Probeklausur
Schulmathematik vom höheren Standpunkt

Aufgabe 1 (8 Punkte)

a) Berechnen Sie eine ganzzahlige Lösung (x, y) der Gleichung $93x + 42y = \mathrm{ggT}(93, 42)$.

b) Welche Zahl besitzt die periodische Kettenbruchdarstellung $[\,1, \overline{4, 1}\,]$.

c) Besitzt die Zahl $\sqrt[3]{3}$ eine periodische Kettenbruchdarstellung?

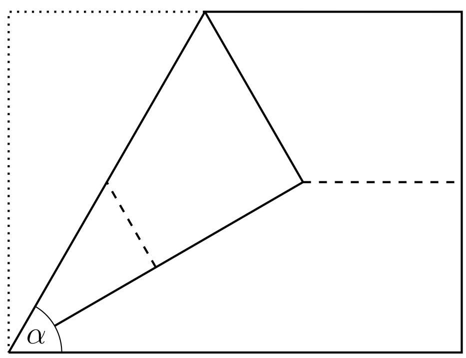
Aufgabe 2 (7 Punkte)

a) Beweisen Sie den folgenden Satz: Ist $P \in \mathbb{Z}[x]$, $P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ und $x = \frac{m}{k} \in \mathbb{Q}$ mit $P(x) = 0$ und $\mathrm{ggT}(m, k) = 1$, dann ist m ein Teiler von a_0 und k ein Teiler von a_n.

b) Beweisen Sie, dass das Polynom P mit $P(x) = x^3 + 3x + 5$ über $\mathbb{Q}$ irreduzibel ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Ein Blatt Papier wird durch Falten parallel zu einer Seite halbiert und wieder auseinandergefaltet. Dann wird eine Ecke einer Seite, die durch das Falten halbiert wurde, so gefaltet, dass die neue Faltlinie durch die andere Ecke derselben Seite geht und die umgefaltete Ecke auf die erste Faltlinie zu liegen kommt (vgl. Skizze). Beweisen Sie, dass für den eingezeichneten Winkel $\alpha = \frac{\pi}{3}$ gilt.



Aufgabe 4 (9 Punkte)

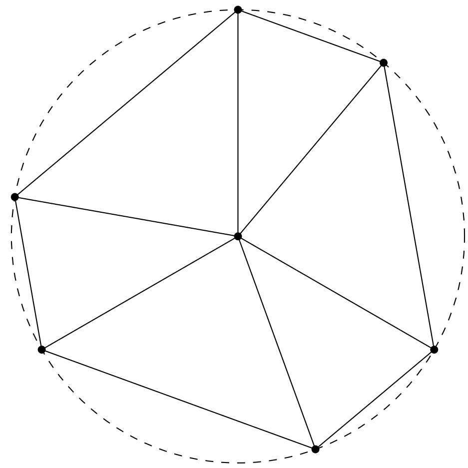
a) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen f, g mit

$$f(x) = \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \quad \text{und} \quad g(x) = \operatorname{arccot}(x) = \left(\cot\big|_{]\,0,\pi\,[}\right)^{-1}(x).$$

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Ableitung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arccot}(x) = -\frac{1}{1+x^2}$ für $x \in \mathbb{R}$ die Reihenentwicklung der Arcuscotangensfunktion um $x_0 = 0$ und ihren Konvergenzbereich.

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Gegeben ist die nebenstehende, in einem Kreis (gestrichelt gezeichnet) einbeschriebene, ebene Figur. Die Innenwinkel liegen beim Mittelpunkt des Kreises und sind abwechselnd 80° und 40°.



a) Zeichnen Sie in die Figur alle Symmetrieachsen ein.

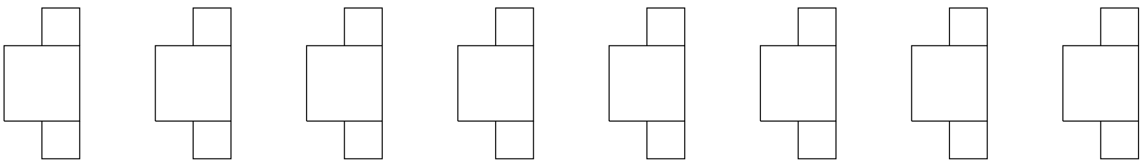
b) Geben Sie die Symmetriegruppe der Figur an.

c) Geben Sie eine zweielementige Teilmenge S der Symmetriegruppe an, die die Symmetriegruppe erzeugt. Weisen Sie nach, dass S die ganze Symmetriegruppe erzeugt.

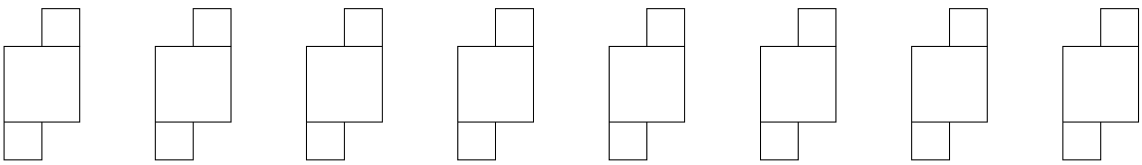
Aufgabe 6 (6 Punkte)

Gegeben sind im Folgenden Friese, deren Muster aus größeren und kleineren jeweils kongruenten Quadraten zusammengesetzt sind. Zeichnen Sie alle vorkommenden Spiegelachsen und Drehzentren sowie den Friesvektor in die abgebildeten Muster ein.

a)



b)



c)