

3 Strukturen

In diesem Abschnitt sollen (alg.) Strukturen in den Mittelpunkt gerückt werden. Diese dienen neben dem mathematisch sauberen Formulieren von Sachverhalten insbesondere der Abstraktion und damit verbunden dem “Blick auf das Ganze”. Beispiele sind neben Körpern und Vektorräumen, wie sie in der linearen Algebra thematisiert werden, hier insbesondere

- affine Räume
- Gruppen, besonders als Symmetriegruppen geometrischer Konstellationen
- Bezüge zur Klassifikation geometrischer Objekte.

3.1 Affine Räume

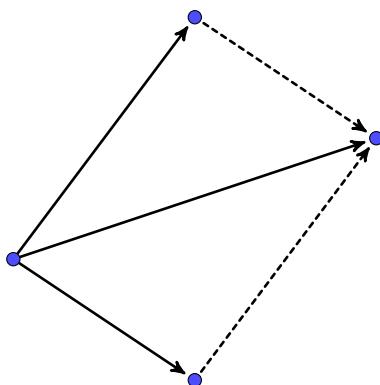
3.1 Bemerkung (Euklidische Ebene und affiner Raum). Im Folgenden wollen wir einige Aspekte der analytischen Geometrie zusammenfassen und betrachten dazu die Euklidische Ebene. Diese besteht aus Punkten mit zusätzlicher Struktur. So existiert zu jedem Punktepaar P, Q ein Verbindungsvektor \overrightarrow{PQ} von P nach Q . Verbindungsvektoren kann man addieren, wenn Anfangs- und Endpunkte zusammenpassen,

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR},$$

und parallel verschieben. Zu drei Punkten P, Q und R existiert ein eindeutig bestimmter Punkt S mit $\overrightarrow{PQ} \equiv \overrightarrow{RS}$ in dem Sinne, dass diese parallel und gleich lang sind. Dies erlaubt die Addition von Vektoren in der Form

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PS}$$

falls $\overrightarrow{PQ} \equiv \overrightarrow{RS}$. Vektoren kann man auch mit rationalen Zahlen multiplizieren, sie bilden also (mindestens) einen \mathbb{Q} -Vektorraum. Vollständigkeitsaxiome der Geometrie entsprechen der konsistenten Vervollständigung zu einem \mathbb{R} -Vektorraum und führen zum Begriff eines reellen affinen Raumes.



3 Strukturen

Versieht man den Vektorraum zusätzlich mit einem Innenprodukt, so spricht man von Euklidischen (affinen) Räumen.

3.2 Definition. Ein *reeller affiner Raum* ist ein Tupel $\mathbb{A} = (A, V, +)$ bestehend aus einer nichtleeren Menge A (den Punkten), einem Vektorraum V über \mathbb{R} (den Verschiebungen) und einer Operation $+ : A \times V \rightarrow A$, wobei

- (i) $P + (v + w) = (P + v) + w$ für alle $P \in A$ und alle $v, w \in V$ gilt; und
- (ii) zu Punkten $P, Q \in A$ stets ein eindeutiges $v \in V$ mit $Q = P + v$ existiert. Dieses wird als $\overrightarrow{PQ} := v$ bezeichnet.

3.3 Definition. (i) Sei $\mathbb{A} = (A, V, +)$ ein affiner Raum und sei $B \subset A$ eine Teilmenge. Dann induziert B einen *affinen Teilraum*, falls es einen Unterraum U von V gibt, so dass $\mathbb{B} = (B, U, +|_{B \times U})$ zum affinen Raum wird.

- (ii) Seien $\mathbb{A}_1 = (A_1, V_1, +_1)$ und $\mathbb{A}_2 = (A_2, V_2, +_2)$ affine Räume. Eine affine Abbildung Φ von \mathbb{A}_1 in \mathbb{A}_2 ist eine Funktion $\Phi : A_1 \rightarrow A_2$, so dass es eine lineare Abbildung $\phi : V_1 \rightarrow V_2$ gibt, für die

$$\Phi(P +_1 v) = \Phi(P) +_2 \phi(v)$$

für alle $P \in A_1$ und alle $v \in V_1$ gilt. Dabei ist ϕ eindeutig bestimmt.

3.4 Beispiel. Sei $\mathbb{A} = (A, V, +)$ ein affiner Raum.

- (i) Ist $P_0 \in A$ und $U \subset V$ ein Unterraum von V , so bestimmt $P_0 + U$ einen affinen Teilraum von \mathbb{A} . Dabei gilt $P_0 + U = P_1 + U$ genau dann, wenn $\overrightarrow{P_0 P_1} \in U$.
- (ii) Ist $\mathbb{B} = (B, U, +)$ ein affiner Teilraum von \mathbb{A} , so gilt $B \neq \emptyset$ und für jedes $P_0 \in B$ gilt $B = P_0 + U$.
- (iii) Aus $P_1 + U = P_2 + W$ für Unterräume $U, W \subset V$ und Punkte $P_1, P_2 \in A$ folgt $U = W$.

Damit ist jeder affine Teilraum von \mathbb{A} von der Form $P_0 + U$ für einen eindeutig bestimmten Unterraum U von V . Wir bezeichnen $\dim \mathbb{B} := \dim U$ als *Dimension des Teilraumes* \mathbb{B} .

- (iv) Zwei Teilräume \mathbb{B}_1 und \mathbb{B}_2 heißen *parallel*, falls sie von der Form $B_1 = P_1 + U_1$ und $B_2 = P_2 + U_2$ mit $U_1 \subset U_2$ oder $U_2 \subset U_1$ sind. Wir schreiben $\mathbb{B}_1 \parallel \mathbb{B}_2$.
- (v) Eine affine Abbildung $\Phi : A \rightarrow A$, für die die zugehörige lineare Abbildung $\phi : V \rightarrow V$ die Identität ist, wird als *Verschiebung* bezeichnet. Diese ist von der Form

$$\Phi(P) = P + v$$

für einen festen Vektor $v \in V$.

- (vi) Weitere Beispiele für affine Abbildungen sind Skalierungen, (Zentral- und Parallel-) Projektionen, Spiegelungen, Scherungen oder Drehungen. Ein Beispiel dafür ist die Skalierung um einen Punkt P_0 zum Faktor λ , diese ist durch

$$\Phi(P) = \Phi(P_0 + \overrightarrow{P_0 P}) = P_0 + \lambda \overrightarrow{P_0 P}$$

gegeben.

3.5 Proposition. Sei $\mathbb{A} = (A, V, +)$ ein affiner Raum und seien $\mathbb{B}, \mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2$ affine Teilräume. Dann gilt für jede affine Abbildung $\Phi : A \rightarrow A$

(i) $\Phi(\mathbb{B})$ ist affiner Teilraum von A ;

(ii) $\dim \Phi(\mathbb{B}) \leq \dim \mathbb{B}$;

(iii) $\mathbb{B}_1 \parallel \mathbb{B}_2$ impliziert $\Phi(\mathbb{B}_1) \parallel \Phi(\mathbb{B}_2)$.

Beweis. Aus $B = P_0 + U$ folgt $\Phi(B) = \Phi(P_0) + \phi(U)$ und wir erhalten einen affinen Teilraum zum Unterraum $\phi(U)$. Wegen $\dim \phi(U) \leq \dim U$ für lineare Abbildungen ϕ folgt die zweite Aussage und da aus $U_1 \subset U_2$ stets $\phi(U_1) \subset \phi(U_2)$ folgt, erhalten wir die dritte Aussage. \square

3.6 Definition und Satz (Euklidischer Raum). Ein affiner Raum $\mathbb{A} = (A, V, +)$ zusammen mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ wird als Euklidischer (affiner) Raum bezeichnet. Für Vektoren $v \in V$ sei dann $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$ die Länge des Vektors.

(i) Durch $d(P, Q) := \|\overrightarrow{PQ}\|$ wird auf A eine Metrik definiert.

(ii) Durch

$$\cos \angle PQR = \frac{\langle \overrightarrow{QP}, \overrightarrow{QR} \rangle}{\|\overrightarrow{QP}\| \|\overrightarrow{QR}\|}$$

werden Winkel definiert.

(iii) Eine affine Abbildung Φ heißt Bewegung, falls sie isometrisch ist, also falls für alle $P, Q \in A$

$$d(\Phi(P), \Phi(Q)) = \|\phi(\overrightarrow{PQ})\| = \|\overrightarrow{PQ}\| = d(P, Q)$$

gilt. Das ist äquivalent dazu, dass $\phi : V \rightarrow V$ isometrisch ist. Letzteres gilt wiederum genau dann, wenn die darstellende Matrix T von ϕ bezüglich einer Orthonormalbasis orthogonal ist, also $TT^\top = T^\top T = I$ erfüllt.

(iv) Jede Bewegung ist winkeltreu. Dies folgt direkt aus

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{4} (\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2).$$

(v) Für eine Bewegung Φ und die zugehörige lineare Abbildung $\phi : V \rightarrow V$ und ihre darstellende Matrix gilt stets $\det \phi = \det T \in \{\pm 1\}$. Die Bewegung heißt eigentlich, falls die $\det \phi = \det T = 1$.

(vi) Durch Festlegung eines Punktes $P_0 \in A$ und einer Orthonormalbasis (e_1, \dots, e_n) von V kann der Euklidischer Raum mit Koordinaten versehen werden. Jeder Punkt $P \in A$ besitzt eine eindeutige Darstellung der Form

$$P = P_0 + \overrightarrow{P_0P} = P_0 + \sum_{j=1}^n \xi_j e_j$$

mit *kartesischen Koordinaten* (ξ_1, \dots, ξ_n) . Wir bezeichnen das Tupel (P_0, e_1, \dots, e_n) als *kartesisches Koordinatensystem*.

3 Strukturen

(vii) Wir verwenden im Folgenden die Bezeichnung \mathbb{E}^n für den n -dimensionalen Euklidischen (affinen) Raum.

3.7 Beispiel. Wir wollen kartesische Koordinaten nutzen, um einige affine Abbildungen / Bewegungen des \mathbb{E}^n explizit anzugeben.

(i) Ein affiner Teilraum $B \subset \mathbb{E}^n$ wird als *Hyperebene* bezeichnet, falls $\dim B = n - 1$ gilt. Wir konstruieren die Spiegelung S_B an der Hyperebene und die Projektion P_B auf die Hyperebene. Dazu wählen wir uns ein $P_0 \in B$ und eine Orthonormalbasis (e_1, \dots, e_{n-1}) des Unterraums U mit $B = P_0 + U$. Sei weiter e_n so gewählt, dass (e_1, \dots, e_n) Orthonormalbasis von V ist. Dann gilt

$$Q \in B \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{P_0 Q} \in U \quad \Leftrightarrow \quad \langle \overrightarrow{P_0 Q}, e_n \rangle = 0$$

(Hessesche Normalform der Hyperebene B) und für jeden Punkt $Q \in \mathbb{E}^n$ liefert \Leftrightarrow den (orientierten) Abstand zur Hyperebene. In kartesischen Koordinaten schreiben wir Q als

$$Q = P_0 + \sum_{j=1}^n \xi_j e_j$$

mit $\xi_j = \langle \overrightarrow{P_0 Q}, e_j \rangle$ und erhalten als Projektion

$$P_B(Q) = P_0 + \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j e_j$$

sowie als Spiegelung

$$S_B(Q) = P_0 + \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j e_j - \xi_n e_n.$$

Die darstellende Matrix ist also in den beiden Fällen durch

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{beziehungsweise} \quad \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Die erste Abbildung ist affin, jedoch keine Bewegung. Die zweite Abbildung besitzt Determinante -1 und ist (da die Matrix offenbar orthogonal ist) eine uneigentliche Bewegung. Es gilt

$$B = \{Q \in \mathbb{E}^n \mid S_B(Q) = Q\}$$

und die Spiegelebene B ist genau die Menge der Fixpunkte der Bewegung S_B .

(ii) Seien nun $P, Q \in \mathbb{E}^n$ zwei Punkte. Die Hyperebene

$$M(P, Q) = P + \frac{1}{2} \overrightarrow{PQ} + U$$

mit $U = \overrightarrow{PQ}^\perp = \{v \in V \mid \langle \overrightarrow{PQ}, v \rangle = 0\}$ wird als *Mittelsenkrechte* zwischen P und Q bezeichnet. Es gilt

$$S_{M(P,Q)}(P) = Q, \quad S_{M(P,Q)}(Q) = P$$

und ebenso

$$R \in M(P, Q) \quad \Leftrightarrow \quad d(P, R) = d(Q, R).$$

(iii) Sei nun $B \subset \mathbb{E}^n$ ein Teilraum mit $\dim B = 2$ und (P_0, e_1, e_2) ein kartesisches Koordinatensystem in B . Wir setzen dies zu einem Koordinatensystem (P_0, e_1, \dots, e_n) in \mathbb{E}^n fort. Sei nun $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist die Abbildung

$$R_\alpha \left(P_0 + \sum_{j=1}^n \xi_j e_j \right) = P_0 + (\xi_1 \cos \alpha - \xi_2 \sin \alpha) e_1 + (\xi_1 \sin \alpha + \xi_2 \cos \alpha) e_2 + \sum_{j=3}^n \xi_j e_j$$

eine eigentliche Bewegung und wird als *Rotation* in der Ebene B um den Punkt P_0 und mit Drehwinkel α bezeichnet.

Die Abbildung hängt von P_0 und der Orientierung der Ebene B ab, nicht jedoch von der Wahl der Basisvektoren e_1, e_2 .

3.2 Symmetrien

3.8 Satz. (i) Die Menge

$$\text{Iso}(\mathbb{E}^n) = \{ \Phi : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n \mid \Phi \text{ ist Bewegung} \}$$

bildet eine Gruppe unter Verknüpfung.

(ii)

$$\text{Iso}_+(\mathbb{E}^n) = \{ \Phi : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n \mid \Phi \text{ ist eigentliche Bewegung} \}$$

ist Normalteiler der Gruppe $\text{Iso}(\mathbb{E}^n)$.

Beweis. (i) Wir fixieren ein kartesisches Koordinatensystem und beschreiben die Bewegungen durch jeweils einen (Verschiebungs-) Vektor v und eine orthogonale Matrix T als

$$\Phi_{v,T} : \xi \mapsto v + T\xi.$$

Dann gilt für die Verkettung von zwei solchen Bewegungen

$$\Phi_{v,T} \circ \Phi_{w,S} = \Phi_{v+Tw,TS}$$

wieder eine Bewegung zum Vektor $v + Tw$ und zur orthogonalen Matrix TS . Die Gruppeneigenschaften sind leicht nachzurechnen. Das neutrale Element entspricht der identischen Abbildung $\Phi_{0,I}$ und wegen

$$\Phi_{v,T} \circ \Phi_{-T^{-1}v, T^{-1}} = \Phi_{0,I} = \Phi_{-T^{-1}v, T^{-1}} \circ \Phi_{v,T}$$

ergibt sich $\Phi_{v,T}^{-1} = \Phi_{-T^{-1}v, T^{-1}}$. • (ii) Die Abbildung $\Phi_{v,T} \mapsto T$ ist ein Gruppenhomomorphismus, da $\Phi_{v,T} \circ \Phi_{w,S} \mapsto TS$ gilt. Weiterhin ist $T \mapsto \det T$ ein solcher. Damit ist

$$\text{Iso}_+(\mathbb{E}^n) = \{ \Phi_{v,T} \in \text{Iso}(\mathbb{E}^n) \mid \det T = 1 \}$$

als Kern eines Homomorphismus ein Normalteiler. Das kann man auch direkt nachrechnen, mit $\Phi_{v,T} \in \text{Iso}_+$ und $\Phi_{w,S}$ beliebig gilt

$$\det(STS^{-1}) = (\det S)(\det T)(\det S)^{-1} = \det T$$

also $\Phi_{w,S} \circ \Phi_{v,T} \circ \Phi_{w,S}^{-1} \in \text{Iso}_+$. □

3 Strukturen

Wir wollen die Bewegungsgruppen explizit angeben, dazu konstruieren wir alle solchen Bewegungen aus Spiegelungen. In der Ebene genügen maximal drei Spiegelungen um zwei kongruente Dreiecke aufeinander abzubilden. Wie?

3.9 Definition und Satz. Sei $\mathbb{A} = (A, V, +)$ ein affiner Raum mit $\dim \mathbb{A} = n$.

(i) Wir sagen, $n + 1$ Punkte $P_0, \dots, P_n \in A$ sind in *allgemeiner Lage*, falls die n Vektoren

$$\overrightarrow{P_0, P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0, P_n}$$

eine Basis von V bilden.

(ii) Sei nun $\Phi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ bijektive affine Abbildung und seien P_0, \dots, P_n in allgemeiner Lage. Dann sind auch die Bildpunkte $\Phi(P_0), \dots, \Phi(P_n)$ in allgemeiner Lage.

(iii) Seien die Punkte $P_0, \dots, P_n \in A$ in allgemeiner Lage und die Punkte $Q_0, \dots, Q_n \in A$ beliebig. Dann existiert genau eine affine Abbildung $\Phi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ mit $\Phi(P_i) = Q_i$ für $i = 0, \dots, n$. Diese ist bijektiv genau dann, wenn die Bildpunkte Q_0, \dots, Q_n in allgemeiner Lage sind.

Sei nun $\mathbb{A} = \mathbb{E}^n$. Dann gilt

(iv) Ist $\Phi : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ Bewegung und seien $P_0, \dots, P_n \in \mathbb{E}^n$ in allgemeiner Lage, so gilt

$$d(\Phi(P_i), \Phi(P_j)) = d(P_i, P_j)$$

für alle $i, j = 0, \dots, n$.

(v) Seien nun $P_0, \dots, P_n \in \mathbb{E}^n$ in allgemeiner Lage und gelte für Punkte $Q_0, \dots, Q_n \in \mathbb{E}^n$

$$d(P_i, P_j) = d(Q_i, Q_j)$$

für alle $i, j = 0, \dots, n$. Dann existiert genau eine Bewegung $\Phi \in \text{Iso}(\mathbb{E}^n)$ mit

$$\Phi(P_i) = Q_i$$

für $i = 0, \dots, n$.

Beweis. Eine lineare Abbildung $V \rightarrow V$ ist eindeutig bestimmt durch die Bilder einer Basis von V und ist genau bijektiv, wenn die Bildvektoren der Basis wiederum eine Basis bilden. Damit folgen (ii) und (iii). Die Aussage (iv) ist eine direkte Folgerung der Definition einer Bewegung, es bleibt der Beweis von (v). Die Eindeutigkeit ist klar, den Existenzbeweis führen wir induktiv und bestimmen eine affine Abbildung Φ_k mit $P_i \mapsto Q_i$ für $i \leq k$.

Für $k = 0$ setzen wir Φ_0 als Spiegelung an $M(P_0, Q_0)$.

Angenommen wir haben eine Bewegung Φ_k mit $\Phi_k : P_i \mapsto Q_i$ für $i \leq k$ konstruiert. Dann unterscheiden wir zwei Fälle. Gilt nun $\Phi_k(P_{k+1}) = Q_{k+1}$, so setzen wir $\Phi_{k+1} = \Phi_k$ und wir sind einen Schritt weiter. Gilt andererseits $\Phi_k(P_{k+1}) \neq Q_{k+1}$, so gilt für alle $i \leq k$

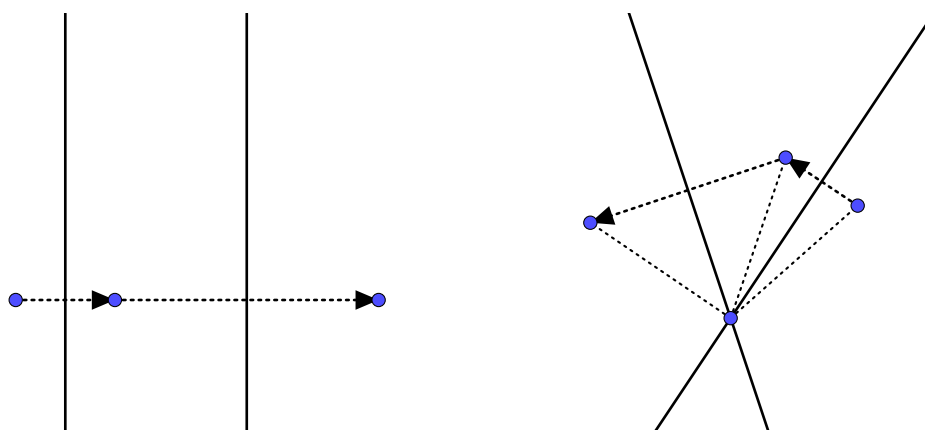
$$d(\Phi_k(P_i), \Phi_k(P_{k+1})) = d(P_i, P_{k+1}) = d(Q_i, Q_{k+1}) = d(\Phi_k(P_i), Q_{k+1})$$

und die Punkte $Q_i = \Phi_k(P_i)$, $i = 0, \dots, k$, liegen auf der Mittelsenkrechten $M(\Phi_k(P_{k+1}), Q_{k+1})$. Ist nun S_{k+1} die Spiegelung an $M(\Phi_k(P_{k+1}), Q_{k+1})$, so lässt diese die Punkte Q_0, \dots, Q_k fix und die Abbildung $\Phi_{k+1} = S_{k+1} \circ \Phi_k$ liefert das gewünschte. \square

3.10 Folgerung. Jede Bewegung des \mathbb{E}^n ist als Verkettung von maximal $n + 1$ Spiegelungen darstellbar.

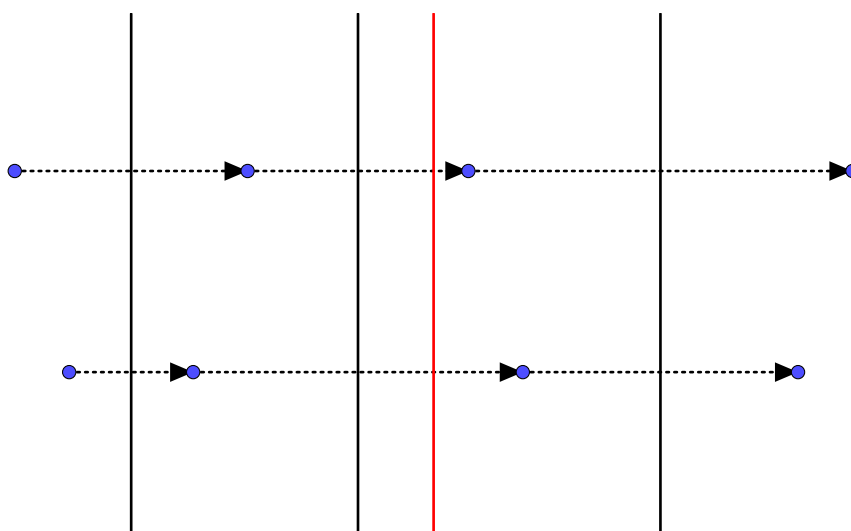
3.11 Beispiel. Bewegungen des \mathbb{E}^2 sind damit durch bis zu drei Spiegelungen darstellbar. Wir zählen diese alle auf:

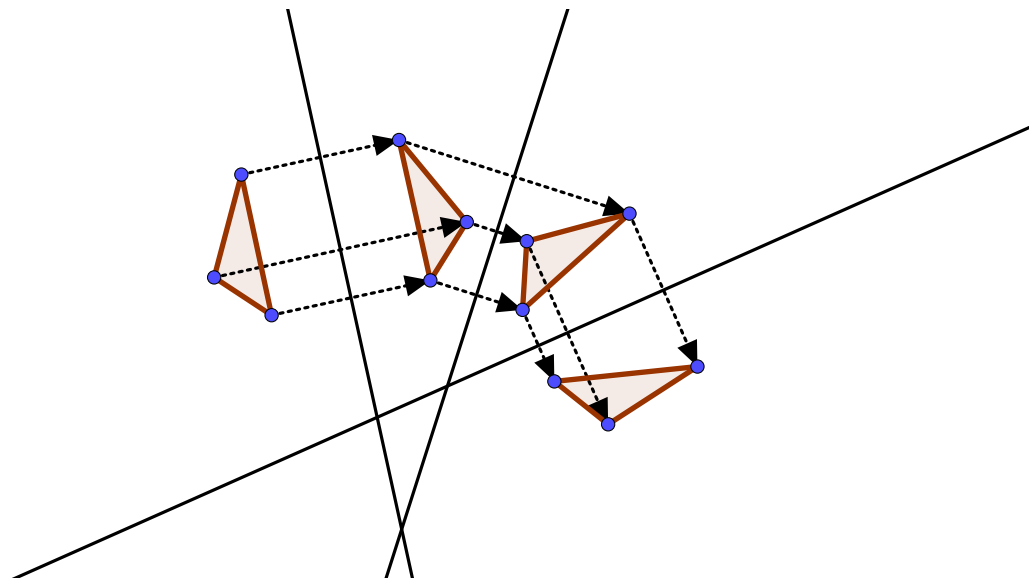
- Die identische Abbildung (keine Spiegelung).
- Eine Spiegelung.
- Zwei Spiegelungen an Geraden g_1 und g_2 . Dabei treten zwei Fälle auf. Ist $g_1 \parallel g_2$, so liefert die Verkettung der Spiegelungen $S_{g_2} \circ S_{g_1}$ die Verschiebung um den doppelten Abstand der Geraden. Schneiden sich g_1 und g_2 in einem Punkt P , so liefert die Verkettung $S_{g_2} \circ S_{g_1}$ die Drehung um den doppelten Schnittwinkel der beiden Geraden.



Wir bezeichnen die Verschiebung um einen Vektor v als T_v und die Drehung um einen Punkt P mit Drehwinkel α als $R_{P,\alpha}$.

- Drei Spiegelungen an Geraden g_1 , g_2 und g_3 . Hier sind wiederum mehrere Fälle zu unterscheiden. Sind alle drei Geraden parallel, $g_1 \parallel g_2 \parallel g_3$, so ergibt sich durch Verkettung wiederum eine Spiegelung:





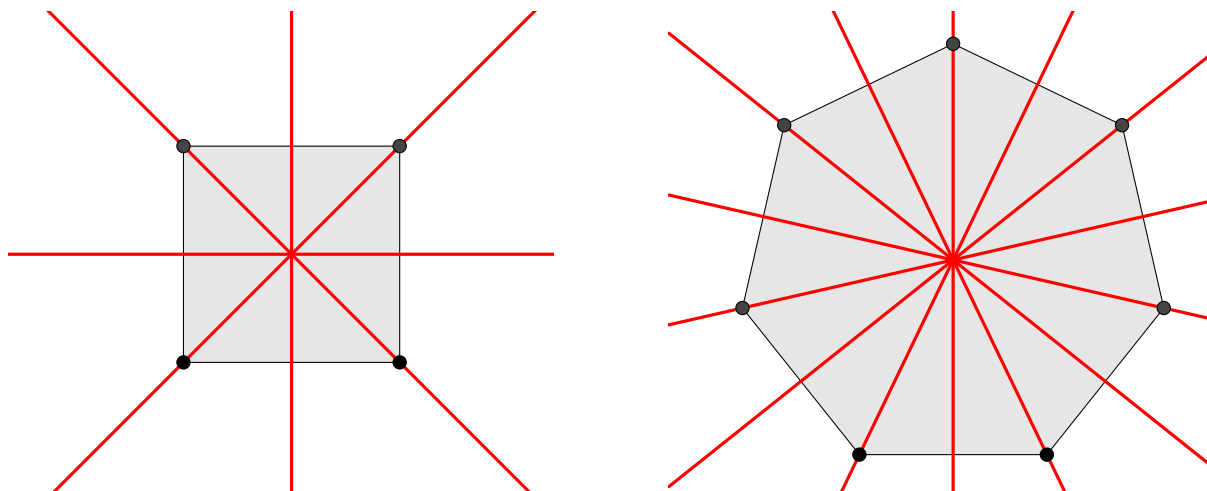
3.12 Beispiel. Bewegungen im Raum sind analog durch bis zu vier Spiegelungen darstellbar. Zwei Spiegelungen entsprechen dabei wiederum Translationen (bei parallelen Spiegelebenen) und Rotationen um Drehachsen (bei sich schneidenden Spiegelebenen). Drei Spiegelungen liefern dazu neben einfachen Spiegelungen wiederum Gleit- und Drehspiegelungen sowie Punktspiegelungen, während sich aus vier Spiegelungen Schraubungen zusammensetzen lassen.

3.13 Definition. Für eine Teilmenge $M \subset \mathbb{E}^n$ bezeichne

$$\text{Sym}(M) = \{\Phi \in \text{Iso}(\mathbb{E}^n) \mid \Phi(M) = M\}$$

ihre Symmetriegruppe. Als elementare Beispiele kann man sich $\text{Sym}(\mathbb{E}^n) = \text{Iso}(\mathbb{E}^n)$ oder die Fixmenge eines Punktes $\text{Sym}(\{P\})$ bestehend aus den Drehungen um P und den Spiegelungen an Ebenen durch P vorstellen. Letztere entspricht genau der Symmetriegruppe eines Kreises um P .

3.14 Beispiel. Die Symmetriegruppe eines regelmäßigen n -Ecks



3 Strukturen

wird von allen Spiegelungen an den Mittelsenkrechten der Seiten und den Verbindungslinien von Eckpunkten zum Mittelpunkt erzeugt und besteht damit aus Drehungen um die Winkel $\frac{2n}{k}\pi$ um den Mittelpunkt und Spiegelungen an n Spiegelachsen.

3.15 Beispiel. Symmetrien von Polyedern. Wir betrachten zuerst exemplarisch einen Würfel $W = \{A, B, C, D, E, F, G, H\} \subset \mathbb{E}^3$ verstanden als Menge seiner acht Eckpunkte und fragen nach seiner Symmetriegruppe. Durch Anschauen finden wir neben der identischen Abbildung dabei als Symmetrien

- Drehungen um die drei, sich gegenüberliegende Seitenmitten verbindende, Geraden um Winkel $\pi/2$, π und $3\pi/2$ (vierzählige Drehsymmetrie);
- Drehungen um die vier Raumdiagonalen um die Winkel $2\pi/3$ und $4\pi/3$ (dreizählige Drehsymmetrie);
- Drehungen um die sechs, sich gegenüberliegende Kantenmitten verbindende, Geraden um den Winkel π (zweizählige Drehsymmetrie);
- Spiegelungen an den drei, zwischen gegenüberliegenden Seiten liegenden, Mittelebenen;
- Spiegelungen an den sechs, sich gegenüberliegende Kanten enthaltenden, Ebenen;
- Punktspiegelung am Würfelmittelpunkt.

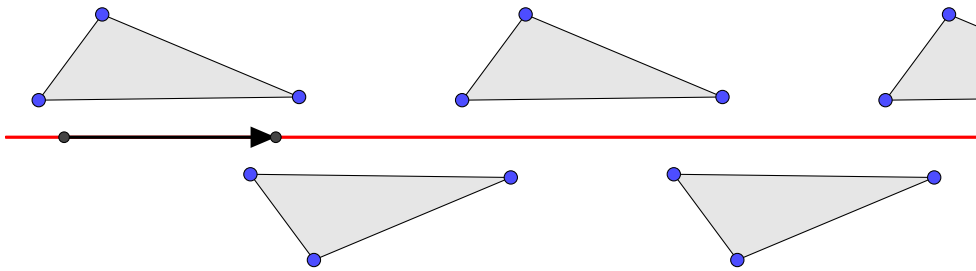
Das sind zusammen mit der identischen Abbildung genau 24 Drehungen, die zu den angegebenen 10 Spiegelungen noch fehlenden Bewegungen sind Drehspiegelungen.

Der Würfel W besitzt genau 48 Symmetrien. Wir zählen dies noch einmal nach. Dazu markieren wir eine Ecke und fixieren die Reihenfolge angrenzender Kanten. Unter einer Drehung wird die Ecke auf eine der 8 Ecken abgebildet. Dann haben wir drei Möglichkeiten die erste der Kanten auf eine zur Bildecke adjazente Kante abzubilden. Da Drehungen orientierungserhaltend sind, ist damit die Zuordnung der weiteren Kanten an der Ecke festgelegt und auch die Bewegung, es gibt also $8 \cdot 3 = 24$ Drehungen. Allgemeine Bewegungen benötigen noch die Zuordnung der zweiten Kante auf eine der verbleibenden zwei. Die Zuordnung der dritten Kante ergibt sich dann direkt aus der Gestalt des Würfels. Also gibt es insgesamt $8 \cdot 3 \cdot 2 = 48$ Bewegungen in der Symmetriegruppe. Die Symmetriegruppe des Würfels stimmt mit der des dazu dualen Oktaeders überein.

Die Symmetriegruppen von Dodekaeder und Ikosaeder enthalten jeweils $20 \cdot 3 \cdot 2 = 120 = 12 \cdot 5 \cdot 2$ Bewegungen; die Argumentation zum Zählen ist analog zu der beim Würfel angegebenen.

3.3 Fries- und Ornamentgruppen

Wir betrachten nun Symmetriegruppen, die neben Rotationen und Spiegelungen insbesondere auch Translationen enthalten. Als erstes wollen wir uns mit Friesen oder Bandornamenten beschäftigen. Dies sind Muster in der Ebene, welche (diskrete) Translationen in eine Richtung als Symmetrien besitzen.



3.16 Definition. Ein Fries $F \subset \mathbb{E}^2$ ist eine Menge, deren Symmetriegruppe $\text{Sym}(F)$

$$T_F = \{\Phi \in \text{Sym}(F) \mid \exists w \in V : \Phi = \Phi_{w,I}\} = \{T_{kv} \mid k \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}$$

für einen Vektor $v \neq 0$ erfüllt. Der Vektor v ist dabei bis auf sein Vorzeichen eindeutig bestimmt und wird als Friesvektor von F bezeichnet, die Symmetriegruppe von F als Friesgruppe.

Friese sind aus Translationszellen zusammengesetzt.

3.17 Folgerung. Sei $F \subset \mathbb{E}^2$ ein Fries mit Friesvektor v und P_0 ein Punkt. Dann gilt mit

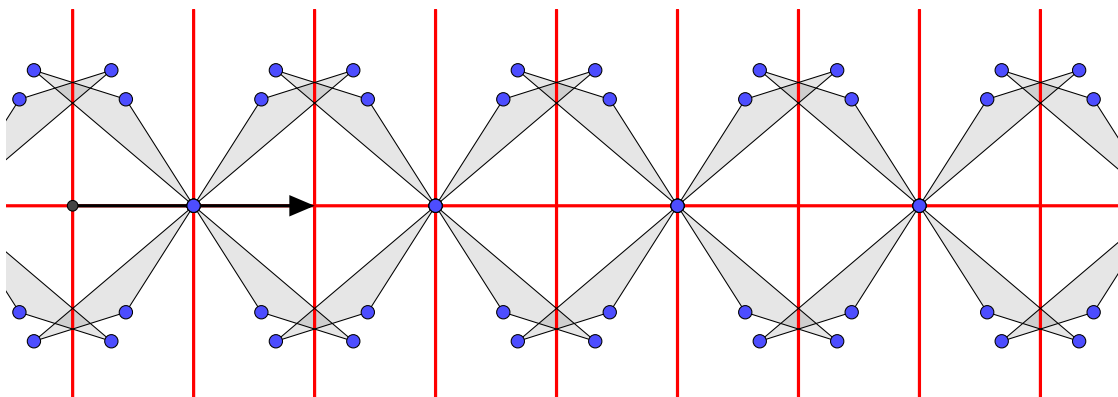
$$F_0 = \{P \in F \mid 0 \leq \langle v, \overrightarrow{P_0P} \rangle < \|v\|^2\}$$

die Darstellung

$$F = \dot{\bigcup}_{k \in \mathbb{Z}} T_{kv}(F_0)$$

des Frieses als disjunkte Vereinigung der Translate von F_0 .

3.18 Beispiel. Wir betrachten das folgende Ornament (bestehend aus unendlich vielen Dreiecken) und fragen nach allen seinen Symmetrien.



Wir bezeichnen mit v den eingezeichneten Vektor und mit P seinen Startpunkt. Weiter sei h die horizontale rote Gerade und g die durch P gehende vertikale Gerade. Dann enthält die Symmetriegruppe dieses Frieses neben der Identität

- die Translationen T_{kv} mit $k \in \mathbb{Z}$;
- die horizontale Spiegelung S_h ;

3 Strukturen

- die vertikalen Spiegelungen $S_{g+\frac{1}{2}kv}$ für $k \in \mathbb{Z}$;
- die Drehungen $R_{P+\frac{1}{2}kv, \pi}$ für $k \in \mathbb{Z}$ (also Punktspiegelungen an den Punkten $P + \frac{1}{2}kv$);
- die Gleitspiegelungen $T_{kv} \circ S_h$ zu $k \in \mathbb{Z}$.

Es ist sinnvoll, durch Skalierungen auseinander hervorgehenden Friesgruppen zu identifizieren. Deshalb definieren wir:

3.19 Definition. Zwei Untergruppen $G, H \subset \text{Iso}(\mathbb{E}^n)$ heißen *ähnlich*, wenn es eine bijektive affine Abbildung $\Phi : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ mit $d(\Phi(P), \Phi(Q)) = \alpha d(P, Q)$ für alle $P, Q \in \mathbb{E}^n$ und ein $\alpha > 0$, sowie

$$\Phi \circ G \circ \Phi^{-1} = H$$

gibt.

3.20 Satz. *Es gibt bis auf Ähnlichkeit genau sieben Friesgruppen. Diese sind bestimmt durch den Friesvektor v , einen Punkt P und eine vertikale Gerade g durch P . Darüberhinaus ist jeweils $k \in \mathbb{Z}$ beliebig:*

	Muster	enthaltene Bewegungen
1	FFFFFF	Translationen T_{kv}
2	//////	Translationen T_{kv} und Punktspiegelungen an $P + \frac{1}{2}kv$
3	AAAAAA	Translationen T_{kv} und vertikale Spiegelungen
4	KKKKKK	Translationen T_{kv} und Gleitspiegelungen zu Vektoren kv
5	pbpbpb	Translationen T_{kv} und Gleitspiegelungen zu Vektoren $\frac{1}{2}v + kv$
6	XXXXXX	Translationen T_{kv} , Punktspiegelungen an $P + \frac{1}{2}kv$ und Gleitspiegelungen zu Vektoren kv
7	WMWMWM	Translationen T_{kv} , Punktspiegelungen an $P + \frac{1}{2}kv$ und Gleitspiegelungen zu Vektoren $\frac{1}{2}v + kv$

Beweis. Sei F Fries mit Friesvektor v . Wir ordnen der Friesgruppe die Gruppe

$$G_F = \{L \mid \exists w \in V : \Phi_{w,L} \in \text{Sym}(F)\}$$

der linearen Anteil der ihrer Symmetrien zu und untersuchen diese zuerst. Wegen

$$\Phi_{w,L} \circ T_v \circ \Phi_{w,L}^{-1} = \Phi_{w,L} \circ T_v \circ \Phi_{-L^{-1}w, L^{-1}} = T_{Lv}$$

muss $Lv = kv$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ gelten. Da L Isometrie ist, folgt $k = \pm 1$. Setzt man v durch v^\perp zu einer Orthogonalbasis von V fort, so ergibt sich analog $Lv^\perp = \pm v^\perp$ und wir sehen, dass in dieser Basis

$$G_F \subset \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \right\} = \{I, J, -J, -I\}$$

gelten muss. Das ergibt fünf Fälle:

- (i) $G_F = \{I\}$, die Friesgruppe besteht nur aus Translationen und wir erhalten

$$\text{Sym}(F) = \{T_{kv} \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

und damit die erste der Friesgruppen. Zeile 1

- (ii) $G_F = \{\pm I\}$ wird erzeugt durch $-I$. Wir wählen den Fixpunkt einer der auftretenden Punktspiegelungen als Koordinatenursprung. Wegen $\Phi_{0,-I} \in \text{Sym}(F)$ und

$$\Phi_{w,-I} \circ T_v = \Phi_{w-v,-I}$$

erhalten wir mindestens die Symmetrien $\text{Sym}(F) \supset \{\Phi_{kv,\pm I} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ und aufgrund von

$$\Phi_{w,-I} \circ \Phi_{u,-I} = T_{w-u}$$

können auch nicht mehr auftreten, da sich sonst der Friesvektor ändern würde. Bei $\Phi_{w,-I}$ handelt es sich um eine Punktspiegelung um $P + \frac{1}{2}w$. Zeile 2

- (iii) $G_F = \{I, J\}$ wird erzeugt von J . In der Friesgruppe treten Translationen und vertikale Spiegelungen auf. Wir wählen den Koordinatenursprung auf einer der vertikalen Spiegellachsen. Wegen $\Phi_{0,J} \in \text{Sym}(F)$ und

$$\Phi_{w,J} \circ T_v = \Phi_{w-v,J}$$

ergibt sich $\text{Sym}(F) \supset \{\Phi_{kv,I}, \Phi_{kv,J} \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Da

$$\Phi_{w,J} \circ \Phi_{u,J} = T_{w+Ju}$$

gilt und damit stets $w + Ju \in v\mathbb{Z}$ gelten muss, können hierbei ebenso keine weiteren Symmetrien auftreten. Zeile 3

- (iv) $G = \{I, -J\}$ wird erzeugt von $-J$. Damit treten in der Friesgruppe Translationen und horizontale Spiegelungen (und als Verkettungen davon Gleitspiegelungen) auf. Wegen

$$\Phi_{w,-J} \circ \Phi_{u,-J} = T_{w-Ju}$$

folgt $w - Ju \in v\mathbb{Z}$ und es können nur $u, w \parallel v$ in den Bewegungen auftreten. Wir unterscheiden zwei Unterfälle. Entweder gilt $\Phi_{0,-J} \in \text{Sym}(F)$. Dann folgt

$$\text{Sym}(F) = \{\Phi_{kv,I}, \Phi_{kv,-J} \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

und wir erhalten die entsprechende Friesgruppe, Zeile 4

Gilt $\Phi_{kv,-J} \notin \text{Sym}(F)$ für $k \in \mathbb{Z}$, so folgt wegen

$$\Phi_{w,-J} \circ \Phi_{w,-J} = T_{2w}$$

für alle $w \parallel v$, dass es sich bei den Translationen w um halbzahlige Vielfache des Friesvektors v handeln muss. Durch Verkettung mit weiteren Translationen erhält man alle halbzahligen Vielfachen und wir folgern

$$\text{Sym}(F) = \{\Phi_{kv,I}, \Phi_{\frac{1}{2}v+kv,-J} \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

und erhalten wiederum die zugehörige Friesgruppe. Zeile 5

3 Strukturen

- (v) G enthält $\pm J$ und es gilt damit $G = \{\pm I, \pm J\}$. Wie oben folgert man, dass es in der Friesgruppe nur Bewegungen der Form $\Phi_{kv,I}$, $\Phi_{kv,-I}$, $\Phi_{w,\pm J}$ mit $w||v$ geben kann. Wir unterscheiden wiederum zwei Fälle. Gilt $\Phi_{0,-J} \in \text{Sym}(F)$, so folgt

$$\Phi_{kv,\pm J}, \Phi_{kv,\pm I} \in \text{Sym}(F)$$

für $k \in \mathbb{Z}$, und dies sind auch alle auftretenden Bewegungen. Zeile 6

Gilt $\Phi_{kv,-J} \notin \text{Sym}(F)$ für $k \in \mathbb{Z}$, so folgt wiederum

$$\Phi_{kv,J}, \Phi_{kv,\pm I}, \Phi_{\frac{1}{2}v+kv,-J} \in \text{Sym}(F)$$

für $k \in \mathbb{Z}$, und dies sind auch alle auftretenden Bewegungen. Zeile 7

□

Neben Friesen, welche nur eine Translationen in eine Richtung als Symmetrien enthalten, spielen auch Ornamente mit zwei unabhängigen Translationssymmetrien eine Rolle. Diese führen zum Begriff der Ornamentgruppen.

3.21 Definition. Ein Ornament beziehungsweise ein Parkettierung $F \subset \mathbb{E}^2$ ist eine Menge, deren Symmetriegruppe $\text{Sym}(F)$

$$T_F = \{\Phi \in \text{Sym}(F) \mid \exists w \in V : \Phi = \Phi_{w,I}\} = \{T_{k_1v_1+k_2v_2} \mid k_1, k_2 \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}$$

für zwei linear unabhängige Vektoren $v_1, v_2 \in V$ erfüllt. Die Symmetriegruppe von F wird als Ornamentgruppe bezeichnet, die Vektoren v_1 und v_2 als zugehörige Translationsvektoren. Die Translationsvektoren sind nicht eindeutig bestimmt.

Jedes solche Ornament zerfällt in Translationszellen, die durch Translationen ineinander überführt werden können.

3.22 Folgerung. Sei F Ornament mit Translationsvektoren v_1, v_2 und P_0 ein Punkt. Dann gilt mit

$$F_0 = \{P \in F \mid 0 \leq \langle v_1, \overrightarrow{P_0P} \rangle < \|v_1\|^2 \text{ und } 0 \leq \langle v_2, \overrightarrow{P_0P} \rangle < \|v_2\|^2\}$$

die Darstellung

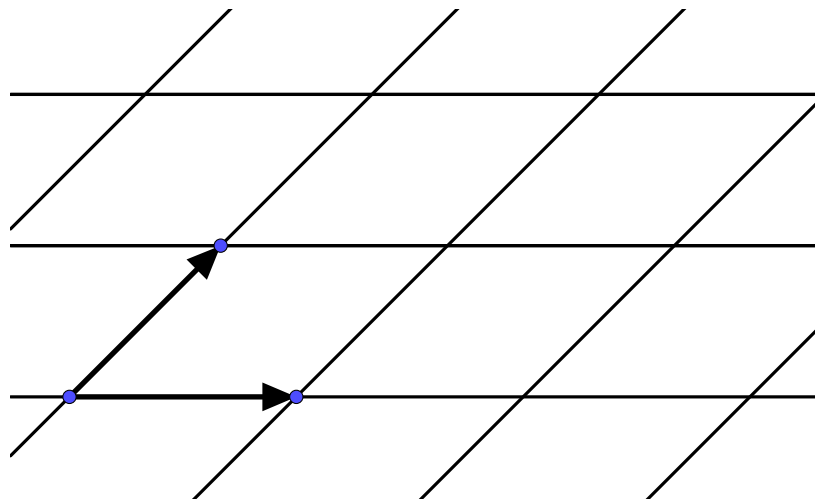
$$F = \dot{\bigcup}_{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}} T_{k_1v_1+k_2v_2}(F_0)$$

des Ornaments als disjunkte Vereinigung der Translate von F_0 . Die Menge F_0 wird als Translationszelle des Ornaments bezeichnet.

3.23 Satz. Es gibt bis auf Ähnlichkeit genau 17 Ornamentgruppen.

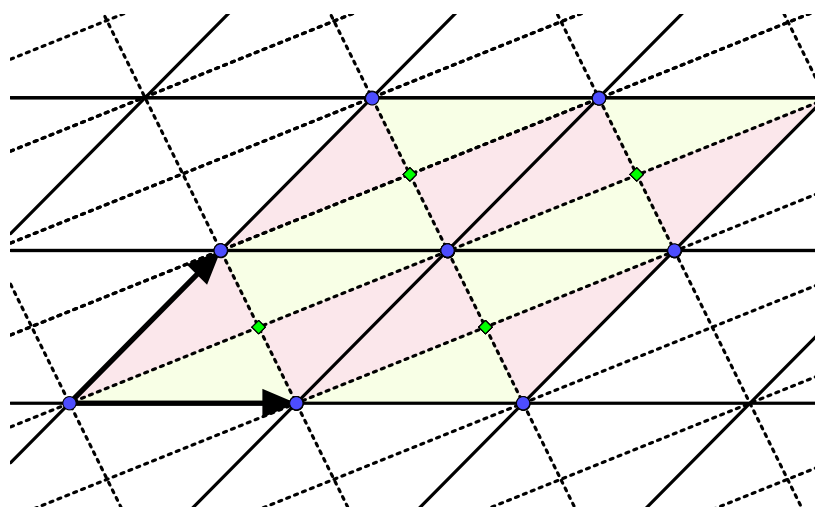
Jede der Translationszellen kann danach weiter in Elementarzellen zerlegt werden, die zusammen mit ihren Spiegelbildern und rotierten Kopien die Translationszelle ausfüllen. Zur Angabe der Ornamentgruppe reicht die Klassifikation solcher Zellen. Wir geben einige Beispiele an.

3.24 Beispiel. (i) Das einfachste Ornament besitzt nur Translation als Symmetrien. Die Translationszellen sind dabei Parallelogramme (eventuell mit Bildern die jede andere Symmetrie ausschließen).



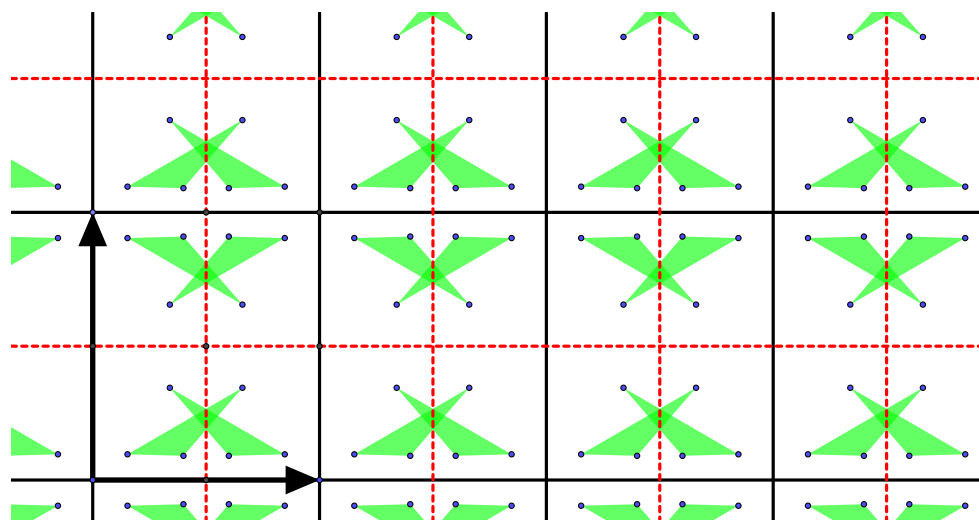
- (ii) Jede der Translationszellen kann darüberhinaus eine Punktspiegelung zum Zentrum als Symmetrie besitzen. Zusätzlich können Spiegelsymmetrien an den Diagonalen der Zelle auftreten, falls beide Translationsvektoren gleich lang sind.

Ein Beispiel ist nachfolgend dargestellt:

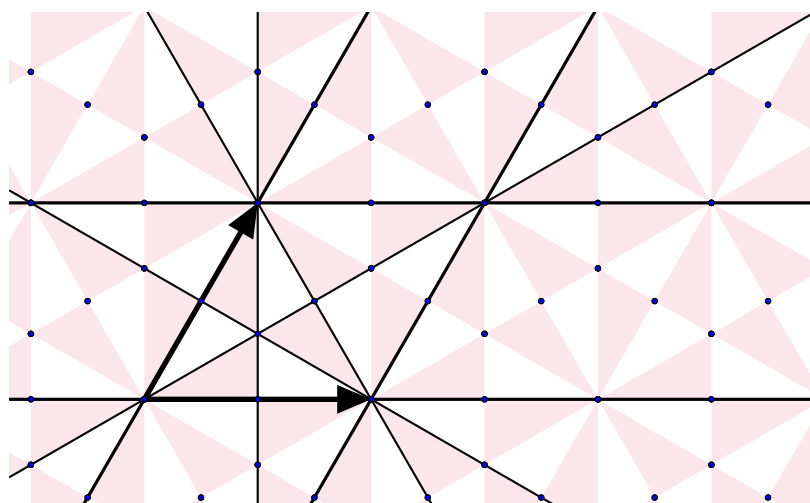


- (iii) Stehen die Translationsvektoren aufeinander senkrecht, so können weitere Spiegelsymmetrien zu den Mittellinien auftreten. In diesem Fall gibt es mitunter auch Drehungen zu Winkeln $k\frac{\pi}{2}$ als Symmetrien, falls die Translationsvektoren gleiche Länge besitzen.

Ein Beispiel ist nachfolgend dargestellt:



- (iv) Besitzen die Translationsvektoren den Winkel $\frac{\pi}{3}$, so können Drehungen mit Drehwinkeln $k\frac{\pi}{3}$ beziehungsweise auch $k\frac{2\pi}{3}$ auftreten, falls die Translationsvektoren gleich lang sind.
 Ein Beispiel ist nachfolgend dargestellt:



3.4 Eine nichtperiodische Parkettierung der Ebene

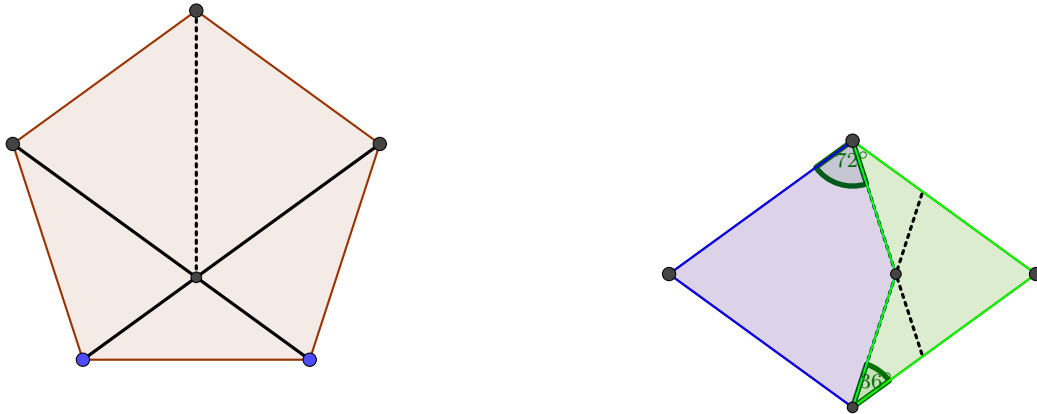
Während Ornamentgruppen insbesondere periodische Parkettierungen der Ebene durch wenige durch Bewegungen aufeinander abgebildete Bausteine liefern, existieren auch Parkettierungen der Ebene ohne jede periodische Struktur. Wir wollen die Idee kurz skizzieren.

Ausgangspunkt ist ein regelmäßiges Fünfeck der Seitenlänge 1 und die darin auftretenden Streckenlängen des goldenen Schnittes

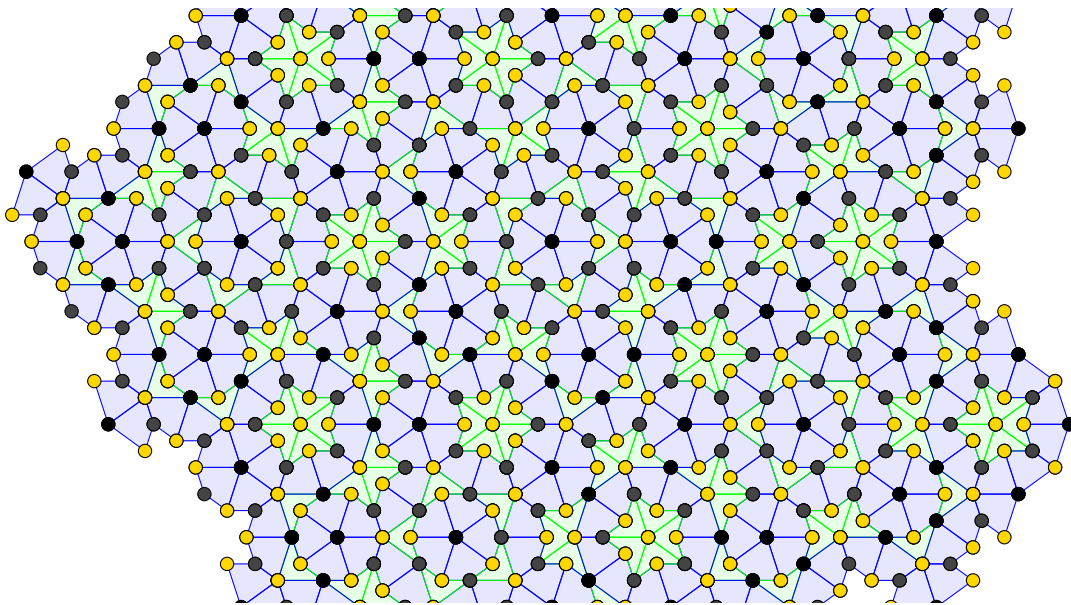
$$\phi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}, \quad \frac{1}{\phi} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Dabei entspricht ϕ dem Abstand von einer Ecke zum gegenüberliegenden Diagonalschnittpunkt, also der kürzeren Diagonalen im nachfolgend eingezeichneten Rhombus. Die Länge $\frac{1}{\phi}$ entspricht der Basis des daneben auftretenden gleichschenkligen Dreiecks.

3.4 Eine nichtperiodische Parkettierung der Ebene



Wir zerlegen die den Rhombus wie dargestellt in zwei Teile, im Englischen als *kite* K und *dart* D bezeichnet und führen Regeln dazu ein, welche Ecken zusammengesetzt werden dürfen. Dazu markieren wir die stumpfe Ecke von K und die gegenüberliegende Ecke sowie die beiden Spitzen von D und vereinbaren, dass nur markierte Ecken aneinanderstoßen dürfen. Die Originalanordnung von K und D ist also insbesondere nicht erlaubt. Ein Beispiel könnte wie folgt aussehen:

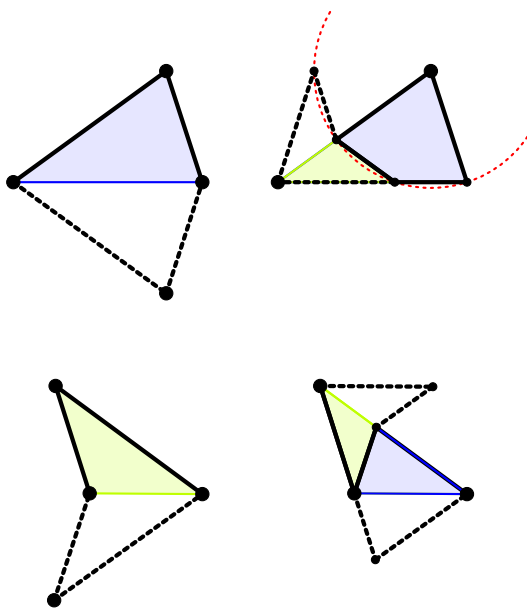


Es existiert eine Parkettierung der gesamten Ebene durch zu K und D kongruente Vierecke. Diese kann nicht periodisch sein. Um dies zu sehen, konstruieren wir zuerst eine zulässige Parkettierung. Dazu beginnen wir indem wir fünf Kopien von K zu einem Zehneck zusammensetzen und wenden Ersetzungsregeln und Skalierungen auf jedes einzelne auftretende K und später auch D an. Dabei gehen wir für halbe K und halbe D wie folgt vor:

- (i) Ersetze halbe K wie angegeben durch ein K und ein halbes D .

3 Strukturen

(ii) Ersetze halbe D wie angegeben durch ein halbes K und ein halbes D .



Danach skalieren wir die Figur mit dem Faktor ϕ , um bei den Figuren K und D wieder die Ausgangsgröße zu erhalten.

Bezeichne nun k_n die Anzahl der K im Schritt n und d_n die Anzahl der D im Schritt n , so folgt

$$k_{n+1} = 2k_n + d_n, \quad d_{n+1} = k_n + d_n,$$

so dass wir in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} k_{n+1} \\ d_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_n \\ d_n \end{pmatrix}$$

erhalten. Dies kann man durch Bestimmen der Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix explizit darstellen. Die Matrix besitzt die Eigenwerte $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ und die zugehörigen Eigenvektoren

$$\begin{pmatrix} (1 + \sqrt{5})/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} (1 - \sqrt{5})/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt

$$\begin{pmatrix} k_n \\ d_n \end{pmatrix} = c_1 \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^n \begin{pmatrix} (1 + \sqrt{5})/2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \begin{pmatrix} (1 - \sqrt{5})/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit von der Anfangssituation abhängenden Konstanten c_1, c_2 und somit folgt für $n \rightarrow \infty$

$$\frac{k_n}{d_n} \rightarrow \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Wäre das sich ergebende Muster nun (doppelt) periodisch, so sollte dieser Quotient gegen eine rationale Zahl streben.