

2 Funktionen

In einem zweiten Kapitel wollen wir Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ beziehungsweise $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ näher untersuchen und insbesondere auf wichtige elementare Funktionen, ihre Definition und ihre Bedeutung eingehen.

2.1 Polynomfunktionen

2.1 Definition. Eine Polynomfunktion ist eine Funktion $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ der Form

$$p(z) = \sum_{k=0}^m a_k z^k$$

für ein $m \in \mathbb{N}$ und mit Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$. Gilt dabei $a_m \neq 0$, so sagt man p habe den Grad m . Wir schreiben $\deg p = m$ und vereinbaren, dass für das Nullpolynom 0 in dem alle Koeffizienten gleich Null sind, $\deg 0 = -\infty$ gilt.

2.2 Proposition. (i) *Summen¹ und Produkte von Polynomen*

$$\sum_{k=1}^m a_k z^k + \sum_{\ell=0}^n b_\ell z^\ell = \sum_{k=0}^{\max(m,n)} (a_k + b_k) z^k, \quad \left(\sum_{k=1}^m a_k z^k \right) \left(\sum_{\ell=0}^n b_\ell z^\ell \right) = \sum_{j=0}^{m+n} \left(\sum_{k+\ell=j} a_k b_\ell \right) z^j$$

sind wiederum Polynome.

(ii) Für Polynome p, q gilt $\deg(pq) = \deg p + \deg q$ und $\deg(p + q) \leq \max(\deg p, \deg q)$.

(iii) Ist p nicht das Nullpolynom, so existiert ein $z \in \mathbb{C}$ mit $p(z) \neq 0$.

(iv) Gilt $p(z) = q(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$, so stimmen alle Koeffizienten von p und q überein.

(v) Gilt $\deg p \geq \deg q \geq 0$, so existieren eindeutig bestimmte Polynome r und s mit

$$p(z) = s(z)q(z) + r(z)$$

und $\deg r < \deg q$. Wir sagen q teilt p , falls ein Polynom s mit $p(z) = s(z)q(z)$ existiert.

(vi) Gilt für ein Polynom p mit $\deg p \geq 1$ und ein $\lambda \in \mathbb{C}$ die Gleichung $p(\lambda) = 0$, so teilt $(z - \lambda)$ das Polynom $p(z)$.

(vii) Ein Polynom p vom Grad $\deg p = m \geq 0$ besitzt höchstens m paarweise verschiedene Nullstellen λ_i mit $p(\lambda_i) = 0$.

¹In nachfolgenden Formeln sind nicht auftretende Koeffizienten im Polynom stets als Null angenommen.

2 Funktionen

Beweis. Aussagen **(i)** und **(ii)** sind klar. Für **(iii)** nutzen wir die Abschätzung

$$|p(z)| = \left| \sum_{k=0}^m a_k z^k \right| \geq |a_m| |z|^m - \sum_{k=0}^{m-1} |a_k| |z|^k \geq |a_m| |z|^m - |z|^{m-1} \sum_{k=0}^{m-1} |a_k| > 0$$

für $|z| > \min\left(\frac{1}{|a_m|} \sum_{k=0}^{m-1} |a_k|, 1\right)$. • **(iv)** folgt aus der gerade gezeigten Aussage. Die Differenz $p - q$ ist die Nullfunktion und damit auch das Nullpolynom. • **(v)** folgt durch Subtraktion entsprechender Vielfacher. Ist $m = \deg p \geq \deg q = n$, so gilt mit den führenden Koeffizienten a_m und b_n von p und q , dass der Grad von

$$p(z) - \frac{a_m}{b_n} z^{m-n} q(z)$$

strikt kleiner ist als m . Dies kann man iterativ fortsetzen, bis dieser Restterm einen Grad strikt kleiner als n besitzt. • **(vi)** folgt aus **(v)**. Da $z - \lambda$ kleineren Grad als $p(z)$ besitzt, existieren Polynome s und r mit

$$p(z) = (z - \lambda)s(z) + r(z)$$

und $\deg r \leq 0$. Damit ist $r(z)$ aber eine Konstante und da für $z = \lambda$ auf beiden Seiten Null entstehen muss folgt $r(z) = 0$ für alle z . Also teilt $z - \lambda$ das Polynom p . • **(vii)** folgt daraus, es gilt

$$p(z) = (z - \lambda_1)s_1(z) = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2)s_2(z) = \cdots = s_{k+1}(z) \prod_{j=1}^k (z - \lambda_j)$$

da λ_{j+1} nach Konstruktion (und aufgrund der Verschiedenheit der λ_j) stets Teiler von $s_j(z)$ sein muss. Damit folgt aber $\deg p = k + \deg s$ und somit $k \leq \deg p$. \square

2.3 Satz (Fundamentalsatz der Algebra). *Ein Polynom vom Grad $m \geq 1$ besitzt genau m Nullstellen $z_j \in \mathbb{C}$, also Punkte $z_j \in \mathbb{C}$ mit*

$$p(z) = a_m \prod_{j=1}^m (z - \lambda_j).$$

Beweis. Wir zerlegen den Beweis in zwei Teile.

Teil 1: Jedes Polynom p mit $\deg p \geq 1$ besitzt mindestens eine komplexe Nullstelle. Dazu benötigen wir drei Schritte.

Schritt 1.1: Sei zuerst $M > 0$ beliebig. Dann existiert $R > 0$ mit $|p(z)| > M$ für alle $|z| > R$, da

$$\begin{aligned} |p(z)| &\geq |b_m| |z|^m - |z|^m \sum_{k=0}^{m-1} |b_k| |z|^{k-m} \\ &\geq |b_m| |z|^m - |z|^m |z|^{-1} \sum_{k=0}^{m-1} |b_k|, && \text{für } |z| > 1, \\ &\geq \frac{1}{2} |z|^m |b_m|, && \text{für } |z| > r, \\ &\geq M, && \text{für } |z| > R \end{aligned}$$

mit $r > \max\left(1, 2|b_m|^{-1} \sum_{k=0}^{m-1} |b_k|\right)$ und $R > \max\left(r, \sqrt[m]{2M/|b_m|}\right)$.

Schritt 1.2: Es gibt $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $|p(z_0)| = \inf_{z \in \mathbb{C}} |p(z)|$. Wendet man nämlich Schritt 1.1 mit $M = 1$ an, so findet man R_1 mit $|p(z)| > 1$ für alle $|z| > R_1$. Da $\{z \mid |z| \leq R_1\} \subset \mathbb{C}$ kompakt und p stetig ist, findet man ein z_1 mit $|z_1| \leq R_1$ und

$$|p(z_1)| = \min_{|z| \leq R_1} |p(z)|.$$

Wendet man nun Schritt 1.1 nochmals mit $M = |p(z_1)|$ an, so findet sich ein $R_2 > R_1$ mit $|p(z)| > |p(z_1)|$ für alle $|z| > R_2$. Auf der wiederum kompakten Menge $\{z \mid |z| \leq R_2\}$ existiert also ein z_0 mit

$$|p(z_0)| = \min_{|z| \leq R_2} |p(z)|$$

und damit insbesondere $|p(z_0)| < |p(z_1)|$. Nach Konstruktion gilt $|p(z_0)| \leq |p(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Schritt 1.3: Es gilt $p(z_0) = 0$. Angenommen, dem wäre nicht so. Dann gilt mit

$$p(z) = b_0 + \sum_{k=K}^m b_k (z - z_0)^k, \quad b_0, b_K \neq 0$$

und der Wahl von $\eta \in \mathbb{C}$ mit $b_0 = -b_K \eta^K$, also $\eta = \sqrt[K]{-b_K/b_0}$ mit einer der K Wurzeln,

$$\begin{aligned} |p(z_0 + \epsilon\eta)| &= \left| b_0 + \epsilon^K b_K \eta^K + \sum_{k=K+1}^m b_k \epsilon^k \eta^k \right| \\ &\leq |b_0| (1 - \epsilon^K) + \epsilon^{K+1} \sum_{k=K+1}^m \epsilon^{k-K-1} |b_k| |\eta|^k \\ &\leq |b_0| (1 - \epsilon^K) + C \epsilon^{K+1}. \end{aligned}$$

für $0 < \eta < 1$. Wählt man nun speziell $\epsilon < |b_0|/C$, so folgt

$$|p(z_0 + \epsilon\eta)| < |b_0| = |p(z_0)|$$

im Widerspruch zur Minimalität von $|p(z_0)|$. Also gilt $p(z_0) = 0$ und $z - z_0$ teilt $p(z)$.

Teil 2: Die behauptete Darstellung gilt. Dazu beachte man, dass durch Division

$$\begin{aligned} p(z) &= (z - \lambda_1) s_1(z), & \deg s_1 &= \deg p - 1 < \deg p, \\ &= (z - \lambda_1)(z - \lambda_2) s_2(z), & \text{falls } \deg s_1 &\geq 1, \\ &\vdots \\ &= (z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \cdots (z - \lambda_m) s_m(z) \end{aligned}$$

gilt und im letzten Schritt damit $\deg s_m = \deg p - m = 0$ gelten muss. Also ist s_m konstant und Koeffizientenvergleich liefert $s_m = a_m$. \square

2.4 Folgerung. Sei $p(x)$ ein reellwertiges Polynom mit $\deg p = m$. Dann existieren natürliche Zahlen n und ℓ mit $m = n + 2\ell$ und reelle Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, $\mu_1, \dots, \mu_\ell \in \mathbb{R}$ und $\nu_1, \dots, \nu_\ell \in \mathbb{R}$, so dass

$$p(x) = a_m \prod_{j=1}^n (x - \lambda_j) \prod_{k=1}^{\ell} (x^2 - 2\mu_k x + \nu_k^2)$$

zusammen mit $|\nu_k| > |\mu_k|$ gilt.

2 Funktionen

Beweis. Nach dem Fundamentalsatz zerfällt das Polynom über \mathbb{C} in Linearfaktoren. Da für ein reellwertiges Polynom $p(x) = \sum_k a_k x^k$ alle Koeffizienten a_k reell sind, gilt

$$\overline{p(z)} = \sum_{k=0}^m a_k \bar{z}^k = p(\bar{z})$$

und mit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ist auch $\bar{\lambda}$ eine Nullstelle. Die rein komplexen Nullstellen treten also paarweise auf, zusammengefasst ergeben diese

$$(z - \lambda)(z - \bar{\lambda}) = z^2 - (\lambda + \bar{\lambda})z + \lambda\bar{\lambda} = z^2 - 2z\operatorname{Re}\lambda + |\lambda|^2$$

und damit die gesuchten quadratischen Faktoren mit $\mu = \operatorname{Re}\lambda$ und $\nu = |\lambda|$. \square

2.5 Folgerung (Vietascher Wurzelsatz). *Sei p ein Polynom vom Grad $\deg p = m$ und führendem Koeffizienten $a_m = 1$ und seien $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ seine komplexen Nullstellen. Dann gilt*

$$\begin{aligned} a_0 &= \lambda_1 \cdots \lambda_m = \prod_{j=1}^m \lambda_j, \\ a_1 &= \sum_{j=1}^m \prod_{i \neq j} \lambda_i, \\ &\vdots \\ a_k &= \sum_{\substack{J \subset \{1, \dots, m\} \\ |J|=m-k}} \prod_{j \in J} \lambda_j \\ &\vdots \\ a_{m-1} &= \sum_{j=1}^m \lambda_j, \\ a_m &= 1 \end{aligned}$$

Beweis. Ausmultiplizieren der Produktformel, die angegebenen Formeln selbst ergeben sich dann per Induktion über die Anzahl der Faktoren. \square

2.6 Satz (über rationale Nullstellen). *Sei $p(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten $a_k \in \mathbb{Z}$. Angenommen, eine rationale Zahl $r/s \in \mathbb{Q}$ mit $\operatorname{ggT}(r, s) = 1$ erfüllt $p(r/s) = 0$. Dann gilt $s|a_m$ und $r|a_0$.*

Beweis. Wir setzen die Nullstelle r/s ein, erweitern allerdings mit s^m . Dann ergibt sich

$$0 = \sum_{k=0}^m a_k r^k s^{m-k} = a_m r^m + a_{m-1} r^{m-1} s + \cdots + a_1 r s^{m-1} + a_0 s^m.$$

Da $\operatorname{ggT}(s, t) = 1$ gilt und jeder Summand bis auf den ersten offenbar durch s teilbar ist, folgt daraus aber die Teilbarkeit von a_m durch s . Ebenso ist jeder Summand außer dem letzten offenbar durch t teilbar und damit muss t ein Teiler von a_0 sein. \square

2.2 Polynomgleichungen

2.7 Bemerkung (Wurzeln). Gleichungen der Form $z^n = a$ sind stets durch Wurzelfunktionen lösbar, es gilt

$$z = \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{|a|} \left(\cos \left(\frac{\arg a}{n} + k \frac{2\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\arg a}{n} + k \frac{2\pi}{n} \right) \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

ausgedrückt durch die n -wertige komplexe Wurzelfunktion. Komplexe Wurzeln lassen sich über Winkelfunktionen \sin und \cos ausdrücken, intuitiver ist eine graphische Interpretation als Ecken eines regelmäßigen n -Ecks um den Ursprung mit Umkreisradius $\sqrt[n]{|a|}$ und einer Ecke zum Argument $\arg a/n$. Ist a nichtnegativ (und damit reell), liegt eine der Ecken auf der positiven reellen Achse.

2.8 Bemerkung (Quadratische Gleichungen). Lineare Gleichungen in einer Variablen sind eher langweilig. Interessanter sind quadratische Gleichungen

$$z^2 - 2pz + q^2 = 0$$

deren Lösung durch quadratisches Ergänzen

$$0 = z^2 - 2pz + p^2 - p^2 + q^2 = (z - p)^2 + q^2 - p^2$$

direkt ablesbar ist. Es gilt also

$$z = p \pm \sqrt{p^2 - q^2}.$$

Seit der Antike gibt es konstruktive Lösungen quadratischer Gleichungen.

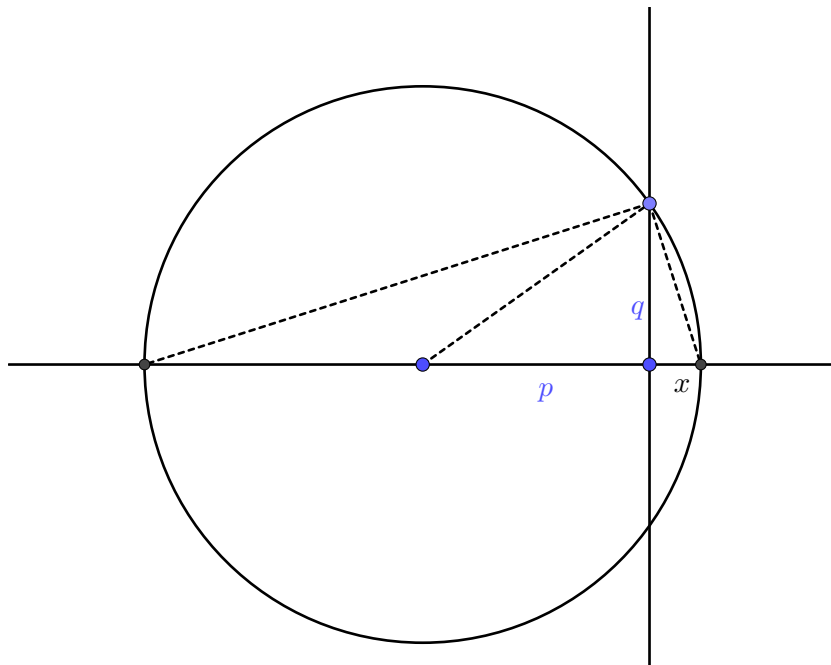
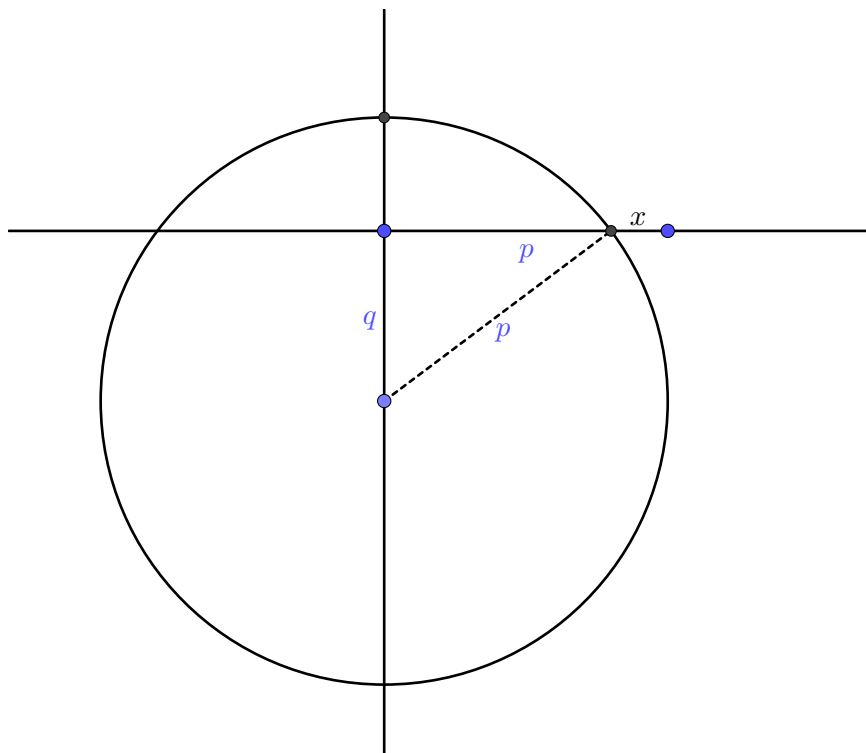


Abbildung 2.1: Zur Lösung von $x^2 + 2px - q^2 = 0$.

Abbildung 2.2: Zur Lösung von $x^2 - 2px + q^2 = 0$.

2.9 Bemerkung (Kubische Gleichungen). Kubische Gleichungen sind mit Hilfe der Lösungsformel von Cardano auflösbar. Bemerkenswert ist dabei, dass der Fall dreier verschiedener reeller Lösungen dabei den Umweg über komplexe Zahlen benötigt. Vorgelegt sei also eine kubische Gleichung

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0.$$

Substituiert man $z = (x - a/3)$, so ergibt sich

$$0 = \left(x - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(x - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(x - \frac{a}{3}\right) + c = x^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)x + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c$$

und damit eine reduzierte Gleichung der Form

$$x^3 - px - q = 0, \quad p = \frac{a^2}{3} - b, \quad q = -\frac{2a^3}{27} + \frac{ab}{3} - c.$$

Wir machen Ansatz $x = u + v$. Eingesetzt liefert dieser

$$(u + v)^3 - p(u + v) - q = 0,$$

was offenbar bei der Wahl $u^3 + v^3 = q$ und $u^3v^3 = p^3/27$ erfüllt wäre. Damit sind aber nach Vieta u^3 und v^3 selbst Lösungen einer quadratischen Gleichung

$$t^2 - qt + \frac{p^3}{27} = 0.$$

Bezeichnet man die Nullstellen dieser Gleichung mit t_1 und t_2 , so ergeben sich damit die Lösungen

$$x = \sqrt[3]{t_1} + \sqrt[3]{t_2} = \sqrt[3]{t_1} + \frac{p}{3\sqrt[3]{t_1}}$$

wobei die dritten Wurzeln so gewählt worden sind, dass $\sqrt[3]{t_1}\sqrt[3]{t_2} = p/3$ gilt und die verbleibende dritte Wurzel alle drei komplexen Werte annehmen kann.

Die Lösungsformel wurde von Gerolamo Cardano publiziert, geht in dieser Form jedoch (wohl unabhängig von einander) auf Nicola Tartaglia und Scipione del Ferro zurück.

2.10 Bemerkung (Biquadratische Gleichungen). Biquadratische Gleichungen explizit durch eine Lösungsformel auflösbar. Vorgelegt sei dazu die Gleichung

$$z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0.$$

Diese geht mit Substitution $z = (x - a/4)$ über in die reduzierte Form

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0.$$

Gilt nun $q = 0$, so ist die Gleichung mit Substitution $y = x^2$ in eine quadratische Gleichung überführbar. Gilt $q \neq 0$ und $r = 0$, so ergibt sich als eine Nullstelle $x = 0$ und durch Division durch x entsteht eine kubische Gleichung. Beide Fälle wurden oben schon behandelt, wir beschränken uns also auf den verbleibenden Fall $q \neq 0$ und $r \neq 0$.

Zugeordnet zur reduzierten Gleichung betrachten wir die Resolventengleichung

$$t^3 + 2pt^2 + (p^2 - 4r)t - q^2 = 0$$

und bezeichnen ihre drei Lösungen als t_1, t_2, t_3 . Es gilt also insbesondere $t_1 + t_2 + t_3 = -2p$ und $t_1 t_2 t_3 = q^2$. Mit Hilfe von diesen Zahlen lösen wir nun die reduzierte Gleichung. Diese kann äquivalent umgeformt werden zu

$$\begin{aligned} x^4 + px^2 &= -qx - r \\ x^4 + (p + t_1)x^2 &= t_1 x^2 - qx - r \\ \left(x^2 + \frac{p + t_1}{2}\right)^2 &= t_1 \left(x - \frac{q}{2t_1}\right)^2 - \frac{q^2}{4t_1} + \left(\frac{q + t_1}{2}\right)^2 - r. \end{aligned}$$

Da nun aber t_1 die Resolventengleichung löst, gilt

$$-\frac{q^2}{4t_1} + \left(\frac{q + t_1}{2}\right)^2 - r = \frac{1}{4t_1} (-q^2 - 4t_1 r + p^2 t_1 + 2pt_1^2 + t_1^3) = 0.$$

Also ist

$$\left(x^2 + \frac{p + t_1}{2}\right)^2 = t_1 \left(x - \frac{q}{2t_1}\right)^2$$

zu lösen. Wurzelziehen liefert

$$x^2 + \frac{p + t_1}{2} = \pm \sqrt{t_1} \left(x - \frac{q}{2t_1}\right)$$

und damit die quadratische Gleichung

$$x^2 \mp \sqrt{t_1} x = \mp \frac{q}{2\sqrt{t_1}} - \frac{p + t_1}{2}.$$

2 Funktionen

Löst man diese nun durch quadratisches Ergänzen und nutzt die Informationen über die t_i aus dem Vietaschen Wurzelsatz so folgt

$$\begin{aligned}\left(x \mp \frac{\sqrt{t_1}}{2}\right)^2 &= \frac{t_1}{4} \mp \frac{q}{2\sqrt{t_1}} + \frac{p+t_1}{2} = \frac{1}{4} \left(-t_1 - 2p \mp \frac{2q}{\sqrt{t_1}}\right) \\ &= \frac{1}{4} (t_2 + t_3 \mp \sqrt{t_2 t_3}) = \frac{1}{4} (\sqrt{t_2} \mp \sqrt{t_3})^2,\end{aligned}$$

wobei wir die Zahlen $\sqrt{t_1}$, $\sqrt{t_2}$ und $\sqrt{t_3}$ so gewählt haben, dass $\sqrt{t_1}\sqrt{t_2}\sqrt{t_3} = q$ gilt. Die beiden auftretenden \mp sind dabei jeweils gleich gewählt. Erneutes Wurzelziehen liefert die Lösung

$$= \frac{1}{2} (\pm_1 \sqrt{t_1} \pm_2 (\sqrt{t_2} \mp_1 \sqrt{t_3}))$$

mit einer zweiten Vorzeichenwahl. Ausgeschrieben ergibt das die vier Lösungen der reduzierten

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{1}{2} (\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} - \sqrt{t_3}) \\ x_2 &= \frac{1}{2} (\sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3}) \\ x_3 &= \frac{1}{2} (-\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3}) \\ x_4 &= \frac{1}{2} (-\sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} - \sqrt{t_3}).\end{aligned}$$

Biquadratische Gleichungen wurden zuerst von Ludovico Ferrari allgemein gelöst.

2.11 Bemerkung (Quintische Gleichungen). Durch eine Substitution $z = x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ mit zu bestimmenden Parametern α, \dots, δ kann jede Gleichung 5ten Grades in die Normalform

$$z^5 + pz + q = 0$$

gebracht werden. Dies gelang Ehrenfried Walther von Tschirnhaus und Erland Samuel Bring. Eine allgemeine Lösung dieser Gleichung schlägt allerdings fehl, eine Darstellung ihrer Lösung durch Wurzelausdrücke ist im allgemeinen nicht mehr möglich. (Satz von Abel–Ruffini)

2.3 Exponential- und Logarithmusfunktionen

2.12 Satz. Sei $a > 0$ mit $a \neq 1$. Dann existiert genau eine eindeutig bestimmte stetige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

(i) $f(x+y) = f(x)f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$;

(ii) $f(1) = a$.

Diese Funktion ist injektiv,

- für $a > 1$ streng monoton wachsend
- für $0 < a < 1$ streng monoton fallend

und erfüllt $f(\mathbb{R}) = (0, \infty)$.

Beweis. Wir konstruieren zuerst die Funktion auf \mathbb{Q} . Dazu nutzen wir folgende Schritte:

- Aus $f(1) = a$ folgt $f(2) = f(1 + 1) = f(1)f(1) = a^2$ und daraus per Induktion $f(n) = a^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Der Induktionsschritt ergibt sich dabei aus

$$f(n + 1) = f(n)f(1) = a^n a = a^{n+1}.$$

- Da

$$a = f(1) = f(1 + 0) = f(1)f(0) = af(0)$$

gilt und $a \neq 0$ vorausgesetzt war, folgt $f(0) = 1$.

- Da aber nun auch $1 = f(0) = f(n - n) = a^n f(-n)$ folgt, erhalten wir $f(-n) = a^{-n} = 1/a^n$.
- Wegen $f(x) = f(x/2)^2$ folgt $f(x) \geq 0$ für alle x .
- Aus $f(mx) = (f(x))^m$ folgt bei Wahl von $mx = n$

$$f\left(\frac{n}{m}\right) = \sqrt[m]{f(n)} = \sqrt[m]{a^n} =: a^{\frac{n}{m}}$$

mit Wahl der positiven m -ten Wurzel.

Damit ist die Funktion $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ eindeutig bestimmt. Weiter gilt für $a > 1$ (der zweite Fall ist analog) und $\frac{n}{m} > 1$

$$a^n > 1, \quad \text{und damit} \quad f(n/m) = \sqrt[m]{a^n} > 1.$$

Also gilt für $x, y \in \mathbb{Q}$ mit $y > 0$ auch

$$f(x + y) - f(x) = f(x)(f(y) - 1) > f(x)$$

und f ist streng monoton wachsend. Damit ist f auch injektiv. Weiter gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow -\infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow -\infty} a^n = 0.$$

Die so konstruierte Funktion $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig. Dazu genügt es aufgrund der Funktionalgleichung, die Stetigkeit in 0 zu zeigen. Sei also $x_k \rightarrow 0$ eine Nullfolge. Dann existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Zahl K , so dass für alle $k > K$ die Abschätzung $|x_k| < 1/n$ gilt. Dies impliziert aber zusammen mit der Monotonie

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a}} < f(x_k) < f(1/n) = \sqrt[n]{a}$$

und da $\sqrt[n]{a} \rightarrow 1$ für $n \rightarrow \infty$ gilt, folgt $f(x_k) \rightarrow 0$. Damit ist f stetig und kann eindeutig zu einer stetigen Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fortgesetzt werden. Weiter ergibt sich aus den bestimmten Grenzwerten zusammen mit Stetigkeit und Monotonie $f(\mathbb{R}) = (0, \infty)$. \square

Wir vereinbaren eine Notation und schreiben für $a^x := f(x)$ für diese Funktion. Da die Funktion f streng monoton ist, besitzt damit eine Umkehrfunktion, welche wir $x = \log_a y$ für $y = a^x$ bezeichnen. Wir fassen die wichtigsten Eigenschaften dieser Funktion zusammen:

2.13 Folgerung. Sei $a > 0$ mit $a \neq 1$. Dann ist die Funktion $\log_a : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ bijektiv und erfüllt

2 Funktionen

(i) für alle $x, y > 0$ gilt $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$;

(ii) es gilt $\log_a a = 1$;

(iii) \log_a ist die einzige stetige Funktion mit (i) und (ii);

(iv) $\log_a 1 = 0$;

(v) für $x > 0$ und $y \in \mathbb{R}$ gilt $\log_a(x^y) = y \log_a x$;

(vi) für $b > 0, b \neq 1$ und alle $x > 0$ gilt

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

Beweis. Aussagen (i) und (ii) entsprechen der Charakterisierung der Exponentialfunktion aus Satz 2.12. Damit ist die Funktion \log_a als Umkehrfunktion ebenso eindeutig charakterisiert und (iii) gilt. Aussage (iv) folgt aus dem vorigen Beweis, $a^0 = 1$ entspricht $\log_a 1 = 0$. Die verbleibenden Aussagen sind noch zu zeigen.

Aus (i) folgt für alle $m, n \in \mathbb{N}$

$$\log_a(x^n) = n \log_a x \quad \text{und damit} \quad \log_a(x^{-n}) = -n \log_a x, \quad \log_a(x^{\pm n/m}) = \pm \frac{n}{m} \log_a x$$

und Aussage (v) ist für $y \in \mathbb{Q}$ gezeigt. Die Aussage für $y \in \mathbb{R}$ aufgrund der Stetigkeit. Für Aussage (vi) nutzen wir die Eindeutigkeit der Logarithmusfunktion. Die Funktion $x \mapsto \frac{\log_a x}{\log_a b}$ ist stetig und erfüllt offenbar Aussage (i) und (ii). Damit stimmt sie aber mit $\log_b x$ überein. \square

2.14 Bemerkung. Die Logarithmusfunktion wurde insbesondere als Rechenhilfsmittel in Verbindung mit Logarithmentafeln zu einem zentralen Bestandteil der Mathematik des frühen 17. bis späten 19. Jahrhunderts. Zu nennen sind dabei insbesondere die auf John Napier² und unabhängig davon Jost Bürgi³, die erste Logarithmentafeln zu den Basen 0.9999999 und 1.0001 veröffentlichten. Logarithmen zur Basis 10 wurden zuerst von Henri Briggs⁴ eingeführt, weitere Tafeln gehen auf Johannes Kepler⁵ und Nicolaus Mercator⁶ zurück. Zu beachten ist, dass alle diese Tafeln von Hand zu berechnen waren. Sie dienten für lange Zeit als wichtigstes Hilfsmittel zum Berechnen komplizierter Multiplikationen, Divisionen und Wurzelausdrücke.

Die 1783 von Jurij Vega⁷ herausgegebenen siebenstelligen Logarithmustafeln waren nicht nur für ihre Fehlerfreiheit gerühmt, sie waren insbesondere zentral für Berechnungen im Ingenieurwesen. Davon zeugen die vielen Neuauflagen, die diese Tafeln bis hin in die Mitte des 20ten Jahrhunderts erfahren haben.

Wir kommen zur Konstruktion der Logarithmentafeln. Jost Bürgi nutzte als Basis die Zahl $1,0001 = 1 + 10^{-4}$. Dies erlaubt es, in der n -ten Zeile der Logarithmentabelle die Zahlen (x, y) mit

$$x = (1,0001)^y, \quad y = n,$$

²John Napier, 1550–1617

³Jost Bürgi, 1552–1632

⁴Henri Briggs, 1561–1630

⁵Johannes Kepler, 1571–1630

⁶Nicolaus Mercator, 1620–1687

⁷Georg Freiherr von Vega, 1754–1802

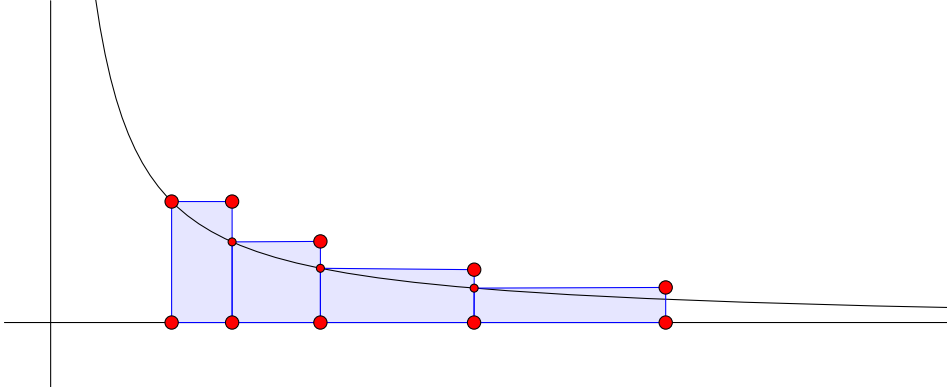


Abbildung 2.3: Logarithmentafeln als Flächeninhaltsapproximation

einzutragen. Für die Differenz aufeinanderfolgender x -Werte gilt dabei

$$\Delta x = (1,0001)^{y+1} - (1,0001)^y = (1,0001)^y(1,0001 - 1) = \frac{x}{10^4},$$

zusammen mit $\Delta y = 1$ gilt also insbesondere

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{10^4}{x}.$$

Entsprechendes gilt für die Tafeln John Napiers mit -10^7 statt 10^4 . Um eine einheitliche Konstruktion von Logarithmen zu erhalten, bedarf es einer Verschiebung von Nachkommastellen. Wir ersetzen dazu y durch $10^4 y$ und erhalten

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}, \quad \Delta y = 10^{-4},$$

oder im Falle Napiers mit y ersetzt durch $-10^7 y$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}, \quad \Delta y = 10^{-7}.$$

Dies kann man sich graphisch veranschaulichen. Dazu addieren wir die auftretenden y -Differenzen und erhalten neben der formellen Darstellung

$$y = \sum \frac{\Delta x}{x}$$

das in Abbildung 2.3 dargestellte Bild. Der Wert y ergibt sich als Summe der Rechtecksflächen zwischen 1 und x , jede der Flächen hat den festen Inhalt Δy . Für $\Delta y \rightarrow 0$ liefert dies eine ‘natürliche’ Wahl des Logarithmus, wie er zuerst von Mercator⁸ verwendet wurde. Dieser definierte den natürlichen Logarithmus einer Zahl $x > 1$ als den Flächeninhalt zwischen der Hyperbel $(\xi, 1/\xi)$ und der Achse im Bereich $1 < \xi < x$, also in moderner Notation

$$\ln x = \log \text{ nat } x = \int_1^x \frac{d\xi}{\xi}.$$

⁸Nikolaus Mercator, 1620–1687

2 Funktionen

Dass es sich tatsächlich um eine Logarithmusfunktion handelt, ist einfach nachzurechnen. Es gilt

$$\ln(x+y) = \int_1^{xy} \frac{d\xi}{\xi} = \int_1^x \frac{d\xi}{\xi} + \int_x^{xy} \frac{d\xi}{\xi} = \int_1^x \frac{d\xi}{\xi} + \int_1^y \frac{d\xi}{\xi} = \ln x + \ln y,$$

wobei im zweiten Integral ξ zu $x\xi$ substituiert wurde. Es bleibt die Basis dieses Logarithmus zu bestimmen. Diese wird als Eulersche Zahl e bezeichnet. Einerseits gilt

$$1 = \ln e = \int_1^e \frac{d\xi}{\xi},$$

andererseits liegt der formale (und sich aus obiger Argumentation mit $\Delta y = \frac{1}{n}$ ergebende) Grenzübergang

$$x = \lim_{n \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{ny}, \quad \Delta y = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

vor, was die Vermutung

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

nahelegt. Ein Beweis ergibt sich aus der Theorie des Riemannintegrals, die aufaddierten Flächeninhalte sind Obersummen und streben gegen die Fläche unter dem Graphen. Mercator war auch der Erste, der eine Reihendarstellung des Logarithmus angegeben hat. Die Reihe ist für $0 < x < 1$ alternierend, die Konvergenz der Reihe ergibt sich aus dem Intervallschachtelungsprinzip.

2.15 Proposition (Mercator). *Die natürliche Logarithmusfunktion erfüllt für $0 < x < 1$*

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k}$$

Beweis. Wir folgen dem Originalbeweis Mercators und zeigen dies durch gliedweise Integration und Abschätzung aller Partialsummen. Es gilt, wiederum in moderner Notation,

$$\ln(1+x) = \int_1^{1+x} \frac{d\xi}{\xi} = \int_0^x \frac{d\xi}{1+\xi} = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \xi^k d\xi$$

unter Ausnutzung der (damals bekannten) Darstellung der geometrischen Reihe. Da die Reihe für $0 < \xi \leq x < 1$ alternierend ist, gilt

$$\left| \frac{1}{1+\xi} - \sum_{k=0}^N (-1)^k \xi^k \right| < \xi^{N+1}$$

und damit impliziert

$$\left| \int_0^x \frac{d\xi}{1+\xi} - \sum_{k=0}^N \int_0^x (-1)^k \xi^k d\xi \right| \leq \frac{1}{N+2} x^{N+2} \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty,$$

die Vertauschbarkeit von Reihe und Integral und die Behauptung

$$\ln(1+x) = \int_1^{1+x} \frac{d\xi}{\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^k \xi^k d\xi = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1} x^{k+1} = - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k}$$

folgt. □

Durch Inversion der Reihendarstellung des Logarithmus ergibt sich eine Darstellung der natürlichen Exponentialfunktion. Dieser Schritt wurde zuerst von Newton⁹ gegangen.

⁹Sir Isaac Newton, 1643–1727

2.16 Proposition (Newton). *Die Exponentialfunktion besitzt die Reihendarstellung*

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Insbesondere gilt für die Basis des natürlichen Logarithmus

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Beweisskizze. Wir wissen, dass für $x = \ln y = \ln e^x$ und $1 \leq y < 2$ die Reihendarstellung aus Proposition 2.15 gilt. Newtons Vorgehen bestand nun darin, diese Reihendarstellung zu invertieren und eine entsprechende Reihe für die Umkehrfunktion abzuleiten. Ohne auf das Problem der Konvergenz einzugehen, nutzen wir dazu formal den Ansatz

$$e^x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

und setzen diesen in die Exponentialreihe ein. Das (so nicht gerechtfertigte) Vertauschen der Summationsreihenfolge und (der ebenso zu rechtfertigende) Koeffizientenvergleich in

$$x = \ln(1 + e^x - 1) = - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \right)^k$$

liefern dann Bedingungen für die Koeffizienten a_k und damit die gewünschte Reihendarstellung. Soweit die Idee, das Umsetzen der Idee führt auf

$$\begin{aligned} x : \quad & 1 = a_1, \quad a_1 = 1, \\ x^2 : \quad & 0 = - \left(-a_2 + \frac{1}{2} a_1^2 \right) = a_2 - \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \\ x^3 : \quad & 0 = - \left(a_3 - \frac{1}{2} (a_1 a_2 + a_2 a_1) + a_1^3 \right) = -a_3 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right), \quad a_3 = \frac{1}{6} = \frac{1}{3!}, \\ x^4 : \quad & 0 = - \left(-a_4 + \frac{1}{2} (a_1 a_3 + a_2^2 + a_3 a_1) - \frac{1}{3} (a_1 a_1 a_2 + a_1 a_2 a_1 + a_2 a_1 a_1) + \frac{1}{4} a_1^4 \right) \\ & = a_4 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{4} = a_4 - \frac{1}{4!}, \quad a_4 = \frac{1}{4!}. \end{aligned}$$

und damit zumindest die Vermutung $a_n = \frac{1}{n!}$. Umgekehrt reduziert sich im Falle $a_n = \frac{1}{n!}$ der Koeffizientenvergleich auf eine Reihe kombinatorischer Identitäten. Darüberhinaus konvergiert die Reihe für alle Werte von x . \square

Wenn wir schon bei Newtons Exponentialreihe angekommen sind, so sollte man die anderen Reihendarstellungen Newtons nicht vergessen. Zu erwähnen ist seine Verallgemeinerung des Binomischen Satzes zur Binomialreihe.

2.17 Proposition (Newton). *Für $y > 0$ und $-1 < x < 1$ gilt*

$$(1+x)^y = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{y}{k} x^k$$

2 Funktionen

mit

$$\binom{y}{k} = \frac{y(y-1)(y-2)\cdots(y-k+1)}{k!}.$$

Beweisskizze. Hier genügt es Mercators Logarithmusreihe in die Exponentialreihe einzusetzen. Es gilt

$$\begin{aligned} (1+x)^y &= e^{y \ln(1+x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-y \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k} \right)^n \\ &= 1 + yx + \left(-y \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} y^2 x^2 \right) + \left(y \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2} y^2 \left(x \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} x \right) + \frac{1}{3!} y^3 x^3 \right) + \cdots \\ &= 1 + yx + \frac{y(y-1)}{2} x^2 + \frac{y(y-1)(y-2)}{6} x^3 + \cdots \end{aligned}$$

Wiederum sind für eine rigorose Darstellung des Beweises Konvergenzuntersuchungen zu führen um das Vertauschen der Summationsreihenfolgen zu rechtfertigen. Ebenso sind natürlich alle Koeffizienten zu berechnen und nicht nur die ersten drei. Letzteres führt aber wieder auf kombinatorische Identitäten.

Um einen moderneren (und auch mathematisch vollständigen) Beweis anzugeben, nutzen wir den Existenz- und Eindeutigkeitsatz für Differentialgleichungen zusammen mit bekannten Eigenschaften von Potenzreihen. Einerseits ist

$$\frac{d}{dx}(1+x)^y = y(1+x)^{y-1} = \frac{y}{1+x}(1+x)^y$$

und die Funktion $f(x) = (1+x)^y$ löst $f'(x) = \frac{y}{1+x}f(x)$ zusammen mit $f(0) = 1$. Betrachtet man nun andererseits die über die Reihe

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{y}{k} x^k$$

definierte Funktion g , so konvergiert die Reihe nach Quotientenkriterium für

$$|x| \limsup_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\binom{y}{k}}{\binom{y}{k-1}} \right| = |x| \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{|y-k|} = |x| < 1$$

und es gilt offenbar $g(0) = 1$. Weiter darf die Reihe innerhalb ihres Konvergenzradius gliedweise differenziert werden und es gilt

$$g'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{y}{k} k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{y}{k+1} (k+1) x^k = y \sum_{k=0}^{\infty} \binom{y-1}{k} x^k$$

unter Ausnutzung von

$$(k+1) \binom{y}{k+1} = y \binom{y-1}{k}.$$

Damit folgt aber

$$(1+x)g'(x) = y \sum_{k=0}^{\infty} \binom{y-1}{k} x^k + y \sum_{k=1}^{\infty} \binom{y-1}{k-1} x^k = y \sum_{k=0}^{\infty} \binom{y}{k} x^k = yg(x)$$

mit

$$\binom{y-1}{k} + \binom{y-1}{k-1} = \binom{y}{k}, \quad \binom{y-1}{0} = 1 = \binom{y}{0},$$

und die Funktion g erfüllt dieselbe Differentialgleichung zu gleichem Anfangswert. Also gilt $f(x) = g(x)$ für alle $|x| < 1$ und die gewünschte Reihendarstellung ist gezeigt. \square

Nach all diesen Reihendarstellungen von Exponential-, Logarithmus- und trigonometrischen Funktionen gab Brook Taylor¹⁰ seine bekannte Taylorsche Reihendarstellung an. Alle diese oben angegebenen Reihen wurden direkt gezeigt, ohne auf das heute übliche Verfahren zur Entwicklung in Taylorreihen zurückzugreifen.

Euler¹¹ war derjenige, der die oben schon angegebene Grenzwertdefinition der Zahl e angegeben hat. Er zeigte

2.18 Proposition (Euler). *Für die Basis des natürlichen Logarithmus gilt*

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Unter Anwendung der Binomialreihe Newtons gilt nämlich

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{nx}{k} n^{-k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{nx(nx-1) \cdots (nx-k+1)}{n^k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} x \left(x - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(x - \frac{k-1}{n}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = e^x. \end{aligned}$$

Das Vertauschen von Grenzwert und Reihe ist hier allerdings wiederum zu rechtfertigen. Von Euler sind keine Begründungen für seine formalen Reihenmanipulationen überliefert. Allerdings gilt der Versuch, Rechnungen Eulers rigoros zu begründen, als eine der Hauptmotivationen für Cauchys¹² Entwicklung des Konvergenzbegriffs und der damit verbundenen modernen rigorosen Analysis.

2.4 Trigonometrische Funktionen

Trigonometrische Funktionen haben ihren Ursprung in Berechnungen am (allgemeinen) Dreieck und dem Rechnen mit Winkeln. Bevor wir zu einer Definition kommen können, müssen wir uns allerdings noch kurz mit dem Winkelmessen an sich beschäftigen. Analog zum Bestimmen von Längen nutzen wir dazu Zirkel und Lineal,

Winkel sind eine Eigenschaft sich schneidender Geraden. Wir wollen zwei Winkel als gleich bezeichnen, wenn man sie mit Zirkel und Lineal aufeinander abtragen kann. Ebenso kann man mit Zirkel und Lineal entscheiden, ob ein Winkel kleiner als ein anderer Winkel ist. Damit kann man für ein Paar von Winkeln

- den Kleineren in den Größeren abtragen;
- Zählen wie oft er in den Größeren passt;

¹⁰Brook Taylor, 1685–1731

¹¹Leonhard Euler, 1707–1783

¹²Augustin Louis Cauchy, 1789–1859

2 Funktionen

- mit dem entstehenden Rest und dem Kleineren der beiden Winkel analog weiterverfahren.

Das entspricht dem Algorithmus Euklid's und liefert eine Folge natürlicher Zahlen, die wiederum eine Kettenbruchentwicklung liefern.

Im Gegensatz zur Streckenmessung, bei der die Einheit frei wählbar ist, bietet es sich für Winkel an, einen Vollwinkel als Referenzwinkel zu nehmen. Um Winkel mit der Länge des Kreisbogens (zum Radius 1) zu identifizieren, bezeichnen wir den Vollwinkel als 2π und geben Winkel als Vielfache von π an.

In diesem Abschnitt setzen wir elementargeometrische Sätze als bekannt voraus. Der Stufenbeziehungsweise Wechselwinkelsatz hat für uns dabei Charakter eines Axioms. (In Hilbert's axiomatisch aufgebauter Geometrie folgt er aus dem (sws)-Axiom.)

Axiom (Stufenwinkelsatz und Wechselwinkelsatz, Euklid). Gegeben seien zwei parallele Geraden, die durch eine dritte geschnitten werden. Dann sind die Stufen- und Wechselwinkel (siehe Abbildung 2.4) gleich. Sind umgekehrt die Stufenwinkel gleich, so sind die Geraden parallel.

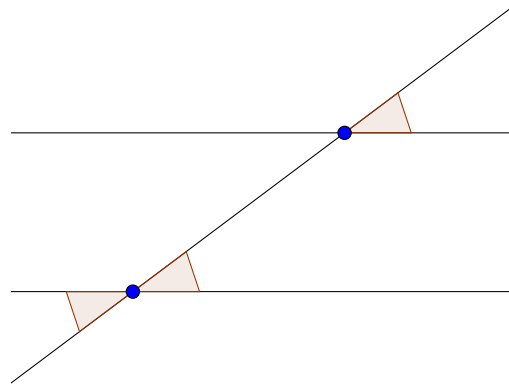


Abbildung 2.4: Stufen- und Wechselwinkelsatz

Als direkte Folgerung (siehe Bild 2.5) ergibt sich

Hilfsaussage (Euklid). *Die Innenwinkelsumme eines Dreiecks beträgt π .*

2.19 Notation. Dreiecke mit gleichen Innenwinkeln sind zueinander ähnlich. Dies folgt direkt aus der Umkehraussage des Stufenwinkelsatzes in Verbindung mit dem Strahlensatz. Damit sind insbesondere rechtwinklige Dreiecke durch Angabe eines spitzen Winkels bis auf Ähnlichkeit eindeutig bestimmt. Sei dieser mit α bezeichnet, die Hypotenuse mit b , die anliegende Kathete mit c und die gegenüberliegende mit a . Dann bezeichne

$$\cos \alpha = \frac{c}{b}, \quad \sin \alpha = \frac{a}{b}.$$

Aufgrund der Ähnlichkeit aller solcher Dreiecke sind die Funktionen \sin und \cos für spitze Winkel eindeutig definiert. Weiter folgt aus dem Satz des Pythagoras

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = \frac{c^2 + a^2}{b^2} = 1$$

für alle $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$.

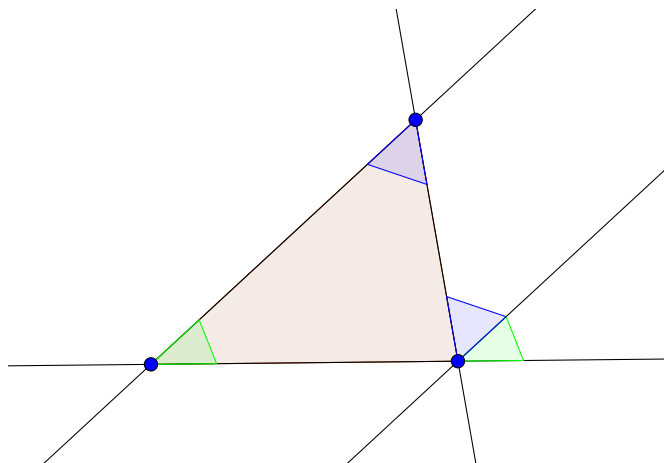


Abbildung 2.5: Zur Innenwinkelsumme des Dreiecks

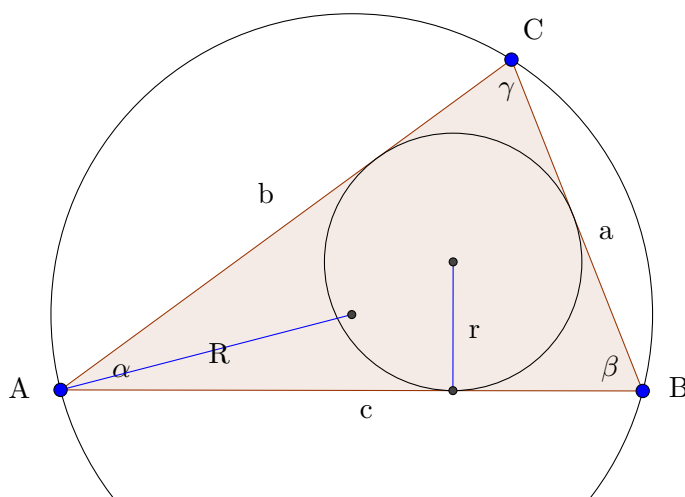


Abbildung 2.6: Bezeichnungen am allgemeinen Dreieck

Statt an rechtwinkligen Dreiecken wollen wir Winkelfunktionen an allgemeinen Dreiecken zu Berechnungen nutzen. Für Bezeichnungen verweisen wir auf Abbildung 2.6. Die Aussagen gelten für beliebige Dreiecke, nach unseren Definitionen der Winkelfunktionen allerdings vorerst nur für spitzwinklige. Eine Erweiterung der Definition und untenstehender Beweise auf den allgemeinen Fall verbleibt als Übungsaufgabe. Die Beschränkung auf spitzwinklige Dreiecke erübrigt sich, wenn man *orientierte* Längen verwendet, also negative Streckenlängen zulässt.

2.20 Satz (Flächenformeln). *Für den Flächeninhalt eines (spitzwinkligen) Dreiecks gilt*

$$A = \frac{ab \sin \gamma}{2} = \frac{bc \sin \alpha}{2} = \frac{ca \sin \beta}{2} = \frac{r(a + b + c)}{2}.$$

Beweis. Die Dreiecksfläche ergibt sich als

$$A = \frac{1}{2} ch_c$$

2 Funktionen

mit h_c der Höhe von C zur Seite c . Weiter gilt nach Definition der Sinusfunktion

$$\sin \beta = \frac{h_c}{a}$$

und damit umgestellt nach h_c und eingesetzt

$$A = \frac{ca \sin \beta}{2}.$$

Durch zyklisches Vertauschen folgen die anderen beiden Flächenformeln und es bleibt die letzte zu zeigen. Für diese zerlegen wir das Dreieck in drei Teildreiecke $\triangle ABM_i$, $\triangle BCM_i$ und $\triangle CAM_i$ mit dem Inkreismittelpunkt M_i . Jedes dieser Dreiecke hat als Höhe den Inkreisradius r und die Behauptung folgt. \square

2.21 Satz (Sinussatz¹³). *In einem (spitzwinkligen) Dreieck gilt*

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R.$$

Beweis. Dividiert man die Flächenformeln durch abc , so ergibt sich der einfache Sinussatz

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma},$$

es bleibt die Darstellung des Quotienten über den Umkreisradius zu zeigen. Dazu nutzen wir den Peripheriewinkelsatz mit a als Sehne und A als Punkt auf dem Umkreis. Sei weiter D der zweite Schnittpunkt von CM_a mit dem Umkreis. Dann ist $\alpha = \angle CAB$ gleich dem Winkel $\angle CDB$. Nach dem Satz des Thales ist das entstehende Dreieck rechtwinklig und die Definition des Sinus liefert

$$\sin \alpha = \frac{a}{2R}.$$

Damit ist alles gezeigt. \square

2.22 Folgerung. *Für den Flächeninhalt eines (spitzwinkligen) Dreiecks gilt*

$$A = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \frac{abc}{4R}.$$

Beweis. Der Beweis folgt durch Einsetzen von $a = 2R \sin \alpha$ und $b = 2R \sin \beta$ in die Flächenformel, also

$$A = \frac{ab \sin \gamma}{2} = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$$

und analog mit der Darstellung $\sin \gamma = \frac{c}{2R}$

$$A = \frac{ab \sin \gamma}{2} = \frac{abc}{4R}.$$

\square

2.23 Satz (Cosinussatz¹⁴). *In einem Dreieck gilt*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

¹³Abu Nasr Mansur, um 960–1036

¹⁴Jamshid al-Kashi, 1380–1429

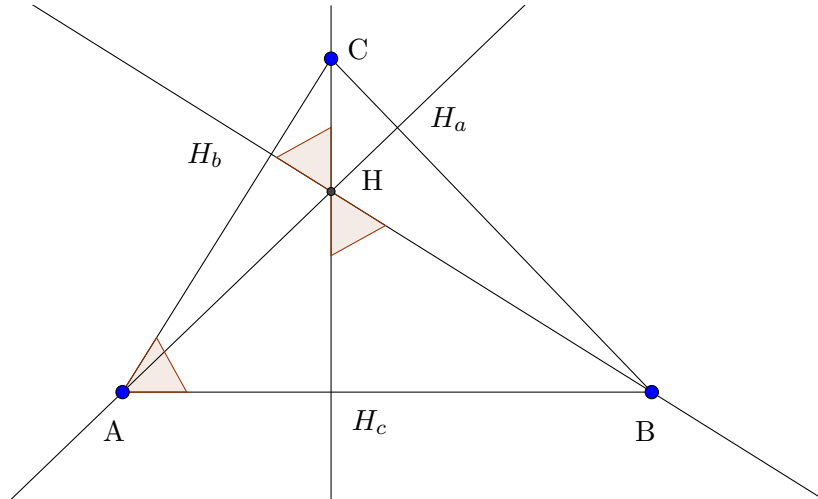


Abbildung 2.7: Notation zur Höhen und Höhenabschnitten

Beweis. Der Cosinussatz verallgemeinert den Satz des Pythagoras. Sei h_c die Höhe zur Seite c mit Fußpunkt H_c und Abschnitten $c = c_A + c_B$ der Grundseite. Dann gilt nach dem Satz des Pythagoras in den Dreiecken $\triangle AH_cC$ und $\triangle H_cBC$

$$\begin{aligned} a^2 &= h_c^2 + c_B^2 = (b^2 - c_A^2) + c_B^2 = b^2 + (c - c_A)^2 - c_A^2 \\ &= b^2 + c^2 - 2cc_A = b^2 + c^2 - 2cb \cos \alpha \end{aligned}$$

und somit die Behauptung. □

2.24 Satz (Höhenabschnittsformeln). *In einem (spitzwinkligen) Dreieck gilt*

$$\overline{AH} = 2R \cos \alpha, \quad \overline{BH} = 2R \cos \beta, \quad \overline{CH} = 2R \cos \gamma$$

mit dem Höhenschnittpunkt H sowie

$$\overline{HH_a} = 2R \cos \beta \cos \gamma, \quad \overline{HH_b} = 2R \cos \beta \cos \alpha, \quad \overline{HH_c} = 2R \cos \alpha \cos \beta.$$

Insbesondere ist das Produkt der Höhenabschnitte unabhängig von der gewählten Höhe

$$\overline{AH} \cdot \overline{HH_a} = \overline{BH} \cdot \overline{HH_b} = \overline{CH} \cdot \overline{HH_c} = 4R^2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma.$$

Beweis. Die in Abbildung 2.7 schraffierten Winkel sind (aufgrund paarweise orthogonaler Schenkel) gleich. Damit gilt

$$\overline{AH} \sin \beta = c_A = b \cos \alpha = 2R \sin \beta \cos \alpha$$

die letzte Gleichheit unter Ausnutzung des Sinussatzes. Nach Division durch $\sin \beta$ folgt die erste Identität. Die anderen oberen Höhenabschnitte ergeben sich analog. Weiter gilt

$$\overline{AH} \cos \gamma = \overline{H_bH}$$

und die verbleibenden Identitäten folgen. □

2 Funktionen

Die Höhenabschnittsformeln sind in gewisser Hinsicht dual zum Sinussatz. Das wird in der folgenden Formulierung besonders deutlich. Es gilt

$$\frac{\overline{AH}}{\cos \alpha} = \frac{\overline{BH}}{\cos \beta} = \frac{\overline{CH}}{\cos \gamma} = 2R.$$

Wir schließen den Exkurs in die Dreiecksgeometrie mit Additionstheoremen für die Winkelfunktionen. Diese werden hier vorerst am Dreieck formuliert.

2.25 Satz (Additionstheoreme¹⁵). *Die Winkelfunktionen erfüllen im allgemeinen Dreieck*

$$\begin{aligned}\sin \gamma &= \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta, \\ \cos \gamma &= \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta.\end{aligned}$$

Beweis. Mit dem Sinussatz gilt

$$2R \sin \gamma = c = c_A + c_B = 2R \cos \alpha \sin \beta + 2R \sin \alpha \cos \beta,$$

und Division durch $2R$ liefert die erste Identität. Für die zweite Gleichung nutzen wir entsprechend die Höhenabschnittsformeln. Es gilt

$$\begin{aligned}2R \cos \gamma &= \overline{CH} = h_c - \overline{HH_c} = b \sin \alpha - 2R \cos \alpha \cos \beta \\ &= 2R(\sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta)\end{aligned}$$

unter Ausnutzung des Sinussatzes. Nach Division durch $2R$ folgt wiederum die Behauptung. \square

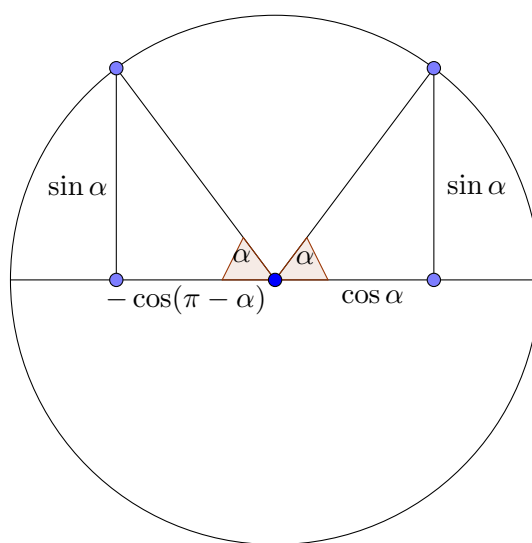


Abbildung 2.8: Zur Fortsetzung der Winkelfunktion auf stumpfe Winkel

Um zu sehen, dass es sich tatsächlich um ein Additionstheorem handelt, setzen wir zuerst \sin und \cos auf Winkel aus dem Intervall $(0, \pi)$ durch

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha, \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$$

¹⁵für den Sinus: Bhaskara II, 1114–1185

fort. Dies entspricht der üblichen Definition am Einheitskreis, siehe Abbildung 2.8. Dann gilt aufgrund der Innenwinkelsumme des Dreiecks

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin(\pi - \alpha - \beta) = \sin \gamma = \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta, \\ \cos(\alpha + \beta) &= -\cos(\pi - \alpha - \beta) = -\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.\end{aligned}$$

Dies rechtfertigt die Bezeichnung Additionstheorem für obige Aussage. Speziell für $\alpha = \beta$ ergeben sich Doppelwinkelformeln

$$\begin{aligned}\sin(2\alpha) &= 2 \sin \alpha \cos \alpha, \\ \cos(2\alpha) &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha.\end{aligned}$$

Die Doppelwinkelformel für den Cosinus wird mitunter als Ptolemäische Identität bezeichnet.

2.26 Bemerkung. Winkelfunktionen dienen Dreiecksberechnungen. Dazu genügt in der Regel der Sinussatz, der Cosinussatz kürzt aber einige Berechnungen erheblich ab. Wir fassen die wichtigsten Anwendungen kurz zusammen:

(sss)	Mit Cosinussatz kann ein Winkel bestimmt werden, dann weiter wie (sws).
(sws)	Mit dem Cosinussatz ergibt sich ein zweiter Winkel, dann weiter wie (wsw).
(wsw)	Der dritte Winkel ist mit der Innenwinkelsumme bestimmbar, mit Sinussatz ergeben sich die fehlenden Strecken.
(www)	Der Sinussatz liefert alle Seitenverhältnisse.

Anwendungen fanden (und finden) solche Rechnungen in Landvermessungen seit dem 19. Jahrhundert. Dabei wurde ausgehend von einer direkt vermessbaren Grundlinie das Land trianguliert und jedem Dreieck entsprechende Innenwinkel gemessen. Das Messen von Winkeln ist dabei mit wenig Aufwand durchführbar, während direkte Längenmessungen (zum Beispiel durch Abfahren der Verbindungslinie und direktem Nachmessen) sehr aufwändig sind. Noch heute werden solche rein winkelbasierte Messverfahren im Bergbau angewandt.

Zur Geschichte von Winkelfunktionen. Eine (ohne Winkelfunktionen formulierte) Variante des Cosinussatzes findet sich schon bei Euklid. Winkelfunktionen selbst wurden in der Antike von Ptolemäus¹⁶, allerdings die Funktion die Funktion $\text{crd}(\alpha) = 2 \sin(\alpha/2)$, welche die Grundseite eines gleichschenkligen Dreiecks mit Spitze α und Schenkeln der Länge 1 angibt. Die Funktionen \sin und \cos wurden im vierten Jahrhundert in der indischen Mathematik¹⁷ das erste mal erwähnt und kamen durch Übersetzungen ins Arabische und danach ins Lateinische nach Europa. Sowohl der Sinussatz als auch der Cosinussatz sind als solche arabischen Ursprungs.

Die Untersuchung von \sin und \cos als Funktionen an sich (und ohne Bezug auf Geometrie und Dreiecksberechnungen) beginnt im 17ten Jahrhundert. Es war Leibniz, der als erstes gezeigt hat, dass es sich bei der Sinusfunktion nicht um eine algebraische Funktion handeln kann. Potenzreihendarstellungen gehen auf Euler zurück, ebenso Produktformeln und Bezüge zur komplexen Exponentialfunktion.

Wir wollen uns nun Winkelfunktionen als Funktionen zuwenden und den Bezug zu Dreiecken dabei vorerst vergessen. Oft werden die Funktionen durch Potenzreihen eingeführt, eine alternative und sinnvolle Vorgehensweise ist es zu zeigen, dass die Additionstheoreme die Funktionen

¹⁶Claudius Ptolemäus, 90–168

¹⁷zu finden in den Surya Siddhanta, später durch Aryabhata, 476–550

2 Funktionen

bis auf eine Normierung eindeutig in der Klasse der stetigen Funktionen charakterisieren. Dieses Vorgehen geht auf d'Alembert¹⁸ zurück.

2.27 Proposition. (i) Angenommen, zwei stetige Funktionen $s, c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ erfüllen

$$\begin{aligned}s(x+y) &= c(x)s(y) + s(x)c(y) \\ c(x+y) &= c(x)c(y) - s(x)s(y)\end{aligned}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Ist weiterhin s ungerade und c gerade, so gilt entweder $s(x) = c(x) = 0$ für alle x oder es existiert ein $k \in \mathbb{R}$ mit

$$s(x) = \sin(kx), \quad c(x) = \cos(kx).$$

(ii) Angenommen, eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ erfüllt

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

Dann gilt entweder $f(x) = 0$ für alle x oder

$$f(x) = \cos(kx)$$

mit einem Parameter $k \in \mathbb{R}$ oder

$$f(x) = \cosh(kx)$$

mit einem Parameter $k \in \mathbb{R}$.

Beweis. (2) Wir zeigen zuerst die zweite Aussage und folgen dafür einem Beweis von Cauchy¹⁹. Setzt man $y = 0$, so folgt $2f(x) = 2f(x)f(0)$. Existiert ein x mit $f(x) \neq 0$, so folgt $f(0) = 1$. Andererseits ergibt sich als Lösung die Nullfunktion.

Sei im Folgenden also $f(0) = 1$. Dann folgt mit $x = 0$ aus der Funktionalgleichung

$$f(y) + f(-y) = 2f(0)f(y) = f(y)$$

und damit $f(-y) = f(y)$ und die Funktion f ist gerade. Weiter gilt mit $x = ny$

$$f((n+1)y) = 2f(y)f(ny) - f((n-1)y),$$

dies erlaubt aus dem Wert von $f(y)$ rekursiv alle Werte $f(ny)$, $n \in \mathbb{N}$ zu bestimmen. Mit $x = y$ folgt speziell $f(2x) + f(0) = f(2x) + f(0) = 2(f(x))^2$ und damit für $t = 2x$ die Halbierungsformel

$$\left(f\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2 = \frac{f(t) + 1}{2}.$$

Diese entspricht der Ptolemäischen Identität des Cosinus. Die Rekursionsformel für Vielfache gilt ebenso für die Cosinusfunktion. Beide Identitäten sind auch für den Cosinus hyperbolicus erfüllt.

Da $f(0) = 1$ gilt und f stetig ist, existiert eine kleine Umgebung $[-a, a]$ der Null, auf der f positiv ist. Für $|x| \leq a$ gilt also $f(x) > 0$. Wir unterscheiden zwei Fälle,

¹⁸Jean le Rond d'Alembert, 1717–1783

¹⁹Augustin-Louis Cauchy, 1789–1857

- $f(a) > 1$ und in diesem Fall existiert ein $c > 0$ mit $f(a) = \cosh c$. Wir ignorieren den Fall vorerst, die Funktion \cosh definieren wir später.
- $f(a) \leq 1$ und in diesem Fall existiert ein $0 \leq c < \frac{\pi}{2}$ mit $f(a) = \cos c$.

Nun zeigen wir, dass $f(x)$ auf einer dichten Teilmenge von \mathbb{R}_+ mit der Funktion $\cosh(cx/a)$ im ersten Fall beziehungsweise $\cos(cx/a)$ im zweiten übereinstimmt. Wir formulieren den Beweis für den zweiten Fall, der erste erfolgt analog.

Wegen $f(a) = \cos c$ gilt mit der Ptolemäischen Identität und obiger Halbierungsformel

$$f\left(\frac{a}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+f(a)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos c}{2}} = \cos \frac{c}{2},$$

da nach Konstruktion sowohl $f(a/2)$ als auch $\cos(c/2)$ positiv sind. Per Induktion folgt daraus

$$f\left(\frac{a}{2^m}\right) = \cos\left(\frac{c}{2^m}\right), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Damit folgt unter Ausnutzung der Vielfachenformel und der entsprechenden Identität für die Cosinusfunktion

$$\begin{aligned} f\left(\frac{3a}{2^m}\right) &= 2f\left(\frac{a}{2^m}\right)f\left(\frac{a}{2^{m-1}}\right) - f\left(\frac{a}{2^m}\right) \\ &= 2\cos\left(\frac{c}{2^m}\right)\cos\left(\frac{c}{2^{m-1}}\right) - \cos\left(\frac{c}{2^m}\right) = \cos\left(\frac{3c}{2^m}\right) \end{aligned}$$

und damit wiederum per Induktion

$$f\left(\frac{na}{2^m}\right) = \cos\left(\frac{nc}{2^m}\right)$$

für alle $m, n \in \mathbb{N}$. Da die Menge der Zahlen $na/2^m$ aber dicht in \mathbb{R}_+ ist, impliziert die Stetigkeit von \cos und f die Gleichheit beider Funktionen.

(1) Wir folgern die erste Aussage aus der zweiten. Dazu nutzen wir die Funktionalgleichungen zuerst zur Bestimmung elementarer Eigenschaften der Funktionen c und s . Setzt man speziell $x = y = 0$, so ergibt sich

$$s(0) = 2c(0)s(0), \quad c(0) = c(0)^2 - s(0)^2.$$

Also gilt $s(0) = 0$ oder $c(0) = \frac{1}{2}$. In ersterem Fall folgt $c(0) = 0$ oder $c(0) = 1$, im zweiten aus $s(0)^2 = -\frac{1}{4} < 0$ ein Widerspruch zu $s(0)$ reell. Gilt $s(0) = c(0) = 0$, so folgt wegen

$$\begin{aligned} s(x) &= s(x+0) = s(x)c(0) + c(x)s(0) = 0, \\ c(x) &= c(x+0) = c(x)c(0) - s(x)s(0) = 0 \end{aligned}$$

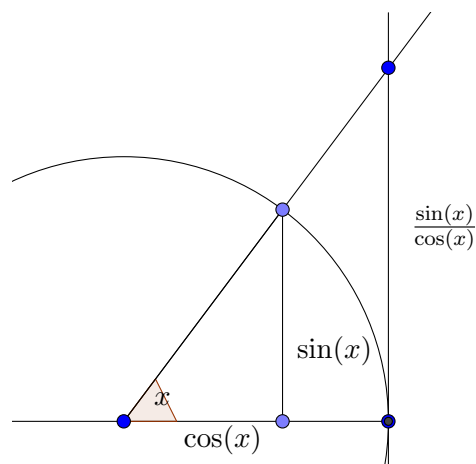
für alle x , dass es sich um die Nullfunktion handelt. Dies schließen wir wieder aus. Damit gilt also $c(0) = 1$ und $s(0) = 0$. Setzt man nun $x = -y$, so folgt unter der Symmetrieannahme an s und c

$$1 = c(0) = c(x)c(-x) - s(x)s(-x) = c^2(x) + s^2(x)$$

und ebenso für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$c(x+y) + c(x-y) = c(x)c(y) - s(x)s(y) + c(x)c(-y) - s(x)s(-y) = 2c(x)c(y).$$

Also ist die Funktionalgleichung aus (2) erfüllt. Wegen $c(x)^2 + s(x)^2 = 1$ entfällt der Fall mit der \cosh -Funktion und die Aussage ist gezeigt. \square

Abbildung 2.9: Zum Grenzwert von $\frac{\sin x}{x}$

Bilden wir nun die komplexwertige Funktion

$$e(x) = \cos(x) + i \sin(x),$$

so erfüllt diese die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion

$$\begin{aligned} e(x+y) &= \cos(x+y) + i \sin(x+y) \\ &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) + i \cos(x)\sin(y) + i \sin(x)\cos(y) \\ &= (\cos(x) + i \sin(x))(\cos(y) + i \sin(y)) = e(x)e(y). \end{aligned}$$

Dies hat eine interessante Konsequenz. Es gilt

$$\cos(nx) + i \sin(nx) = (\cos(x) + i \sin(x))^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} i^k \cos^{n-k}(x) \sin^k(x).$$

2.28 Proposition (Euler). *Es gilt*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Beweis. Zum Beweis nutzen wir trotz allem Geometrie in Form eines Flächenvergleiches am Bild 2.9. Dazu betrachten wir die innere Dreiecksfläche, den Sektor und die äußere, den Sektor umfassende, Dreiecksfläche. Für diese gilt

$$\frac{1}{2} \cos x \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \frac{\sin x}{\cos x}$$

und damit

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}$$

für alle $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Also folgt aus $\cos(0) = 1$ (und der Stetigkeit der Cosinusfunktion)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

□

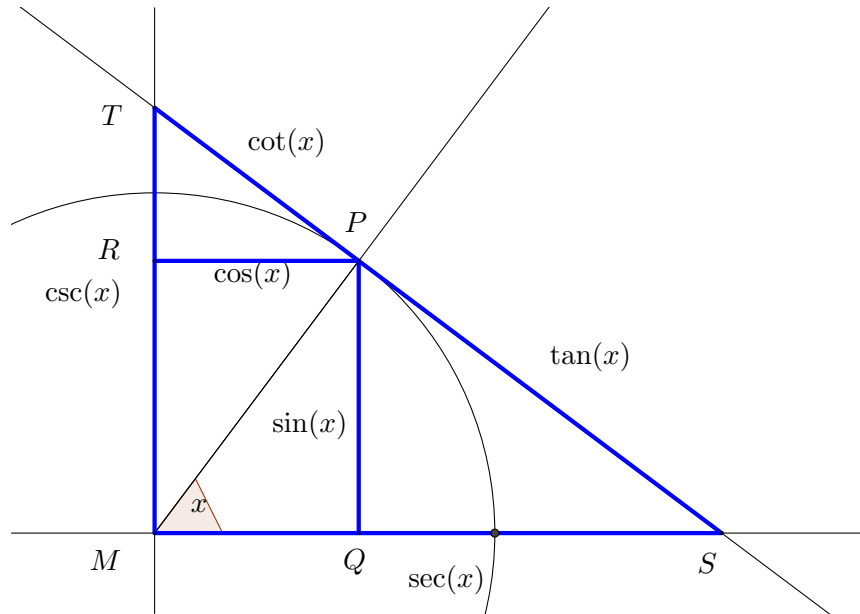


Abbildung 2.10: Weitere trigonometrische Funktionen dargestellt am Einheitskreis

2.29 Folgerung. (i) Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0.$$

(ii) Die Sinus- und die Cosinusfunktion sind differenzierbar, es gilt

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x, \quad \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x.$$

Beweis. (i) Durch Erweitern mit $\cos x + 1$ erhält man

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \frac{-\sin x}{\cos x + 1} = 0$$

und damit die Behauptung. • (ii) Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} &= \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} + \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \cos x \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} &= \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} \\ &= -\sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} + \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = -\sin x. \end{aligned}$$

□

Dies kann man zum Ausgangspunkt nehmen, die Winkelfunktionen über ihre Differentialgleichung zu definieren. Als Konsequenz des Existenz- und Eindeutigkeitsatzes für Differentialgleichungen ergibt sich direkt:

2 Funktionen

2.30 Satz. Die Funktionen $s(x) = \sin x$ und $c(x) = \cos(x)$ sind die einzigen Lösungen des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$s'(x) = c(x), \quad c'(x) = -s(x),$$

die die Anfangsbedingungen $s(0) = 0$ und $c(0) = 1$ erfüllen.

2.31 Bemerkung. Neben Sinus und Cosinus sind noch weitere trigonometrische Funktionen gebräuchlich. Zum Einen betrifft dies die Funktionen $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ und $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$, aber ebenso trifft man gelegentlich die beiden Funktionen $\csc x = \frac{1}{\sin x}$ und $\sec x = \frac{1}{\cos x}$. Die Bezeichnungen erklären sich am Bild 2.10.

Für den Winkel x (beziehungsweise die Bogenlänge x) des Einheitskreises gilt $\sin x = \overline{PQ}$ und $\cos x = \overline{RP}$. Weiter ist $\tan x = \overline{PS}$ der Tangentenabschnitt zum Winkel und $\cot x = \overline{TP}$ der Tangentenabschnitt zum Co-Winkel $\frac{\pi}{2} - x$. Die Funktion $\sec x = \overline{MS}$ liefert den Abstand von M zum Tangentschnittpunkt mit der Achse, ebenso $\csc x = \overline{MT}$ für den zugeordneten Co-Winkel $\frac{\pi}{2} - x$.

2.5 Hyperbelfunktionen

Hyperbelfunktionen sind analog zu Winkelfunktionen definiert, allerdings ersetzen wir dabei den Kreis durch ein Paar von Hyperbeln. Gegeben sei dazu eine Hyperbel in Normalform,

$$1 = \xi^2 - \eta^2 = (\xi + \eta)(\xi - \eta).$$

Die Kurvenpunkte auf dem rechten Hyperbelbogen werden dann durch die Koordinaten

$$(\xi, \eta) = (\cosh A, \pm \sinh A)$$

parametrisiert, wobei A den Flächeninhalt des durch die Strecken von 0 zu $(\cosh A, -\sinh A)$ und von 0 zu $(\cosh A, \sinh A)$ und dem zwischen den Punkten liegenden Hyperbelstück darstellt, siehe Abbildung 2.11. Bevor wir das genauer untersuchen, wollen wir zeigen, dass diese Definition sinnvoll ist.

Dazu betrachten wir eine Transformation der ξ - η -Ebene der Form

$$\xi + \eta \mapsto \Xi + \text{H} = \lambda(\xi + \eta)$$

und

$$\xi - \eta \mapsto \Xi - \text{H} = \frac{1}{\lambda}(\xi - \eta)$$

zu einem gegebenen Parameter $\lambda > 0$. Es gilt also

$$\begin{aligned} \Xi &= \frac{\lambda}{2}(\xi + \eta) + \frac{1}{2\lambda}(\xi - \eta), \\ \text{H} &= \frac{\lambda}{2}(\xi + \eta) - \frac{1}{2\lambda}(\xi - \eta). \end{aligned}$$

Die Transformation ist linear, bildet also Geraden durch den Ursprung auf Geraden ab. Darüberhinaus erfüllt ihre Determinante

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\lambda + \lambda^{-1}}{2} & \frac{\lambda - \lambda^{-1}}{2} \\ \frac{\lambda - \lambda^{-1}}{2} & \frac{\lambda + \lambda^{-1}}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} ((\lambda + \lambda^{-1})^2 - (\lambda - \lambda^{-1})^2) = 1,$$

die Transformation erhält also Flächeninhalte. Damit erfüllen die so definierten Funktionen Additionstheoreme.

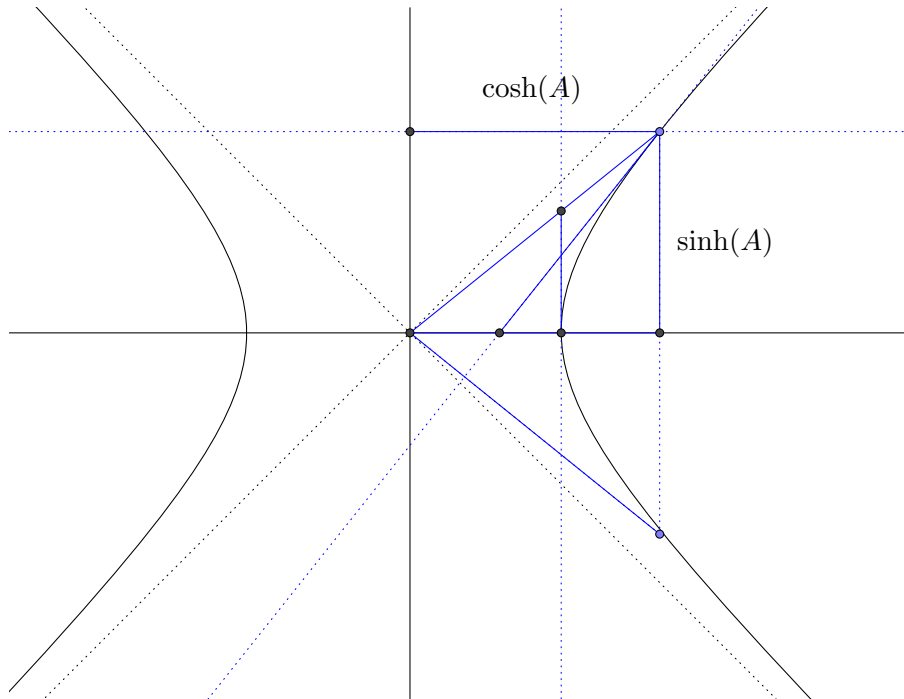


Abbildung 2.11: Zur Definition der Hyperbelfunktionen

2.32 Satz (Additionstheoreme). *Für die Hyperbelfunktionen gelten die Additionstheoreme*

$$\begin{aligned}\cosh(A + B) &= \cosh(A) \cosh(B) + \sinh(A) \sinh(B), \\ \sinh(A + B) &= \sinh(A) \cosh(B) + \cosh(A) \sinh(B).\end{aligned}$$

Beweis. Seien $P_1 = (\cosh A, \sinh A)$ und $P_2 = (\cosh B, \sinh B)$ Punkte auf der Hyperbel, sei weiter $Q = (1, 0)$. Die Idee des Additionstheorems besteht nun darin, die Fläche $A + B$ dadurch zu konstruieren, dass wir mit einer der obigen Transformationen Q auf P_1 abbilden, damit also die obere Hälfte der Fläche B an A anfügen können. Nach Konstruktion und Definition der Hyperbelfunktionen wird damit P_2 auf $P_3 = (\cosh(A + B), \sinh(A + B))$ abgebildet.

Der Parameter λ der Transformation ergibt sich damit aus

$$\lambda = \lambda(1 + 0) = \cosh A + \sinh A, \quad \lambda^{-1} = \cosh A - \sinh A$$

und es folgt

$$\begin{aligned}\cosh(A + B) + \sinh(A + B) &= \lambda(\cosh B + \sinh B) \\ &= (\cosh A + \sinh A)(\cosh B + \sinh B)\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\cosh(A + B) - \sinh(A + B) &= \frac{1}{\lambda}(\cosh B - \sinh B) \\ &= (\cosh A - \sinh A)(\cosh B - \sinh B).\end{aligned}$$

Ausmultiplizieren und Addition und Subtraktion beider Identitäten liefert die Additionstheoreme. \square

2 Funktionen

Wir definieren uns eine weitere Funktion. Sei

$$e(A) = \cosh A + \sinh A.$$

Dann impliziert (2.5):

2.33 Folgerung. Die Funktion $e(A)$ ist eine Exponentialfunktion, sie ist stetig und erfüllt

$$e(A + B) = e(A)e(B).$$

Es ist noch nicht ganz klar, welche Exponentialfunktion es ist, dazu müsste man $e(1)$ bestimmen. Analog kann man auch die Funktion $\cosh(x)$ durch die Funktionalgleichung

$$\cosh(A + B) + \cosh(A - B) = 2 \cosh(A) \cosh(B)$$

bis auf einen Skalenfaktor charakterisieren. Die Funktionalgleichung folgt direkt aus den Additionstheoremen, da $\cosh(-A) = \cosh(A)$ und $\sinh(-A) = -\sinh(A)$ gilt. Den Skalenfaktor kann man durch folgenden Grenzwert festlegen. Wir zeigen ihn für die geometrisch definierten Hyperbelfunktionen.

2.34 Proposition. Es gilt

$$\lim_{A \rightarrow 0} \frac{\sinh A}{A} = 1.$$

Beweis. Der Beweis erfolgt analog zum entsprechenden Satz für die Sinusfunktion. Die obere Hälfte der Fläche A ist kleiner als das Dreieck mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(\cosh A, \sinh A)$ und größer als der Abschnitt des Dreiecks der durch die Tangente in $(1, 0)$ herausgeschnitten wird. Also folgt

$$\tanh A = \frac{\sinh A}{\cosh A} \leq A \leq \sinh A$$

und damit

$$\frac{1}{\cosh A} \leq \frac{A}{\sinh A} \leq 1.$$

Mit der Stetigkeit der \cosh -Funktion und $\cosh 0 = 1$ folgt die Behauptung. \square

2.35 Folgerung. (i) Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{x} = 0.$$

(ii) Die Hyperbelfunktionen sind differenzierbar. Sie erfüllen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sinh x &= \cosh x, \\ \frac{d}{dx} \cosh x &= \sinh x. \end{aligned}$$

(iii) Es gilt

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Beweis. (i) Erweitern mit $\cosh x + 1$ liefert wiederum

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh^2 x - 1}{x(\cosh x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x} \frac{\sinh x}{\cosh x + 1} = 0$$

aufgrund der Stetigkeit von \cosh und obigen Grenzwertes. • (ii) Erfolgt durch direktes Nachrechnen. Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh(x+h) - \sinh x}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh x \cosh h + \cosh x \sinh h - \sinh x}{h} \\ &= \cosh x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh h}{h} + \sinh x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cosh h - 1}{h} \\ &= \cosh x \end{aligned}$$

und entsprechend

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cosh(x+h) - \cosh x}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cosh x \cosh h + \sinh x \sinh h - \cosh x}{h} \\ &= \sinh x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh h}{h} + \cosh x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cosh h - 1}{h} \\ &= \sinh x. \end{aligned}$$

□

2.6 Area- und Arcusfunktionen

Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen und der hyperbolischen Funktionen bestimmen aus den Werten der Winkelfunktion den Wert der Bogenlänge (arcus) beziehungsweise den Wert der Fläche (area).

Da die trigonometrischen Funktionen \sin , \cos und \tan periodisch sind, wählen wir für den Wertebereich der Umkehrfunktion einen entsprechenden Abschnitt. Dabei sei

- $x = \arcsin y$, falls $y = \sin x$ und $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$;
- $x = \arccos y$, falls $y = \cos x$ und $0 \leq x \leq \pi$;
- $x = \arctan y$, falls $y = \tan x$ und $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$;
- $x = \operatorname{arccot} y$, falls $y = \cot x$ und $0 < x < \pi$.

Aufgrund ihrer Monotonie (wenn man die Funktionen abstrakt über die Additionstheoreme definiert) oder direkt über die Definition am Dreieck sind diese Funktionen wohldefiniert. Die Funktionen \arcsin , \arccos und \arctan ordnen den Punkten auf dem Einheitskreis mit Koordinaten $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ die Bogenlänge α zu. Im entsprechenden Winkelbereich ist dabei jedem Wert von $\cos \alpha$ ein eindeutiger Wert von $\sin \alpha$ zugeordnet und umgekehrt.

Areafunktionen sind die hyperbolischen Gegenstücke der Arcusfunktionen. Sie ordnen den Werten von $\cosh A$ und $\sinh A$ (also den Punkten auf der Hyperbel) den Flächeninhalt A zu. Als Definition nutzen wir

- $x = \operatorname{arsinh} y$, falls $y = \sinh x$;

2 Funktionen

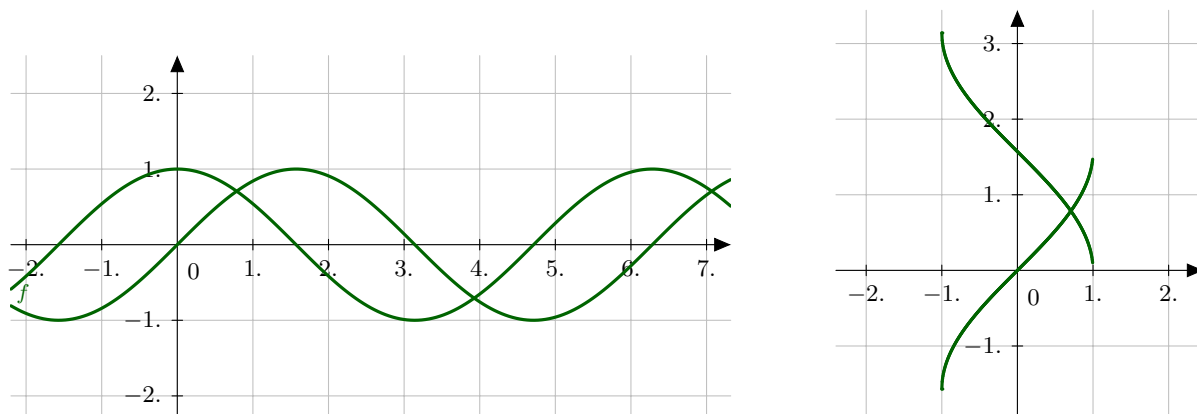


Abbildung 2.12: Die Funktionen $y = \cos x$ und $y = \sin x$ (links) und ihre Umkehrfunktionen $x = \arccos y$ und $x = \arcsin y$ (rechts).

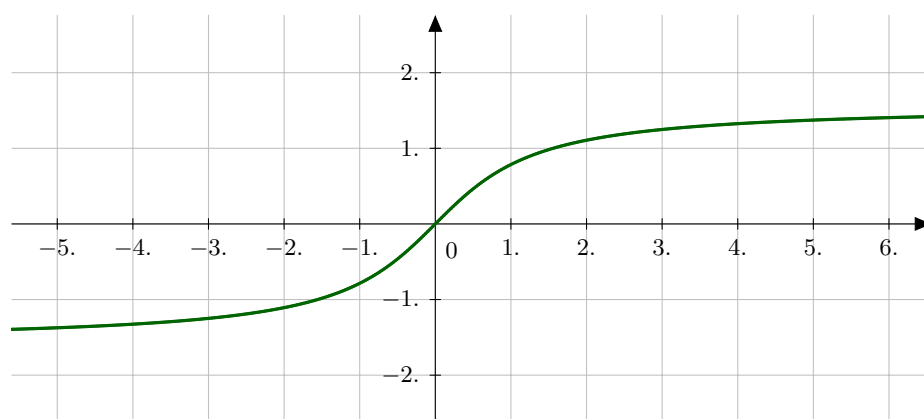


Abbildung 2.13: Die Funktion $y = \arctan x$.

- $x = \operatorname{arcosh} y$, falls $y = \cosh x$ und $x \geq 0$;
- $x = \operatorname{artanh} y$, falls $y = \tanh x$;
- $x = \operatorname{arcoth} y$, falls $y = \coth x$.

Die Funktionen sind in Abbildung 2.14 dargestellt. Die Areafunktionen besitzen alternative Darstellungen durch Logarithmusfunktionen. Diese ergeben sich direkt aus den Formeln

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

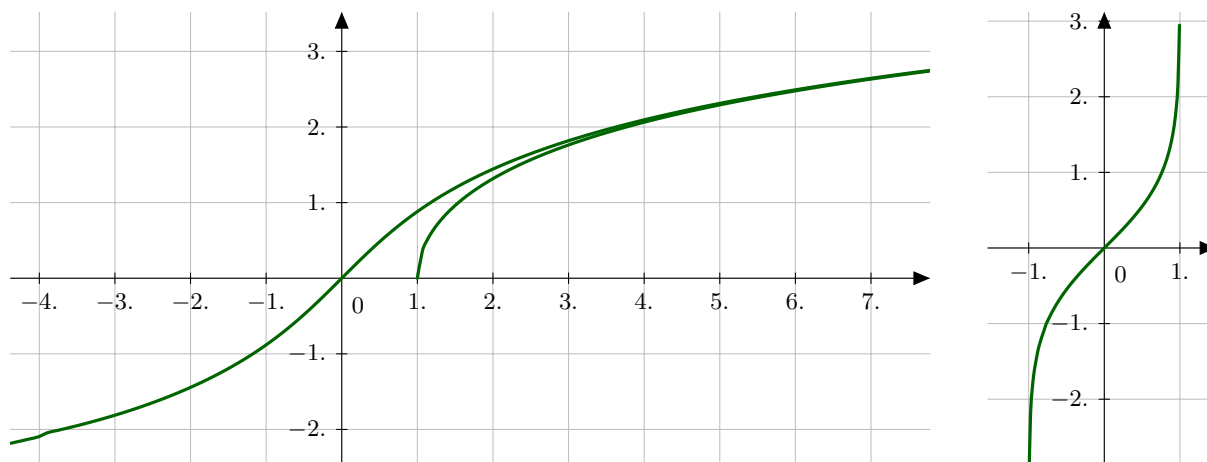
zusammen mit den Lösungsformeln quadratischer Gleichungen. Es gilt mit $y = \cosh x$ wegen $2y = e^x + e^{-x}$ stets $e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0$ und damit²⁰

$$\operatorname{arcosh} y = \ln \left(y + \sqrt{y^2 - 1} \right), \quad y \geq 1$$

und entsprechend mit $y = \sinh x$ wegen $e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$ auch

$$\operatorname{arsinh} y = \ln \left(1 + \sqrt{y^2 + 1} \right), \quad y \in \mathbb{R}.$$

²⁰Die zweite Lösung der quadratischen Gleichung liefert den zweiten negativen Ast der arcosh -Funktion.

Abbildung 2.14: Die Funktionen $\operatorname{arsinh}(x)$ und $\operatorname{arcosh}(x)$ (links) und $\operatorname{artanh}(x)$ (rechts).

Weiter impliziert

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

für $y = \tanh x$ die Identität

$$e^{2x}y + y = e^{2x} - 1, \quad \text{also} \quad e^{2x} = \frac{1+y}{1-y}$$

und damit

$$\operatorname{artanh} y = \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y}, \quad |y| < 1,$$

und entsprechend

$$\operatorname{arcoth} y = \frac{1}{2} \ln \frac{y+1}{y-1}, \quad |y| > 1.$$

Entsprechend 'einfache' Formeln gibt es nicht für die Arcusfunktionen. Jedoch ergeben sich erste elementare Eigenschaften der Arcusfunktionen direkt aus denen der trigonometrischen Funktionen. Wir fassen nur ein paar zusammen.

2.36 Proposition (Elementare Beziehungen zwischen Arcusfunktionen). *(i) Alle Arcusfunktionen sind durch den arctan ausdrückbar. Es gilt*

$$\operatorname{arccot} y = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctan} y,$$

$$\operatorname{arcsin} y = \operatorname{arctan} \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}, \quad |y| < 1,$$

$$\operatorname{arccos} y = \operatorname{arccot} \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctan} \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}, \quad |y| < 1,$$

$$\operatorname{arcsin} y + \operatorname{arccos} y = \frac{\pi}{2}, \quad |y| < 1.$$

(ii) Es gelten die Additionstheoreme

$$\operatorname{arctan} x + \operatorname{arctan} y = \operatorname{arctan} \frac{x+y}{1-xy}, \quad xy < 1,$$

2 Funktionen

zusammen mit

$$\begin{aligned}\arctan x + \arctan y &= \pi + \arctan \frac{x+y}{1-xy}, & xy > 1, x > 0, \\ \arctan x + \arctan y &= -\pi + \arctan \frac{x+y}{1-xy}, & xy > 1, x < 0.\end{aligned}$$

Beweis. (i) Es gilt $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$ und $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$. Damit gilt

$$\cot(x + \frac{\pi}{2}) = \frac{\cos(x + \frac{\pi}{2})}{\sin(x + \frac{\pi}{2})} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x = \tan(-x)$$

und die erste Identität folgt mit $y = \tan(-x)$

$$\operatorname{arccot} y = x + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \arctan y.$$

Weiterhin gilt für $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ stets $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ und damit

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}$$

und mit $y = \sin x$, also $x = \arcsin y$, folgt die Behauptung. Die dritte Identität ist analog, einerseits kann man zu Komplementärwinkeln übergehen und dadurch \sin durch \cos und gleichzeitig \tan durch \cot ersetzen oder, auf dem interessanten Bereich $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$ ausnutzen. Die letzte Identität folgt durch Addition. • (ii) Aus den Additionstheoremen der Sinus- und Cosinusfunktionen ergibt sich

$$\tan(\xi + \eta) = \frac{\sin(\xi + \eta)}{\cos(\xi + \eta)} = \frac{\sin \xi \cos \eta + \cos \xi \sin \eta}{\cos \xi \cos \eta - \sin \xi \sin \eta} = \frac{\tan \xi + \tan \eta}{1 - \tan \xi \tan \eta}$$

und damit für $\xi = \arctan x$ und $\eta = \arctan y$

$$\tan(\arctan x + \arctan y) = \frac{x+y}{1-xy}$$

und zusammen mit der π -Periodizität der Tangensfunktion und der Wahl des Wertebereichs der Umkehrfunktion die Behauptung. \square

2.37 Folgerung. Für alle $x \neq 0$ gilt

$$\arctan x = \pm \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x} \quad \pm x > 0.$$

Beweis. Folgt durch Grenzwertbildung $y \rightarrow 1/x$ im Additionstheorem zusammen mit der Grenzwertbeziehung

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arctan x = \pm \frac{\pi}{2},$$

die sich direkt aus dem Verlauf der Tangensfunktion ergibt. \square

2.38 Proposition. Es gilt

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = -\frac{d}{dx} \arccos x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

und

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}.$$

Beweis. Diese Beziehungen ergeben sich aus den Ableitungsregeln der Winkelfunktionen. Es gilt

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

und damit für $y = \sin x$

$$\frac{d}{dy} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Mit der Komplementärwinkelbeziehung $\arcsin y + \arccos y = \pi$ folgt die Aussage für den \arccos . Für die Ableitung des Tangens ergibt sich analog

$$\frac{d}{dx} \tan x = \frac{d}{dx} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{\cos x} + \frac{\sin x \sin x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

und damit für $y = \tan x$

$$\frac{d}{dy} \arctan y = \frac{1}{1 + y^2}.$$

□

Als Folgerung ergeben sich Reihendarstellungen dieser Funktion als Potenzreihen. Der nachfolgende Beweis ist direkt und benötigt nur die Summenformel der geometrischen Reihe.

2.39 Folgerung. *Es gilt*

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad |x| < 1,$$

sowie

$$\arctan x = \pm \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)x^{2k+1}}, \quad \pm x > 1,$$

als lokal gleichmäßig konvergente Reihe.

Beweis. Da die geometrische Reihe

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$$

für $|x| < 1$ gleichmäßig konvergiert, folgt mit gliedweiser Integration und dem speziellen Wert $\arctan 0 = 0$

$$\arctan x = \arctan x - \arctan 0 = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^x \xi^{2k} d\xi = - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1},$$

also die Behauptung. □

Die Reihen konvergieren umso besser, je weiter x von ± 1 entfernt ist. Die Konvergenz ist dann (wie es bei geometrischen Reihen immer auftritt) exponentiell. Zusammen mit speziellen Werten für die Tangensfunktion erlaubt dies die Berechnung von π . Dazu ein kurzes Beispiel, es gilt

$$1 = \tan \frac{\pi}{4} = \tan 2 \frac{\pi}{8} = \frac{2 \tan \frac{\pi}{8}}{1 - \tan^2 \frac{\pi}{8}},$$

2 Funktionen

also insbesondere für $t = \tan \frac{\pi}{8}$ die Gleichung $1 - t^2 = 2t$. Die Nullstellen der Gleichung sind $t = -1 \pm \sqrt{2}$, was zusammen mit $\tan \frac{\pi}{8} > 0$

$$\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$$

liefert. Damit gilt aber umgekehrt auch

$$\frac{\pi}{8} = \arctan(\sqrt{2} - 1) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\sqrt{2} - 1)^{2k+1}}{2k+1}.$$

Addiert man die ersten 8 Summanden dieser Reihe, so erhält man nach Multiplikation mit 8

n	achtfache n -te Partialsumme
0	3.3137084989847611638
1	3.1241943340101603621
2	3.143703628121770649
3	3.1413127240611269336
4	3.1416317796154585517
5	3.141586991296422064
6	3.1415934935323777275
7	3.1415925266727017012

und man sieht, dass sich π auf diese Weise effektiv berechnen lässt. Dieses Verfahren wurde im 17ten Jahrhundert angewandt.

2.7 Fortsetzungen ins Komplexe

Bei Polynomen haben wir gesehen, dass erst ein Übergang zu komplexen Variablen eine strukturell einfache und befriedigende Theorie geliefert hat. Dies ist auch bei den nun betrachteten transzendenten Funktionen der Fall. Während Polynome inhärente Rechenvorschriften sind, ist hier allerdings Vorsicht geboten und wir müssen uns überlegen, wie wir die konstruierten Funktionen für komplexe Variablen definieren und ob eine solche Definition überhaupt sinnvoll ist.

Winkelfunktionen haben wir am Dreieck definiert und dann mittels Additionstheoremen auf ganz \mathbb{R} fortgesetzt. Bei Exponentialfunktionen haben wir die Funktionalgleichungen

$$E(x+y) = E(x)E(y), \quad x, y \in \mathbb{R},$$

zusammen mit der Forderung, dass $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sein soll, verwendet. Dies wiederum bestimmte zusammen mit einem Funktionswert $E(1) = a$ die Funktion $E(x) = a^x$ eindeutig. Verwendet man statt reeller Variablen hier komplexe Variablen, fordert also

$$E(z+w) = E(z)E(w), \quad z, w \in \mathbb{C}$$

für komplexe Zahlen $z = x+iy$ und $w = u+iv$, so bestimmen die *zwei* Funktionswerte $E(1) = a$ und $E(i) = b$ eindeutig eine stetige Funktion E . Die Werte von a und b sind dabei beliebig wählbar und bestimmen (der Einfachheit halber mit $a, b \in \mathbb{R}$) die (reellwertige) Funktion

$$E(x+iy) = a^x b^y.$$

Die Funktion erfüllt (2.7). Aber, ist diese Fortsetzung überhaupt sinnvoll?

Man sieht, dass im Gegensatz zur Konstruktion der Exponentialfunktionen auf reellen Zahlen Stetigkeit allein nicht als Forderung genügt. Stattdessen betrachtet man Funktionen, die

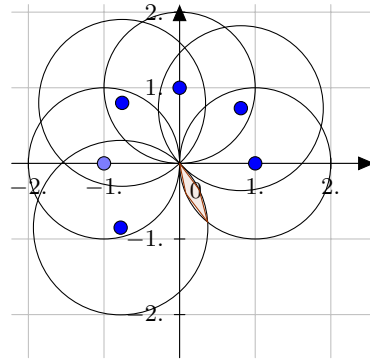


Abbildung 2.15: Zur Fortsetzung der Wurzelfunktion

- *analytisch* sind, also eine Darstellung als konvergente Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$$

mit Koeffizienten $\alpha_n \in \mathbb{C}$ und für Entwicklungspunkte $z_0 \in \mathbb{C}$ besitzen; oder (äquivalent)

- *holomorph* sind, also auf offenen Teilmengen von \mathbb{C} komplex differenzierbar sind.

Für solche Funktionen sind die Fortsetzungen von \mathbb{R} nach \mathbb{C} eindeutig. Man beachte die Ähnlichkeit von Polynomen und Potenzreihen. Eine auf \mathbb{R} definierte Funktion, die dort eine Darstellung als konvergente Potenzreihe besitzt, besitzt eine eindeutige analytische Fortsetzung über die reelle Achse hinaus. Dies folgt direkt aus dem Identitätssatz für Potenzreihen. Ebenso ist eine durch eine Potenzreihe dargestellte Funktion in jedem Punkt im Inneren ihres Konvergenzkreises in eine Potenzreihe entwickelbar. Das erlaubt es, solche Funktionen eindeutig über ihr Definitionsgebiet hinaus fortzusetzen.

Um die Sprache im Folgenden festzulegen betrachten wir analytische Funktionen auf ihrem maximalen Definitionsgebiet. Diese sind als Familien von Kreisscheiben in \mathbb{C} mit zugeordneten darauf konvergenten Potenzreihen zu verstehen. Dabei werden überlappende Kreisscheiben miteinander verklebt, wenn die durch die Potenzreihe bestimmte Funktion auf dem Schnitt übereinstimmt. Eine analytische Funktion ist die Gesamtheit der Kreisscheiben die über Wege mit einer Ausgangskreisscheibe verbunden sind.

Als Beispiel betrachten wir dazu die Wurzelfunktion $f(z) = \sqrt{z}$. Für den Entwicklungspunkt $z_0 = 1$ gilt nach Newtons' Binomialreihe

$$f(z) = (1 + z - 1)^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (z - 1)^n, \quad |z - 1| < 1$$

mit den verallgemeinerten Binomialkoeffizienten

$$\binom{1/2}{n} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1) \cdots (\frac{1}{2} - n + 1)}{1 \cdot 2 \cdots n}.$$

Ist nun z_0 ein anderer Punkt aus dieser Scheibe und bezeichnet $\sqrt{z_0} = f(z_0)$ den durch die Reihe dargestellten Wert, so gilt

$$f(z) = (z_0 + z - z_0)^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} \frac{\sqrt{z_0}}{z_0^n} (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < 1$$

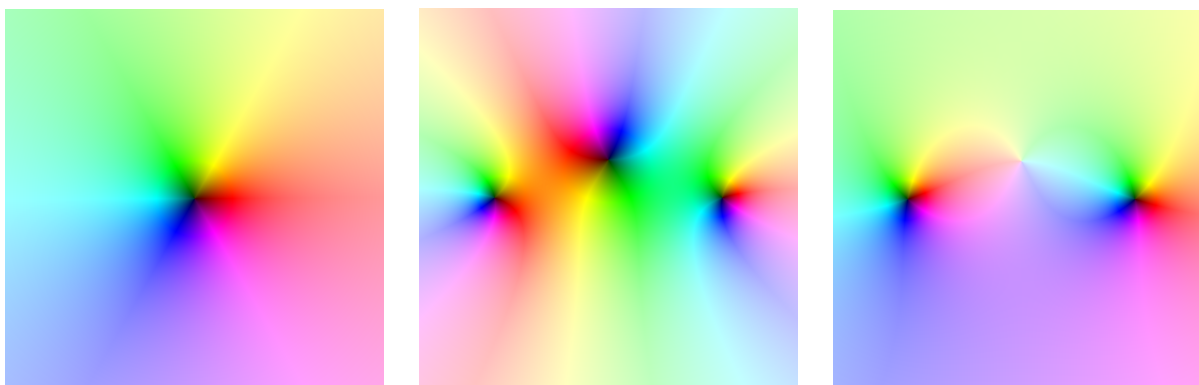


Abbildung 2.16:

Links: Farbschema

Mitte: ein Polynom mit drei Nullstellen

Rechts: eine rationale Funktion mit zwei Nullstellen und einem Pol

und wir erhalten eine Fortsetzung. Wie in Abbildung 2.15 dargestellt liefert dies nun Darstellungen der Wurzelfunktion auf einer Kette von Kreisscheiben. Jeweils aufeinanderfolgende sind dabei verklebt. Allerdings gilt in der ersten Kreisscheibe $\sqrt{1} = 1$ und nach einem halben Umlauf auch $\sqrt{-1} = 1$. Nach einem ganzen Umlauf erhält man also $\sqrt{1} = -1$ und man kann die Kreisscheiben nicht verkleben. Dies ist erst nach zwei Umläufen um den Ursprung erlaubt.

Die so erhaltene Fortsetzung ist eine Funktion auf einer Fläche über einer Teilmenge von \mathbb{C} (hier $\mathbb{C} \setminus \{0\}$), die erhaltene Fläche wird als Riemannsche²¹ Fläche der Funktion bezeichnet.

Wir wollen uns nun den bisher diskutierten Funktionenklassen zuwenden.

Polynome

Polynome muss man nicht ins komplexe Fortsetzen, sie sind Rechenvorschriften und das Einsetzen komplexer Zahlen tut das Richtige. Allerdings stellt sich die Frage nach einer sinnvollen Darstellung der Funktionen. Wir nutzen dazu Farben. Statt genau zu beschreiben, wie die komplexe z -Ebene auf die komplexe $w = f(z)$ -Ebene abgebildet wird, färben wir die w -Ebene mit einer der Phase $w/|w|$ entsprechenden Farbe und einer $|w|$ entsprechenden Helligkeit ein. Danach nutzen wir f um den Farbwert auf die z -Ebene zu übertragen, färben also jeweils mit der zu $f(z)$ gehörenden Farbe ein. Sichtbar werden dadurch alle Nullstellen, bei rationalen Funktionen auch alle Polstellen.

Exponentialfunktion

Die komplexe Exponentialfunktion wird direkt über die Exponentialreihe

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

²¹Bernhard Riemann, 1826–1866

definiert. Die Reihe konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut und auf beschränkten Teilmengen von \mathbb{C} gleichmäßig. Damit gilt

$$\begin{aligned}\exp(z+w) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k+\ell=n} \binom{n}{k} z^k w^\ell \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{z^\ell}{\ell!} = \exp(z) \exp(w)\end{aligned}$$

und ebenso

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\exp(z) - 1}{z} = 1.$$

Damit folgt

$$\frac{d}{dz} \exp z = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{\exp(z+w) - \exp(z)}{w} = \exp(z) \lim_{w \rightarrow 0} \frac{\exp(w) - 1}{w} = \exp(z)$$

(was man auch durch gliedweises Differenzieren der Reihe gesehen hätte). Es stellt sich die Frage, wie diese Funktion aussieht. Dazu hilft eine alternative reelle Darstellung der Funktion, es gilt

$$\exp(z) = \exp(x+iy) = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Um das zu zeigen beachten wir, dass aufgrund der Additionstheoreme der (reellen) Winkelfunktionen für die so definierte Funktion ebenso $\exp(z+w) = \exp(z) \exp(w)$ gilt und weiterhin auch

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\exp(z) - 1}{z} &= \lim_{(x,y) \rightarrow 0} \frac{e^x (\cos y + i \sin y) - 1}{x + iy} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow 0} \frac{(x(e^x \cos y - 1) + ye^x \sin y) + i(xe^x \sin y - y(e^x \cos y - 1))}{x^2 + y^2} \\ &= 1 + i0\end{aligned}$$

Beide Bedingungen, also das Additionstheorem und die (komplexe) Ableitung in 0 bestimmen die (komplexe) Exponentialfunktion eindeutig. Die Darstellung über Winkelfunktionen liefert eine einfache graphische Interpretation der Exponentialfunktion.

Linien der z -Ebene mit $x = \operatorname{Re} z$ konstant werden auf Kreise um den Ursprung mit Radius $|w| = e^x$ abgebildet. Linien der z -Ebene mit $y = \operatorname{Im} z$ konstant auf Strahlen vom Ursprung ins Unendliche mit $\arg w$ konstant abgebildet. Die Exponentialfunktion entspricht der Transformation in Polarkoordinaten.

Wegen

$$\exp(2\pi i) = 1$$

ist die komplexe Exponentialfunktion periodisch mit Periode $2\pi i$. Es existiert kein $z \in \mathbb{C}$ mit $\exp(z) = 0$ (was sich aber schon direkt aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion ergibt). Darüberhinaus bildet die Exponentialfunktion

$$\exp : \mathbb{R} + i(-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

bijektiv ab. Die Funktion ist in Abbildung 2.18 dargestellt.

2 Funktionen

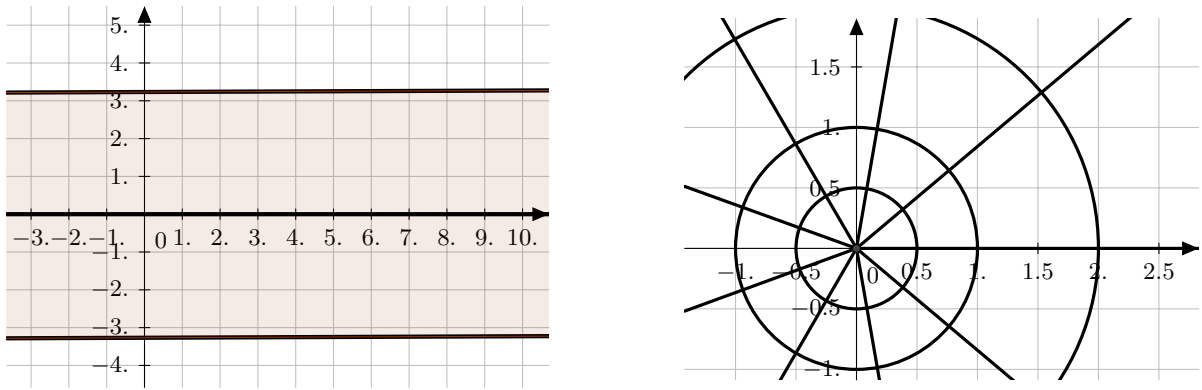


Abbildung 2.17: Die Exponentialfunktion bildet einen horizontalen Streifen der Breite 2π auf die gesamte komplexe Ebene ab. Bilder vertikaler Linien sind dabei Kreise, Bilder horizontaler Linien Strahlen vom Ursprung ins Unendliche

Logarithmusfunktion

Die Logarithmusfunktion ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion. Da die Exponentialfunktion nicht auf ganz \mathbb{C} injektiv ist, führt dies zu einem Problem mit der Definition dieser Funktion und wir müssen uns entweder für einen geeigneten Wertebereich entscheiden oder sind auf die Betrachtung der Funktion auf einer Riemannschen Fläche angewiesen. Für ersteres definieren wir die Umkehrfunktion nur auf der entlang $(-\infty, 0]$ aufgeschnittenen komplexen Ebene und setzen

$$\log z = \ln |z| + i \arg z, \quad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

Die Funktion ist in Abbildung 2.19 dargestellt. Zum Rechnen ist diese Funktion aber unpraktisch, da man den künstlich eingefügten Schnitt beachten muss. So gilt die Formel

$$\sqrt{z} = \exp\left(\frac{1}{2} \log z\right)$$

nur für den Hauptwert der Wurzelfunktion und liefert nicht alle möglichen Werte. Um das zu umgehen, definieren wir die Logarithmusfunktion auf ihrer Riemannschen Fläche, also der Wendelfläche über $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit unendlich vielen Blättern.

Diese richtig definierte Logarithmusfunktion ist eine echte Umkehrfunktion der Exponentialfunktion. Es gilt

$$\log \exp z = z, \quad \exp \log w = w$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ und alle w aus der Riemannschen Fläche der Logarithmusfunktion. Jetzt definiert (auf dieser Fläche)

$$\sqrt[k]{w} = \exp\left(\frac{1}{k} \log w\right)$$

eine Funktion, die nach Umlauf um k Blätter stets wieder dieselben Werte annimmt. Klebt man diese Blätter ebenso zusammen, so ergibt sich die Riemannsche Fläche der Wurzelfunktion.

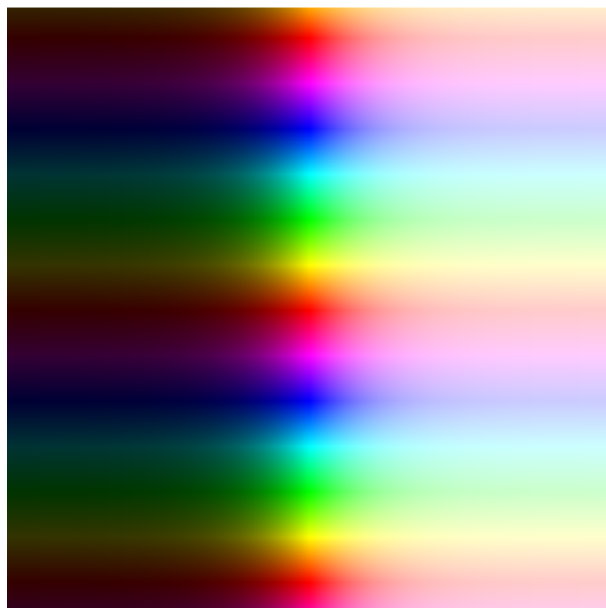


Abbildung 2.18: Die komplexe Exponentialfunktion

Winkelfunktionen

Winkelfunktionen kann man auf zweierlei Weise im komplexen definieren. Einerseits ergibt die bekannte reelle Darstellung

$$\begin{aligned}\cos x &= \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}), \\ \sin x &= \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix})\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ eine Darstellung der Winkelfunktionen auf \mathbb{R} durch die schon analytisch fortgesetzte Exponentialfunktion. Da die Fortsetzung, wenn existent, eindeutig ist, ergibt sich für alle $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\cos z &= \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}, \\ \sin z &= \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}.\end{aligned}$$

Insbesondere gelten auch die Additionstheoreme

$$\begin{aligned}\cos(z + w) &= \cos(z) \cos(w) - \sin(z) \sin(w) \\ \sin(z + w) &= \sin(z) \cos(w) + \cos(z) \sin(w)\end{aligned}$$

für komplexe $z, w \in \mathbb{C}$. Insbesondere folgt aber damit

$$\begin{aligned}\cos(x + iy) &= \cos(x) \cos(iy) - \sin(x) \sin(iy) = \cos(x) \cosh(y) - i \sin(x) \sinh(y) \\ \sin(x + iy) &= \sin(x) \cos(iy) + \cos(x) \sin(iy) = \sin(x) \cosh(y) + i \cos(x) \sinh(y)\end{aligned}$$

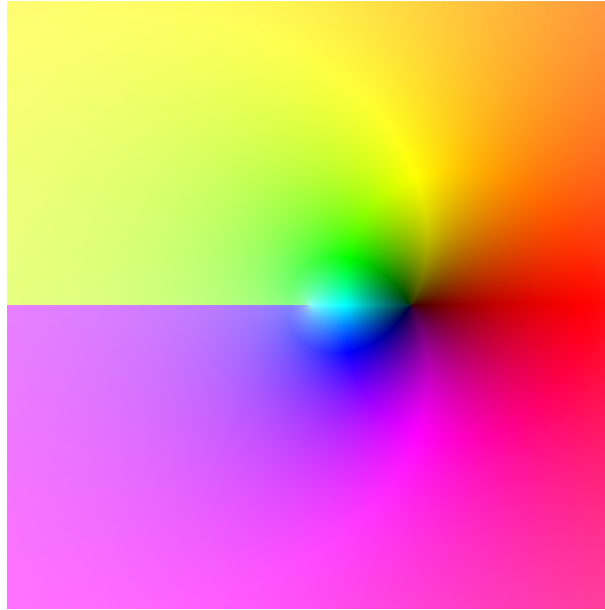


Abbildung 2.19: Die Logarithmusfunktion auf der aufgeschnittenen komplexen Ebene

unter Ausnutzung von

$$\begin{aligned}\cos(iy) &= \frac{\exp(i^2y) + \exp(-i^2y)}{2} = \frac{1}{2} (e^{-y} + e^y) = \cosh(y), \\ \sin(iy) &= \frac{\exp(i^2y) - \exp(-i^2y)}{2i} = \frac{1}{2i} (e^{-y} - e^y) = i \sinh(y).\end{aligned}$$

Die Formeln erlauben es, die komplexe Form der Sinusfunktion genauer zu verstehen. Wir betrachten $z = x + iy$ auf dem Halbstreifen $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und $y \geq 0$ und untersuchen auf diesem

$$\sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y.$$

Die Strecke $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ wird auf das Intervall $[-1, 1]$ abgebildet. Ebenso wird die Linie $-\frac{\pi}{2} + i[0, \infty)$ auf $(-\infty, -1]$ und die Linie $\frac{\pi}{2} + i[0, \infty)$ auf $[1, \infty)$ abgebildet. Dies folgt, da dort $\sin(x) = \pm 1$ und $\cos(x) = 0$ gilt, also der Funktionswert durch $\pm \cosh(y)$ gegeben ist. Auch die Bilder aller anderen horizontalen und vertikalen Linien sind einfach zu bestimmen. Für festes y ergibt sich in der Bildebene

$$\xi_1 \sin x + i \xi_2 \cos x$$

mit $\xi_1 = \cosh y$ und $\xi_2 = \sinh y$, also eine Ellipse wenn x als Variable läuft. Die Brennpunkte der Ellipse sind ± 1 . Entsprechend ergibt sich für festes x

$$\eta_1 \cosh y + i \eta_2 \sinh y$$

mit $\eta_1 = \sin x$ und $\eta_2 = \cos x$. Dies parametrisiert Hyperbeln, wenn y als Variable läuft. Die Brennpunkte der Hyperbel sind wiederum ± 1 .

Insbesondere bildet die komplexe Sinusfunktion den Halbstreifen $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] + i[0, \infty)$ bijektiv auf die obere Halbebene $\mathbb{R} + i[0, \infty)$ ab. Zusammen mit $\sin(\pm\frac{\pi}{2}) = \pm 1$ und der Analytizität charakterisiert diese Abbildungseigenschaft die Sinusfunktion!



Abbildung 2.20: Die beiden Blätter der Wurzelfunktion. Links liegen die Wurzelwerte in der rechten Halbebene, rechts liegen die Wurzelwerte in der linken Halbebene. Die Riemannsche Fläche ergibt sich durch Aufschneiden entlang der Farbgenze und entsprechendem Verkleben mit dem anderen Blatt.

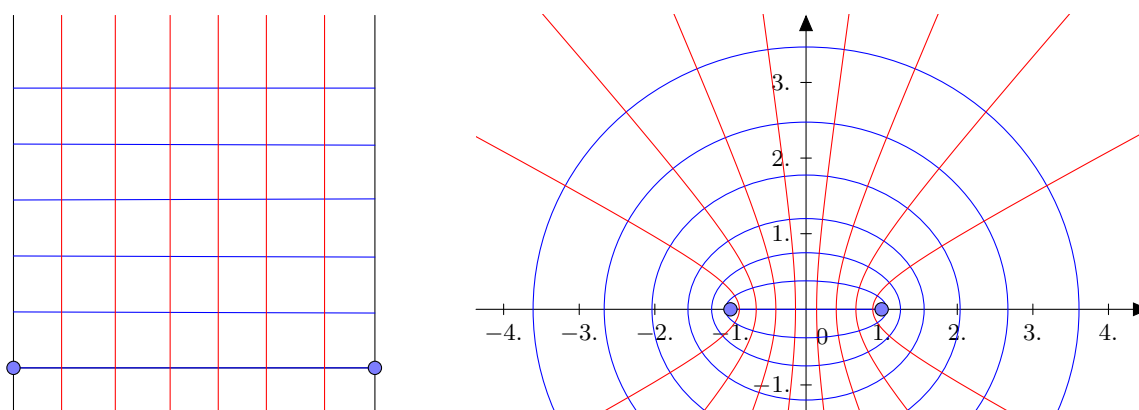


Abbildung 2.21: Abbildungseigenschaften der Sinusfunktion. Die vertikalen roten Linien werden auf Hyperbeln mit Brennpunkten ± 1 und die horizontalen blauen Linien auf Ellipsen mit Brennpunkten ± 1 abgebildet.

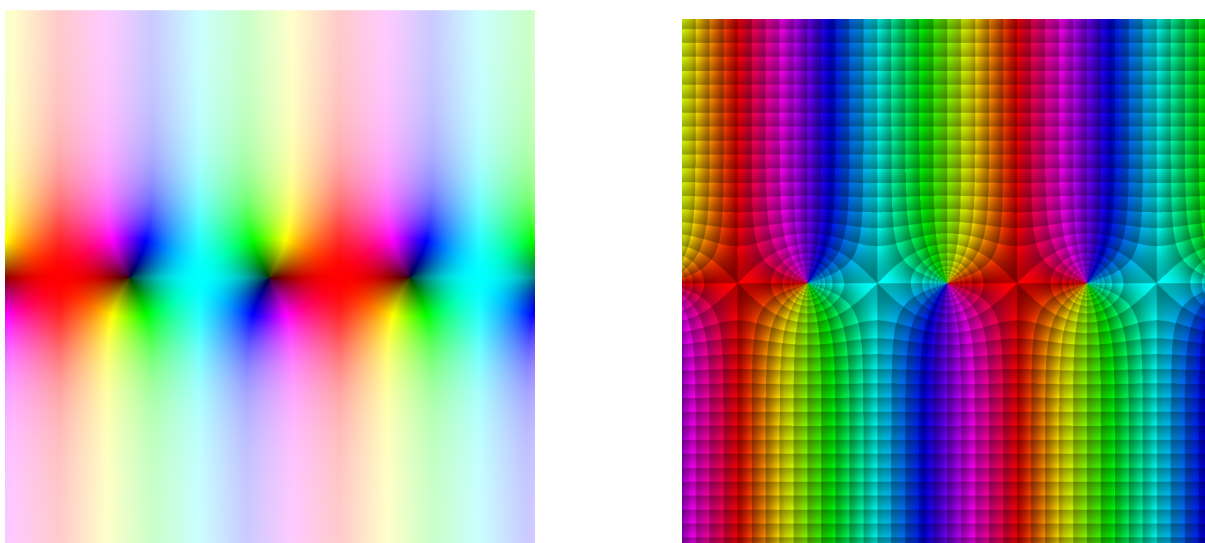


Abbildung 2.22: Sinusfunktion, links gefärbt nach Betrag und Phase und rechts nach Phase und mit konformen Quadraten