Schulmathematik — Blatt 2

In jeder reinen Naturlehre ist nur soviel an eigentlicher Wissenschaft enthalten,
als Mathematik in ihr angewandt werden kann.
(Immanuel Kant; 1724 – 1804)

Hausaufgaben:

2.1. (Quadratwurzeln als Kettenbrüche) Finden Sie für folgende reelle Zahlen Darstellungen als periodische Kettenbrüche:

(a) $\sqrt{3}$, **(b)** $\sqrt{5}$, **(c)** $\sqrt{7}$.

2.2. (Eulersche Zahl) Die Eulersche Zahl e besitzt die Kettenbruchsentwicklung

$$\mathrm{e} = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, 1, 12, 1, 1, 14, \ldots].$$

Bestimmen Sie damit die beste rationale Näherung an e mit einem Nenner kleiner als 1000.

2.3. (Algebraische Zahlen) Bezeichne $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists p \in \mathbb{Q}[X] : p(x) = 0\}$ die Menge der reellen algebraischen Zahlen.

(a) Sei $\alpha \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie, dass $-\alpha \in \mathcal{A}$.

Was die restlichen Operationen angeht, möchten wir uns hier auf Beispiele beschränken.

(b) Konstruieren Sie $p \in \mathbb{Q}[x]$ mit $p(\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3}) = 0$.

(c) Konstruieren Sie $s \in \mathbb{Q}[x]$ mit $s(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = 0$.

(d) Konstruieren Sie $q \in \mathbb{Q}[x]$ mit $q\left(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right) = 0$.

Allgemein gilt, dass $\mathcal{A}$ einen Teilkörper von $\mathbb{R}$ bildet. Dies folgt aus der Theorie der algebraischen Körpererweiterungen, die üblicherweise in einer Vorlesung über Algebra behandelt wird.

2.4. (Cardano's Lösungsformel) Gegeben sei eine Gleichung dritten Grades

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Subsitution $x = z - \frac{a}{3}$ auf die Gleichung in reduzierter Form

$$z^3 - pz - q = 0$$

führt und bestimmen Sie p und q in Abhängigkeit von a, b und c.

(b) Angenommen, $z = u + v$ mit $p = 3uv$ und $q = u^3 + v^3$. Zeigen Sie, dass $z^3 - pz - q = 0$. Warum sind bei dieser Wahl von u und v die beiden Zahlen u^3 und v^3 die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$t^2 - qt + \frac{p^3}{27} = 0?$$

Wie sind u und v aus den Nullstellen dieses Polynoms zu bestimmen, um auch wirklich Lösungen der Ausgangsgleichung zu erhalten?

(c) Wenden Sie das gerade erhaltene Lösungsverfahren an, um

$$x^3 - 3x - 1 = 0$$

zu lösen.

Zusatzaufgaben:

2.5. Worin genau besteht der Fehler in folgendem Beweis?

Es gilt

$$2 = \frac{2}{3-2} = \frac{2}{3-\frac{2}{3-2}} = \frac{2}{3-\frac{2}{3-\frac{2}{3-2}}} = \frac{2}{3-\frac{2}{3-\frac{2}{3-\frac{2}{3-2}}}} = \cdots = \frac{2}{3-\frac{2}{3-\frac{2}{3-\frac{2}{3-\dots}}}},$$

$$1 = \frac{2}{3-1} = \frac{2}{3-\frac{2}{3-1}} = \frac{2}{3-\frac{2}{3-\frac{2}{3-1}}} = \frac{2}{3-\frac{2}{3-\frac{2}{3-\frac{2}{3-1}}}} = \cdots = \frac{2}{3-\frac{2}{3-\frac{2}{3-\frac{2}{3-\dots}}}},$$

also insbesondere auch $2 = 1$.