

Schulmathematik — Blatt 4

*Die Natur spricht die Sprache der Mathematik:
die Buchstaben dieser Sprache sind Dreiecke, Kreise und andere mathematische Figuren.
(Galileo Galilei; 1564–1641)*

Hausaufgaben:

4.1. (Symmetriegruppe eines Dreiecks) Betrachten Sie ein regelmäßiges Dreieck mit Eckpunkten A, B und C . Eine *Symmetrie* des Dreiecks $\triangle ABC$ ist eine Bewegung der euklidischen Ebene, die $\triangle ABC$ auf $\triangle ABC$ (als Dreieck, also als Menge von drei Punkten) abbildet.

Im Folgenden wollen wir die Symmetriegruppe $\text{Sym}(\triangle ABC)$ des Dreiecks $\triangle ABC$ beschreiben.

- (a) Finden Sie alle Spiegelachsen des Dreiecks $\triangle ABC$.
- (b) Für einen Punkt P und einen Winkel $\phi \in [0, 2\pi)$ bezeichne (P, ϕ) die Drehung mit Fixpunkt P und den Winkel ϕ . Finden Sie alle Drehungen (P, ϕ) mit $(P, \phi) \in \text{Sym}(\triangle ABC)$.
- (c) Überlegen Sie sich, dass Sie mit (a) und (b) alle Elemente von $\text{Sym}(\triangle ABC)$ gefunden haben.
- (d) Wieviele Elemente besitzt $\text{Sym}(\triangle ABC)$?

4.2. (Symmetriegruppe des Tetraeders) Ziel dieser Aufgabe ist es, die Symmetriegruppe des Tetraeders, zu beschreiben.

- (a) Finden Sie alle Spiegelebenen des Tetraeders. Skizzieren Sie einige dieser Ebenen.
- (b) Finden Sie alle Drehachsen und Drehwinkel des Tetraeders. Skizzieren Sie exemplarisch.
- (c) Überlegen Sie sich, wie man durch Komposition von möglichst wenigen verschiedenen Drehungen und Spiegelungen alle Symmetrien des Tetraeders erzeugen kann.
- (d) Wieviele Elemente besitzt die Symmetriegruppe des Tetraeders?

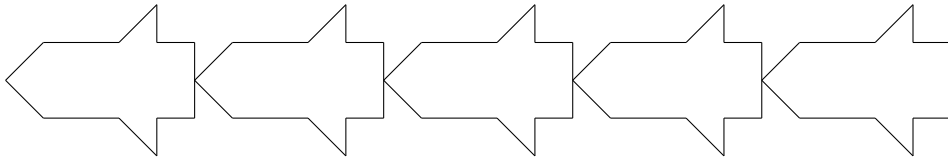
Zusatzaufgaben:

4.3. (Symmetriegruppe eines n -Ecks) Ziel dieser Aufgabe ist es $D(n)$, die Symmetriegruppe des regelmäßigen n -Ecks, zu beschreiben.

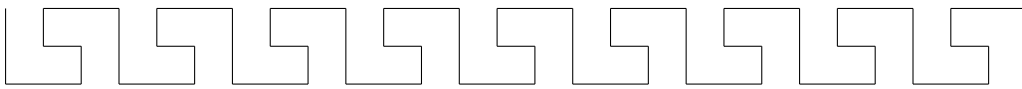
- (a) Finden Sie alle Drehungen in $D(n)$. Zu welcher (abstrakten) Gruppe ist die Menge dieser Drehungen isomorph?
- (b) Finden Sie alle Spiegelachsen des regelmäßigen n -Ecks.
- (c) Finden Sie eine möglichst kleine Menge an Drehungen und Spiegelungen, die die Gruppe $D(n)$ erzeugen.

4.4. (Friesgruppen) Zeichnen Sie alle vorkommenden Spiegelachsen und Drehzentren sowie die kürzeste Verschiebung in die abgebildeten Muster ein. Untersuchen Sie, ob es sich um ein Fries handelt, ob es Gleitspiegelungen enthält und bestimmen Sie gegebenenfalls die zugehörige Friesgruppe.

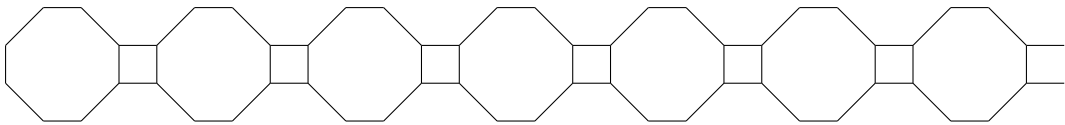
(a)



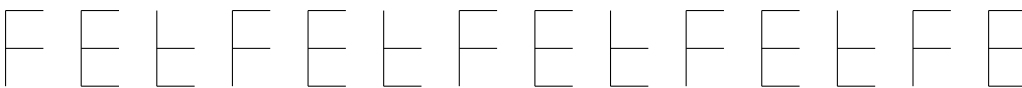
(b)



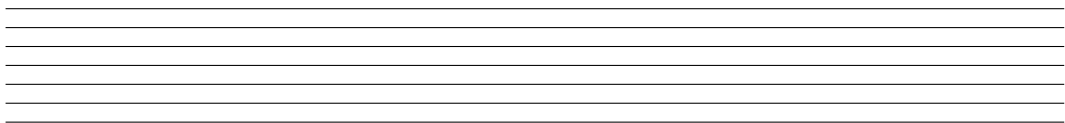
(c)



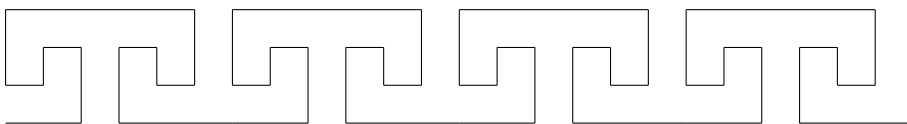
(d)



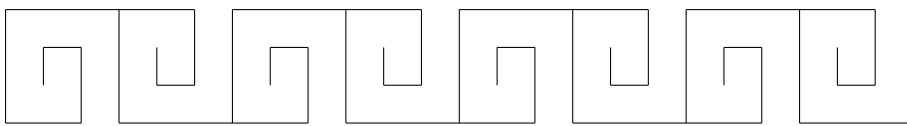
(e)



(f)



(g)



(h)

