Schulmathematik — Blatt 3

Wer die Geometrie begreift, vermag in dieser Welt alles zu verstehen.
(Galileo Galilei; 1564–1642)

Hausaufgaben:

3.1. Stellen Sie für $n \geq 3$ eine Formel für die Innenwinkelsumme im (sich nicht überschlagenden) n-Eck auf und beweisen Sie diese. (Hinweis: Induktion über n)

3.2. Es gibt verschiedene Möglichkeiten die Zahl π zu berechnen, so nutzte Archimedes einem Kreis ein- und umgeschriebene $3{\cdot}2^n$-Ecke zur Bestimmung von Näherungen. Eine andere, aber bessere Idee soll hier verfolgt wergen.

(a) Zeigen Sie, dass
$$(5+\mathrm{i})^4(239-\mathrm{i}) = 114244\,(1+\mathrm{i})$$
gilt.

(b) Folgern Sie aus **(a)** die Identität
$$\frac{\pi}{4} = 4\operatorname{arccot} 5 - \operatorname{arccot} 239.$$

(c) Zeigen Sie, dass die Taylorreihe des Arcustangens durch
$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \qquad |x| < 1,$$
und damit die Laurentreihe des Arcuscotangens
$$\operatorname{arccot} x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{-2k-1}}{2k+1}, \qquad |x| > 1,$$
gegeben ist.

(d) Nutzen Sie **(c)** in der Identität von **(b)** um π auf 5 Nachkommastellen zu berechnen. Wieviele Terme benötigt man dafür?
(1706 hat John Machin damit 100 Nachkommastellen bestimmt.)

(e) Was ergibt sich aus
$$\begin{aligned}&(57+\mathrm{i})^{44}(239+\mathrm{i})^7(682-\mathrm{i})^{12}(12943+\mathrm{i})^{24}\\
&= 28443813229566464959121350868488998532782432775233378650470299001276631906\ldots\\
&\quad \ldots1997533720733712584708596049031353560652420096055773111910190827467924412\ldots\\
&\quad \ldots370187114973418829322326928377151489257812500000000000000000000000000000000\ldots\\
&\quad \ldots0000000\,(1+\mathrm{i})\end{aligned}$$
statt der in **(a)** verwendeten Identität? Wieviele Terme würde man diesmal für 10 Nachkommastellen von π höchstens benötigen?

3.3. Bestimmen Sie die exakten Werte von $\sin x$ und $\cos x$ für

(a) $x \in \{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\}$ durch Verwendung geeigneter geometrischer Figuren;

(b) $x \in \{\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{12}\}$ unter Ausnutzung der Additionstheoreme und der Werte aus **(a)**;

(c) $x = \frac{\pi}{5}$.

Zusatzaufgaben:

3.4. Beweisen Sie ausgehend von der Innenwinkelsumme des Dreiecks

(a) den Satz des Thales:

Ein Dreieck $\triangle ABC$ ist genau dann rechtwinklig mit rechtem Winkel bei C, wenn C auf dem Kreis mit Durchmesser $\overline{AB}$ liegt.

(b) den Zentri-Peripheriewinkelsatz:

Seien A, B, C paarweise verschiedene Punkte auf einem Kreis mit Mittelpunkt M. Dann ist der Peripheriewinkel $\angle BCA$ genau halb so groß wie der Zentriwinkel $\angle BMA$.

(c) den Peripheriewinkelsatz:

Seien A, B, C, C' paarweise verschiedene Punkte der Ebene. Dann liegt C' genau dann auf dem Kreis durch die Punkte A, B, C, wenn $\angle BCA = \angle BC'A$ gilt.