# Notation

**Die hier angegebene Notation weicht von der im Buch ab, im Seminar sollte dies berücksichtigt werden. Dies betrifft insbesondere Normen und Skalarprodukte und die Dirichletformen.**

1. Ein *Graph* $G = (V, E, \iota)$ besteht aus Knotenmenge $V$ und Kantenmenge $E$, jeder Kante $e \in E$ sind Anfangs- und Endpunkte als Knoten $\iota : E \ni e \mapsto \{u, v\} \subset V$ zugeordnet. Die Abbildung $\iota$ heißt Inzidenzabbildung.

   Graphen sollte man sich als Bilder vorstellen. Für unsere Zwecke sind $V$ und $E$ endlich. Ein Graph heißt einfach, falls zu zwei Knoten höchstens eine zugeordnete Kante existiert und für keine Kante Anfangs- und Endpunkte zusammenfallen.

   In einem gerichteten Graphen haben Kanten Richtungen, ihnen ist also statt einer Menge von bis zu zwei Knoten stets ein Paar von Knoten $E \ni e \mapsto (u, v) \in V \times V$ zugeordnet. Ungerichtete Graphen können auch als gerichtete Graphen mit Kanten in jeweils beide Richtungen aufgefasst werden. Die angegebene Notation in diesem Abschnitt bezieht sich auf ungerichtete Graphen.

2. Wir schreiben $u \sim v$ falls es ein $e \in E$ mit $\{u, v\} = \iota(e)$ gibt.

   Die *Adjazenzmatrix* $A :\in \mathbb{C}^{V \times V}$ ist definiert durch ihre Einträge $A = (a_{u,v})_{u,v \in V}$

$$a_{u,v} = \begin{cases} 1, & u \sim v \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

3. Die Menge der Kanten, die zu einem gegebenen Knoten inzident sind sei

$$E^u = \{e \in E \mid u \in \iota(e)\}.$$

   Dann ist der *Knotengrad* von $u \in V$ definiert als

$$\deg(u) = \#E^u = \#\{e \in E \mid u \in \iota(e)\}$$

4. *Volumen* des Graphen

$$\mathrm{vol}(G) = \sum_{u \in V} \deg(u)$$

5. Funktionen und Vektorräume von Funktionen auf dem Graphen. Wir betrachten $f : V \to \mathbb{C}$ und versehen den Vektorraum

$$\mathrm{L}^2 := \mathbb{C}^V = \{f : V \to \mathbb{C}\}$$

mit Norm $\|\cdot\|$ und Skalarprodukt definiert durch

$$\|f\|^2 = \sum_{v\in V} |f(v)|^2 \deg(u), \qquad \langle f, g\rangle = \sum_{u\in V} f(u)\overline{g(u)} \deg(u).$$

Die Funktionen $\delta_u : V \to \mathbb{C}$

$$\delta_u(v) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\deg u}}, & u = v \\ 0, & u \neq v \end{cases}$$

parametrisiert durch $u \in V$ bilden eine Orthonormalbasis von $\mathrm{L}^2$.

6. *Dirichletform*

$$\mathcal{E}[f, g] = \sum_{u\sim v} (f(u) - f(v))\overline{(g(u) - g(v))}, \qquad \mathcal{E}[f] := \mathcal{E}[f, f] = \sum_{u\sim v} |f(u) - f(v)|^2$$

und (normierter) *kombinatorischer Laplace* $\mathcal{L} : \mathbb{C}^V \to \mathbb{C}^V$ bestimmt durch

$$\mathcal{E}[f, g] = \langle \mathcal{L}f, g\rangle$$

Dabei bezeichne $\sum_{u\sim v} = \sum_{e\in E}$ die Summe über alle Kanten des Graphen. Für jede Kante $e \in E$ sei dabei $\iota(e) = \{u, v\}$.

7. Sei $G$ (vollständiger) Graph und $\omega : V \times V \to [0, \infty)$ eine Gewichtsfunktion mit

$$\omega(u, v) = \omega(v, u).$$

Dann setzen wir

$$\deg_\omega(u) = \sum_v \omega(u, v), \qquad \mathrm{vol}_\omega(G) = \sum_u \deg_\omega(u)$$

und nutzen

$$\|f\|^2_\omega = \sum_u |f(u)|^2 \deg_\omega(u), \qquad \langle f, g\rangle_\omega = \sum_u f(u)\overline{g(u)} \deg_\omega(u)$$

als Norm und Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^V$.

Für diesen gewichteten Graphen definiert man die gewichtete Dirichletform

$$\mathcal{E}_\omega[f] = \sum_{u,v} |f(u) - f(v)|^2 \,\omega(u, v).$$

Der (normierte) gewichtete kombinatorische Laplace $\mathcal{L}_\omega : \mathbb{C}^V \to \mathbb{C}^V$ erfüllt

$$\mathcal{E}_\omega[f, g] = \langle \mathcal{L}_\omega f, g\rangle_\omega$$

## Teilgraphen, Pfade

8. Ein *Teilgraph* $G' \leq G$ ist ein Tripel $(V', E', \iota')$ mit $V' \subset V$, $E' \subset E$ und $\iota' = \iota|_{E'}$.

9. Ein *Weg* in $G$ mit Endpunkten $u, v \in V$ und ist ein Teilgraph von $G$ in welchem alle von $u, v$ verschiedenen Knoten den Grad zwei besitzen. Der Graph $G$ heißt zusammenhängend, falls es zu jedem $u, v \in V$ einen Weg $P \leq G$ mit Endpunkten $u$ und $v$ gibt.

   Die *Länge* $\ell(P)$ eines Weges $P$ ist die Anzahl seiner Kanten.

10. Für einen Weg $P$ gilt $\mathrm{vol}(P) = 2\ell(P)$.

11. Für $u, v \in V$ sei

$$\mathrm{dist}(u, v) = \min\{\ell(P) \mid P \text{ Weg mit Endpunkten } u, v\}$$

   der *Abstand* von $u$ und $v$ und

$$\mathcal{P}_{u,v} = \{P \leq G \mid P \text{ Weg mit Endpunkten } u, v \text{ und Länge } \ell(P) = \mathrm{dist}(u, v)\}$$

   die Menge der kürzesten Wege von $u$ nach $v$.

12. Für einen zusammenhängenden Graphen sei

$$\mathrm{diam}(G) = \max\{\mathrm{dist}(u, v) \mid u, v \in V\}$$

   der *Durchmesser*.

13. Für eine Teilmenge $S \subset V$ sei $(S, E|_S, \iota')$ mit

$$E|_S = \{e \in E : \iota(E) \subset S\}, \qquad \iota' = \iota|_{E|_S}$$

   der induzierte Teilgraph.

   Wenn der Graph $G$ fest ist, wird der von $S$ induzierte Teilgraph ebenso mit $S$ bezeichnet. $\overline{S}$ sei dann der Teilgraph, der von $V \setminus S$ induziert wird.

14. Rand eines induzierten Teilgraphen:

$$\partial S = \{v \in G \mid \exists e \in E^v : \iota(e) \cap S \neq \varnothing \quad \text{und} \quad \iota(e) \cap (V \setminus S) \neq \varnothing\}$$

   Damit gilt $\partial S = \partial \overline{S}$, ebenso gilt $\partial G = \varnothing = \partial \varnothing$.

15. 

$$E(S, \overline{S}) = \{e \in E \mid \iota(e) \cap S \neq \varnothing \quad \text{und} \quad \iota(e) \cap (\overline{S}) \neq \varnothing\}$$

## Funktionenräume

16. Für $1 \leq p \leq \infty$ versehen wir $\mathrm{L}^p := \mathbb{C}^V$ entsprechend mit der Norm

$$\|f\|_p^p = \sum_{v \in V} |f(v)|^p \deg(u) \qquad \text{für } 1 \leq p < \infty,$$
$$\|f\|_\infty = \max_{v \in V} |f(v)|$$

Obwohl auf $\mathbb{C}^V$ alle Normen äquivalent sind, ist es mitunter interessant diese Normen zu verwenden!