaussage. Für beschränkte Gebiete mit glattem Rand gilt

$$\int_{\partial\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 + |\nabla |\nabla u(x)|| dx \leq C |u|_{(1)}^2 + 2C |u|_{(1)} |u|_{(2)} \quad (3.2.20)$$

für alle Funktionen $u \in C^2(\bar{\Omega})$ (Beweis siehe Übung). Damit folgt für das Randintegral

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Omega} b(x) |\partial_{\bar{\nu}} u(x)|^2 d\sigma &\leq C \oint_{\partial\Omega} |\partial_{\bar{\nu}} u(x)|^2 d\sigma(x) = C \oint_{\partial\Omega} |\nabla u(x)|^2 d\sigma(x) \\ &\leq C'(1 + \varepsilon^{-1}) |u|_{(1)} + C'\varepsilon |u|_{(2)}. \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

Es verbleiben die *l.o.t.*. Für diese nutzen wir Cauchy-Schwarz und erhalten entsprechend

$$|l.o.t.| \leq C |u|_{(2)} \|u\|_{(1)} + C' \|u\|_{(1)}^2 \leq C\varepsilon |u|_{(2)} + C'(1 + \varepsilon^{-1}) |u|_{(1)}. \quad (3.2.22)$$

letzteres noch unter Ausnutzung der Friedrichsschen Ungleichung. Zusammengefasst ergibt (3.2.17), (3.2.21) und (3.2.22) die Behauptung. \square

Im Beweis des gerade gezeigten Lemmas wären wir auch mit geringerer Randregularität auskommen. Wir nennen ein Gebiet Ω stückweise glatt berandet, wenn der Rand $\partial\Omega$ aus endlich vielen sich transversal schneidenden glatten Flächenstücken besteht. Wir bezeichnen für ein solches Gebiet Ω

$$W^{2,2}(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \forall_{|\alpha| \leq 2} \partial^\alpha u \in L^2(\Omega)\}. \quad (3.2.23)$$

und versehen den Raum mit der Sobolevnorm

$$\|\cdot\|_{(2)} = \|\cdot\| + |\cdot|_{(1)} + |\cdot|_{(2)}. \quad (3.2.24)$$

Ist der Rand lokal selbst Graph einer Funktion, so ist $C^\infty(\bar{\Omega})$ dicht in dieser Menge.

3.2.3 Korollar. *Sei Ω ein Gebiet mit stückweise glattem Rand und P gleichmäßig elliptischer Differentialoperator auf Ω , welcher die Voraussetzungen des obigen Lemmas erfüllt. Dann gilt die Ungleichung (3.2.14) für alle Funktionen aus dem Abschluss von $\{u \in C^3(\bar{\Omega}) : u|_{\partial\Omega} = 0\}$ in $W^{2,2}(\Omega)$.*

Beweis. Nach Konstruktion existiert zu jeder Funktion u aus dem Abschluss eine Folge glatter und auf dem Rand verschwindender Funktionen u_k . Für diese gilt Ungleichung (3.2.14) und die Behauptung folgt durch Grenzübergang $k \rightarrow \infty$. \square

Setzt man zusätzlich voraus, dass der Rand $\partial\Omega$ zweifach stetig differenzierbar ist, so ist der Abschluss von $\{u \in C^3(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = 0\}$ in $W^{2,2}(\Omega)$ nichts weiter als $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, wobei $H^2(\Omega)$ die Menge der Einschränkungen von Funktionen aus $H^2(\mathbb{R}^n)$ auf Ω bezeichne.⁸

⁸Wir geben keinen Beweis dieser Aussage, skizzieren aber die Idee für den (hier unpassenden) Fall eines Quaders $\Omega = \prod_{j=1}^n (a_j, b_j)$. Sei dazu $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Dann kann man u durch Reflektieren am Rand ungerade fortsetzen. Die Fortsetzung sei wieder mit u bezeichnet. Sie ist offenbar lokal in H^2 , da die Normalenableitungen am Rand 'stetig' sind. Ist nun $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ rotationssymmetrisch mit $\int \psi(x) dx = 1$ und $\psi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \psi(x/\varepsilon)$, so liefert die Faltung $u * \psi_\varepsilon$ eine glatte Funktion, welche auf $\partial\Omega$ verschwindet. Weiter konvergiert $u * \psi_\varepsilon$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ in H^2 gegen u . Der allgemeine Fall lässt sich durch Überdecken mit diffeomorphen Bildern von Quadern auf den diesen zurückführen.

Wir wollen die Ungleichung (3.2.14) nutzen, um eine Lösungstheorie in $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ zu entwickeln. Dazu benötigen wir zuerst einige Spezialfälle, in denen der Operator

$$P : H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega) \quad (3.2.25)$$

bijektiv ist. Der allgemeine Fall wird dann durch 'Deformation' auf diese Spezialfälle zurückgeführt.

3.2.4 Lemma. *Für Quader $\Omega = \prod_{i=1}^n (a_i, b_i)$, $a_i < b_i$, Kugeln $\Omega = B_R(0)$ und für Kugelschalen $\Omega = B_R(0) \setminus B_r(0)$ zu $0 < r < R$ ist $\Delta : H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ bijektiv und stetig invertierbar.*

Beweis. Injektivität ist klar, da die Fortsetzung $\Delta : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ stetig invertierbar ist. Es bleibt die Surjektivität und die stetige Invertierbarkeit zu zeigen. Seien u_k die Dirichleteigenfunktionen aus Beispiel 3.1.13. Deren \mathbb{C} -lineare Hülle $\text{span}\{u_k : k \in \mathbb{N}\}$ ist dicht in $L^2(\Omega)$. Wir betrachten vorerst für endliche Linearkombinationen $f = \sum c_k u_k$ die Gleichung

$$\Delta u = f, \quad (3.2.26)$$

deren Lösung offenbar durch $u = \sum \lambda_k^{-1} c_k u_k$ gegeben ist. Für Quader, Kugeln und Kugelschalen sind die u_k explizit bekannt⁹ und gehören zu $C^3(\bar{\Omega})$ und besitzen Nullrandwerte. Damit gilt $u \in C^3(\bar{\Omega})$ und die Ungleichung (3.2.14)

$$|u|_{(2)}^2 \leq C_1 \|f\|^2 + C_2 |u|_{(1)}^2 \leq \tilde{C} \|f\|^2. \quad (3.2.27)$$

Damit ist aber die Zuordnung $f \mapsto u$ als Abbildung $L^2(\Omega) \rightarrow H^2(\Omega)$ stetig und da die lineare Hülle der u_k dicht ist, folgt die Behauptung. \square

Ist nun P ein gleichmäßig elliptischer Differentialoperator der Form (3.2.13) auf einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit glattem Rand. Dann existiert ein $\lambda_0 > 0$, so dass für $P^{(1)} = P - \lambda_0$

$$\text{Re}(P^{(1)}u, u) \geq \delta_0 \|u\|^2 \quad (3.2.28)$$

für alle $u \in C_c^\infty(\Omega)$ gilt. Damit ist $P^{(1)}$ injektiv und wir fragen uns, unter welchen Voraussetzungen $P^{(1)} : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ stetig invertierbar ist. Dazu nutzen wir ein Störungsargument. Vorbereitend fassen wir noch einige Abschätzungen zusammen. Die auftretenden Konstanten hängen dabei nur vom Gebiet, von der Größe der Koeffizienten und deren Ableitungen ab. Es gilt nach (3.2.14)

$$|u|_{(2)} \leq c_1 \|P^{(1)}u\| + c_2 |u|_{(1)}, \quad (3.2.29)$$

sowie nach Voraussetzung

$$\delta_0 \|u\|^2 \leq \text{Re}(P^{(1)}u, u) \leq \|P^{(1)}u\| \|u\|. \quad (3.2.30)$$

Aus letzterem folgt

$$\|u\| \leq c_3 \|P^{(1)}u\|. \quad (3.2.31)$$

⁹Für Quader sind es Produkte von Sinusfunktionen in einzelnen Variablen, für Kugeln und Kugelschalen nutzt man Polarkoordinaten und erhält eine Darstellung der Eigenfunktionen als Produkte von Kugelfunktionen mit Besselfunktionen in radialer Richtung.

Also gilt $\|u\|_{(2)} \leq C\|P^{(1)}u\| + c|u|_{(1)}$. Zusammen mit der durch partielles Integrieren folgenden Abschätzung

$$\operatorname{Re}(P^{(1)}u, u) \geq c_4|u|_{(1)}^2 - c_5\|u\|^2 \quad (3.2.32)$$

ergibt sich für jedes $\varepsilon > 0$

$$|u|_{(1)}^2 \leq \varepsilon\|P^{(1)}u\|^2 + c(1 + \varepsilon^{-1})\|u\|^2 \quad (3.2.33)$$

und damit in Kombination

$$\|u\|_{(2)} \leq \alpha^{-1}\|P^{(1)}u\|. \quad (3.2.34)$$

Die Konstante α hängt nur von der Größe der Koeffizienten, ihrer Ableitungen, der Elliptizitätskonstanten, der Zahl δ_0 und vom Gebiet ab. Ist $P^{(1)}$ surjektiv, so ergibt sich zusätzlich die Normschranke $\|(P^{(1)})^{-1}\| \leq \alpha$.

3.2.5 Satz. *Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ beschränkt mit glattem Rand und seien $P^{(0)}$ und $P^{(1)}$ zwei gleichmäßig elliptische Differentialoperatoren der Form (3.2.13), für die (3.2.28) gilt. Angenommen, der Operator $P^{(0)} : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ ist bijektiv und stetig invertierbar. Dann ist*

$$P^{(\tau)} = P^{(0)} + \tau(P^{(1)} - P^{(0)}) \quad (3.2.35)$$

für jedes $\tau \in [0, 1]$ bijektiv und stetig invertierbar als Abbildung $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$.

Beweis. Als Konvexkombinationen erfüllen alle der $P^{(\tau)}$ die Abschätzung (3.2.28). Ebenso sind sie gleichmäßig in τ gleichmäßig elliptisch und besitzen in τ gleichmäßig beschränkte Koeffizienten. Wenn wir zeigen können, dass $P^{(\tau)}$ stetig invertierbar ist, so gilt damit für die Inverse die Normabschätzung $\|P^{(\tau)}\|^{-1} \leq \alpha$ mit von τ unabhängigem α .

Da $P^{(0)}$ invertierbar ist, ist die Gleichung $P^{(\tau)}u = f$ äquivalent zu

$$(P^{(0)})^{-1}P^{(\tau)}u = I + \tau(P^{(0)})^{-1}(P^{(1)} - P^{(0)})u = (P^{(0)})^{-1}f. \quad (3.2.36)$$

Da nun

$$\|(P^{(0)})^{-1}(P^{(1)} - P^{(0)})u\|_{(2)} \leq \alpha\|(P^{(1)} - P^{(0)})u\| \leq M\alpha\|u\|_{(2)} \quad (3.2.37)$$

gilt, ist $I + \tau(P^{(0)})^{-1}(P^{(1)} - P^{(0)})$ für $0 \leq \tau < 1/(M\alpha)$ invertierbar. Sei nun τ_1 aus diesem Intervall. Dann ist $P^{(\tau)}u = f$ äquivalent zu

$$(P^{(\tau_1)})^{-1}P^{(\tau)}u = I + (\tau - \tau_1)(P^{(\tau_1)})^{-1}(P^{(1)} - P^{(0)})u = (P^{(\tau_1)})^{-1}f \quad (3.2.38)$$

und selbiges Argument liefert zusammen mit $\|(P^{(\tau_1)})^{-1}\| \leq \alpha$

$$\|(P^{(\tau_1)})^{-1}(P^{(1)} - P^{(0)})u\|_{(2)} \leq \alpha\|(P^{(1)} - P^{(0)})u\| \leq M\alpha\|u\|_{(2)} \quad (3.2.39)$$

und damit die Invertierbarkeit für $0 < \tau - \tau_1 < 1/(M\alpha)$. Führt man dieses Argument fort, so erreicht man nach endlich vielen Schritten $\tau = 1$ und der Satz ist bewiesen. \square

3.2.6 Satz. *Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit glattem Rand und P ein gleichmäßig elliptischer Differentialoperator der Form (3.2.13).*

(i) *Es existiert ein $\lambda_0 > 0$, so dass*

$$P + \lambda_0 : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega) \quad (3.2.40)$$

bijektiv und stetig invertierbar ist.

- (ii) Es existiert eine diskrete Ausnahmemenge $\Sigma \subset \mathbb{C}$, so dass für alle $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$ der Operator $P - \lambda$ als Abbildung $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ bijektiv und stetig invertierbar ist und für $\lambda \in \Sigma$ gilt

$$0 < \dim \ker(P - \lambda) = \text{codim} \text{ran}(P - \lambda) < \varkappa_0 \quad (3.2.41)$$

sowie

$$\text{ran}(P - \lambda) = {}^\perp \ker(P^* - \bar{\lambda}). \quad (3.2.42)$$

Beweis. (i) Wir betrachten zuerst Gebiete Ω , welche C^2 -diffeomorph zu Quadern, Kugeln oder Kugelschalen $\tilde{\Omega}$ sind. Da wir aus Lemma 3.2.4 wissen, dass auf Kugeln und Kugelschalen der Laplaceoperator $-\Delta : H^2(\tilde{\Omega}) \cap H_0^1(\tilde{\Omega}) \rightarrow L^2(\tilde{\Omega})$ invertierbar ist, liefert die Transformation $\Phi : \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$ einen invertierbaren Operator $(\tilde{P}u)(\Phi(\tilde{x})) = -\Delta(u \circ \Phi)(\tilde{x})$ auf den entsprechenden Räumen auf Ω . Dieser ist von der Form

$$\tilde{P}u = - \sum_{i,j=1}^n \partial_j a_{i,j}(x) \partial_i u(x) + \sum_{j=1}^n a_j(x) \partial_j u(x) \quad (3.2.43)$$

mit

$$a_{i,j}(\Phi(\tilde{x})) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial \tilde{x}_k} \frac{\partial x_i}{\partial \tilde{x}_k} \quad (3.2.44)$$

und

$$a_j(\Phi(\tilde{x})) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial \tilde{x}_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial x_k}{\partial \tilde{x}_j} \right). \quad (3.2.45)$$

Ist nun P ein beliebiger gleichmäßig elliptischer Differentialoperator der Form (3.2.13), dann finden wir $\lambda_0 > 0$ groß genug, so dass das obige Theorem mit $P^{(0)} = \tilde{P}$ und $P^{(1)} = P + \lambda_0$ anwendbar ist.

Für allgemeine Gebiete Ω wählen wir eine endliche Überdeckung durch Teilgebiete Ω_k , so dass zu jedem Ω_k eine ε -Umgebung $\Omega_k^{(\varepsilon)}$ existiert, so dass $\Omega \cap \Omega_k^{(\varepsilon)}$ bis zum Rand C^2 -diffeomorph zu einem Quader, einer Kugel oder einer Kugelschale ist. Sei weiter $\chi_k \in C^\infty(\bar{\Omega})$ mit $\chi_k(x) = 1$ für $x \in \Omega_k$ und $\text{supp} \chi_k \subset \Omega_k^{(\varepsilon)}$. Wir wählen λ_0 so groß, dass $P + \lambda_0$ die Abschätzung

$$\text{Re}((P + \lambda_0)u, u) \geq \delta_0 \|u\|^2 \quad (3.2.46)$$

für $u \in H_0^1(\Omega)$ erfüllt. Zusammen mit Ungleichung (3.2.14) folgt dann für $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ die Abschätzung $\|u\|_{(2)} \leq \alpha^{-1} \|(P + \lambda_0)u\|$ mit einer berechenbaren Konstanten α (vgl. (3.2.27)) und es genügt, die Surjektivität von $P + \lambda_0 : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ zu zeigen.

Zu gegebenem $f \in L^2(\Omega)$ sei $u \in H_0^1(\Omega)$ die Lösung der Gleichung $(P + \lambda_0)u = f$. Dann gilt

$$\chi_k(P + \lambda_0)u = (P + \lambda_0)\chi_k u - Q_k u = \chi_k f, \quad (3.2.47)$$

wobei Q_k ein Differentialoperator erster Ordnung ist, welcher neben den Koeffizienten von P die Ableitungen von χ_k als Koeffizienten enthält. Nach Konstruktion sind die Koeffizienten von Q_k beschränkt. Da Q_k erster Ordnung ist, gilt $Q_k u \in L^2(\Omega_k^{(\varepsilon)})$ und $\chi_k u$ löst

$$(P + \lambda_0)\chi_k u = f + Q_k u \in L^2(\Omega_k^{(\varepsilon)}), \quad \chi_k u \in H_0^1(\Omega_k^{(\varepsilon)}). \quad (3.2.48)$$

Damit ist aber nach dem oben gezeigten $\chi_k u \in H^2(\Omega_k^{(\varepsilon)})$ und somit $u \in H^2(\Omega_k)$. Da die Ω_k das Gebiet Ω überdecken folgt $u \in H^2(\Omega)$ und der erste Teil ist bewiesen.

(ii) Da es ein λ_0 gibt, so dass $P + \lambda_0$ invertierbar ist, genügt es alternativ

$$(P + \lambda_0)^{-1}P - \lambda = I - (\lambda + \lambda_0)(P + \lambda_0)^{-1} \quad (3.2.49)$$

zu betrachten. Nun bildet $(P + \lambda_0)^{-1}$ aber $L^2(\Omega) \rightarrow H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ ab und faktorisiert somit durch die kompakte Einbettung $H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$. Also gilt $\lambda \in \Sigma$ genau dann, wenn $(\lambda + \lambda_0)^{-1}$ zum Spektrum des kompakten Operators $(P + \lambda_0)^{-1} : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \rightarrow H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ gehört. Die zweite Aussage folgt. \square

3.2.7 Korollar. *Sei P gleichmäßig elliptisch auf einem beschränkten Gebiet Ω mit glattem Rand. Gilt dann $Pu = f \in L^2(\Omega)$ für ein $u \in H_0^1(\Omega)$, so folgt $u \in H^2(\Omega)$.*

Beweis. Es gilt $(P + \lambda_0)u = f + \lambda_0 u \in L^2(\Omega)$. Da $P + \lambda_0$ auf $H_0^1(\Omega)$ injektiv ist, muss dieses u aber gerade durch $u = (P + \lambda_0)^{-1}(f + \lambda_0 u) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ gegeben sein. \square

3.2.8 Korollar (Spektralsatz). *Sei nun zusätzlich P symmetrisch, also $a_j = 0$ und a reellwertig. Dann gilt für die Ausnahmemenge*

$$\Sigma = \{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\} \quad (3.2.50)$$

und die in Korollar 3.1.12 konstruierten Eigenfunktionen erfüllen $u_k \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Darüberhinaus gilt für jedes $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} (u, u_k) u_k \quad (3.2.51)$$

als in $H^2(\Omega)$ konvergente Reihe.

Beweis. Die Enthaltenseinsbeziehung $\Sigma \subseteq \{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ folgt, da wir P auf $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ eingeschränkt haben und damit Nullräume nur kleiner werden können. Sei nun $u_k \in H_0^1(\Omega)$ Eigenfunktion zum Eigenwert λ_k , gelte also $Pu_k = \lambda_k u_k$. Dann gilt insbesondere $u_k \in L^2(\Omega)$ nach Korollar 3.2.7 ist $u_k \in H^2(\Omega)$. Also gilt $\Sigma = \{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$.

Es bleibt die Konvergenz. Wir versehen $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ mit dem Innenprodukt

$$\{\{u, v\}\}_P = ((P + \lambda_0)u, (P + \lambda_0)v) \quad (3.2.52)$$

für hinreichend groß gewähltes $\lambda_0 > 0$. Dieses ist wegen (3.2.14) äquivalent zum H^2 -Innenprodukt. Weiter gilt

$$\{\{u_k, u_l\}\}_P = (\lambda_k + \lambda_0)(\lambda_l + \lambda_0)(u_k, u_l) = (\lambda_k + \lambda_0)^2 \delta_{k,l} \quad (3.2.53)$$

und die Eigenfunktionen sind orthogonal bezüglich $\{\{., .\}\}_P$. Sei $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Dann gilt

$$u = \sum_k (u, u_k) u_k \quad (3.2.54)$$

als H_0^1 -konvergente Reihe. Die Reihe konvergiert auch in $H^2(\Omega)$, da

$$\left\{ \sum_k (u, u_k) u_k, \sum_k (u, u_k) u_k \right\}_P = \sum_k |(u, u_k)|^2 \{\{u_k, u_k\}\}_P = \sum_k (\lambda_k + \lambda_0)^2 |(u, u_k)|^2 \quad (3.2.55)$$

konvergiert. Dies folgt direkt aus

$$(u, u_k) = \frac{1}{\lambda_k} (u, Pu) = \frac{1}{\lambda_k} (Pu, u_k), \quad \sum_k |(Pu, u_k)|^2 = \|Pu\|^2. \quad (3.2.56)$$

\square

3.3 Neumann- und Robinprobleme für elliptische Operatoren zweiter Ordnung

3.3.1. Zum Schluss soll noch ein weiteres Randwertproblem betrachtet werden. Dazu betrachten wir ein beschränktes Gebiet Ω mit hinreichend glattem Rand, so dass die Einbettung $H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ und die Einschränkung auf den Rand $H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$ beides kompakte Operatoren sind.¹⁰ Unser Ziel ist es, eine schwache Formulierung des Randwertproblems

$$\begin{cases} Pu(x) = F(x), & x \in \Omega, \\ Nu(x) + b(x)u(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.3.1)$$

und eine zugehörige schwache (H^1 -) Lösungstheorie anzugeben. Der Differentialoperator P ist wieder von der Form

$$Pu(x) = - \sum_{i,j=1}^n \partial_i(a_{i,j}(x)\partial_j u(x)) + \sum_{j=1}^n (a_j(x)\partial_j u(x) + \partial_j(\tilde{a}_j(x)u(x))) + a(x)u(x), \quad (3.3.2)$$

die Randbedingung enthält die äußere Konormalenableitung

$$Nu(x) = \sum_{i,j=1}^n \nu_i(x)a_{i,j}(x)\partial_j u(x). \quad (3.3.3)$$

Für die Koeffizienten setzen wir nur $a_{i,j}, a_j, \tilde{a}_j, a \in L^\infty(\Omega)$, die Symmetriebedingung $a_{i,j}(x) = \overline{a_{j,i}(x)}$, sowie die Elliptizitätsbedingung (3.1.10) voraus. Darüberhinaus sei $b \in L^\infty(\partial\Omega)$.

Man beachte, dass für $u \in H^1(\Omega)$ bis jetzt weder die zweite partielle Ableitung in Ω noch die Konormalenableitung $Nu(x)$ auf dem Rand definiert ist. Wir werden beide schwach interpretieren. Setzen wir dazu vorerst u und v als differenzierbar und die Koeffizienten als glatt voraus, so liefert partielles Integrieren

$$\begin{aligned} (Pu, v) &= \int_{\Omega} Pu(x)\overline{v(x)} \, dx \\ &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{i,j}(x)\partial_j u(x)\overline{\partial_i v(x)} \, dx \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} (a_j(x)(\partial_j u(x))\overline{v(x)} - \tilde{a}_j(x)u(x)\overline{\partial_j v(x)}) \, dx \\ &\quad + \int_{\Omega} a(x)u(x)\overline{v(x)} \, dx - \sum_{i,j=1}^n \oint_{\partial\Omega} (\nu_i a_{i,j}(x)\partial_j u(x))\overline{v(x)} \, d\sigma(x). \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Nutzt man in der letzten Zeile noch die Randbedingung, so sind alle entstandenen Terme für $u, v \in H^1(\Omega)$ sinnvoll und die letzten beiden Zeilen bestimmen lineare Funktionale auf $v \in H^1(\Omega)$. Deshalb versehen wir den $H^1(\Omega)$ mit dem äquivalenten Innenprodukt

$$\llbracket u, v \rrbracket_{P_0} = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{i,j}(x)\partial_j u(x)\overline{\partial_i v(x)} \, dx + \int_{\Omega} u(x)\overline{v(x)} \, dx. \quad (3.3.5)$$

¹⁰Ein C^1 -Rand reicht hier, was einfach zu sehen ist. Es genügt sogar Lipschitzrand.

und schreiben das Problem (3.3.1) mit Hilfe des Satzes von Fréchet–Riesz um zu

$$(F, v) = \llbracket u, v \rrbracket_{P_0} + \llbracket Ku, v \rrbracket_{P_0} + \llbracket Lu, v \rrbracket_{P_0} \quad (3.3.6)$$

für Operatoren K und L , welche durch

$$\begin{aligned} \llbracket Ku, v \rrbracket_{P_0} = \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^n (a_j(x)(\partial_j u(x))\overline{v(x)} - \tilde{a}_j(x)u(x)\overline{\partial_j v(x)}) \right. \\ \left. + (a(x) - 1)u(x)\overline{v(x)} \right) dx \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

$$\llbracket Lu, v \rrbracket_{P_0} = \oint_{\partial\Omega} b(x)u(x)\overline{v(x)} d\sigma(x)$$

definiert sind. Dies ist die schwache Formulierung des Problems; wir sagen $u \in H^1(\Omega)$ löst zu gegebenem $F \in L^2(\Omega)$ das Problem (3.3.1) schwach, falls für jedes $v \in H^1(\Omega)$ die Identität (3.3.6) erfüllt ist.

Zu jedem $F \in L^2(\Omega)$ (oder sogar jedem $F \in (H^1(\Omega))' = H_{\Omega}^{-1}$) existiert genau eine Funktion $f \in H^1(\Omega)$ mit $(F, v) = \llbracket f, v \rrbracket_{P_0}$ für alle $v \in H^1(\Omega)$. Statt des Robinproblems (3.3.1) ist also die Operatorgleichung

$$u + Ku + Lu = f \quad (3.3.8)$$

im Hilbertraum $H^1(\Omega)$ zu lösen. Die hier auftretenden Operatoren K und L sind nach Voraussetzung beide kompakt. Für K folgt dies wieder aus der Kompaktheit der Einbettung $H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$, für L entsprechend aus der Kompaktheit der Einbettung $H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$.

3.3.2 Satz. (i) *Es existiert eine diskrete Ausnahmemenge $\Sigma \subset \mathbb{C}$, so dass für jedes $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$ das Robinproblem*

$$\begin{cases} Pu - \lambda u = F, & x \in \Omega, \\ Nu(x) + b(x)u(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.3.9)$$

für jedes $F \in L^2(\Omega)$ eindeutig lösbar und der Lösungsoperator $L^2(\Omega) \ni F \mapsto u \in H^1(\Omega)$ stetig ist.

(ii) *Für $\lambda \in \Sigma$ ist die Menge der schwachen Lösungen zu*

$$\begin{cases} P^*v - \bar{\lambda}v = 0, & x \in \Omega, \\ Nv(x) + \overline{b(x)}v(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.3.10)$$

endlichdimensional und das Problem

$$\begin{cases} Pu - \lambda u = F, & x \in \Omega, \\ Nu(x) + b(x)u(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.3.11)$$

genau dann lösbar, wenn $(F, v) = 0$ für alle Lösungen v zu (3.3.10) gilt.

Beweis. Wenn man die Einbettung $H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ noch über das äquivalente Skalarprodukt als Operator $B : H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$ darstellt,

$$(u, v) = \llbracket Bu, v \rrbracket_{P_0}, \quad (3.3.12)$$

so ist B kompakt und selbstadjungiert und (3.3.9) besitzt genau dann die schwache Lösung $u \in H^1(\Omega)$, wenn

$$u + Ku + Lu - \lambda Bu = f \quad (3.3.13)$$

für das darstellende f mit $(F, v) = \llbracket f, v \rrbracket_{P_0}$ gilt. Also gilt die Fredholmsche Alternative; entweder besitzt diese Gleichung nur die triviale Lösung und ist dann auch für jedes f lösbar mit stetig von f abhängender Lösung u oder das Problem ist nur dann lösbar, wenn die rechte Seite $f \perp \ker(I + K^* + L^* - \bar{\lambda}B)$ erfüllt.

Es bleibt noch die Diskretheit von Σ zu zeigen. Wählt man λ_0 so dass $\operatorname{Re} \lambda_0 < -M$ für hinreichend großes M , so gilt

$$\operatorname{Re}(\llbracket u, u \rrbracket_{P_0} + \llbracket Ku, u \rrbracket_{P_0} + \llbracket Lu, u \rrbracket_{P_0} - \lambda_0(u, u)) \geq c_0|u|_{(1)}^2 - (\lambda_0 - c_1)\|u\|^2 \geq \delta_0\|u\|^2 \quad (3.3.14)$$

und das Robinproblem besitzt eine eindeutig bestimmte schwache Lösung. Also ist für solche λ der Operator $(I + K + L - \lambda_0 B)$ auf $H^1(\Omega)$ stetig invertierbar. Damit gilt aber $\lambda \in \Sigma$ genau dann, wenn $(\lambda - \lambda_0)^{-1}$ Eigenwert des kompakten Operators $(I + K + L - \lambda_0 B)^{-1}B$ ist. \square

3.3.3 Korollar (Spektralsatz). *Sei nun zusätzlich $a_j = -\tilde{a}_j$ und seien a und b reellwertig. Dann gilt*

$$\Sigma = \{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R} \quad (3.3.15)$$

und es existiert ein $L^2(\Omega)$ -Orthonormalsystem (u_k) von Lösungen zu

$$\begin{cases} Pu_k = \lambda_k u_k, & x \in \Omega, \\ Nu_k(x) + b(x)u_k(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.3.16)$$

so dass für jedes $u \in H^1(\Omega)$

$$u = \sum_k (u, u_k) u_k \quad (3.3.17)$$

als $H^1(\Omega)$ -konvergente Reihe gilt. Ebenso gilt für jedes $v \in L^2(\Omega)$

$$v = \sum_k (v, u_k) u_k \quad (3.3.18)$$

als Orthogonalreihe des $L^2(\Omega)$.

Beweis. Wir nutzen die geforderte Symmetrie und führen das Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \llbracket u, v \rrbracket_P &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{i,j}(x) \partial_j u(x) \overline{\partial_i v(x)} dx + \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} a_j(x) (\partial_j u(x) \overline{v(x)} + u(x) \overline{\partial_j v(x)}) dx \\ &\quad + \int_{\Omega} (a(x) + \lambda_0) u(x) \overline{v(x)} dx + \oint_{\partial\Omega} b(x) u(x) \overline{v(x)} d\sigma(x) \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

auf $H_1(\Omega)$ ein. Für hinreichend groß gewähltes λ_0 ist dieses wiederum äquivalent zum H^2 -Innenprodukt und das schwache Robinproblem ist äquivalent dazu, eine Funktion $u \in H^1(\Omega)$ mit

$$\llbracket u, v \rrbracket_P = (\lambda - \lambda_0)(u, v) + (F, v) \quad (3.3.20)$$

für jedes $v \in H^1(\Omega)$ zu finden. Definiert man wieder $f \in H^1(\Omega)$ durch die Bedingung $(F, v) = \llbracket f, v \rrbracket_P$ und den selbstadjungierten und kompakten Operator B durch $\llbracket Bu, v \rrbracket_P = (u, v)$, so ergibt sich die Operatorgleichung

$$u - (\lambda - \lambda_0)Bu = f \quad (3.3.21)$$

und der Spektralsatz für selbstadjungierte kompakte Operatoren liefert $\Sigma \subset \mathbb{R}$ zusammen mit der Existenz einer Folge $\llbracket \cdot, \cdot \rrbracket_P$ -orthogonaler Eigenfunktionen $u_k \in \ker(I - (\lambda - \lambda_0)B)$. Darüberhinaus folgt

$$u = \sum_k \frac{\llbracket u, u_k \rrbracket_P}{\llbracket u_k, u_k \rrbracket_P} u_k \quad (3.3.22)$$

für jedes $u \in H^1(\Omega)$ sowie $\llbracket u_k, u_\ell \rrbracket_P = (\lambda_k - \lambda_0)(u_k, u_\ell)$ und bei L^2 -Normierung der Eigenfunktionen impliziert die Dichtheit von $H^1(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$, dass die so konstruierte Folge u_k eine Orthonormalbasis des $L^2(\Omega)$ ist. \square

Literaturverzeichnis

- [CH] Richard Courant, David Hilbert. *Methods of Mathematical Physics. Vol. 2. Partial Differential Equations.* Interscience Publishers, 1962.
- [Ev] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations.* Graduate Studies in Mathematics, Vol. 19. American Mathematical Society, 2010.
- [La] Olga Ladyshenskaja. *The Boundary Value Problems of Mathematical Physics.* Applied Mathematical Sciences, Vol. 49. Springer-Verlag, New York, 1985.
- [Le] Rolf Leis. *Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung.* BI Hochschultaschenbücher, Band 165. Bibliographisches Institut Mannheim, 1967.
- [Mi] Sigeru Mizohata. *The Theory of Partial Differential Equations.* Cambridge University Press, 1973.

Index

- Abhängigkeitsgebietsungleichung, 36
- Anfangswertproblem, 9
- Cauchyproblem, 45
 - Cauchydaten, 45
 - charakteristisch, 46
 - korrekt gestellt, 51
 - lokal lösbar, 51
 - nichtcharakteristisch, 46
 - Normalform, 46
 - schwache Lösung, 68
 - starke Lösung, 68
- Differentialoperator
 - charakteristische Richtung, 46
 - charakteristischen Kegel, 46
 - elliptisch, 53
 - gleichmäßige Elliptizität, 73
 - Hauptsymbol, 46
 - hyperbolisch, 55, 57
 - strikt hyperbolisch, 57
 - Symbol, 46
 - transponierter Differentialoperator, 46
- ebene Wellen, 40
- Fundamentallösung, 16, 29
- Funktion
 - harmonisch, 10
 - subharmonisch, 27
- Gebiet
 - klassisch zulässig, 21
- Greensche Funktion, 20, 21
- Greensche Identität, 17
- Helmholtzgleichung, 7, 35
- Hyperfläche
 - charakteristisch, 46
- Integralgleichungsmethode, 24
- Kugelfunktionen, 15
- Lamégleichung, 7
- Laplacegleichung, 10
 - Poissonsche Lösungsformel, 18
- Maxwellgleichungen, 7
- Methode der Charakteristiken, 10
- Operator
 - Euleroperator, 12
 - Laplace-Beltrami-Operator, 14
 - Laplaceoperator, 6
 - in Kugelkoordinaten, 14
 - Rotationsableitungen, 13
- Plattengleichung, 7
- Poissongleichung, 6, 10
- Poissonkern, 18
- Poissonsche Integraldarstellung, 19
- Polynom
 - hyperbolisch, 57
 - strikt hyperbolisch, 57
- Potential
 - Doppelschichtpotential, 17
 - Einfachschichtpotential, 17
 - Volumenpotential, 17
- Radontransformation, 41
- Satz
 - Abhängigkeitsgebietsungleichung, 36
 - Cauchy–Kowalewskaja, 47
 - Dirichletsches Prinzip, 25
 - Erste Integraldarstellung
 - der Potentialtheorie, 17
 - Fréchet–Riesz, 73
 - Fredholmsche Sätze für Dirichletprobleme, 76
 - Friedrichssche Ungleichung, 72

- Hadamard–Petrowski, 54
- Holmgren, 49
- Huygenssches Prinzip, 43
- Lösungsdarstellung (Welle)
 - d’Alembertsche Formel, 37
 - Kirchhoff–Poissonsche Formeln, 40
 - Kirchhoffsche Formel, 38
 - Poissonsche Formel, 39
- Ladyshenskajas Energieabschätzung, 81
- Lax–Mizohata, 54
- Lemma von Gronwall, 65
- Liouvillesches Prinzip
 - harmonischer Funktionen, 12
- Maximumprinzip
 - harmonischer Funktionen, 11
 - parabolisches, 29
 - parabolisches für Halbräume, 31
- Mittelwerteigenschaft
 - harmonischer Funktionen, 10
- Paley–Wiener, 61
- Perronsches Lösungsverfahren, 27
- Phragmén–Lindelöf, 61
- Phragmén–Lindelöf-Prinzip, 61
- Poincaré-Ungleichung, 73
- Poissonsche Integraldarstellung, 19
- Radonsche Inversionsformel, 41
- Rellich, 74
- schwacher Dirichlet-Spektralsatz, 78
- schwacher Robin-Spektralsatz, 90
- Schwarzsches alternierendes Prinzip, 26
- Sprungrelation
 - für Potentiale, 21
 - für thermische Potentiale, 32
- starker Dirichlet-Spektralsatz, 87
- Weylsches Lemma, 12
- Schrödingergleichung, 7
- schwache Lösungen, 25
- Spiegelungsprinzip, 19
- symmetrisch-hyperbolisches System, 56
- System
 - hyperbolisch, 57
 - strikt hyperbolisch, 57
- Vektorfeld
 - Divergenz, 6
 - Integrabilitätsbedingung, 5
- Rotation, 5
- Wärmeleitungsgleichung, 6, 28
- Wärmeleitungskern, 34
- Wellengleichung, 7, 35