

Apl.-Prof. Dr. Jens Wirth
Institut für Analysis, Dynamik und Modellierung
Universität Stuttgart

Partielle Differentialgleichungen II

1. Auflage

Stuttgart, den 6. April 2019

...we're all mad here.
(Cheshire cat)

Gegenstand der Vorlesung sind ausgewählte Aspekte der Analysis partieller Differentialgleichungen mit starkem Bezug zur Operatortheorie. In einem ersten Kapitel werden Resultate zu Grundtypen partieller Differentialgleichungen zusammengefasst. Darauf aufbauend werden Aspekte der Streutheorie sowohl im zeitabhängigen wie im stationären Fall diskutiert.

Vorausgesetzt werden elementare Kenntnisse zu partiellen Differentialgleichungen, wie sie in einer Vorlesung *Partielle Differentialgleichungen I* oder *Einführung in die Numerik partieller Differentialgleichungen* vermittelt werden. Darüberhinaus sind Kenntnisse der *Funktionalanalysis* unabdingbar. Funktionenräume (L^p -Räume, Sobolevräume) werden teilweise als bekannt vorausgesetzt, notwendige Resultate werden aber mit Quellenangaben zitiert. Für einige Abschnitte werden Kenntnisse der *Funktionentheorie* benötigt.

Zum Aufbau der Vorlesung: Wir werden parallel sowohl die abstrakte, rein funktionalanalytisch aufgebaute Theorie behandeln, als auch konkret für partielle Differentialgleichungen nachrechnen, wie sich die abstrakte Theorie anwenden lässt. Dieser Zweiteilung entspricht auch der strukturelle Aufbau von Skript und Vorlesung; Kapitel mit abstrakten und konkreten Inhalten wechseln sich ab.

Inhaltsverzeichnis

1	Randwertprobleme	13
1.1	Notation, Räume und Operatoren	13
1.2	Formen	15
1.3	Sobolevräume	19
1.4	Dirichlet- und Neumannprobleme	22
1.5	Der Kirchhoff-Laplace auf einem Graphen	25
2	Evolutionsprobleme und Operatorhalbgruppen	27
2.1	Halbgruppen und ihre Erzeuger	27
2.2	Hauptsätze der Halbgruppentheorie	29
2.3	Erste Beispiele	33
3	Wellengleichungen	37
3.1	Energieerhaltung und Abhängigkeitsgebiete	37
3.2	Lösbarkeit	40
3.3	Zerlegung in ebene Wellen	42
4	Streutheorie nach Lax und Phillips	45
4.1	Notation und Annahmen	45
4.2	Funktionale Modelle im diskreten Modellfall	46
4.3	Funktionale Modelle im kontinuierlichen Fall	48
4.4	Die Streuabbildung im funktionalen Modell	52
4.5	Die Lax–Phillips-Halbgruppe	55
5	Anwendungen	57
5.1	Billiards	57
5.2	Wellengleichungen in Außengebieten	61
5.3	Kirchhoff-Graphen	66
6	Stationäre Streutheorie	73
6.1	Spektraldarstellungen auf Kirchhoffgraphen und Berechnung der Streumatrix	73
6.2	Jostfunktionen und Marchenko-Gleichung	80
6.3	Wellengleichungen auf Außengebieten und Berechnung der Streumatrix	88
7	Abstrakte Streutheorie	95
7.1	Spektralsätze	95
7.2	Streutheorie für zwei unitäre Gruppen	99

Vorrede

Streutheorie beschäftigt sich mit der grundlegenden Fragestellung, wie Änderungen der Gebietsgeometrie oder von Koeffizienten das Langzeitverhalten von Lösungen von Evolutionsproblemen beeinflusst. Das soll einleitend an drei Modellbeispielen kurz erläutert werden; im Verlauf der Vorlesung werden auf diese zurückkommen und die entsprechende zugrundeliegende Theorie nachliefern.

1 (Reflexion und Beugung von Wellen an Hindernissen). Sei $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^3$ beschränkt und abgeschlossen (und besitze der Einfachheit halber glatten Rand $\partial\mathcal{O}$). Wir interessieren uns für die Ausbreitung von (Schall-) Wellen in $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{O}$ und insbesondere für deren Interaktion mit dem Rand $\partial\mathcal{O}$ des Hindernisses.

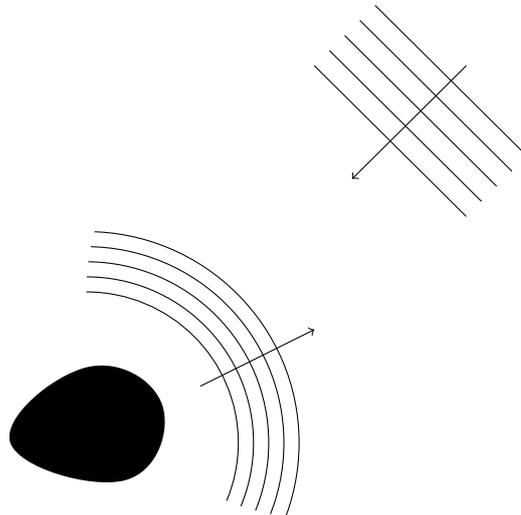


Abbildung 0.1: Reflektierte Wellen an einem Hindernis

Mathematisch modelliert wird die Situation durch eine partielle Differentialgleichung, die *Wellengleichung*

$$\begin{cases} \partial_t^2 u = \Delta u, & \text{für } t \in \mathbb{R} \text{ und } x \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{O}, \\ \partial_\nu u(t, x) = 0, & \text{für } t \in \mathbb{R} \text{ und } x \in \partial\mathcal{O}, \\ u(0, x) = u_0, \partial_t u(0, x) = u_1, & \text{für } x \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{O}. \end{cases} \quad (0.1)$$

Dabei beschreiben u_0 und u_1 die Situation zum Ausgangszeitpunkt $t = 0$ und die Randbedingung ist für die Reflexion der Wellen am Rand verantwortlich. Gefordert wird hier das Verschwinden der (äußeren) Normalenableitung.

Solange wir weit genug vom Hindernis \mathcal{O} entfernt sind, verhalten sich Lösungen dieser Gleichung wie Lösungen der auf dem Ganzraum betrachteten Wellengleichung. Grund dafür ist die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wellen. Will man also freie und gestörte Wellen

vergleichen, so untersucht man das Langzeitverhalten der Lösungen und sucht nach Wellenoperatoren \mathcal{W}_\pm , welche angewandt auf die Anfangsdaten $(u_0, u_1)^\top$ zugeordnete Anfangsdaten der freien Wellengleichung $\mathcal{W}_\pm(u_0, u_1)^\top$ liefern, so dass sich die Wellen außerhalb einer großen Kugel und für hinreichend große Zeiten gleich verhalten. Die Konstruktion von Wellenoperatoren \mathcal{W}_\pm und dem Streuoperator $\mathcal{S} = \mathcal{W}_+ \mathcal{W}_-^{-1}$ bilden den Kern der *zeitabhängigen Streutheorie*.

2. Verwandt zu dem gerade erwähnten Problem sind Situationen in denen Wellen gebrochen werden. Dazu betrachten wir ein Medium mit variabler Dichte beziehungsweise Leitfähigkeit und lösen das entsprechende Problem für die Gleichung

$$\partial_t^2 u = \operatorname{div}(A(x)\nabla u), \quad \text{für } t \in \mathbb{R} \text{ und } x \in \mathbb{R}^3, \quad (0.2)$$

mit einer ortsabhängigen matrixwertigen Koeffizientenfunktion $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Wir nehmen dabei an, dass $A(x) = I$ für $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{O}$ gilt.

Zumindest auf formalen Level liefert eine Fourier-Laplacetransformation der Lösung in der t -Variablen

$$\tilde{u}(\lambda, x) = \int_0^\infty e^{-i\lambda t} u(t, x) dt \quad (0.3)$$

eine auf $\operatorname{Im} \lambda < 0$ holomorphe Funktion \tilde{u} , welche die *Helmholtzgleichung*

$$\operatorname{div}(A(x)\nabla \tilde{u}) + \lambda^2 \tilde{u} = u_1 + i\lambda u_0 \quad (0.4)$$

löst. Das Lösungsverhalten dieser Gleichung und insbesondere der Randwerte für $\operatorname{Im} \lambda \rightarrow 0-$ ist zentral für die *stationäre Streutheorie*.

3 (Netzwerke und Graphen). Als drittes Beispiel betrachten wir die Ausbreitung elektrischer Wellen in aus Leitern bestehenden Netzwerken. Hier werden wir zur Wellengleichung für den Kirchhoff-Laplace und zur zugeordneten Helmholtzgleichung geführt. Die zugrundeliegenden Gleichungen sind die eindimensionalen Analoga der oben genannten,

$$\partial_t^2 u = \partial_x^2 u, \quad \text{auf jeder Kante,} \quad (0.5)$$

neu sind die an den Knoten zu fordernden Randbedingungen

$$\begin{cases} u(t, \cdot) \text{ ist stetig in jedem Knoten,} \\ \text{die Summe der äußeren Ortsableitungen ist in jedem Knoten Null.} \end{cases} \quad (0.6)$$

Wiederum stellt sich die Frage, wie in das Netz einlaufende Wellen auf aus dem Netz herauslaufende abgebildet werden.

4. Das letzte Beispiel vereinfacht sich dramatisch, wenn man es für genau eine unendliche Kante aufschreibt. Um nichttrivial zu sein, nehmen wir an, dass sich auf einem Teilstück ein variables Potential befindet und betrachten

$$\partial_t^2 u = \partial_x^2 u + V(x)u, \quad \text{für } t \geq 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}, \quad (0.7)$$

für ein kompakt getragenes Potential $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\operatorname{supp} V \subset [-1, 1]$. Außerhalb von $[-1, 1]$ entspricht die Gleichung der freien Wellengleichung $\partial_t^2 u = \partial_x^2 u$ mit der durch die d'Alembertsche Formel

$$u(t, x) = \begin{cases} f_+(t+x) + f_-(t-x), & x < -1, \\ g_+(t+x) + g_-(t-x), & x > 1, \end{cases} \quad (0.8)$$

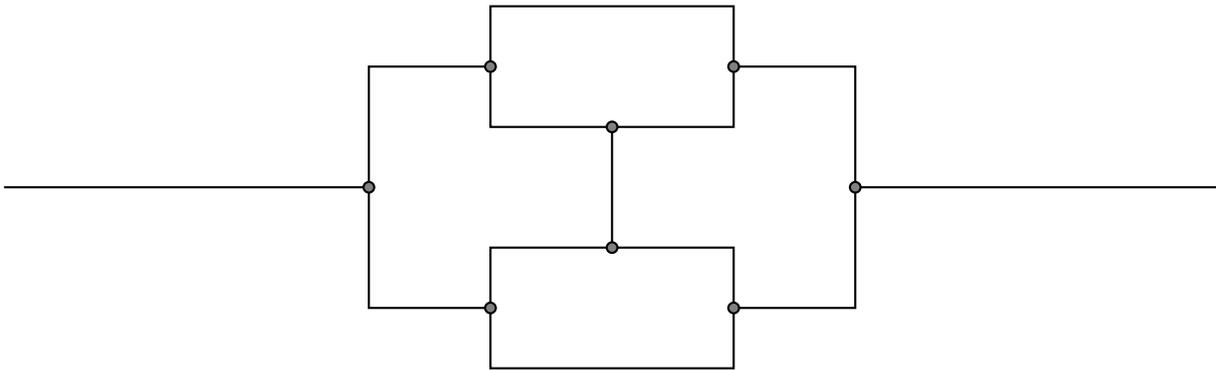


Abbildung 0.2: Kirchhoffsche Netze

gegebenen Lösung. Die Lösungen setzen sich also jeweils aus einer nach links laufenden und einer nach rechts laufenden Welle zusammen. Um den Einfluss von V auf die Wellen zu untersuchen, nehmen wir an, dass für $t \leq 0$ die Lösung u von der Form

$$u(t, x) = F(t + x), \quad t \leq 0, \quad (0.9)$$

mit einer in $(-\infty, -1)$ getragenen Funktion F ist, und fragen nach der Darstellung der Lösungen zum Zeitpunkt $t > 0$. Diese muss von der Form (0.8) sein, es gilt also

$$F = f_+, \quad f_-|_{(1, \infty)} = 0, \quad g_+|_{(1, \infty)} = 0, \quad g_- = 0. \quad (0.10)$$

Die Zuordnungen $F \mapsto g_+$ und $F \mapsto f_-$ sind dabei linear und invariant unter Zeittranslationen, also von der Form

$$g_+(t) = \int_{-\infty}^{-1} \tau(t - s)F(s) ds, \quad f_- = \int_{-\infty}^{-1} \rho(t - s)F(s) ds \quad (0.11)$$

mit einem (im allgemeinen allerdings distributionellen) *Transmissionskern* τ und einem *Reflexionskern* ρ .

Im Prinzip ergeben sich zwei Aufgabenstellungen. Einerseits kann man ausgehend vom Potential $V(x)$ versuchen, die Kerne τ und ρ zu bestimmen. Dieses *direkte Problem* besteht im wesentlichen im Lösen der zugrundeliegenden gewöhnlichen Differentialgleichung. Das zugehörige *inverse Streuproblem* versucht ausgehend von τ und ρ das Potential V zu rekonstruieren.

5. Verwandt zur inversen Streutheorie ist die Frage nach der Existenz von Materialparametern oder Potentialen zu vorgegebener Streuabbildung. So kann man im Falle der Nichteindeutigkeit des inversen Streuproblems nach der Konstruktion von unsichtbaren Hindernissen oder Potentialen fragen.

1 Randwertprobleme

1.1 Notation, Räume und Operatoren

1.1.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Weiter bezeichne $C_c^\infty(\Omega)$ die Menge der glatten Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ mit kompaktem Träger $\text{supp } f \Subset \Omega$ und für solche Funktionen bezeichne

$$\|f\|^2 = \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \quad (1.1)$$

die L^2 -Norm sowie

$$|f|_{(1)}^2 = \int_{\Omega} |\nabla f(x)|^2 dx, \quad \|f\|_{(1)}^2 = \|f\|^2 + |f|_{(1)}^2 \quad (1.2)$$

die erste *Sobolev-Seminorm* und die erste *Sobolevnorm*. Die Vervollständigungen von $C_c^\infty(\Omega)$ bezüglich dieser Normen werden als $L^2(\Omega)$ und $H_0^1(\Omega)$ bezeichnet. Nach Konstruktion sind beides Hilberträume.

1.1.2. Da $\|f\| \leq \|f\|_{(1)}$ gilt, ergibt sich eine stetige Einbettung

$$\iota : H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega) \quad (1.3)$$

mit dichtem Bild. Durch Adjungieren erhält man daraus die ebenso injektive Abbildung

$$\iota^* : L^2(\Omega) \rightarrow (H_0^1(\Omega))' =: H^{-1}(\Omega). \quad (1.4)$$

Lemma. Die Räume $(H_0^1(\Omega), L^2(\Omega), H^{-1}(\Omega))$ bilden zusammen mit den Einbettungen ι und ι^* ein Gelfand-Tripel.

Beweis. Die Abbildung ι ist injektiv, stetig und hat ein dichtes Bild. Damit ist ihre Adjungierte ι^* injektiv (da $\iota^*f = \iota^*g$ ja gerade $(f, \iota h) = (g, \iota h)$ für alle $h \in H_0^1(\Omega)$ und aufgrund der Dichtheit $f = g$ impliziert) und besitzt ein dichtes Bild (da für h aus dem Annihilator von $\text{ran } \iota^*$ schon $0 = (\iota h, f)$ für alle $f \in L^2(\Omega)$ gelten muss und damit $h = 0$ folgt). \square

Wir werden im weiteren stets das L^2 -Innenprodukt nutzen, um die Dualität zwischen $H_0^1(\Omega)$ und $H^{-1}(\Omega)$ darzustellen. Dies entspricht der Interpretation von Elementen von $H^{-1}(\Omega)$ als speziellen Distributionen.

1.1.3. Die für glatte Funktionen definierten partiellen Ableitungen ∂_j , $j = 1, \dots, n$, lassen sich zu stetigen Operatoren

$$\partial_j : H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega) \quad (1.5)$$

fortsetzen. Ihre Adjungierten sind entsprechend Operatoren

$$\partial_j^* : L^2(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega), \quad (1.6)$$

diese stimmen auf $C_c^\infty(\Omega)$ mit partiellen Ableitungen überein, es gilt

$$\partial_j^* f = -\partial_j f \quad \text{für } f \in C_c^\infty(\Omega) \quad (1.7)$$

und damit $\partial_j^*|_{H_0^1(\Omega)} = -\partial_j$.

Aus den so definierten partiellen Ableitungen lassen sich Differentialoperatoren zusammensetzen. Seien dazu $a_{i,j}, b_j, \tilde{b}_j, c \in L^\infty(\Omega)$. Da Multiplikation mit beschränkten Funktionen stetig auf $L^2(\Omega)$ ist, liefert

$$P = \sum_{i,j=1}^n \partial_i^* \circ a_{i,j} \circ \partial_j + \sum_{j=1}^n (\iota^* \circ b_j \circ \partial_j + \partial_j^* \circ \tilde{b}_j \circ \iota) + \iota^* \circ c \circ \iota \quad (1.8)$$

einen stetigen Operator

$$P : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega). \quad (1.9)$$

Wir schreiben formal (und einfacher)

$$P = - \sum_{i,j=1}^n \partial_i a_{i,j}(x) \partial_j + \sum_{j=1}^n (b_j(x) \partial_j - \partial_j \tilde{b}_j(x)) + c(x) \quad (1.10)$$

für den *Differentialoperator* und verwenden weiterhin die Notation

$$P_\bullet = - \sum_{i,j=1}^n \partial_i a_{i,j}(x) \partial_j \quad (1.11)$$

für seinen *Hauptteil*.

1.1.4. Wir sagen P ist *gleichmäßig elliptisch*, falls die Abschätzung

$$\sum_{i,j=1}^n \bar{\xi}_i a_{i,j}(x) \xi_j \geq c_0 |\xi|^2 \quad (1.12)$$

für ein $c_0 > 0$ gleichmäßig in $\xi \in \mathbb{C}^n$ und $x \in \Omega$ gilt. Ersetzt man ξ_j jeweils durch $\partial_j u(x)$ für eine Funktion $u \in C_c^\infty(\Omega)$, so erhält man die *Elliptizitätsabschätzung*

$$\sum_{i,j} \int_{\Omega} a_{i,j}(x) \partial_j u(x) \overline{\partial_i u(x)} dx \geq c_0 \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx. \quad (1.13)$$

Diese gilt nach stetiger Fortsetzung für alle $u \in H_0^1(\Omega)$ und somit folgt

$$(P_\bullet u, u) \geq c_0 |u|_{(1)}^2. \quad (1.14)$$

Die Abschätzung ist zentral für die Invertierbarkeit der Operatoren $P - \lambda^2 : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ für $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\operatorname{Im} \lambda|$ groß genug.

1.2 Formen

1.2.1. Wir betrachten das Ganze etwas abstrakter. Sei $(\mathbf{V}, \mathbf{H}, \mathbf{V}')$ ein Gelfand-Tripel bestehend aus Hilberträumen \mathbf{H} und \mathbf{V} mit dichter Einbettung $\mathbf{V} \hookrightarrow \mathbf{H}$ und $\mathbf{H} \hookrightarrow \mathbf{V}'$. Wir denken uns wiederum die Dualität zwischen \mathbf{V} und \mathbf{V}' über das \mathbf{H} -Innenprodukt realisiert. Eine (sesquilineare) *Form* ist eine stetige Abbildung,

$$a : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{C} \quad (1.15)$$

welche

$$a(u + \lambda v, w) = a(u, w) + \lambda a(v, w), \quad a(u, v + \lambda w) = a(u, v) + \bar{\lambda} a(u, w), \quad (1.16)$$

zusammen mit der Stetigkeitsbedingung

$$|a(u, v)| \leq C \|u\|_{\mathbf{V}} \|v\|_{\mathbf{V}} \quad (1.17)$$

für $u, v, w \in \mathbf{V}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ erfüllt. Die Form ist durch ihre Werte für zwei gleiche Argumente bestimmt.

1.2.2 Lemma. *Es gilt die Polarisationsidentität*

$$4a(u, v) = a(u + v, u + v) - a(u - v, u - v) + ia(u + iv, u + iv) - ia(u - iv, u - iv) \quad (1.18)$$

Beweis. Es genügt, die Identität nachzurechnen. Es gilt

$$\begin{aligned} & a(u + v, u + v) - a(u - v, u - v) + ia(u + iv, u + iv) - ia(u - iv, u - iv) \\ &= a(u, u) + a(u, v) + a(v, u) + a(v, v) - a(u, u) + a(u, v) + a(v, u) - a(v, v) \\ & \quad + ia(u, u) + a(u, v) - a(v, u) - ia(v, v) - ia(u, u) + a(u, v) - a(v, u) + ia(v, v) \\ &= 2a(u, v) + 2a(v, u) + 2a(u, v) - 2a(v, u) = 4a(u, v) \end{aligned} \quad (1.19)$$

und damit die Behauptung. □

1.2.3. Formen stehen in direktem Zusammenhang zu Operatoren. Ist $A : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}'$ stetig, so definiert

$$a(u, v) = (Au, v) \quad (1.20)$$

eine Form $a : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{C}$. Andererseits gibt es zu jeder sesquilinearen Form a genau einen Operator $A : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}'$ mit (1.20). Als Beispiel nehme man den Differentialoperator P_{\bullet} auf $H_0^1(\Omega)$ definiert in (1.11) mit Form

$$p_{\bullet}(u, v) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{i,j}(x) \partial_j u(x) \overline{\partial_i v(x)} dx. \quad (1.21)$$

Viele Eigenschaften eines Operators sind einfach durch seine Form charakterisierbar.

1.2.4. Wir sagen, die Form sei *koerziv* bezüglich \mathbf{V} , falls

$$\operatorname{Re} a(u, u) \geq c_0 \|u\|_{\mathbf{V}}^2 \quad (1.22)$$

für eine Konstante $c_0 > 0$ und alle $u \in \mathbf{V}$ erfüllt ist.

1.2.5 Satz (Lax–Milgram). *Angenommen, die Form a ist koerziv. Dann existiert zu jedem $F \in \mathbf{V}'$ ein eindeutig bestimmtes $u \in \mathbf{V}$ mit*

$$a(u, v) = (F, v) \quad (1.23)$$

für alle $v \in \mathbf{V}$. Die Zuordnung $A^{-1} : \mathbf{V}' \ni F \rightarrow u \in \mathbf{V}$ ist linear und beschränkt,

$$\|u\|_{\mathbf{V}} \leq c_0^{-1} \|F\|_{\mathbf{V}'}. \quad (1.24)$$

Beweis. Aufgrund der Koerzivität gilt

$$c_0 \|u\|_{\mathbf{V}}^2 \leq \operatorname{Re} a(u, u) = \operatorname{Re} (Au, u) \leq \|Au\|_{\mathbf{V}'} \|u\|_{\mathbf{V}} \quad (1.25)$$

und damit

$$c_0 \|u\|_{\mathbf{V}} \leq \|Au\|_{\mathbf{V}'}. \quad (1.26)$$

Also ist der zugeordnete Operator $A : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}'$ injektiv und besitzt ein abgeschlossenes Bild. Angenommen, er wäre nicht surjektiv. Dann gäbe es ein $v \in \mathbf{V} \setminus \{0\}$ mit $0 = (Au, v) = a(u, v)$ für alle $u \in \mathbf{V}$. Speziell für $u = v$ folgt damit aber

$$0 < \|v\|_{\mathbf{V}}^2 \leq c_0^{-1} \operatorname{Re} a(v, v) = 0. \quad (1.27)$$

Widerspruch! □

1.2.6 Beispiel. Wir betrachten als Beispiel die Situation aus Kapitel 1.1, also ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ zusammen mit den Räumen $\mathbf{H} = L^2(\Omega)$ und $\mathbf{V} = H_0^1(\Omega)$. Der Dualraum $\mathbf{V}' = H^{-1}(\Omega)$ ist nach Definition (und Interpretation über das L^2 -Innenprodukt) ein Raum von Distributionen auf Ω .

Zugeordnet zu Funktionen $a_{i,j}, b_j, \tilde{b}_j, c \in L^\infty(\Omega)$ betrachten wir die Form

$$\begin{aligned} p(u, v) &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{i,j}(x) \partial_j u(x) \overline{\partial_i v(x)} \, dx \\ &+ \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \left(\overline{v(x)} b_j(x) \partial_j u(x) + u(x) \tilde{b}_j(x) \overline{\partial_j v(x)} \right) \, dx \\ &+ \int_{\Omega} c(x) u(x) \overline{v(x)} \, dx \end{aligned} \quad (1.28)$$

für $u, v \in H_0^1(\Omega)$. Zugeordnet zu dieser Form ist der Differentialoperator $P : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$. Sein Hauptteil P_\bullet entspricht der Form

$$p_\bullet(u, v) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{i,j}(x) \partial_j u(x) \overline{\partial_i v(x)} \, dx, \quad (1.29)$$

die Annahme der gleichmäßigen Elliptizität

$$p_\bullet(u, u) \geq c_0 |u|_{(1)}^2 \quad (1.30)$$

gerade der Koerzivität der $1 + P_\bullet$ zugeordneten quadratischen Form

$$\|u\|^2 + p_\bullet(u, u) \geq \min\{1, c_0\} \|u\|_{(1)}^2 \quad (1.31)$$

bezüglich des Raumes $H_0^1(\Omega)$. Also ist $1 + P_\bullet : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ bijektiv. Für den Operator P sind die weiteren Terme niederer Ordnung Störungen; um Koerzivität zu erzwingen betrachten wir die Operatoren $\lambda - P$ für komplexe Parameter λ :

1.2.7 Satz. *Sei*

$$P = - \sum_{i,j=1}^n \partial_i a_{i,j}(x) \partial_j + \sum_{j=1}^n (b_j(x) \partial_j - \partial_j \tilde{b}_j(x)) + c(x) \quad (1.32)$$

mit Koeffizienten $a_{i,j}, b_j, \tilde{b}_j, c \in L^\infty(\Omega)$. Angenommen, P ist gleichmäßig elliptisch. Dann existiert eine Zahl M , so dass für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit

$$M^2 + 2M \operatorname{Re} \lambda < (\operatorname{Im} \lambda)^2 \quad (1.33)$$

der Operator $\lambda - P : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ invertierbar ist.

Beweis. Es genügt, die Koerzivität der Form nachzurechnen. Dazu nutzen wir einen zusätzlichen Parameter $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ und betrachten die Form

$$\tilde{p}_{\lambda,\theta}(u, v) = e^{i\theta} (p(u, v) - \lambda(u, v)) \quad (1.34)$$

und wählen θ in Abhängigkeit von $\arg \lambda$. Der zugeordnete Operator ist $e^{i\theta}(P - \lambda)$ und damit genau dann invertierbar, wenn $\lambda - P$ es ist.

Es gilt unter Verwendung der Elliptizitätskonstanten c_0 und wegen $\cos \theta > 0$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \tilde{p}_{\lambda,\theta}(u, u) &= \operatorname{Re} e^{i\theta} p_\bullet(u, u) + \operatorname{Re} e^{i\theta} (p - p_\bullet)(u, u) - (\operatorname{Re} e^{i\theta} \lambda) \|u\|^2 \\ &= p_\bullet(u, u) \cos \theta + \operatorname{Re} e^{i\theta} (p - p_\bullet)(u, u) - (\operatorname{Re} e^{i\theta} \lambda) \|u\|^2 \\ &\geq c_0 \cos \theta |u|_{(1)}^2 - M_1 \|u\| |u|_{(1)} - M_2 \|u\|^2 - (\operatorname{Re} e^{i\theta} \lambda) \|u\|^2 \\ &\geq (c_0 \cos \theta - \frac{M_1 \varepsilon}{2}) |u|_{(1)}^2 + ((-\operatorname{Re} e^{i\theta} \lambda) - (M_2 + \frac{M_1}{2\varepsilon})) \|u\|^2 \end{aligned} \quad (1.35)$$

unter Ausnutzung von

$$\begin{aligned} |(p - p_\bullet)(u, u)| &= \left| \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} (\overline{u(x)} b_j(x) \partial_j u(x) - u(x) \tilde{b}_j(x) \overline{\partial_j u(x)}) \, dx + \int_{\Omega} c(x) |u(x)|^2 \, dx \right| \\ &\leq M_1 \|u\| |u|_{(1)} + M_2 \|u\|^2 \end{aligned} \quad (1.36)$$

mit Konstanten

$$M_1 = \max_j (\|b_j\|_\infty + \|\tilde{b}_j\|_\infty), \quad M_2 = \|c\|_\infty, \quad (1.37)$$

sowie der elementaren Ungleichung

$$\|u\| |u|_{(1)} \leq \frac{1}{2\varepsilon} \|u\|^2 + \frac{\varepsilon}{2} |u|_{(1)}^2 \quad (1.38)$$

gültig für beliebiges $\varepsilon > 0$.

Wir wählen $\varepsilon = (c_0 \cos \theta)/M_1$ und $\theta = (\pi - \arg \lambda)/2$. Dann folgt Invertierbarkeit für λ mit

$$|\lambda| \sin \frac{\arg \lambda}{2} > M_2 + \frac{M_1}{2\varepsilon} = M_2 + \frac{M_1^2}{2c_0 \sin \frac{\arg \lambda}{2}} \geq 0, \quad (1.39)$$

da $\cos \theta = \sin \frac{\arg \lambda}{2}$ und $\cos(\theta + \arg \lambda) = -\sin \frac{\arg \lambda}{2}$. Das entspricht einer nach rechts geöffneten Parabel. Dazu wählen wir M so groß, dass $\frac{M}{2} \geq M_2 + M_1^2 \geq M_2 \sin \frac{\arg \lambda}{2} + M_1^2$ gilt und λ mit

$$|\lambda| \left(\sin \frac{\arg \lambda}{2} \right)^2 = |\lambda| \frac{1 - \cos \arg \lambda}{2} > \frac{M}{2}, \quad (1.40)$$

also $(\operatorname{Re} \lambda)^2 + (\operatorname{Im} \lambda)^2 > (M + \operatorname{Re} \lambda)^2$. □

1.2.8. Statt den zu einer Form $a : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{C}$ assoziierten Operator A als beschränkten Operator zwischen \mathbf{V} und \mathbf{V}' zu betrachten, ist es mitunter sinnvoll den unbeschränkten Operator $A : \mathbf{H} \supset D(A) \rightarrow \mathbf{H}$ auf dem Hilbertraum \mathbf{H} mit Definitionsbereich

$$D(A) = \{u \in \mathbf{V} : Au \in \mathbf{H}\} \subset \mathbf{H} \quad (1.41)$$

untersuchen.

1.2.9 Lemma. *Angenommen, die Form a ist koerziv. Dann ist der zugeordnete Operator $A : \mathbf{H} \supset D(A) \rightarrow \mathbf{H}$ abgeschlossen.*

Beweis. Sei $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge, $u_j \in D(A)$, so dass $u_j \rightarrow u$ in \mathbf{H} und $Au_j \rightarrow v$ in \mathbf{H} . Dann impliziert die Koerzivität

$$c_0 \|u_j\|_{\mathbf{V}}^2 \leq \operatorname{Re} a(u_j, u_j) = \operatorname{Re} (Au_j, u_j) \rightarrow \operatorname{Re} (v, u) \quad (1.42)$$

die Beschränktheit der Folge (u_j) im Hilbertraum \mathbf{V} . Also existiert eine schwach konvergente Teilfolge (wiederum bezeichnet als u_j) und da Au_j ebenso in \mathbf{V}' schwach konvergiert

$$a(u, w) = (u, A^*w) = \lim_{j \rightarrow \infty} (u_j, A^*w) = \lim_{j \rightarrow \infty} (Au_j, w) = (v, w) \quad (1.43)$$

unter Nutzung des der Form $a^*(u, v) = \overline{a(v, u)}$ zugeordneten Operators $A^* : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}'$. Also gilt $u \in D(A)$ und $Au = v$. □

Der Definitionsbereich $D(A)$ wird durch die *Graphennorm* $\|u\|_{D(A)}^2 = \|u\|_{\mathbf{H}}^2 + \|Au\|_{\mathbf{H}}^2$ selbst zu einem Hilbertraum.

1.2.10. Eine Form $a : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *symmetrisch*, falls

$$a(u, v) = \overline{a(v, u)} \quad (1.44)$$

für alle $u, v \in \mathbf{V}$ gilt.

1.2.11 Korollar. *Sei a koerziv und symmetrisch. Dann stimmt der zugeordnete Operator $A : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}'$ mit seinem Adjungierten überein und $A : \mathbf{H} \supset D(A) \rightarrow \mathbf{H}$ ist selbstadjungiert.*

1.3 Sobolevräume

1.3.1. Für $k \in \mathbb{N}$ und $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ seien

$$\begin{aligned} |f|_{(k)}^2 &= \sum_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha f\|^2 \\ \|f\|_{(k)}^2 &= \sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha f\|^2 = \sum_{\ell=0}^k |f|_{(\ell)}^2 \end{aligned} \quad (1.45)$$

die k -te *Sobolev-Seminorm* beziehungsweise die k -te *Sobolevnorm*. Der *Sobolevraum* $H^k(\mathbb{R}^n)$ ist die Vervollständigung von $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ in der $\|\cdot\|_{(k)}$ -Norm, Elemente von $H^k(\mathbb{R}^n)$ sind also insbesondere quadratintegrierbare Funktionen und alle Einbettungen

$$H^k(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{k-1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dots \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \quad (1.46)$$

sind dicht. Wir bezeichnen den Dualraum zu $H^k(\mathbb{R}^n)$ wiederum als $H^{-k}(\mathbb{R}^n)$ und nutzen das L^2 -Innenprodukt für die Darstellung der Dualitätsbeziehung. Damit bilden für alle $k \in \mathbb{N}$ die Räume $(H^k(\mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{R}^n), H^{-k}(\mathbb{R}^n))$ ein Gelfand-Tripel von Hilberträumen.

Räume auf Mannigfaltigkeiten

1.3.2 Lemma. Sei $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus mit gleichmäßig beschränkten Ableitungen $\|\partial^\alpha \Phi(x)\| \leq C$ für $|\alpha| \leq k$ und $|\det \Phi'(x)| \geq c > 0$ gleichmäßig in x . Dann gilt für die Sobolevnormen

$$\frac{1}{M} \|f\|_{(k)} \leq \|f \circ \Phi\|_{(k)} \leq M \|f\|_{(k)} \quad (1.47)$$

mit einer geeigneten Konstanten $M > 0$.

Beweis. Nachrechnen mit der Kettenregel und der Substitutionsregel für Integrale. \square

Das vorherige Lemma erlaubt es insbesondere, Sobolevräume auf (unberandeten) Mannigfaltigkeiten zu definieren.

1.3.3 Definition. (i) Sei \mathcal{M} eine geschlossene Mannigfaltigkeit. Dann gilt $f \in H^k(\mathcal{M})$ genau dann, wenn für eine Zerlegung in Kartengebiete $(U_j)_{j=1,\dots,m}$, Karten $\phi_j : U_j \rightarrow \mathbb{R}^n$ und eine untergeordnete Partition der Eins $(\chi_j)_{j=1,\dots,m}$ die Funktionen¹

$$(f\chi_j) \circ \phi_j^{-1} \in H^k(\mathbb{R}^n) \quad (1.48)$$

erfüllen. Die Definition ist von der Wahl der Karten und der Partition der Eins unabhängig und die zugeordneten Normen

$$\|f\|_{(k),\mathcal{M}}^2 = \sum_{j=1}^m \|(f\chi_j) \circ \phi_j^{-1}\|_{(k)}^2 \quad (1.49)$$

sind jeweils äquivalent.

¹Wir setzen ϕ_j^{-1} außerhalb ihres Definitionsgebietes durch Null fort.

- (ii) Sei \mathcal{M} eine (nicht kompakte) unberandete Mannigfaltigkeit zerlegt in Kartengebiete $(U_j)_{j \in \mathbb{N}}$ und versehen mit Karten $\phi_j : U_j \rightarrow \mathbb{R}^n$ und einer untergeordneten Partition der Eins $(\chi_j)_{j \in \mathbb{N}}$. Bezeichne weiter $\mathcal{T} = (U_j, \phi_j, \tau_j)_{j \in \mathbb{N}}$.

Dann gilt $f \in H^{k, \mathcal{T}}(\mathcal{M})$ genau dann, wenn für alle j

$$(f\chi_j) \circ \phi_j^{-1} \in H^k(\mathbb{R}^n) \quad (1.50)$$

erfüllt ist. Weiter sei

$$\|f\|_{(k), \mathcal{M}}^2 = \sum_{j \in \mathbb{N}} \|(f\chi_j) \circ \phi_j^{-1}\|_{(k)}^2. \quad (1.51)$$

Für Mannigfaltigkeiten von beschränkter Geometrie und \mathcal{T} derart, dass alle Kartenwechsel zu geodätischen Karten gleichmäßig zusammen mit ihren Ableitungen in j beschränkt sind, ist die Definition von \mathcal{T} unabhängig und die zugeordneten Normen sind jeweils äquivalent.

Räume nichtganzzahliger Ordnung

1.3.4 Lemma. *Es gilt $f \in H^k(\mathbb{R}^n)$ genau dann, wenn die Fouriertransformierte*

$$\widehat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx \quad (1.52)$$

der Funktion f

$$\xi^\alpha \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n), \quad |\alpha| \leq k, \quad (1.53)$$

erfüllt. Darüberhinaus gilt

$$\|f\|_{(k)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2|\alpha|} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi. \quad (1.54)$$

Beweis. Plancherel-Identität zusammen mit der elementaren Beziehung $\widehat{\partial_j f}(\xi) = i\xi_j \widehat{f}(\xi)$. \square

1.3.5 Definition. Dieses Lemma erlaubt es, Sobolevräume mit nichtganzzahligen Sobolevordnungen zu definieren. Das natürliche Umfeld dieser Räume ist der Raum $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ der temperierten Distributionen, also der Dualraum des Schwartzraumes $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dazu setzen wir $\langle \xi \rangle = \sqrt{1 + |\xi|^2}$ und definieren

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : (\xi \mapsto \langle \xi \rangle^s \widehat{f}(\xi)) \in L^2(\mathbb{R}^n)\} \quad (1.55)$$

versehen mit der (zu obigen Normen äquivalenten) *Sobolevnorm*

$$\|f\|_{(s)}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi. \quad (1.56)$$

1.3.6 Bemerkung. (i) Alle so definierten Räume sind Hilberträume.

- (ii) Es gilt $(H^s(\mathbb{R}^n))' = H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ bei Nutzung des L^2 -Innenprodukts zur Realisierung der Dualität.

(iii) Alle Einbettungen

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dots \hookrightarrow H^{s_2}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{s_1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dots \\ \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dots \\ \hookrightarrow H^{-s_1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{-s_2}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \end{aligned} \quad (1.57)$$

für beliebiges $0 < s_1 < s_2$ sind dicht.

(iv) Die gerade definierten Sobolevräume bilden eine Interpolationsskala bezüglich komplexer Interpolation. Lemma 1.3.2 gilt also entsprechend für die Räume $H^s(\mathbb{R}^n)$. Dies erlaubt es, Räume nichtgganzzahliger Ordnung auch auf Mannigfaltigkeiten zu definieren.

1.3.7. Die Hilbertraumeigenschaft von $H^s(\mathbb{R}^n)$ kann man nutzen, um gewisse für uns interessante Teil- und Quotientenräume zu charakterisieren. Sei dazu zuerst $F \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen. Dann sei

$$H_F^s = \{f \in H^s(\mathbb{R}^n) : \text{supp } f \subseteq F\} \quad (1.58)$$

die Menge der in F getragenen Sobolevfunktionen. Diese ist als Teilraum von $H^s(\mathbb{R}^n)$ abgeschlossen (aufgrund der stetigen Einbettung in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und der Definition des Trägers einer Distribution), also versehen mit der Teilraumtopologie selbst ein Hilbertraum.

1.3.8. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit glattem Rand² $\partial\Omega$. Dann definieren wir den Raum $H^s(\Omega)$ als Menge der Einschränkungen von Elementen des $H^s(\mathbb{R}^n)$ auf das Gebiet Ω versehen mit der Norm

$$\|f\|_{(s),\Omega} = \inf\{\|\tilde{f}\|_{(s)} : \tilde{f} \in H^s(\mathbb{R}^n), \tilde{f}|_{\Omega} = f\}, \quad (1.59)$$

also als Quotientennorm in $H^s(\mathbb{R}^n)/H_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega}^s$.

1.3.9 Satz. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit glattem Rand.*

(i) *Dann ist die Menge der Einschränkungen der Funktionen $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ auf das Gebiet Ω dicht im Sobolevraum $H^s(\Omega)$, die Einbettung*

$$\{f|_{\Omega} : f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)\} \hookrightarrow H^s(\Omega) \quad (1.60)$$

also dicht.

(ii) *Weiterhin gilt für alle $k \in \mathbb{N}$*

$$H^k(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) : \forall_{|\alpha| \leq k} \partial^\alpha f \in L^2(\Omega)\} \quad (1.61)$$

und es gilt die Normäquivalenz

$$\frac{1}{M_{k,\Omega}} \|f\|_{(k),\Omega}^2 \leq \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |\partial^\alpha f(x)|^2 dx \leq M_{k,\Omega} \|f\|_{(k),\Omega}^2, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (1.62)$$

Beweisidee. Die erste Aussage ergibt sich direkt aus der Dichtheit von $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ in $H^s(\mathbb{R}^n)$ zusammen mit der Konstruktion von $H^s(\Omega)$ als Quotientenraum. Für die zweite Aussage benötigt man die Existenz eines Fortsetzungsoperators. Für Details sei dabei auf die Literatur verwiesen. \square

²Der glatte Rand ist später wesentlich, hier würde auch ein Lipschitzrand genügen. Mit weniger Regularität als Lipschitz liefert die hier gegebene Definition nicht den vollen Sobolevraum sondern nur (einen für Anwendungen trotzdem interessanten) Teilraum.

Spursätze

Definiert man andererseits $H_0^s(\Omega)$ als den Abschluss von $C_c^\infty(\Omega)$ in der Sobolevnorm $\|\cdot\|_{(s),\Omega}$, so ergibt sich ein abgeschlossener Teilraum $H_0^s(\Omega) \subset H^s(\Omega)$. Für $f \in C_c^\infty(\Omega)$ und $s = k \in \mathbb{N}$ ist die triviale Fortsetzung durch Null von minimaler $\|\cdot\|_{(k)}$ -Norm und damit gilt

$$\|f\|_{(k)}^2 = ((1 - \Delta)^k f, f) = \|f\|_{(k),\Omega}^2. \quad (1.63)$$

Die Quotientennorm stimmt mit der Sobolevnorm auf dem \mathbb{R}^n überein. Es stellt sich die Frage einer Charakterisierung des $H_0^k(\Omega)$ durch die Randwerte der Elemente von $H^k(\Omega)$. Wir zitieren das Resultat:

1.3.10 Satz (Spursatz). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit glattem Rand $\partial\Omega$ von beschränkter Geometrie (d.h. es existieren Randkarten, welche die Voraussetzungen von Definition 1.3.3 (ii) erfüllen).*

(i) *Dann existiert ein surjektiver Operator*

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \quad (1.64)$$

mit $H_0^1(\Omega) = \ker \gamma_0$.

Weiterhin gilt für alle Funktionen $f \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ die explizite Darstellung $\gamma_0 f = f|_{\partial\Omega}$.

(ii) *Bezeichne $\nu(x)$ das äußere Normalenfeld an $\partial\Omega$ und ∂_ν^ℓ die ℓ -te äußere Normalenableitung in einer Umgebung von $\partial\Omega$ in Ω . Dann ist für $k \in \mathbb{N}$*

$$\gamma : H^k(\Omega) \rightarrow \bigoplus_{\ell=0}^{k-1} H^{k-\ell-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \quad (1.65)$$

mit $\gamma = (\gamma_0, \dots, \gamma_{k-1})$ für $\gamma_\ell = \gamma_0 \circ \partial_\nu^\ell$ surjektiv und es gilt

$$H_0^k(\Omega) = \ker \gamma. \quad (1.66)$$

Für einen Beweis und weitere Details siehe das Buch von McLean [5, Theorem 3.40]. In diesem Buch sind auch Beweise für alle weiteren hier zitierten Resultate zu Sobolevräumen auf beschränkten Gebieten zu finden.

1.4 Dirichlet- und Neumannprobleme

1.4.1. Wir definieren einige wichtige Operatoren über ihre Form. Zuerst betrachten wir den Dirichlet-Laplace auf einem Gebiet Ω definiert durch die *Dirichletform*

$$d(u, u) = \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx = |u|_{(1)}^2 \quad (1.67)$$

für $u \in H_0^1(\Omega)$. Der zugeordnete Differentialoperator $-\Delta_D : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ und insbesondere seine Einschränkung auf den Definitionsbereich

$$D(\Delta_D) = \{u \in H_0^1(\Omega) : \Delta u \in L^2(\Omega)\} \quad (1.68)$$

wird als *Dirichlet-Laplace* bezeichnet. Der Definitionsbereich erlaubt eine Charakterisierung durch Sobolevräume.

Lemma. Sei $\partial\Omega$ beschränkt und glatt (oder allgemeiner $\partial\Omega$ glatt und von beschränkter Geometrie). Dann ist der Definitionsbereich des Dirichlet-Laplace durch

$$D(\Delta_D) = \{u \in H^2(\Omega) : \gamma_0 u = 0\} = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \quad (1.69)$$

gegeben.

Beweisskizze. Sei $u \in C_c^3(\overline{\Omega})$ mit $u|_{\partial\Omega} = 0$. Dann gilt mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx &= - \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \overline{\nabla \Delta u(x)} + \int_{\partial\Omega} \partial_{\nu} u(x) \overline{\Delta u(x)} dx \\ &= |u|_{(2)}^2 + \int_{\partial\Omega} \overline{(\Delta u(x) - H_u(x))} \nabla u(x) \cdot \nu(x) dx \end{aligned} \quad (1.70)$$

mit der Hessematrix $H_u(x) = (\partial_i \partial_j u(x))_{i,j=1}^n$ der Funktion u . Weiter gilt unter Ausnutzung der Dirichlet-Randbedingung

$$\overline{(\Delta u(x) - H_u(x))} \nabla u(x) \cdot \nu(x) = -|\partial_{\nu} u(x)|^2 b(x) \quad (1.71)$$

und mit einer (nur von der Randkrümmung abhängenden) beschränkten Funktion $b(x)$. Zusammen mit der Spurgleichung

$$\int_{\partial\Omega} |\partial_{\nu} u(x)|^2 dx \leq C \|u\|_{(3/2)}^2 \leq C'(1 + \varepsilon^{-1}) \|u\|_{(1)}^2 + \varepsilon |u|_{(2)}^2 \quad (1.72)$$

folgt die Abschätzung

$$|u|_{(2)}^2 \leq C'' \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx + C''' \|u\|_{(1)}^2. \quad (1.73)$$

Die Behauptung ergibt sich aus der Dichtheit glatter Funktionen im Definitionsbereich des Operators. \square

1.4.2. Ist Ω beschränkt, so gilt die *Friedrichssche Ungleichung*

$$\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \leq (\text{diam}(\Omega))^2 \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \quad (1.74)$$

für alle $u \in C_c^{\infty}(\Omega)$. Die Form ist also koerziv auf $H_0^1(\Omega)$, der Dirichlet-Laplace also bijektiv als Abbildung von $\Delta_D : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ und damit auch als Abbildung

$$\Delta_D : H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega). \quad (1.75)$$

Dies kann man nutzen, um ein Randwertproblem, das *Poisson-Problem*, zu lösen. Zu gegebenem $g \in H^{3/2}(\partial\Omega)$ existiert aufgrund des Spursatzes ein $f \in H^2(\Omega)$ mit $\gamma_0 f = g$. Betrachtet man nun die Lösung $v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ zu

$$\Delta_D v = -\Delta f = \sum_{j=1}^n \partial_j^2 f, \quad (1.76)$$

so löst $u = v + f \in H^2(\Omega)$ das Randwertproblem

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ \gamma_0 u = g. \end{cases} \quad (1.77)$$

Die Lösung ist eindeutig bestimmt, zwei verschiedene solche u haben als Differenz eine Lösung zu $\Delta u = 0$ mit $\gamma_0 u = 0$, aufgrund der Invertierbarkeit von Δ_D folgt also $u = 0$. Der dadurch definierte Lösungsoperator

$$P : H^{3/2}(\partial\Omega) \ni g \mapsto u \in H^2(\Omega) \quad (1.78)$$

wird als *Poissonoperator* bezeichnet. Er ist stetig und erfüllt $\gamma_0 P = I$ auf $H^{3/2}(\partial\Omega)$.

Analog kann man zu $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ ein $f \in H^1(\Omega)$ mit $\gamma_0 f = g$ finden und mit der Lösung $v \in H_0^1(\Omega)$ zu $\Delta_D v = -\Delta f$ eine Lösung $u = v + f \in H^1(\Omega)$ des Randwertproblems (1.77) zu $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ zuordnen. Die Lösung ist wiederum eindeutig bestimmt, der Lösungsoperator ist eine stetige Fortsetzung des Poissonoperators zu

$$P : H^{1/2}(\partial\Omega) \ni g \mapsto u \in H^1(\Omega) \quad (1.79)$$

mit $\gamma_0 P = I$ auf $H^{1/2}(\partial\Omega)$.

1.4.3. Wir betrachten nun ebenso die Dirichletform (1.67), jedoch für $u \in H^1(\Omega)$ und auf einem beschränkten Gebiet mit glattem Rand. Der dazu assoziierte Operator bildet (diesmal jedoch nicht bijektiv, da Konstanten im Nullraum liegen)

$$-\Delta_N : H_0^1(\Omega) \dot{+} H^{1/2}(\partial\Omega) \simeq H^1(\Omega) \longrightarrow H^1(\Omega)' \simeq H^{-1}(\Omega) \dot{+} H^{-1/2}(\partial\Omega) \quad (1.80)$$

ab. Es gilt also für $u, v \in H^1(\Omega)$ und $(\Delta_N u)|_\Omega = f \in H^{-1}(\Omega)$ und einem ebenso über die Form definierten $\beta u \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$

$$d(u, v) = \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \overline{\nabla v(x)} \, dx = (f, v)_\Omega + (\beta u, \gamma_0 v)_{\partial\Omega}. \quad (1.81)$$

Nach Konstruktion gilt $(\Delta_N u)|_\Omega = \Delta u$ (verstanden im distributionellen Sinne). Weiter gilt für glatte Funktionen $u, v \in C_c^\infty(\overline{\Omega})$ dass $\beta u = \gamma_1 u$. Der zugeordnete unbeschränkte Operator mit Definitionsbereich

$$D(\Delta_N) = \{u \in H^1(\Omega) : \Delta u \in L^2(\Omega)\} \quad (1.82)$$

wird als *Neumann-Laplace* bezeichnet. Hier gilt

Lemma. *Sei $\partial\Omega$ beschränkt und glatt (oder allgemeiner $\partial\Omega$ glatt und von beschränkter Geometrie). Dann ist der Definitionsbereich des Neumann-Laplace durch*

$$D(\Delta_N) = \{u \in H^2(\Omega) : \gamma_1 u = 0\} \quad (1.83)$$

gegeben.

1.4.4. Sei Ω ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand und P der zugehörige Poissonoperator. Dann werden die Operatoren $\beta P : H^{1/2}(\partial\Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega)$ und $\gamma_1 P : H^{3/2}(\partial\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega)$ als *Dirichlet-Neumann-Operator* des Gebietes Ω bezeichnet. Zugeordnet zu diesem Operator ist die Form

$$\beta(u, v) = (\beta P u, v)_{\partial\Omega}, \quad u, v \in H^{1/2}(\partial\Omega). \quad (1.84)$$

1.4.5. Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ ein Parameter. Zugordnet zur Form

$$d_\alpha(u, u) = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx + \alpha \int_{\partial\Omega} |u(x)|^2 \, dx, \quad u \in H^1(\Omega) \quad (1.85)$$

ergibt sich der *Robin-Laplace*. Der zweite Term der Form ist dabei mit Hilfe des Spuroperators $\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega)$ zu verstehen.

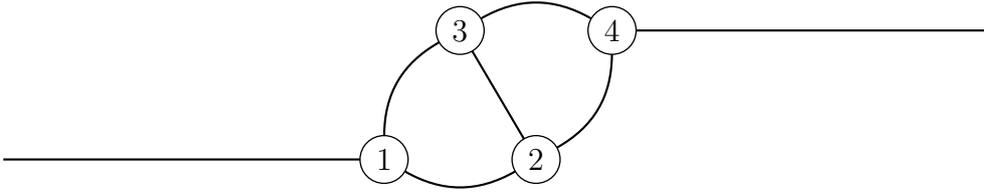


Abbildung 1.1: Beispiel eines Graphen mit fünf endlichen und zwei unendlichen Kanten

1.5 Der Kirchhoff-Laplace auf einem Graphen

1.5.1 Definition. Ein *metrischer Graph* ist ein Tupel $\mathcal{G} = (V, E, \iota, \ell)$ bestehend aus einer Menge V von *Knoten*, einer Menge $E = E_0 \cup E_\infty$ von *Kanten* zusammen mit einer Inzidenzabbildung $\iota : E \rightarrow \mathcal{P}(V)$, welche jeder endlichen Kante $e \in E_0$ eine nichtleere Menge $\iota(e)$ von bis zu zwei Knoten und jeder unendlichen Kante $e \in E_\infty$ eine einelementige Knotenmenge zuordnet. Weiterhin sei $\ell : E_0 \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine Abbildung, welche jeder endlichen Kante ihre Länge zuordnet. Die Abbildung ℓ wird auf E_∞ mit dem Wert ∞ fortgesetzt.

Weiter sagen wir, ein Knoten $v \in V$ ist mit einer Kante $e \in E$ *inzident*, wenn es ein $e \in E$ mit $v \in \iota(e)$ gibt.

1.5.2. Wir wollen Differentialoperatoren auf dem Graphen betrachten. Dazu identifizieren wir jede Kante $e \in E$ mit dem Intervall $I_e = (0, \ell(e))$, merken uns welcher inzidente Knoten zu welchem Intervallende gehört und betrachten Funktionen $f = (f_e)_{e \in E}$ als Familien von Abbildungen $f_e : I_e \rightarrow \mathbb{C}$.

Wir sagen eine solche Funktion f ist *stetig*, falls $f_e \in C(\overline{I_e})$ auf dem abgeschlossenen Intervall stetig ist und die entsprechenden Randwerte in den zu einem Knoten inzidenten Kanten übereinstimmen. Die Menge der stetigen Funktionen auf dem Graphen sei $C(\mathcal{G})$. Wir definieren weiter

$$L^2(\mathcal{G}) = \bigoplus_{e \in E} L^2(I_e), \quad \text{sowie} \quad H^1(\mathcal{G}) = C(\mathcal{G}) \cap \bigoplus_{e \in E} H^1(I_e). \quad (1.86)$$

Damit kann man auf einem metrischen Graphen die quadratische Form

$$d(f, f) = \sum_{e \in E} \int_0^{\ell(e)} |f'_e(x)|^2 dx, \quad f \in H^1(\mathcal{G}), \quad (1.87)$$

betrachten. Diese ist stetig auf $H^1(\mathcal{G})$ und positiv semidefinit. Der zugeordnete Operator $\Delta_{\mathcal{G}}$ wird als *Kirchhoff-Laplace* auf dem Graphen \mathcal{G} bezeichnet. Weiter ist die Form $\|f\|^2 + d(f, f)$ koerziv und definiert damit eine bijektive Abbildung $I + \Delta_{\mathcal{G}} : H^1(\mathcal{G}) \rightarrow H^1(\mathcal{G})'$ und einen zugehörigen unbeschränkten Operator mit Definitionsbereich

$$D(\Delta_{\mathcal{G}}) = \{f \in H^1(\mathcal{G}) : \Delta_{\mathcal{G}} f \in L^2(\mathcal{G})\}. \quad (1.88)$$

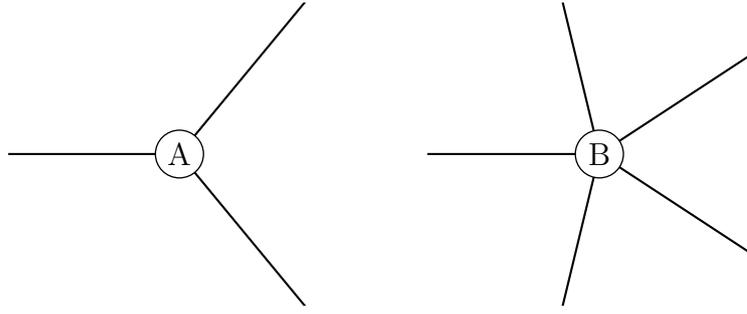


Abbildung 1.2: Zur Berechnung der Kirchhoffbedingung betrachten wir nur die Umgebung eines (beliebigen) Knotens

1.5.3. Der Operator $\Delta_{\mathcal{G}}$ agiert auf jeder der Kanten als zweite Ableitung, $\Delta_{\mathcal{G}} f = (f_e'')_{e \in E}$, und hat als Definitionsbereich die Menge der in den Knoten stetigen Funktionen mit $f_e \in H^2(I_e)$ für die für jede in einer kleinen Umgebung eines beliebigen Knotens $v \in V$ getragene Funktion $g \in H^1(\mathcal{G})$ und mit $E_v = \{e \in E : v \in \iota(e)\}$ und 0 als Koordinate für den Knoten v

$$\begin{aligned} d(f, g) &= \sum_{e \in E_v} \int_0^{\ell(e)} f_e'(x) \overline{g_e'(x)} \, dx \\ &= - \sum_{e \in E_v} \int_0^{\ell(e)} f_e''(x) \overline{g_e(x)} \, dx + \overline{g(0)} \sum_{e \in E_v} f_e'(0) = -(h, g) \end{aligned} \tag{1.89}$$

mit einer Funktion $h \in L^2(\mathcal{G})$ gilt. Damit verschwindet in jedem Knoten die Summe der Ableitungen und es gilt die Kirchhoff-Bedingung

$$0 = \sum_{e \in E_v} f_e'(v) \tag{1.90}$$

als Summe über die aus den Knoten auslaufend orientierten Ableitungen. Es gilt also

Lemma. Sei $\mathcal{G} = (V, E, \iota, \ell)$ metrischer Graph. Dann gilt für den Definitionsbereich des Kirchhoff-Laplace

$$D(\Delta_{\mathcal{G}}) = \left\{ f \in C(\mathcal{G}) \cap \bigoplus_{e \in E} H^2(I_e) : \text{für jedes } v \in V \text{ gilt (1.90)} \right\}. \tag{1.91}$$

2 Evolutionsprobleme und Operatorhalbgruppen

In diesem Kapitel sollen Evolutionsprobleme abstrakt betrachtet werden. Ausgangspunkt dazu ist das Verhalten des Lösungsoperators, also der t -abhängigen Abbildung welche den Anfangsdaten zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ die Lösung zu einem späteren Zeitpunkt t zuordnet.

2.1 Halbgruppen und ihre Erzeuger

2.1.1. Sei \mathbf{X} ein Banachraum und $T : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{L}(\mathbf{X})$ eine stark stetige Abbildung mit

$$T(s+t) = T(s)T(t), \quad s, t \geq 0 \quad (2.1)$$

sowie

$$\text{s-lim}_{t \rightarrow 0^+} T(t) = I. \quad (2.2)$$

Eine solche Abbildung wird als *stark stetige Operatorhalbgruppe* bezeichnet. Wir wollen solche genauer charakterisieren und einen Zusammenhang zu abstrakten Evolutionsgleichungen herstellen.

Zugeordnet zur Operatorhalbgruppe betrachten wir ihren *Erzeuger* $A : \mathbf{X} \supset D(A) \rightarrow \mathbf{X}$ mit Definitionsbereich

$$D(A) = \{x \in \mathbf{X} : \lim_{t \rightarrow 0^+} t^{-1}(T(t)x - x) \text{ existiert in } \mathbf{X}\} \quad (2.3)$$

und

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} t^{-1}(T(t)x - x) \quad (2.4)$$

für $x \in D(A)$. Nach Konstruktion besitzt $D(A)$ die Struktur eines Vektorraumes. Operatorhalbgruppen sind Lösungen von Evolutionsproblemen. Genauer gilt:

2.1.2 Lemma. *Gilt $x \in D(A)$, so folgt $u(t) = T(t)x \in D(A)$ für alle $t \geq 0$ und die Identität*

$$\dot{u}(t) := \frac{d}{dt}u(t) = Au(t) \quad (2.5)$$

ist erfüllt für alle $t \geq 0$. Umgekehrt ist $u(t)$ die eindeutig bestimmte Lösung zu (2.5) mit Anfangsbedingung $u(0) = x \in D(A)$.

Beweis. Für $x \in D(A)$ und $h > 0$ gilt

$$\frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = T(t) \frac{T(h)x - x}{h} \longrightarrow T(t)Ax \quad \text{in } \mathbf{X} \quad (2.6)$$

und damit ist $T(t)x \in D(A)$ für alle $t \geq 0$ und die rechtsseitige Ableitung von $u(t)$ ist auch stets $Au(t)$. Es bleibt die linksseitige Ableitung. Nach dem Satz über die gleichmäßige Beschränktheit ist $\sup_{t \in [0, T]} \|T(t)\| < \infty$ und damit auch

$$\begin{aligned} \frac{T(t-h)x - T(t)x}{-h} &= T(t-h) \frac{T(h)x - x}{h} \\ &= T(t-h) \left(\frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right) + T(t-h)Ax \longrightarrow T(t)Ax. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Sei nun umgekehrt v eine Lösung von (2.5) und $w(s) = T(t-s)v(s)$ für ein fest gewähltes $t \in \mathbb{R}$. Dann folgt

$$\frac{d}{ds} w(s) = -AT(t-s)v(s) + T(t-s)Av(s) = 0 \quad (2.8)$$

und w ist konstant. Also folgt $v(t) = w(t) = w(0) = T(t)x$ und damit die Behauptung. \square

2.1.3 Lemma. (i) *Seien $x, y \in \mathbf{X}$. Dann gilt $x \in D(A)$ und $y = Ax$ genau dann, wenn für alle $t > 0$*

$$T(t)x = x + \int_0^t T(s)y \, ds. \quad (2.9)$$

(ii) *A ist abgeschlossen, d.h. $\text{graph } A = \{(x, Ax) : x \in D(A)\} \subset \mathbf{X} \times \mathbf{X}$ ist abgeschlossen.*

(iii) *Sei $x \in \mathbf{X}$. Dann gilt für alle $t > 0$*

$$\int_0^t T(s)x \, ds \in D(A) \quad \text{und} \quad A \int_0^t T(s)x \, ds = T(t)x - x. \quad (2.10)$$

(iv) *$D(A)$ ist dicht in \mathbf{X} .*

Beweis. (i) Angenommen, (2.9) gilt für $x, y \in \mathbf{X}$ und alle $t > 0$. Dann folgt

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)y \, ds = y \quad (2.11)$$

und somit $x \in D(A)$ und $Ax = y$. Ist nun umgekehrt $x \in D(A)$, so löst $T(t)x$ das Anfangswertproblem (2.5) und mit dem Hauptsatz der Integralrechnung

$$T(t)x - x = \int_0^t \frac{d}{ds} T(s)x \, ds = \int_0^t T(s)Ax \, ds = \int_0^t T(s)y \, ds. \quad (2.12)$$

(ii) folgt direkt, da für $x_n \in D(A)$ mit $x_n \rightarrow x$ in \mathbf{X} und $y_n := Ax_n \rightarrow y$ in \mathbf{X}

$$\int_0^t T(s)y_n \, ds = T(t)x_n - x_n \quad \text{mit } n \rightarrow \infty \text{ gegen} \quad \int_0^t T(s)y \, ds = T(t)x - x \quad (2.13)$$

strebt. • (iii) Für beliebiges $x \in \mathbf{X}$ und $h > 0$ gilt

$$\frac{1}{h} \left(T(h) \int_0^t T(s)x \, ds - \int_0^t T(s)x \, ds \right) = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x \, ds - \frac{1}{h} \int_0^h T(s)x \, ds \longrightarrow T(t)x - x \quad (2.14)$$

für $h \rightarrow 0$ und damit ist $\int_0^t T(s)x \, ds \in D(A)$ sowie

$$A \int_0^t T(s)x \, ds = T(t)x - x. \quad (2.15)$$

(iv) folg wiederum direkt, für $x \in \mathbf{X}$ gilt

$$\frac{1}{t} \int_0^t T(s)x \, ds \longrightarrow x \quad (2.16)$$

für $t \rightarrow 0$, das Integral gehört aber ja zu $D(A)$. □

2.2 Hauptsätze der Halbgruppentheorie

2.2.1. Für einen dicht definierten Operator $A : \mathbf{X} \supset D(A) \rightarrow \mathbf{X}$ bezeichne $\rho(A) \subset \mathbb{C}$ die Menge der Zahlen λ , für welche $\lambda I - A$ stetig invertierbar ist. Für solche λ bezeichne weiter

$$R_A(\lambda) = (\lambda - A)^{-1} \quad (2.17)$$

die *Resolvente* des Operators A , die Menge $\rho(A)$ heißt *Resolventenmenge* von A . Die Resolventenmenge ist offen ($\{\lambda : |\lambda - \lambda_0| < \|R_A(\lambda_0)\|^{-1}\} \subset \rho(A)$ für alle $\lambda_0 \in \rho(A)$) und die Resolvente ist holomorph auf $\rho(A)$.

2.2.2. Ist nun $T(t)$ eine stark stetige Operatorhalbgruppe, so gilt mit $M = \sup_{0 \leq t \leq 1} \|T(t)\|$ und $\omega = \ln M$ die Abschätzung

$$\|T(t)\| = \|T(s)T(1)^n\| \leq MM^n = Me^{\omega n} \leq Me^{\omega t} \quad (2.18)$$

für $t = n + s$, $0 \leq s < 1$. Die Operatorhalbgruppe ist also exponentiell beschränkt. Die kleinste Zahl ω , für die eine solche Abschätzung gilt,

$$\omega(A) = \inf\{\omega \in \mathbb{R} : \exists_{M \geq 0} \|T(t)\| \leq Me^{\omega t}\}, \quad (2.19)$$

heißt ihre Wachstumschranke.

2.2.3 Lemma. Sei A Erzeuger der Operatorhalbgruppe $T : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{L}(\mathbf{X})$. Dann gilt für λ mit $\operatorname{Re} \lambda > \omega(A)$ stets $\lambda \in \rho(A)$ und

$$R_A(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x \, dt. \quad (2.20)$$

Beweis. Das ist einfach nachzurechnen. Der Operator $A - \lambda$ erzeugt die Halbgruppe $e^{-\lambda t} T(t)$ und damit gilt

$$(A - \lambda) \int_0^t e^{-\lambda s} T(s)x \, ds = e^{-\lambda t} T(t)x - x. \quad (2.21)$$

Da A abgeschlossen ist, folgt für $t \rightarrow \infty$ dass $Rx := \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x \, dt \in D(A)$ und

$$(A - \lambda)Rx = (A - \lambda) \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x \, dt = -x. \quad (2.22)$$

Umgekehrt gilt für $x \in D(A)$

$$R(\lambda - A)x = - \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-\lambda s} T(s)(A - \lambda)x \, ds = x - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\lambda t} T(t)x = x. \quad (2.23)$$

Damit ist R die Inverse zu $\lambda - A$ und die Behauptung ist gezeigt. \square

Eine Halbgruppe mit der schärferen Schranke $\|T(t)\| \leq 1$ für alle $t \geq 0$ wird als *Kontraktionshalbgruppe* bezeichnet. Wir werden uns insbesondere mit solchen beschäftigen. Es gilt:

2.2.4 Satz (Hille–Yosida). *Sei A dicht definierter Operator auf einem Banachraum \mathbf{X} . Dann sind äquivalent*

- (i) $A : \mathbf{X} \supset D(A) \rightarrow \mathbf{X}$ ist Erzeuger einer Kontraktionshalbgruppe $T : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{L}(\mathbf{X})$.
- (ii) $\{\lambda : \operatorname{Re} \lambda > 0\} \subset \rho(A)$ und $\|\lambda R_A(\lambda)\| \leq 1$ für alle $\operatorname{Re} \lambda > 0$.
- (iii) $(0, \infty) \subset \rho(A)$ und $\|\lambda R_A(\lambda)\| \leq 1$ für alle $\lambda > 0$.

In diesen Fällen gilt

$$T(t)x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(I - \frac{t}{n} A \right)^{-n} x. \quad (2.24)$$

Beweis. (i) \Rightarrow (ii) Aus obigem Lemma folgt $\{\operatorname{Re} \lambda > 0\} \subset \rho(A)$ und

$$\lambda R_A(\lambda) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} T(t) \, dt \quad \text{und damit} \quad \|\lambda R_A(\lambda)\| \leq \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \, dt = 1. \quad (2.25)$$

(ii) \Rightarrow (iii) ist offensichtlich. • (iii) \Rightarrow (i) Die Normabschätzung $\|\lambda R_A(\lambda)\| \leq 1$ für $\lambda > 0$ impliziert $\|(1 - \alpha A)^{-1}\| \leq 1$ für alle $\alpha > 0$. Sei nun $T_n(t) = (1 - tA/n)^{-n}$ für $t > 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\|T_n(t)\| \leq 1$,

$$\frac{d}{dt} T_n(t) = A \left(1 - \frac{t}{n} A \right)^{-n-1} = T_n(t) A \left(1 - \frac{t}{n} A \right)^{-1} = A \left(1 - \frac{t}{n} A \right)^{-1} T_n(t), \quad (2.26)$$

sowie $T_n(t)x \rightarrow x$ für $t \rightarrow 0$, da

$$\|(1 - \alpha A)^{-1}x - x\| = \alpha \|(1 - \alpha A)^{-1}Ax\| \leq \alpha \|Ax\| \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} 0, \quad x \in D(A) \quad (2.27)$$

gilt und damit auf Grund der Dichtheit von $D(A)$ in \mathbf{X} nach dem Satz von Banach–Steinhaus $(1 - \alpha A)^{-1}$ für $\alpha \rightarrow 0$ stark gegen die Identität strebt. Wir zeigen nun, dass $T(t) = \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} T_n(t)$ existiert und eine Operatorhalbgruppe liefert.

Es gilt $D(A^2) = R_A(1)D(A)$. Da $R_A(1)$ injektiv ist und dichtes Bild besitzt, muss damit auch

$D(A^2) \subset \mathbf{X}$ dicht sein. Sei nun $x \in D(A^2)$ und $m, n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 & T_m(t)x - T_n(t)x \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{t-\varepsilon} \frac{d}{ds} (T_m(t-s)T_n(s))x \, ds \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{t-\varepsilon} \left(-T'_m(t-s)T_n(s) + T_m(t-s)T'_n(s) \right)x \, ds \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{t-\varepsilon} \left(- \left(1 - \frac{t-s}{m}A\right)^{-m-1} A \left(1 - \frac{s}{n}A\right)^{-n} \right. \\
 &\quad \left. + \left(1 - \frac{t-s}{m}A\right)^{-m} A \left(1 - \frac{s}{n}A\right)^{-n-1} \right)x \, ds \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{t-\varepsilon} \left(\left(\frac{s}{n} - \frac{t-s}{m}\right) A^2 \left(1 - \frac{t-s}{m}A\right)^{-m-1} \left(1 - \frac{s}{n}A\right)^{-n-1} \right)x \, ds
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

und damit

$$\|T_m(t)x - T_n(t)x\| \leq \int_0^t \left(\frac{s}{n} + \frac{t-s}{m} \right) ds \|A^2x\| \leq \frac{t^2}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right) \|A^2x\| \xrightarrow{m,n \rightarrow \infty} 0. \tag{2.29}$$

Da $D(A^2)$ dicht in \mathbf{X} ist, folgt wiederum mit dem Satz von Banach–Steinhaus die starke Konvergenz $s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(t) =: U(t)$ lokal gleichmäßig bezüglich t . Die sich ergebende operatorwertige Funktion $U(t)$ ist eine Halbgruppe: es gilt $U(0) = I$, $\|U(t)\| \leq 1$ und $t \mapsto U(t)$ ist stark stetig und für $x \in D(A)$ gilt

$$\frac{d}{dt} T_n(t)x = A \left(1 - \frac{t}{n}A\right)^{-1} T_n(t)x = T_n(t) \left(1 - \frac{t}{n}A\right)^{-1} Ax, \tag{2.30}$$

also

$$T_n(t)x - x = \int_0^t T_n(s) \left(1 - \frac{s}{n}A\right)^{-1} Ax \, ds = A \int_0^t \left(1 - \frac{s}{n}A\right)^{-1} T_n(s)x \, ds \tag{2.31}$$

und damit für $n \rightarrow \infty$

$$U(t)x - x = \int_0^t U(s)Ax \, ds = A \int_0^t U(s)x \, ds. \tag{2.32}$$

Also löst $U(t)x$ das Anfangswertproblem (2.5) zum Startwert x und damit gilt $U(t) = T(t)$ für die von A erzeugte Halbgruppe $T(t)$. \square

Für Hilberträume \mathbf{H} gilt ein einfacheres Kriterium über die Form des Operators A .

2.2.5 Satz (Lumer–Phillips). *Sei \mathbf{H} ein Hilbertraum und $A : \mathbf{H} \supset D(A) \rightarrow \mathbf{H}$ dicht definiert und linear. Dann sind äquivalent*

- (i) A ist Erzeuger einer Kontraktionshalbgruppe $T : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{L}(\mathbf{H})$.
- (ii) A ist maximal dissipativ, das heißt $\text{ran}(1 - A) = \mathbf{H}$ und

$$\text{Re}(Ax, x) \leq 0 \tag{2.33}$$

für alle $x \in D(A)$.

Beweis. (i)⇒(ii) Da $1 \in \rho(A)$ gilt, ist $1 - A$ insbesondere surjektiv. Weiter gilt $\|T(t)x\| \leq \|x\|$ und damit für $x \in D(A)$

$$\operatorname{Re}(Ax, x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re}(T(h)x, x) - \|x\|^2}{h} \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|x\|^2 - \|x\|^2}{h} \leq 0. \quad (2.34)$$

(ii)⇒(i) Wir zeigen, dass automatisch die Charakterisierung des Satzes von Hille–Yosida erfüllt ist. Sei dazu $\mu \in \rho(A)$ mit $\operatorname{Re} \mu > 0$, $x \in D(A)$ und gelte $\mu x - Ax = y$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \mu \|x\|^2 &= \operatorname{Re}(\mu x, x) = \operatorname{Re}(y + Ax, x) = \operatorname{Re}(x, y) + \operatorname{Re}(Ax, x) \\ &\leq \operatorname{Re}(x, y) \leq \|x\| \|y\| \end{aligned} \quad (2.35)$$

und damit $(\operatorname{Re} \mu)\|x\| \leq \|y\|$, also $\|R_A(\mu)\| \leq (\operatorname{Re} \mu)^{-1}$. Das impliziert aber, dass $\rho(A)$ abgeschlossen in der rechten Halbebene $\{\lambda : \operatorname{Re} \lambda > 0\}$ ist. Da die Menge ebenso offen ist und nach dem Satz über den inversen Operator auch $1 \in \rho(A)$ gilt folgt $\{\lambda : \operatorname{Re} \lambda > 0\} \subset \rho(A)$ und die Aussage ist bewiesen. \square

2.2.6 Satz (Stone). Sei $a : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Form und $A : \mathbf{H} \supset D(A) \rightarrow \mathbf{H}$ der zugeordnete Operator. Dann sind äquivalent

(i) A erzeugt eine Operatorgruppe $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbf{H})$ unitärer Operatoren

(ii) Die Form ist antisymmetrisch,

$$a(v, u) + \overline{a(u, v)} = 0, \quad (2.36)$$

und der erzeugte Operator A ist dicht definiert und erfüllt $\operatorname{ran}(1 \pm A) = \mathbf{H}$.

(iii) Der Operator iA ist selbstadjungiert.

Beweis. (i)⇒(ii) Da unitäre Operatoren $\|T(t)\| = 1$ erfüllen sind insbesondere nach dem Satz von Lumer–Phillips (Satz 2.2.5) die Operatoren $\mp A$ maximal dissipativ, insbesondere also $1 \pm A$ surjektiv. Es genügt, die Antisymmetrie zu zeigen. Es gilt für alle $x \in D(A)$

$$0 = \frac{d}{dt} \|T(t)x\|^2 = (AT(t)x, T(t)x) + (T(t)x, AT(t)x) = 2 \operatorname{Re} a(T(t)x, T(t)x), \quad (2.37)$$

also speziell für $t = 0$ damit auch $\operatorname{Re} a(x, x) = 0$. Mit Polarisationslemma 1.2.2 folgt die Behauptung. • (ii)⇒(i) Antisymmetrie impliziert $2 \operatorname{Re} a(u, u) = a(u, u) + \overline{a(u, u)} = 0$ und damit Dissipativität. Damit ist A maximal dissipativ und nach dem Satz von Lumer–Phillips erzeugt A eine Kontraktionshalbgruppe $T_+ : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{L}(\mathbf{H})$. Ebenso erzeugt $-A$ die Halbgruppe $T_- : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{L}(\mathbf{H})$. Da nun aber für $x \in D(A)$

$$u(t) = T(t)x = \begin{cases} T_+(t)x, & t \geq 0 \\ T_-(-t)x, & t \leq 0 \end{cases} \quad (2.38)$$

die eindeutig bestimmte Lösung zu $\dot{u}(t) = Au(t)$ mit $u(0) = x$ sowohl für $t \geq 0$ als auch für $t \leq 0$ mit entsprechenden einseitigen Ableitungen in $t = 0$ ist, ist u für alle t differenzierbar und Lösung der entsprechenden Gleichung. Nun gilt aber

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|^2 = 2 \operatorname{Re} a(u(t), u(t)) = 0 \quad (2.39)$$

und da $D(A) \subset \mathbf{H}$ dicht ist, ist $T(t)$ eine Isometrie auf \mathbf{H} . Weiter gilt auf Grund der Eindeutigkeit der Lösung der Anfangswertprobleme $T(s+t) = T(s)T(t)$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$, also insbesondere $T(-t) = T(t)^{-1}$ und es folgt die Behauptung. • (ii) \Leftrightarrow (iii) Hier verweisen wir auf eine Vorlesung zur Spektraltheorie. In Kapitel 7.1 nutzen wir die Äquivalenz zwischen (i) und (iii) als Definition für Selbstadjungiertheit. \square

2.3 Erste Beispiele

2.3.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und Δ_D der zugeordnete *Dirichlet-Laplace*. Dann erzeugt Δ_D eine Kontraktionshalbgruppe. Dies folgt direkt aus dem Satz von Lumer–Phillips. Einerseits ist die zugeordnete Form $-|u|_{(1)}^2$ negativ und damit offensichtlich dissipativ. Weiter ist die zu $1 - \Delta_D$ zugeordnete Form $\|u\|^2 + |u|_{(1)}^2 = \|u\|_{(1)}^2$ koerziv und $1 - \Delta_D : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ bijektiv. Damit ist aber $1 - \Delta_D : D(\Delta_D) \rightarrow L^2(\Omega)$ surjektiv und die Behauptung folgt.

2.3.2. Das analoge Resultat gilt (fast wortgleich) auch für den *Neumann-Laplace*.

2.3.3. Interessanter für uns sind hyperbolische Differentialgleichungen. Als Beispiel betrachten wir die Gleichung

$$\ddot{u} = \Delta_D u \quad (2.40)$$

zu Anfangsdaten $u(0) = u_0 \in H_0^1(\Omega)$ und $\dot{u}(0) = u_1 \in L^2(\Omega)$. Wir nehmen an, dass Ω beschränkt ist und versehen $H_0^1(\Omega)$ mit der Dirichletform als Innenprodukt. Um die Gleichung auf die richtige Form zu bringen, betrachten wir Vektoren und schreiben

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{u}(t) \\ \Delta_D u(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta_D & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

Der nun in Matrixform geschriebene Operator A wird auf dem Hilbertraum $\mathbf{H} = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ betrachtet und hat die auf dem Formbereich $\mathbf{V} = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ definierte quadratische Form

$$\begin{aligned} a \left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right) &= \left(\begin{pmatrix} v \\ \Delta_D u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right)_{\mathbf{H}} = \int_{\Omega} \nabla v(x) \overline{\nabla u(x)} \, dx + \int_{\Omega} \Delta_D u(x) \overline{v(x)} \, dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla v(x) \overline{\nabla u(x)} \, dx - \int_{\Omega} \nabla u(x) \overline{\nabla v(x)} \, dx. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Diese ist wiederum imaginär, also insbesondere dissipativ. Da die zu

$$1 - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\Delta_D & 1 \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

assoziierte quadratische Form

$$|u|_{(1)}^2 + \|v\|^2 - \int_{\Omega} (\nabla v(x) \overline{\nabla u(x)} - \nabla u(x) \overline{\nabla v(x)}) \, dx \quad (2.44)$$

nicht koerziv ist, müssen wir Surjektivität anders zeigen. Sei also $f \in H_0^1(\Omega)$ und $g \in L^2(\Omega)$. Wir betrachten die beiden Gleichungen $u - v = f$ und $-\Delta_D u + v = g$. Durch Addition erhalten wir $u - \Delta_D u = f + g$, da $1 - \Delta_D : D(\Delta_D) \rightarrow L^2(\Omega)$ surjektiv ist existiert also ein solches $u \in D(\Delta_D) \subset H_0^1(\Omega)$. Mit diesem gilt $v = u - f \in H_0^1(\Omega)$.

Nach dem Satz von Lumer–Phillips existiert also eine Lösungshalbgruppe $T : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{L}(\mathbf{H})$, nach dem Satz von Stone ist diese sogar unitär.

Für unbeschränkte Gebiete Ω ist $H_0^1(\Omega)$ durch die (formal definierte) Vervollständigung von $C_c^\infty(\Omega)$ in der Dirichletform $|\cdot|_{(1)}$, den *Dirichletraum* $\dot{H}_0^1(\Omega)$, zu ersetzen, siehe Kapitel 3.2.

2.3.4. Statt dem Dirichlet-Laplace Δ_D auf einem Gebiet Ω kann man auch den Kirchhoff-Laplace $\Delta_{\mathcal{G}}$ auf einem Graphen \mathcal{G} verwenden und die zugeordnete Wellengleichung

$$\ddot{u} = \Delta_{\mathcal{G}} u, \quad u(0, \cdot) = u_0 \in H^1(\mathcal{G}), \quad \dot{u}(0, \cdot) = u_1 \in L^2(\mathcal{G}) \quad (2.45)$$

untersuchen. Ist der Graph \mathcal{G} beschränkt, so impliziert der Satz von Stone die Existenz einer unitären Lösungsgruppe. Für unbeschränkte Graphen nutzt man eine Umformulierung in analog definierten Energieraum $\dot{H}^1(\mathcal{G}) \times L^2(\mathcal{G})$.

2.3.5. Wir betrachten noch ein andersgeartetes Beispiel, allerdings zuerst in einer Raumdimension für $\Omega = \mathbb{R}_+$. Sei dazu $M = M^* \in \mathbb{C}^{d \times d}$ eine invertierbare selbstadjungierte Matrix. Wir suchen Lösungen zu

$$\dot{u} = M^{-1} \partial_x u \quad (2.46)$$

für eine vektorwertige Funktion $u(t, \cdot) \in H^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^d)$ mit einer noch zu wählender Randbedingung

$$u(t, 0) \in \mathbb{V} \quad (2.47)$$

im linken Endpunkt, welche durch einen Unterraum $\mathbb{V} \subset \mathbb{C}^d$ bestimmt wird. Die $P = M^{-1} \partial_x$ zugeordnete Form

$$p(u, v) = (Pu, v) = \int_0^\infty (M^{-1} u'(x), v(x))_{\mathbb{C}^d} dx, \quad u, v \in H^1(\Omega; \mathbb{C}^d), \quad u(0), v(0) \in \mathbb{V}, \quad (2.48)$$

erfüllt

$$\begin{aligned} p(u, v) + \overline{p(v, u)} &= \int_0^\infty (M^{-1} u'(x), v(x))_{\mathbb{C}^d} + (u(x), M^{-1} v'(x))_{\mathbb{C}^d} dx \\ &= -(M^{-1} u(0), v(0))_{\mathbb{C}^d}. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Wir wählen \mathbb{V} derart, dass für alle $\eta \in \mathbb{V}$ die Identität $(M^{-1} \eta, \eta) = 0$ gilt, die zugeordnete Sesquilinearform also auf \mathbb{V} identisch verschwindet. Dann ist die quadratische Form $p(u, u)$ rein imaginär, $\pm p(u, v)$ also dissipativ. Für maximale Dissipativität bleibt $\text{ran}(P - 1) = L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^d)$ zu zeigen. Sei dazu $h \in L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^d)$ beliebig. Dann ist

$$Pu - u = M^{-1} u' - u = h \quad (2.50)$$

eine gewöhnliche Differentialgleichung. Es ist also $u' - Mu = Mh$ zu lösen. Seien dazu Π_\pm die Spektralprojektoren auf die positiven / negativen Eigenwerte von M . Mit der Duhamelschen Formel folgt für die zugehörige Lösung

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{xM} u(0) + \int_0^x e^{(x-y)M} Mh(y) dy \\ &= e^{xM} \Pi_- u(0) + e^{xM} \left(\Pi_+ u(0) + \int_0^\infty e^{-yM} M \Pi_+ h(y) dy \right) \\ &\quad + \int_0^x e^{(x-y)M} M \Pi_- h(y) dy - \int_x^\infty e^{(x-y)M} M \Pi_+ h(y) dy \end{aligned} \quad (2.51)$$

und es bleibt zu prüfen, ob die Lösung dieser Gleichung quadratintegrierbar ist. Für den ersten und die beiden letzten Summanden ist dies stets gegeben, für den zweiten ergibt sich die analoge Forderung

$$\Pi_+ u(0) = - \int_0^\infty e^{-yM} M \Pi_+ h(y) dy \quad (2.52)$$

und bei entsprechender Wahl von \mathbb{V} muss $u(0)$ durch seine Projektion $\Pi_+ u(0)$ bestimmt sein. Will man weiterhin $\text{ran}(P+1) = L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^d)$ garantieren, so liefert die analoge Argumentation für die Gleichung $u' + Mu = h$

$$\Pi_- u(0) = - \int_0^\infty e^{yM} M \Pi_- h(y) dy \quad (2.53)$$

und der Wert von $u(0) \in \mathbb{V}$ muss ebenso durch die Projektion $\Pi_- u(0)$ eindeutig bestimmt sein. Für \mathbb{V} ergeben sich also drei Bedingungen. Für alle $\eta \in \mathbb{V}$ muss stets $(M^{-1}\eta, \eta) = 0$ gelten. Weiterhin muss $\eta \in \mathbb{V}$ eindeutig durch jede einzelne der Projektionen $\Pi_\pm \eta$ bestimmt sein. Nicht für jede Matrix M sind alle drei Bedingungen erfüllbar. Dazu sollte die Anzahl der negativen Eigenwerte mit der Anzahl der positiven Eigenwerte übereinstimmen.

2.3.6. Wir betrachten auf $\mathbf{H} = L^2(\Omega; \mathbb{C}^d)$ den Operator

$$P = \sum_{j=1}^n A_j \partial_j, \quad (2.54)$$

zu $A_j \in \mathbb{C}^{d \times d}$ mit $A_j = A_j^*$, der zur Form

$$p(u, v) = (Pu, v) = \sum_{j=1}^n \int_\Omega (A_j \partial_j u(x), v(x))_{\mathbb{C}^d} dx \quad (2.55)$$

assoziiert ist. Wegen

$$\begin{aligned} p(u, v) + \overline{p(v, u)} &= \sum_{j=1}^n \int_\Omega (A_j \partial_j u(x), v(x))_{\mathbb{C}^d} + (u(x), A_j \partial_j v(x))_{\mathbb{C}^d} dx \\ &= \sum_{j=1}^n \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\nu}_j(x) (A_j u(x), v(x))_{\mathbb{C}^d} dx = \int_{\partial\Omega} (A_\partial(x) u(x), v(x))_{\mathbb{C}^d} dx \end{aligned} \quad (2.56)$$

mit $\boldsymbol{\nu}(x)$ dem äußeren Normalenvektor an $\partial\Omega$, wählen wir als zusätzliche Randbedingung

$$u(x) \in \mathbb{V}(x), \quad x \in \partial\Omega \quad (2.57)$$

für einen Unterraum $\mathbb{V}(x) \subset \mathbb{C}^d$ mit $(A_\partial(x)v, v)_{\mathbb{C}^d} = 0$ für alle $v \in \mathbb{V}(x)$. Jede Wahl eines solchen Unterraumes liefert eine (in gewissem Sinne) zulässige Randbedingung; jedoch ist nicht für jede dieser Bedingungen der zugeordnete Operator P abgeschlossen und anti-selbstadjungiert, das Anfangswertproblem also lösbar.

Für die Surjektivität von $P \pm 1$ benötigen dazu also einen möglichst großen Definitionsbereich. Dazu fordern wir, dass $\mathbb{V}(x)$ für jedes $x \in \partial\Omega$ maximal ist. Darüberhinaus fordern wir, dass $\mathbb{V}(x)$ glatt von x abhängt. Für Details verweisen wir auf Kapitel 3.2.

3 Wellengleichungen

3.1 Energieerhaltung und Abhängigkeitsgebiete

3.1.1. Wir betrachten zwei Modellprobleme, die jeweils auf Außengebieten $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O}$ für ein kompaktes $\mathcal{O} \Subset \mathbb{R}^n$ mit glattem Rand gegeben sind. Das ist zum Einen die skalare Wellengleichung auf $\mathbb{R} \times \Omega$

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0, \\ u(0, \cdot) = u_0, \quad \partial_t u(0, \cdot) = u_1, \\ \gamma_0 u(t, \cdot) = 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen und Anfangsdaten $u_0 \in H^1(\Omega)$ sowie $u_1 \in L^2(\Omega)$. Die Randbedingungen auf $\partial\Omega$ können ebenso durch Neumann- oder Robin-Bedingungen ersetzt werden.

Als zweites Modell betrachten wir symmetrisch-hyperbolische Systeme auf $\mathbb{R} \times \Omega$

$$\begin{cases} \partial_t u = \sum_{j=1}^n A_j \partial_j u, \\ u(0, \cdot) = u_0, \\ u(t, x) \in \mathbb{V}(x), \quad x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (3.2)$$

für $u_0 \in L^2(\Omega; \mathbb{C}^d)$ und mit selbstadjungierten Matrizen $A_j = A_j^* \in \mathbb{C}^{d \times d}$ und einer glatten die Randbedingungen beschreibenden Familie von Unterräumen $\mathbb{V}(x) \subset \mathbb{C}^d$ derart, dass

$$\sum_{j=1}^n \nu_j(x) (A_j v, v)_{\mathbb{C}^d} = 0, \quad \text{für alle } v \in \mathbb{V}(x) \quad (3.3)$$

mit dem äußeren Normalenfeld ν auf $\partial\Omega$ gilt.

3.1.2. Das erste Modell kann als Spezialfall des zweiten verstanden werden. Dazu betrachte man den Vektor bestehend aus den $n + 1$ Einträgen $\partial_t u, \partial_1 u, \dots, \partial_n u$. Dieser erfüllt

$$\partial_t \begin{pmatrix} \partial_t u \\ \partial_1 u \\ \vdots \\ \partial_n u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \partial_1 & \cdots & \partial_n \\ \partial_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_t u \\ \partial_1 u \\ \vdots \\ \partial_n u \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

und löst damit ein symmetrisch-hyperbolisches System erster Ordnung. Die Dirichlet-Randbedingung impliziert, dass der räumliche Gradient $(\partial_1 u, \dots, \partial_n u)$ als Vektor senkrecht auf $\partial\Omega$ steht und dass $\partial_t u = 0$ gilt. Damit ist die Dirichlet-Randbedingung durch $\mathbb{V}_D(x) = \{0\} \oplus \text{span}_{\mathbb{C}}\{\nu(x)\}$ gegeben. Für die Neumann-Randbedingung wählt man entsprechend $\mathbb{V}_N(x) = \mathbb{V}_D(x)^\perp$.

Setzt man

$$A(\xi) = i \sum_{j=1}^d A_j \xi_j = i \begin{pmatrix} 0 & \xi_1 & \cdots & \xi_n \\ \xi_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

so ergibt sich $\text{rank } A(\xi) = 2$, Eigenwerte von $A(\xi)$ sind neben Null noch $\pm|\xi|$. Der Nullraum $\ker A(\xi)$ ist durch die Integrabilitätsbedingung $\partial_i \partial_j u = \partial_j \partial_i u$ beschrieben.

3.1.3. Bevor wir die allgemeine Lösbarkeit der Probleme untersuchen wollen, betrachten wir vorerst nur glatte Funktionen $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times \bar{\Omega}; \mathbb{C}^d)$ mit $u(t, x) \in \mathbb{V}(t, x)$ für $x \in \partial\Omega$ und setzen

$$f(t, x) = \partial_t u(t, x) - \sum_{j=1}^n A_j(t, x) \partial_j u(t, x) - B(t, x) u(t, x) \quad (3.6)$$

für glatte matrixwertige Funktionen $A_j = A_j^*, B \in C^\infty(\mathbb{R} \times \Omega; \mathbb{C}^{d \times d})$ mit

$$\left\| B(t, x) + B^*(t, x) - \sum_{j=1}^n \partial_j A_j^*(t, x) \right\| \leq 2M. \quad (3.7)$$

Die Gleichung impliziert eine Energieabschätzung. Hat $u(t, \cdot)$ kompakten Träger in $\bar{\Omega}$, so gilt mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \partial_t \int_{\Omega} \|u(t, x)\|_{\mathbb{C}^d}^2 dx &= \int_{\Omega} (\partial_t u(t, x), u(t, x))_{\mathbb{C}^d} + (u(t, x), \partial_t u(t, x))_{\mathbb{C}^d} dx \\ &= \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} 2 \operatorname{Re} (A_j(t, x) \partial_j u(t, x), u(t, x))_{\mathbb{C}^d} dx + \int_{\Omega} ((B(t, x) + B^*(t, x)) u(t, x), u(t, x))_{\mathbb{C}^d} dx \\ &\quad + \int_{\Omega} 2 \operatorname{Re} (f(t, x), u(t, x))_{\mathbb{C}^d} dx \\ &= \sum_{j=1}^n \int_{\partial\Omega} \nu_j(x) (A_j(t, x) u(t, x), u(t, x))_{\mathbb{C}^d} dx \\ &\quad + \int_{\Omega} ((B(t, x) + B^*(t, x) - \sum_j \partial_j A_j^*(t, x)) u(t, x), u(t, x))_{\mathbb{C}^d} dx \\ &\quad + \int_{\Omega} 2 \operatorname{Re} (f(t, x), u(t, x))_{\mathbb{C}^d} dx \\ &= \int_{\Omega} ((B(t, x) + B^*(t, x) - \sum_j \partial_j A_j^*(t, x)) u(t, x), u(t, x))_{\mathbb{C}^d} dx + \int_{\Omega} 2 \operatorname{Re} (f(t, x), u(t, x))_{\mathbb{C}^d} dx. \end{aligned}$$

und somit

$$|\partial_t \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}| \leq \|f(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} + M \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}, \quad (3.8)$$

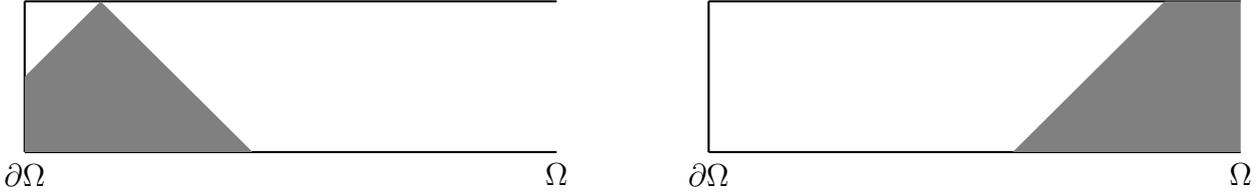


Abbildung 3.1: Abhängigkeitsgebiete: Wenn die Daten u_0 und f im markierten Gebiet Null sind, so ist dort auch die Lösung Null.

insbesondere also für alle $t \geq 0$ unter Ausnutzung der Gronwallschen Ungleichung

$$\begin{aligned}
 & \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \\
 & \leq \|u(0, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \|f(s, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \, d\sigma + \int_0^t M e^{(t-s)M} \int_0^s \|f(\sigma, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \, d\sigma \, ds \\
 & = \|u(0, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \|f(s, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \, d\sigma + \int_0^t M e^{(t-s)M} \|f(\sigma, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \int_\sigma^t M e^{(t-s)M} \, ds \, d\sigma \quad (3.9) \\
 & = \|u(0, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} + \int_0^t e^{(t-\sigma)M} \|f(\sigma, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \, d\sigma \leq \|u(0, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} + C_T \|f\|_{L^2(S)}
 \end{aligned}$$

mit $S = [0, T] \times \Omega$ und für beliebige $t \in [0, T]$. Dabei hängt C_T von T ab.

3.1.4. Wir hätten in der vorherigen Argumentation nicht über ganz Ω integrieren müssen. Die Argumentation funktioniert analog, wenn die zusätzlich auftretenden Randterme negativ sind. Sei dazu $\Omega_t = \Omega \cap B_{R-ct}(x_0)$ für einen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$, einen Parameter $R > 0$ und noch wählendes $c > 0$. Dann gilt mit $\boldsymbol{\mu} = x - x_0/|x - x_0|$

$$\begin{aligned}
 & \partial_t \int_{\Omega_t} \|u(t, x)\|_{\mathbb{C}^d}^2 \, dx \\
 & = \sum_{j=1}^d \int_{\partial\Omega \cap B_{R-ct}(x_0)} \boldsymbol{\nu}_j(x) (A_j(t, x) u(t, x), u(t, x))_{\mathbb{C}^d} \, dx \\
 & \quad + \int_{\Omega \cap \partial B_{R-ct}(x_0)} \left(\sum_{j=1}^n \boldsymbol{\mu}_j A_j(t, x) u(t, x), u(t, x) \right)_{\mathbb{C}^d} - c \|u(t, x)\|_{\mathbb{C}^d}^2 \, dx \quad (3.10) \\
 & \quad + \int_{\Omega} \left((B(t, x) + B^*(t, x) - \sum_j \partial_j A_j^*(t, x)) u(t, x), u(t, x) \right)_{\mathbb{C}^d} \, dx \\
 & \quad + \int_{\Omega} 2 \operatorname{Re} (f(t, x), u(t, x))_{\mathbb{C}^d} \, dx \\
 & \quad | \dots | \leq 2 \|f(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega_t)} \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega_t)} + 2M \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega_t)}^2
 \end{aligned}$$

falls $c > \|\sum_{j=1}^n \boldsymbol{\mu}_j A_j\|$. Die Lösung im Punkt x_0 hängt also nur von der rechten Seite f in einem Kegel unterhalb von x_0 und den Anfangsbedingungen in der Kegelbasis ab. Man spricht vom Abhängigkeitsgebiet der Lösung. Die Existenz von Abhängigkeitsgebieten ist typisch für hyperbolische Evolutionsprobleme.

3.2 Lösbarkeit

3.2.1. Wir betrachten Lösungen zu (3.2) im Energieraum $L^2(\Omega; \mathbb{C}^d)$ und definieren uns verschiedene Lösungsbegriffe. Wir suchen dabei Lösungen nur auf einem endlichen Zeitintervall $[0, T]$ und bezeichnen mit $S = [0, T] \times \Omega$ den Streifen, auf welchem wir die Lösungen betrachten. Darüberhinaus versehen wir die Gleichung mit einer rechten Seite,

$$\begin{cases} Lu := \partial_t u - \sum_{j=1}^n A_j(t, x) \partial_j u - B(t, x)u = f, & \text{in } S, \\ u(0, \cdot) = u_0, & \text{auf } \{0\} \times \Omega, \\ u(t, x) \in \mathbb{V}(t, x), & \text{auf } [0, T] \times \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.11)$$

Die matrixwertigen Funktionen $A_j = A_j^*, B \in C^\infty(\bar{S}; \mathbb{C}^{d \times d}) \cap L^\infty(S; \mathbb{C}^{d \times d})$ erfüllen (3.7). Die Familie der Unterräume $\mathbb{V}(t, x) \subset \mathbb{C}^d$ sei glatt in $x \in \partial\Omega$ und $t \in \mathbb{R}$ und erfülle (3.3).

3.2.2 Definition. (i) Eine Funktion $u \in C^2(\bar{S}; \mathbb{C}^d)$ heißt *klassische Lösung* von (3.11) zu gegebener rechter Seite $f \in C(\bar{S}; \mathbb{C}^d)$ und Anfangsdaten $u_0 \in C^2(\bar{\Omega}; \mathbb{C}^d)$, falls die Gleichung sowie wie ihre Anfangs- und Randbedingung jeweils punktweise erfüllt sind.

(ii) Eine Funktion $u \in L^2(S; \mathbb{C}^d)$ heißt *starke Lösung* von (3.11) zu gegebener rechter Seite $f \in L^2(S; \mathbb{C}^d)$ und Anfangsdaten $u_0 \in L^2(\Omega; \mathbb{C}^d)$, falls es Folgen $u^{(k)}, f^{(k)} \in C^\infty(\bar{S}; \mathbb{C}^d) \cap L^2(S; \mathbb{C}^d)$ und $u_0^{(k)} \in C^\infty(\bar{\Omega}; \mathbb{C}^d) \cap L^2(\Omega; \mathbb{C}^d)$ mit

$$\begin{aligned} u^{(k)} &\rightarrow u, & f^{(k)} &\rightarrow f & \text{in } L^2(S; \mathbb{C}^d) \\ u_0^{(k)} &\rightarrow u_0 & & & \text{in } L^2(\Omega; \mathbb{C}^d) \end{aligned} \quad (3.12)$$

derart gibt, dass $u^{(k)}$ klassische Lösung des Problems zur rechten Seite $f^{(k)}$ und zu Anfangsdaten $u_0^{(k)}$ ist.

(iii) Eine Funktion $u \in L^2(S; \mathbb{C}^d)$ heißt *schwache Lösung* von (3.11) zu gegebener rechter Seite $f \in L^2(S; \mathbb{C}^d)$ und Anfangsdaten $u_0 \in L^2(\Omega; \mathbb{C}^d)$, falls für jedes $\varphi \in C_c^\infty(\bar{S}; \mathbb{C}^d)$ mit $(\{T\} \times \Omega) \cap \text{supp } \varphi = \emptyset$ und $\varphi(t, x) \in \mathbb{V}(x)$ für $x \in \partial\Omega$

$$\begin{aligned} \int_S (f(t, x), \varphi(t, x))_{\mathbb{C}^d} dt dx &= - \int_S (u(t, x), L^* \varphi(t, x))_{\mathbb{C}^d} dt dx \\ &+ \int_\Omega (u_0(x), \varphi(0, x))_{\mathbb{C}^d} dx \end{aligned} \quad (3.13)$$

mit

$$L^* \varphi(t, x) = \partial_t \varphi(t, x) - \sum_{j=1}^n A_j^*(t, x) \partial_j \varphi(t, x) - B^*(t, x) \varphi(t, x) \quad (3.14)$$

gilt.

Klassische Lösungen erfüllen Energieabschätzungen, dies haben wir im letzten Abschnitt gesehen. Also gilt insbesondere folgendes Lemma.

3.2.3 Lemma. Für jede starke Lösung u zu (3.11) gilt

$$\|u\|_{L^2(S)} \leq C_1 \|u_0\|_{L^2(\Omega)} + C_2 \|f\|_{L^2(S)}. \quad (3.15)$$

Beweis. Ergibt sich direkt durch Grenzwertbildung $k \rightarrow \infty$ aus der entsprechenden Abschätzung für klassische Lösungen. \square

3.2.4 Lemma (Friedrichs, Lax–Phillips). *Schwache Lösungen zu (3.11) sind eindeutig durch ihre Daten bestimmt.*

Beweisskizze. Wir beschränken uns vorerst auf $\Omega = \mathbb{R}_+^n = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1}$. Sei u eine schwache Lösung zu Anfangsdaten $u_0 = 0$ und rechter Seite $f = 0$. Die Idee besteht nun darin, diese zu regularisieren. Sei dazu $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ mit $\text{supp } \psi \subset [-1, 1]$, $\psi \geq 0$ und $\int \psi(r) dr = 1$. Sei weiter

$$\psi_\varepsilon(t, x) = \varepsilon^{-n-1} \psi\left(\frac{t+2\varepsilon}{\varepsilon}\right) \psi\left(\frac{x_1+2\varepsilon}{\varepsilon}\right) \prod_{j=2}^n \psi\left(\frac{x_j}{\varepsilon}\right) \quad (3.16)$$

und

$$u^{(\varepsilon)}(t, x) = J_\varepsilon u(t, x) = \int_S u(s, y) \psi_\varepsilon(t-s, x-y) ds dy. \quad (3.17)$$

Dann ist $u^{(\varepsilon)} \in C^\infty(\bar{S}; \mathbb{C}^d) \cap L^2(S; \mathbb{C}^d)$ und $u^{(\varepsilon)}(t, x) = 0$ für $t \leq \varepsilon$ beziehungsweise $x_1 \leq \varepsilon$. Weiterhin gilt für jede Testfunktion $\varphi \in C_c^\infty(\bar{S})$ mit $\text{supp } \varphi \cap \{t = T\} = \emptyset$

$$\int_S (\varphi, Lu^{(\varepsilon)})_{\mathbb{C}^d} = \int_S (\varphi, LJ_\varepsilon u)_{\mathbb{C}^d} = \int_S (L^* J_\varepsilon^* \varphi, u)_{\mathbb{C}^d} + \int_S (\varphi, [L, J_\varepsilon]u)_{\mathbb{C}^d} \quad (3.18)$$

mit dem Kommutator $[L, J_\varepsilon] = L \circ J_\varepsilon - J_\varepsilon \circ L$. Da u schwache Lösung zu Nulldaten war, verschwindet das erste Integral. Damit löst $u^{(\varepsilon)}$ aber

$$Lu^{(\varepsilon)} = [L, J_\varepsilon]u, \quad u^{(\varepsilon)}(0, \cdot) = 0, \quad u^{(\varepsilon)}|_{\partial\Omega} = 0 \quad (3.19)$$

schwach, da die Funktion glatt ist insbesondere auch klassisch. Damit gilt aber

$$\|u^{(\varepsilon)}\|_{L^2(S; \mathbb{C}^d)} \leq \|[L, J_\varepsilon]u\|_{L^2(S; \mathbb{C}^d)}. \quad (3.20)$$

Es bleibt, den Kommutator $[L, J_\varepsilon]$ genauer zu untersuchen und zu zeigen, dass dieser für $\varepsilon \rightarrow 0$ stark in $L^2(S; \mathbb{C}^d)$ gegen Null strebt. Der Kommutator ist ein Integraloperator mit Kern

$$\begin{aligned} & \sum_j (A_j(t, x) - A_j(s, y)) \partial_{x_j} \psi_\varepsilon(t-s, x-y) \\ & + \left(\sum_j \partial_{y_j} A_j(s, y) + (B(t, x) - B(s, y)) \right) \psi_\varepsilon(t-s, x-y). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Da A_j, B und $\partial_j A_j$ jeweils gleichmäßig beschränkt sind, implizieren die Eigenschaften von ψ die gleichmäßige Beschränktheit des Operators in der Norm. Wendet man den Operator nun auf glatte Funktionen u mit kompaktem Träger an, so werden die Terme mit B zu $\mathcal{O}(\varepsilon)$ -Termen. Die zweite Zeile strebt für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen $\sum_j (\partial_j A_j)u$ und die erste Zeile entsprechend gegen $\sum_j (A_j \partial_j u - (\partial_j A_j)u) = -\sum_j (\partial_j A_j)u$. Für Details dazu verweisen wir auf K.O. Friedrichs¹. \square

3.2.5 Satz. *Das Problem (3.11) besitzt zu jedem $f \in L^2(S; \mathbb{C}^d)$ und jedem $u_0 \in L^2(\Omega; \mathbb{C}^d)$ eine (eindeutig bestimmte) starke Lösung $u \in L^2(S; \mathbb{C}^d)$. Insbesondere ist jede schwache Lösung stark.*

¹K.O. Friedrichs, *Symmetric hyperbolic linear differential equations*, Comm. Pure Appl. Math. 1954, 345-392

Beweis. Sei

$$W = \{(f, u_0) \in L^2(S; \mathbb{C}^d) \times L^2(\Omega; \mathbb{C}^d) : (3.11) \text{ hat starke Lsg.}\} \quad (3.22)$$

Dann ist W abgeschlossen (das war die Definition der schwachen Lösung). Es genügt zu zeigen, dass W dicht ist. Sei dazu $(g, v_0) \in W^\perp$. Dann gilt für jede Funktion $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^{1+n})$ mit $\varphi(t, x) \in \mathbb{V}(t, x)$ für $x \in \partial\Omega$

$$(L\varphi, g)_{L^2(S)} + (\varphi(0, \cdot), v_0)_{L^2(\Omega)} = 0. \quad (3.23)$$

Ist zusätzlich $\text{supp } \varphi \cap \{t = T\} = \emptyset$, so heißt das aber ja gerade, dass g das rückwärtsgerichtete Problem

$$L^*g = 0, \quad g(T, \cdot) = 0 \quad (3.24)$$

mit $g(t, x) \in \mathbb{V}(t, x)$ auf $\partial\Omega$ schwach löst. Dieses erfüllt aber wiederum alle Voraussetzungen und besitzt somit die eindeutige Lösung $g = 0$. Also folgt

$$0 = (L\varphi, g)_{L^2(S)} + (\varphi(0, \cdot), v_0)_{L^2(\Omega)} = (\varphi(0, \cdot), v_0)_{L^2(\Omega)} \quad (3.25)$$

für jedes φ und damit $v_0 = 0$ in $L^2(\Omega)$. □

3.3 Zerlegung in ebene Wellen

3.3.1. Wir betrachten wieder das symmetrisch-hyperbolische System

$$\partial_t u = \sum_{j=1}^n A_j \partial_j u, \quad (3.26)$$

nun allerdings auf dem gesamten \mathbb{R}^n ; wir suchen also Lösungen im $C(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^d))$ zu Anfangsdaten $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^d)$. Unser Ziel ist es, eine explizite Lösungsformel anzugeben. Dazu betrachten wir spezielle Lösungen der Form

$$u(t, x) = h(x \cdot \omega - ct), \quad h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^d, \quad (3.27)$$

mit $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ und $c \in \mathbb{R}$. Die Lösungen haben also die Form von mit Geschwindigkeit c in Richtung ω laufenden Wellen. Eingesetzt in die Gleichung liefert dies

$$\left(\sum_{j=1}^n A_j \omega_j + c \right) h'(x \cdot \omega - ct) = 0, \quad (3.28)$$

die Zahl $-c$ muss also ein Eigenwert der Matrix $A(\omega) := \sum_{j=1}^n A_j \omega_j$ sein. Darüberhinaus muss h' und damit h Werte im Eigenunterraum $\ker(A(\omega) + c)$ annehmen. Eine Lösung dieser Form wird als *ebene Welle* bezeichnet.

Um allgemeine Lösungen zu konstruieren, versuchen wir diese als Linearkombination ebener Wellen zu schreiben. Der Ansatz liefert

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \sum_{j=1}^d h_j(x \cdot \omega - c_j(\omega)t, \omega) d\omega \quad (3.29)$$

mit $-c_j(\omega)$ als j -tem Eigenwert von $A(\omega)$ und $h_j(s, \omega) \in \ker(A(\omega) + c_j(\omega))$ für alle $s \in \mathbb{R}$ und $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$. Zumindest auf einem formalen Level löst jede solche Funktion das symmetrisch-hyperbolische System. Es bleibt die Wahl der h_j , dazu nutzt man die Anfangsbedingungen in der Form

$$u_0(x) = u(0, x) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \sum_{j=1}^d h_j(x \cdot \omega, \omega) d\omega = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} h(x \cdot \omega, \omega) d\omega \quad (3.30)$$

zur Bestimmung der vektorwertigen Funktion $h = \sum_j h_j$ und zerlegt diese danach in der Eigenbasis von $A(\omega)$.

3.3.2. Die Zerlegung der Anfangsdaten geschieht mittels der *Radontransformation* und ihrer Inversionsformel. Wir fassen diese kurz zusammen. Die Darstellung folgt [3, Kapitel 3.5] und beschränkt sich auf ungerade Raumdimensionen.

Für eine Funktion $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$, $r \in \mathbb{R}$, definieren wir die Radontransformierte

$$\mathcal{R}f(r, \omega) = \int_{\{x : x \cdot \omega = r\}} f(x) d'x, \quad (3.31)$$

das Integral jeweils bezüglich des $n - 1$ -dimensionalen Lebesguemaßes. Dann gilt

Lemma. (i) *Jede Radontransformierte ist gerade, $\mathcal{R}f(r, \omega) = \mathcal{R}f(-r, -\omega)$.*

(ii) *Es gilt die Inversionsformel*

$$f(x) = \frac{1}{2(2\pi i)^{n-1}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \partial_r^{n-1} \mathcal{R}f(r, \omega) \Big|_{r=x \cdot \omega} d\omega \quad (3.32)$$

(iii) *Mit $h = \mathcal{R}f$ gilt die Plancherelidentität*

$$\int |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2(2\pi)^{n/2}} \int |\partial_r^{(n-1)/2} h(r, \omega)|^2 dr d\omega. \quad (3.33)$$

Wir nutzen diese, die Transformation stetig auf ganz $L^2(\Omega)$ fortzusetzen.

(iv) *Jede gerade Funktion $h(r, \omega)$ mit $\partial_r^{(n-1)/2} h \in L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1})$ ist Radontransformierte einer Funktion f aus $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

(v) $\mathcal{R}[\Delta f](r, \omega) = \partial_r^2 \mathcal{R}f(r, \omega)$.

Beweis. (i) ist klar nach Definition. • (ii) bedarf des Nachrechnens. Wir nutzen die Fouriersche Inversionsformel und schreiben zuerst die Fouriertransformation selbst als

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= (2\pi)^{-n/2} \int e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx = (2\pi)^{-n/2} \int e^{-i\rho x \cdot \omega} f(x) dx \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\rho r} \left(\int_{\{x : x \cdot \omega = r\}} f(x) d'x \right) dr \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\rho r} \mathcal{R}f(r, \omega) dr \end{aligned} \quad (3.34)$$

für $\xi = \rho\omega$, $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ und $\rho = |\xi| \geq 0$. Also gilt unter Verwendung von Polarkoordination

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (2\pi)^{-n/2} \int e^{ix \cdot \xi} \widehat{f}(\xi) \, d\xi = (2\pi)^{-n/2} \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{i\rho x \cdot \omega} \widehat{f}(\rho\omega) \, d\omega \rho^{n-1} \, d\rho \\
 &= (2\pi)^{-n} \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_{-\infty}^\infty e^{i\rho x \cdot \omega} e^{-i\rho r} \mathcal{R}f(r, \omega) \, dr \, d\omega \rho^{n-1} \, d\rho \\
 &= \frac{(2\pi)^{-n}}{2} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{i\rho x \cdot \omega} e^{-i\rho r} \mathcal{R}f(r, \omega) \, dr \rho^{n-1} \, d\rho \, d\omega \\
 &= \frac{(2\pi)^{1-n}}{2} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} (i\partial_r)^{n-1} \mathcal{R}f(r, \omega) \Big|_{r=x \cdot \omega} \, d\omega
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

und der Fourierschen Inversionsformel im Eindimensionalen. Beim Verdoppeln des Integrals wird genutzt, dass die Radontransformierte stets gerade ist. • (iii) folgt analog, indem wir Plancherel für die Fouriertransformation anwenden. Es gilt also

$$\begin{aligned}
 \int |f(x)|^2 \, dx &= \int |\widehat{f}(\xi)|^2 \, d\xi \\
 &= (2\pi)^{-n/2} \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left| \int_{-\infty}^\infty e^{-i\rho r} \mathcal{R}f(r, \omega) \, dr \right|^2 \, d\omega \rho^{n-1} \, d\rho \\
 &= \frac{1}{2(2\pi)^{n/2}} \int_{-\infty}^\infty \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\partial_r^{(n-1)/2} \mathcal{R}f(r, \omega)|^2 \, d\omega \, dr
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

unter Ausnutzung von Plancherel im Eindimensionalen. • (iv) folgt durch Einsetzen. • (v) durch einfaches Nachrechnen. \square

3.3.3. Damit kann man das Problem vom Beginn wieder aufgreifen und

$$\partial_t u = \sum_{j=2}^n A_j \partial_j u \tag{3.37}$$

zu Anfangsdaten $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^d)$ lösen. Dazu fordern wir, dass für $\xi \neq 0$ die Matrix $A(\xi) = \sum_j A_j \xi_j$ paarweise verschiedene reelle Eigenwerte $-c_j(\xi)$ besitzt. Sei weiter $\Pi_j(\xi)$ der zugehörige Eigenprojektor.

In einem ersten Schritt setzen wir

$$h(r, \omega) = \frac{1}{2(2\pi i)^{n-1}} \partial_r^{n-1} \mathcal{R}u_0(r, \omega), \quad h_j(r, \omega) = \Pi_j(\omega) h(r, \omega). \tag{3.38}$$

Dann gilt nach der Radonschen Inversionsformel

$$u_0(x) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} h(x \cdot \omega, \omega) \, d\omega \tag{3.39}$$

und darüberhinaus ergibt sich die Lösung

$$u(t, x) = \sum_{j=1}^d \int_{\mathbb{S}^{n-1}} h_j(x \cdot \omega - c_j(\omega)t, \omega) \, d\omega. \tag{3.40}$$

3.3.4 Korollar (Huygensprinzip). Sei $c = \max_{j,\omega} |c_j(\omega)|$. Sei weiter $\text{supp } u_0 \subset B_R$. Dann gilt

$$u(t, x) = 0 \tag{3.41}$$

für $|x| < ct - R$ und $ct > R$.

4 Streutheorie nach Lax und Phillips

4.1 Notation und Annahmen

4.1.1. Sei \mathbf{H} ein Hilbertraum und $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbf{H})$ stark stetige unitäre Gruppe von Operatoren, gelte also

$$U(s+t) = U(s)U(t) = U(t)U(s) \quad (4.1)$$

für alle $s, t \in \mathbb{R}$ zusammen mit

$$U(-t) = U(t)^{-1} = U(t)^* \quad (4.2)$$

und

$$\text{s-lim}_{t \rightarrow 0} U(t) = I. \quad (4.3)$$

Als Beispiele werden für uns Lösungsoperatoren hyperbolischer Evolutionsprobleme im Energieraum eine Rolle spielen; weitere Beispiele ergeben sich aus der Quantenmechanik oder als Anwendungen der Streutheorie auf spezielle Modellprobleme.

4.1.2 (Annahmen). In diesem Kapitel treffen wir Annahmen für die gegebene unitäre Operatorgruppe $U(t)$ sowie zwei abgeschlossene Teilräume $\mathbf{F}_\pm \subset \mathbf{H}$, die als Räume ein- beziehungsweise auslaufender Wellen interpretiert werden können.

(U1₊) Der Teilraum \mathbf{F}_+ ist vorwärtsinvariant, $U(t)\mathbf{F}_+ \subset \mathbf{F}_+$ für alle $t \geq 0$, sowie

$$\bigcap_{t \in \mathbb{R}} U(t)\mathbf{F}_+ = \{0\}, \quad \bigvee_{t \in \mathbb{R}} U(t)\mathbf{F}_+ := \overline{\text{span}} \bigcup_{t \in \mathbb{R}} U(t)\mathbf{F}_+ = \mathbf{H}. \quad (4.4)$$

(U1₋) Der Teilraum \mathbf{F}_- ist rückwärtsinvariant, $U(t)\mathbf{F}_- \subset \mathbf{F}_-$ für alle $t \leq 0$, sowie

$$\bigcap_{t \in \mathbb{R}} U(t)\mathbf{F}_- = \{0\}, \quad \bigvee_{t \in \mathbb{R}} U(t)\mathbf{F}_- := \overline{\text{span}} \bigcup_{t \in \mathbb{R}} U(t)\mathbf{F}_- = \mathbf{H}. \quad (4.5)$$

(U2) Es gilt $\mathbf{F}_+ \perp \mathbf{F}_-$.

Mit Ausnahme von Abschnitt 4.2 werden wir in diesem Kapitel stets annehmen, dass eine unitäre Gruppe $U(t)$ zusammen mit einem Paar von paarweise orthogonalen invarianten Teilräumen $\mathbf{F}_+, \mathbf{F}_-$ gegeben ist.

4.1.3 Beispiel. Betrachtet man die Wellengleichung auf einem Außengebiet des \mathbb{R}^n , n ungerade, und ihre Lösungsgruppe $U(t)$ im Energieraum, so kann man \mathbf{F}_+ als Cauchydaten für auf $\{|x| \leq R+t\}$ verschwindende und \mathbf{F}_- für auf $\{|x| \leq R-t\}$ verschwindende Lösungen auffassen. Diese Räume sind uns bei der Diskussion der Abhängigkeitskegel schon einmal begegnet.

4.1.4. Alternativ betrachten wir ein diskretes Modell, welches einfacher zu untersuchen ist. Dazu sei $U \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ unitär und $\mathbf{F} \subset \mathbf{H}$ ein abgeschlossener Teilraum mit

(D)

$$U\mathbf{F} \subset \mathbf{F}, \quad \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} U^k \mathbf{F} = \{0\}, \quad \bigvee_{k \in \mathbb{Z}} U^k \mathbf{F} = \mathbf{H}. \quad (4.6)$$

Als Beispiel könnte man an $U = U(1)$ und $\mathbf{F} = \mathbf{F}_+$ unter der Annahme $(U\mathbf{1}_+)$ denken.

4.2 Funktionale Modelle im diskreten Modellfall

In diesem Abschnitt setzen wir Annahme **(D)** voraus.

4.2.1 Satz. *Angenommen **(D)** gilt. Dann existiert ein Hilbertraum \mathbf{N} und eine unitäre Abbildung*

$$\mathbf{H} \xrightarrow{\simeq} \ell^2(\mathbb{Z}; \mathbf{N}) = \ell^2(\mathbb{Z}) \widehat{\otimes} \mathbf{N} \quad (4.7)$$

derart, dass U dem Shiftoperator

$$(x_k)_{k \in \mathbb{Z}} \mapsto (x_{k+1})_{k \in \mathbb{Z}} \quad (4.8)$$

auf $\ell^2(\mathbb{Z}; \mathbf{N})$ entspricht. Weiterhin gilt unter dieser unitären Abbildung $\mathbf{F} \xrightarrow{\simeq} \ell^2(\mathbb{N}_0; \mathbf{N})$.

Beweis. Schritt 1: Sei $\mathbf{N} = \mathbf{F} \ominus U\mathbf{F} = \mathbf{F} \cap (U\mathbf{F})^\perp$. Dann gilt $U\mathbf{N} = U\mathbf{F} \ominus U^2\mathbf{F} \perp \mathbf{F} \ominus U\mathbf{F} = \mathbf{N}$ und somit

$$\mathbf{F} = \mathbf{N} \oplus U\mathbf{F} = \left(\bigoplus_{k=0}^{N-1} U^k \mathbf{N} \right) \oplus U^N \mathbf{F}. \quad (4.9)$$

Da $\bigcap_{N} U^N \mathbf{F} = \{0\}$ gilt, folgt

$$\mathbf{F} = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}_0} U^k \mathbf{N} \quad (4.10)$$

und jedes Element $x \in \mathbf{F}$ ist als Orthogonalreihe

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} U^k x_k \quad (4.11)$$

mit Koeffizienten $x_k \in \mathbf{N}$ darstellbar. Da U unitär ist, gilt insbesondere

$$\|x\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \|U^k x_k\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\|^2 \quad (4.12)$$

und somit $\mathbf{F} \simeq \ell^2(\mathbb{N}_0; \mathbf{N})$. Nach Konstruktion entspricht U dabei dem Linksshift

$$(x_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \longrightarrow (x_{k+1})_{k \in \mathbb{N}_0}. \quad (4.13)$$

Schritt 2: In einem zweiten Schritt nutzen wir U^* um die unitäre Abbildung auf

$$U^{-M} \mathbf{F} \xrightarrow{\simeq} \ell^2(\{k \geq -M\}; \mathbf{N}) \quad (4.14)$$

für jedes $M \in \mathbb{N}$ fortzusetzen. Vereinigung über alle M liefert

$$\mathbf{H} = \bigvee_{M \in \mathbb{N}} U^{-M} \mathbf{F} \xrightarrow{\simeq} \ell^2(\mathbb{Z}; \mathbf{N}) \quad (4.15)$$

und der Satz ist bewiesen. \square

4.2.2. Der Teilraum $\ell^2(\mathbb{N}_0; \mathbf{N})$ entspricht auf natürliche Weise einem Raum \mathbf{N} -wertiger holomorpher Funktionen auf der Einheitskreisscheibe $\mathbb{D} = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\}$. Dazu nutzen wir die Abbildung

$$(x_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \longrightarrow F(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \zeta^k. \quad (4.16)$$

Da $\sum_k \|x_k\|^2 < \infty$ ist, konvergiert die Reihe lokal gleichmäßig bezüglich $\zeta \in \mathbb{D}$ im Hilbertraum \mathbf{N} und definiert somit eine Funktion $F : \mathbb{D} \rightarrow \mathbf{N}$. Weiter ist für jedes $y \in \mathbf{N}$ die skalarwertige Funktion

$$\zeta \mapsto (F(\zeta), y) = \sum_{k=0}^{\infty} (x_k, y) \zeta^k \quad (4.17)$$

analytisch in \mathbb{D} , die Funktion $F : \mathbb{D} \rightarrow \mathbf{N}$ also schwach analytisch. Wir bezeichnen die Menge der auf \mathbb{D} definierten, \mathbf{N} -wertigen schwach analytischen Funktionen mit $\mathfrak{A}(\mathbb{D}; \mathbf{N})$. Als Bild unter obiger Abbildung ergibt sich ein Hilbertraum holomorpher Funktionen, die Abbildung selbst ist unitär, wie nachfolgendes Lemma zeigt.

Lemma. Seien $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}, (y_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \in \ell^2(\mathbb{N}_0; \mathbf{N})$ und $F, G \in \mathfrak{A}(\mathbb{D}; \mathbf{N})$ die zugehörigen holomorphen Funktionen. Dann gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\|^2 = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \|F(\zeta)\|^2 \frac{d\zeta}{\zeta} \quad (4.18)$$

sowie

$$\sum_{k=0}^{\infty} (x_k, y_k) = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} (F(\zeta), G(\zeta)) \frac{d\zeta}{\zeta}. \quad (4.19)$$

Beweis. Anwendung des Satzes über die majorisierte Konvergenz. \square

Notation: Wir bezeichnen die Menge der schwach holomorphen Funktionen auf \mathbb{D} mit quadratintegrierbaren Taylorkoeffizienten als *Hardyraum*, $\mathcal{H}^2(\mathbb{D}; \mathbf{N})$. Weiter sei $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$ der Rand der komplexen Einheitskreisscheibe und $L^2(\mathbb{T})$ der Raum der quadratintegrierbaren Funktionen auf \mathbb{T} bezüglich des normierten Kurvenmaßes.

4.2.3 Satz (Diskretes funktionales Modell). *Angenommen, es gilt (D). Dann existiert ein Hilbertraum \mathbf{N} und eine unitäre Äquivalenz*

$$\mathbf{H} \xrightarrow{\simeq} L^2(\mathbb{T}; \mathbf{N}), \quad (4.20)$$

deren Einschränkung auf \mathbf{F} zu einer unitären Äquivalenz

$$\mathbf{F} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{H}^2(\mathbb{D}; \mathbf{N}) \quad (4.21)$$

führt und unter der der Operator U dem Multiplikationsoperator mit der Variablen ζ entspricht.

Beweis. Ergibt sich aus Satz 4.2.1 zusammen mit der Konstruktion des Hardyraumes. \square

4.2.4. Schematisch zusammengefasst haben wir damit drei Formulierungen desselben Problems. Einerseits betrachten wir einen Hilbertraum \mathbf{H} zusammen mit einer unitären Abbildung U und einem Teilraum \mathbf{F} . Dem zugeordnet ist ein Modell als Shiftoperator auf $\ell^2(\mathbb{Z})$ mit ausgezeichnetem Teilraum ℓ^2 sowie ein funktionales Modell im $L^2(\mathbb{T})$ mit Teilraum $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ und Multiplikation mit der Variablen ζ als unitärer / isometrischer Abbildung.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{H} & & \ell^2(\mathbb{Z}; \mathbf{N}) & & L^2(\mathbb{T}; \mathbf{N}) \\ \mathbf{F} & \longrightarrow & \ell^2(\mathbb{N}_0; \mathbf{N}) & \longrightarrow & \mathcal{H}^2(\mathbb{D}; \mathbf{N}) \\ U & & \text{Shift} & & \text{Multiplikation mit } \zeta \end{array} \quad (4.22)$$

In einem nächsten Schritt sollen entsprechende Modelle für unitäre Gruppen $U(t)$ unter den Annahmen $(\mathbf{U1}_\pm)$ konstruiert werden. Hier werden statt direkter Summen direkte Integrale (also hilbertraumwertige L^2 -Räume) auftreten.

4.3 Funktionale Modelle im kontinuierlichen Fall

Als erstes konstruieren wir die Translationsdarstellung einer unitären Gruppe. Das Translationsmodell ist bis auf unitäre Äquivalenz eindeutig.

4.3.1 Satz (Sinai). *Angenommen $(\mathbf{U1}_-)$ gilt. Dann existiert ein Hilbertraum \mathbf{N} und eine unitäre Abbildung*

$$\mathbf{H} \xrightarrow{\simeq} L^2(\mathbb{R}; \mathbf{N}), \quad (4.23)$$

deren Einschränkung auf \mathbf{F}_-

$$\mathbf{F}_- \xrightarrow{\simeq} L^2(\mathbb{R}_-; \mathbf{N}) \quad (4.24)$$

liefert und welche die unitären Operatoren $U(t)$ auf Translationen $f \mapsto f(\cdot - t)$ abbildet. Die Darstellung ist bis auf eine konstante unitäre Abbildung $\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ eindeutig bestimmt.

Beweis. Der Beweis verläuft ähnlich dem diskreten Fall und folgt einer Idee von Lax und Phillips¹.

Schritt 1: Sei $P : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{F}_-$ der Orthogonalprojektor auf den Teilraum \mathbf{F}_- und bezeichne $S(t) = PU(t)$. Dann ist $S : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{L}(\mathbf{F}_-)$ eine stark stetige Kontraktionshalbgruppe. Die Halbgruppeneigenschaft folgt, da für jedes $x \in \mathbf{F}_-$ und $t \in \mathbb{R}$ mit einem passenden $y \in \mathbf{F}_\perp$ und unter Ausnutzung von $U(s) : \mathbf{F}_\perp \rightarrow \mathbf{F}_\perp$ für $s \geq 0$

$$\begin{aligned} S(s)S(t)x &= PU(s)PU(t)x = PU(s)(U(t)x + y) \\ &= PU(s+t)x + PU(s)y = S(s+t)x \end{aligned} \quad (4.25)$$

gilt. Ebenso folgt nach Definition

$$S(t)U(-s) = \begin{cases} S(t-s), & \text{für } t \geq s \geq 0, \\ U(t-s), & \text{für } s \geq t \geq 0 \end{cases} \quad (4.26)$$

¹Peter D. Lax, Ralph S. Phillips. The translation representation theorem. *Integral Equations and Operator Theory*, Vol. 4 (1981) 416–421.

und es gilt $s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = 0$. Letzteres bedarf einer Begründung. Da $\bigvee_{t < 0} U(t)\mathbf{F}_-^\perp = \mathbf{H}$ gilt, existiert für jedes $x \in \mathbf{F}_-$ und jedes $\varepsilon > 0$ ein $y \in \mathbf{F}_-^\perp$ und ein $s > 0$ mit

$$\|U(s)x - y\| = \|x - U(-s)y\| < \varepsilon. \quad (4.27)$$

Damit folgt $\|S(s)x\| = \|PU(s)x\| < \varepsilon$ und zusammen mit der Kontraktionseigenschaft der Halbgruppe die Behauptung.

Schritt 2: Sei nun $B : \mathbf{F}_- \supset D(B) \rightarrow \mathbf{F}_-$ der Erzeuger der Halbgruppe S und $x \in D(B)$. Wir betrachten die Funktion

$$f(t) = S(-t)x, \quad t < 0 \quad (4.28)$$

auf \mathbb{R}_- . Sei weiter $|x|_{\mathbf{N}}^2 = -2 \operatorname{Re}(Bx, x)_{\mathbf{H}} = -(Bx, x)_{\mathbf{H}} - (x, Bx)_{\mathbf{H}}$ die durch die quadratische Form von B bestimmte Seminorm auf $D(B)$ und \mathbf{N} die Vervollständigung des Quotienten von $D(B)$ nach dem Nullraum $\{x \in D(B) : |x|_{\mathbf{N}} = 0\}$ in der $|\cdot|_{\mathbf{N}}$ -Norm. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 |f(t)|_{\mathbf{N}}^2 dt &= \int_{-\infty}^0 |S(-t)x|_{\mathbf{N}}^2 dt = -2 \operatorname{Re} \int_{-\infty}^0 (S(-t)Bx, S(-t)x) dt \\ &= \int_{-\infty}^0 \frac{d}{dt} \|S(-t)x\|^2 dt = \|x\|^2 \end{aligned} \quad (4.29)$$

und die Dichtheit von $D(B)$ in \mathbf{F}_- impliziert, dass die Zuordnung $\mathbf{F}_- \ni x \mapsto f \in L^2(\mathbb{R}_-; \mathbf{N})$ eine Isometrie ist. Nach Konstruktion wird $U(-r)x$ für $r \geq 0$ auf die Funktion

$$f_r(t) = \begin{cases} f(t+r), & t \leq -r, \\ 0, & -r < t \leq 0 \end{cases} \quad (4.30)$$

abgebildet. Dies folgt, da $S(r)U(-r)x = x$ gilt und damit für $t \leq -r$ die angegebene Darstellung stimmt. Weiter gilt für die Funktion f_r , welche $U(-r)x$ darstellt,

$$\|U(-r)x\|^2 = \int_{-\infty}^0 |f_r(t)|_{\mathbf{N}}^2 dt \geq \int_{-\infty}^{-r} |f_r(t)|_{\mathbf{N}}^2 dt = \int_{-\infty}^0 |f(t)|_{\mathbf{N}}^2 dt = \|x\|^2 \quad (4.31)$$

und da $U(-r)$ unitär ist, muss hier sogar Gleichheit gelten. Damit gilt aber $|f_r(t)|_{\mathbf{N}}^2 = 0$ für fast alle $t \in (-r, 0)$.

Schritt 3: Wir setzen die Isometrie auf ganz \mathbf{H} fort. Dazu nutzen wir für $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbf{F}_-$ und $r \geq 0$ die Zuordnung

$$U(r)\mathbf{F}_- \ni U(r)x \mapsto \tilde{f} \in L^2(\mathbb{R}; \mathbf{N}), \quad \tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t-r), & t \leq r, \\ 0 & t > r, \end{cases} \quad (4.32)$$

mit dem x zugeordneten f aus Schritt 2. Diese lässt sich wegen $\bigvee_{t \in \mathbb{R}} U(t)\mathbf{F}_-$ stetig zu einer Isometrie auf ganz \mathbf{H} fortsetzen. Für die fortgesetzte Abbildung entspricht nach Konstruktion $U(r)$ stets einer Translation der zugeordneten Funktion um r .

Schritt 4: Wir zeigen, dass diese $\mathbf{F}_- \rightarrow L^2(\mathbb{R}_-; \mathbf{N})$ und $\mathbf{H} \rightarrow L^2(\mathbb{R}; \mathbf{N})$ surjektiv und damit unitär ist.

Sei dazu $x \in D(B)$ beliebig und bezeichne $\mathbf{n} = [x]$ das zugehörige Element aus \mathbf{N} . Sei weiter $f(t) = S(-t)x$ die zugehörige Funktion aus $L^2(\mathbb{R}_-; \mathbf{N})$. Diese ist stetig als Funktion mit Werten im Quotientenraum N , da für $t < r < 0$

$$\begin{aligned} \|f(t) - f(r)\|_{\mathbf{N}}^2 &= -2 \operatorname{Re} (B(S(-t) - S(-r))x, (S(-t) - S(-r))x) \\ &\leq 2\|(S(-t) - S(-r))Bx\| \|(S(-t) - S(-r))x\| \end{aligned} \quad (4.33)$$

mit der Ungleichung von Cauchy-Schwarz gilt und die Halbgruppe S stark stetig auf \mathbf{F}_- ist. Ist nun für eine kleine Zahl δ

$$h_\delta(t) = f(t) - f_\delta(t - \delta) = S(-t)x - S(-t)U(-\delta)S(\delta)x = S(-t)(x - U(-\delta)S(\delta)x), \quad (4.34)$$

so liegt diese Funktion im Bild der Isometrie und erfüllt nach Konstruktion $h_\delta(t) = 0$ für $t < -\delta$ (in \mathbf{N}) und $h_\delta(t) = f(t)$ für $-\delta \leq t \leq 0$. Da f auf \mathbb{R}_- stetig mit Werten in \mathbf{N} und $f(0) = \mathbf{n}$ gilt, existiert somit für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass $\sup_t |h_\delta(t) - 1_{(-\delta, 0)}(t)\mathbf{n}|_{\mathbf{N}} < \varepsilon$ gilt. Da mit h_δ auch jedes Translat im Bild der Isometrie ist, kann man somit jede charakteristische Funktion eines Intervalls aus \mathbb{R}_- mit Werten in $D(B)$ beliebig genau approximieren. Linearkombinationen solcher Funktionen sind aber offenbar dicht in $L^2(\mathbb{R}_-; \mathbf{N})$ und die Aussage ist bewiesen. \square

4.3.2. Die Annahme $(\mathbf{U}1_+)$ liefert eine zweite unitäre Abbildung $\mathbf{H} \rightarrow L^2(\mathbb{R}; \tilde{\mathbf{N}})$, so dass $U(t)$ der Rechtstranslation und \mathbf{F}_+ dem Teilraum $L^2(\mathbb{R}_+; \tilde{\mathbf{N}})$ entspricht. Verkettet man beide Abbildungen, so ergibt sich eine unitäre Abbildung $L^2(\mathbb{R}; \mathbf{N}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}; \tilde{\mathbf{N}})$, welche mit Translationen kommutiert. Diese liefert insbesondere unitäre Abbildungen $\mathbf{N} \rightarrow \tilde{\mathbf{N}}$ und \mathbf{N} und $\tilde{\mathbf{N}}$ sind isomorph.

4.3.3 Beispiel. Für Evolution der freien Wellengleichung auf dem \mathbb{R}^n , n ungerade,

$$\begin{cases} \partial_t^2 u = \Delta u, \\ u(0, \cdot) = u_0, \quad \partial_t u(0, \cdot) = u_1 \end{cases} \quad (4.35)$$

im Energieraum $\dot{H}^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ wird durch die Radontransformation eine entsprechende Translationsdarstellung bestimmt. Dies ist einfach nachzurechnen, wir erhalten Lösungen der Form

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} h(x \cdot \omega - t, \omega) d\omega \quad (4.36)$$

mit einer Funktion $h(\rho, \omega)$, wenn wir die Anfangsdaten entsprechend durch

$$\begin{aligned} u_0(x) &= u(0, x) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} h(x \cdot \omega, \omega) d\omega \\ u_1(x) &= \partial_t u(0, x) = - \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \partial_\rho h(x \cdot \omega, \omega) d\omega \end{aligned} \quad (4.37)$$

darstellen können. Es ist leicht zu sehen, dass das erste Integral nur vom geraden Anteil von h abhängt, also sich durch Ersetzen von $h(\rho, \omega)$ durch $1/2(h(\rho, \omega) + h(-\rho, -\omega))$ nicht ändert. Dieser gerade Anteil wird durch die Radontransformation bestimmt, es gilt also

$$\frac{h(\rho, \omega) + h(-\rho, -\omega)}{2} = c_n \partial_\rho^{n-1} \mathcal{R}[u_0](\rho, \omega). \quad (4.38)$$

Der ungerade Anteil wird entsprechend durch das zweite Integral bestimmt, es gilt

$$\frac{h(\rho, \omega) - h(-\rho, -\omega)}{2} = -c_n \partial_\rho^{n-2} \mathcal{R}[u_1](\rho, \omega). \quad (4.39)$$

Also folgt

$$h(\rho, \omega) = c_n \partial_\rho^{n-1} \mathcal{R}[u_0](\rho, \omega) - c_n \partial_\rho^{n-2} \mathcal{R}[u_1](\rho, \omega). \quad (4.40)$$

Die Evolution der Wellengleichung entspricht nun gerade dem Shift im ersten Argument. Jedoch ist dies nicht exakt die Darstellung, die wir in obigem Theorem konstruiert haben. Dazu sind einige Ableitungen anders zuzuordnen. Wir setzen

$$f(\rho, \omega) = c_n \partial_\rho^{(n-1)/2} (\partial_\rho \mathcal{R}[u_0](\rho, \omega) - \mathcal{R}[u_1](\rho, \omega)). \quad (4.41)$$

Dann gilt (wie man leicht nachrechnen kann),

$$\int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u_0(x)|^2 + |u_1(x)|^2) dx = \tilde{c}_n \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |f(\rho, \omega)|^2 d\omega d\rho \quad (4.42)$$

und der Energieraum $\dot{H}^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ entspricht dem $L^2(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{S}^{n-1}))$. Weiter gilt

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \partial_\rho^{(n-3)/2} f(\rho, \omega) \Big|_{\rho=x\cdot\omega-t} d\omega \quad (4.43)$$

und die Zeitevolution entspricht genau der Translation im $L^2(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{S}^{n-1}))$.

4.3.4. Der Satz von Paley–Wiener macht aus den Translationsdarstellungen funktionale Modelle. Sei dazu vorerst $f \in L^2(\mathbb{R}_-)$ eine skalarwertige quadratintegrierbare Funktion und

$$\widehat{f}(\zeta) = \mathcal{F}f(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{it\zeta} f(t) dt \quad (4.44)$$

ihre (inverse) Fouriertransformierte. Das Integral konvergiert absolut für alle Zahlen $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $\text{Im } \zeta < 0$ und auch lokal gleichmäßig bezüglich dieser ζ . Damit definiert es auf der Halbebene

$$\mathbb{C}_- = \{\zeta \in \mathbb{C} : \text{Im } \zeta < 0\} \quad (4.45)$$

eine holomorphe Funktion. Für diese gilt (unter Ausnutzung des Satzes von Plancherel)

- (i) $\widehat{f}(\cdot + i\eta) \in L^2(\mathbb{R})$ für alle $\eta < 0$;
- (ii) $\lim_{\eta \rightarrow -\infty} \widehat{f}(\cdot + i\eta) = 0$ in $L^2(\mathbb{R})$;
- (iii) $\lim_{\eta \rightarrow 0^-} \widehat{f}(\cdot + i\eta) = \widehat{f}$ in $L^2(\mathbb{R})$

sowie die Inversionsformel

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it(\xi+i\eta)} \widehat{f}(\xi + i\eta) d\xi \quad (4.46)$$

als uneigentliches Integral im $L^2(\mathbb{R}_-)$ -Sinne für jedes fest gewählte $\eta > 0$. Wir bezeichnen die Menge der holomorphen Funktionen $\widehat{f} \in \mathfrak{A}(\mathbb{C}_-)$ mit **(i)**, **(ii)**, **(iii)** als den Hardyraum $\mathcal{H}^2(\mathbb{C}_-)$.

Lemma (Satz von Paley–Wiener). *Die Fouriertransformation \mathcal{F} ist unitär*

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}_-) \rightarrow \mathcal{H}^2(\mathbb{C}_-) \quad (4.47)$$

mit

$$\int_{-\infty}^0 |f(t)|^2 dt = \lim_{\eta \rightarrow 0^-} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi + i\eta)|^2 d\xi. \quad (4.48)$$

Beweis. Siehe zum Beispiel [7, Kapitel 19]. □

Analog bezeichnen wir mit $\mathcal{H}^2(\mathbb{C}_+)$ den Hardyraum der oberen Halbebene und mit $\mathcal{H}^2(\mathbb{C}_{\pm}; \mathbf{N})$ die Hardyräume der \mathbf{N} -wertigen Funktionen.

4.3.5 Satz (Funktionales Modell). *Angenommen $(\mathbf{U}1_-)$ gilt. Dann existiert ein Hilbertraum \mathbf{H} und eine unitäre Äquivalenz*

$$\mathbf{H} \xrightarrow{\simeq} L^2(\mathbb{R}; \mathbf{N}), \quad (4.49)$$

deren Einschränkung auf \mathbf{F}_-

$$\mathbf{F}_- \xrightarrow{\simeq} \mathcal{H}^2(\mathbb{C}_-; \mathbf{N}) \quad (4.50)$$

abbildet und bezüglich derer die unitären Operatoren $U(t)$ gerade den Multiplikationen mit $\zeta \mapsto e^{it\zeta}$ entsprechen.

4.4 Die Streuabbildung im funktionalen Modell

4.4.1. Wir betrachten die Abbildung, die zu jedem Element des Raumes \mathbf{H} seine einlaufende Translationsdarstellung aus $L^2(\mathbb{R}; \mathbf{N})$ (bezüglich \mathbf{F}_-) auf die auslaufende Translationsdarstellung aus $L^2(\mathbb{R}; \tilde{\mathbf{N}})$ (bezüglich \mathbf{F}_+) abbildet. Als Verkettung unitärer Operatoren ist diese unitär,

$$S : L^2(\mathbb{R}; \mathbf{N}) \longrightarrow \mathbf{H} \longrightarrow L^2(\mathbb{R}; \tilde{\mathbf{N}}). \quad (4.51)$$

Die Abbildung wird als *Streuabbildung* assoziiert zu $U(t)$, \mathbf{F}_- , \mathbf{F}_+ bezeichnet. Nach Konstruktion kommutiert S mit Translationen.

4.4.2. Angenommen $(\mathbf{U}2)$ gilt. Dann impliziert $\mathbf{F}_- \subset \mathbf{F}_+^\perp$, dass das Bild von \mathbf{F}_- unter der auslaufenden Translationsdarstellung in $L^2(\mathbb{R}_-; \tilde{\mathbf{N}}) = L^2(\mathbb{R}_+; \tilde{\mathbf{N}})^\perp$ enthalten ist. Es gilt also

$$S : L^2(\mathbb{R}_-; \mathbf{N}) \xrightarrow{\subset} L^2(\mathbb{R}_-; \tilde{\mathbf{N}}). \quad (4.52)$$

Mit dem Satz von Paley–Wiener folgt daraus im funktionalen Modell

$$\tilde{S} : \mathcal{H}^2(\mathbb{C}_-; \mathbf{N}) \longrightarrow \mathbf{F}_- \xrightarrow{\subset} \mathcal{H}^2(\mathbb{C}_-; \tilde{\mathbf{N}}). \quad (4.53)$$

Die Abbildung \tilde{S} kommutiert mit Multiplikationen mit $e^{it\zeta}$. Wir folgern daraus, dass es sich um eine durch $\zeta \in \mathbb{C}_-$ parametrisierte stark holomorphe Operatorfamilie handelt:

4.4.3 Satz. *Im funktionalen Modell ist die Streuabbildung \tilde{S} von der Form*

$$(\tilde{S}\hat{f})(\zeta) = \sigma(\zeta)\hat{f}(\zeta) \quad (4.54)$$

für eine stark holomorphe operatorwertige Funktion

$$\sigma : \mathbb{C}_- \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbf{N}, \tilde{\mathbf{N}}) \quad (4.55)$$

mit

$$\sup_{\zeta \in \mathbb{C}_-} \|\sigma(\zeta)\| \leq 1 \quad (4.56)$$

und $\sigma(\xi) = \text{s-lim}_{\eta \rightarrow 0^-} \sigma(\xi + i\eta)$ existiert für fast alle $\xi \in \mathbb{R}$ und ist fast überall unitär.

Beweis. Die Abbildung $\tilde{S} = \mathcal{F} \circ S \circ \mathcal{F}^*$ ist unitär als Abbildung von $L^2(\mathbb{R}; \mathbf{N})$ nach $L^2(\mathbb{R}; \tilde{\mathbf{N}})$, kommutiert mit den Multiplikationen mit trigonometrischen Funktionen $\xi \mapsto e^{it\xi}$ für $t \in \mathbb{R}$ und bildet den Teilraum $\mathcal{H}^2(\mathbb{C}_-; \mathbf{N})$ in $\mathcal{H}^2(\mathbb{C}_-; \tilde{\mathbf{N}})$ ab.

Schritt 1: Damit kommutiert $\tilde{S} : L^2(\mathbb{R}; \mathbf{N}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}; \tilde{\mathbf{N}})$ aber auch mit Multiplikationen mit beschränkten stetigen Funktionen². Dies nutzen wir, um die Existenz der Funktion $\sigma : \mathbb{C}_- \rightarrow \mathcal{L}(\mathbf{N}, \tilde{\mathbf{N}})$ zu zeigen. Sei dazu $x \in \mathbf{F}_-$ dargestellt durch $\hat{f}_- \in \mathcal{H}^2(\mathbb{C}_-; \mathbf{N})$ bezüglich der einlaufenden Darstellung und durch $\hat{f}_+ \in \mathcal{H}^2(\mathbb{C}_-; \tilde{\mathbf{N}})$ bezüglich der auslaufenden Darstellung. Nach Konstruktion gilt $\tilde{S}\hat{f}_- = \hat{f}_+$. Gilt nun $\hat{f}_-(z) = 0$ für ein $z \in \mathbb{C}_-$, so kann die holomorphe Funktion \hat{f}_- als

$$\hat{f}_-(\zeta) = \frac{\zeta - z}{\zeta + z} h(\zeta) \quad (4.57)$$

mit einer holomorphen Funktion h geschrieben werden. Der Satz von Paley–Wiener impliziert, dass $h \in \mathcal{H}^2(\mathbb{C}_-; \mathbf{N})$ gilt. (Wieso?) Da \tilde{S} mit Multiplikationen mit auf \mathbb{R} stetigen Funktionen kommutiert, folgt

$$\hat{f}_+(\zeta) = \tilde{S}\hat{f}_-(\zeta) = \tilde{S} \frac{\zeta - z}{\zeta + z} h(\zeta) = \frac{\zeta - z}{\zeta + z} \tilde{S}h(\zeta) \quad (4.58)$$

und damit $\hat{f}_+(\zeta) = 0$. Also hängt der Wert von $\hat{f}_+(\zeta)$ nur vom Wert $\hat{f}_-(\zeta)$ ab, für jedes ζ ist die Zuordnung linear und bestimmt $\sigma(\zeta) : \mathbf{N} \rightarrow \tilde{\mathbf{N}}$.

Schritt 2: Um Holomorphie zu zeigen, betrachten wir speziell $\hat{f}_-(\zeta) = \frac{1}{\zeta - i} \mathbf{n}$ für einen gegebenen Vektor $\mathbf{n} \in \mathbf{N}$. Dann gilt $\hat{f}_- \in \mathcal{H}^2(\mathbb{C}_-; \mathbf{N})$. Also folgt $\hat{f}_+ = \tilde{S}\hat{f}_- \in \mathcal{H}^2(\mathbb{C}_-; \tilde{\mathbf{N}})$ und wegen

$$\hat{f}_+(\zeta) = \frac{1}{\zeta - i} \sigma(\zeta) \mathbf{n} \quad (4.59)$$

folgt Analytizität von $\zeta \rightarrow \sigma(\zeta) \mathbf{n}$. Damit ist aber $\sigma(\zeta)$ stark holomorph.

Schritt 3: Für die Normschränke betrachten wir wieder ein beliebiges $\mathbf{n} \in \mathbf{N}$. Für beliebiges $z \in \mathbb{C}_-$ mit $\text{Im } z = -y$ sei

$$\hat{f}_-(\zeta) = \frac{2iy}{\bar{z} - \zeta} \mathbf{n}. \quad (4.60)$$

²Jede beschränkte (stetige) Funktion kann als punktwieser fast-überall Grenzwert von Linearkombinationen von $\xi \mapsto e^{it\xi}$, $t \in \mathbb{R}$, geschrieben werden.

Dann gilt $\widehat{f}_- \in \mathcal{H}^2(\mathbb{C}_-; \mathbf{N})$, $\widehat{f}_-(z) = \mathbf{n}$ und $\|\widehat{f}_-\| = 2\sqrt{\pi y} |\mathbf{n}|_{\mathbf{N}}$. Setzt man wiederum $\widehat{f}_+ = \widetilde{S}\widehat{f}_-$, so folgt mit einem geschlossenen Integrationsweg um z

$$\widehat{f}_+(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\widehat{f}_+(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (4.61)$$

Wählt man nun einen rechteckigen Weg mit den Ecken L , $-L$, $-L - iL$, $L - iL$, so bleibt für $L \rightarrow \infty$ nur das Integral entlang der reellen Achse und wir erhalten mit Cauchy-Schwarz

$$|\widehat{f}_+(z)|_{\widetilde{\mathbf{N}}} \leq \frac{1}{2\pi} \|\widehat{f}_+\| \|(\cdot - z)^{-1}\| \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi y}} \|\widehat{f}_+\| = |\mathbf{n}|_{\mathbf{N}} = |\widehat{f}_-(z)|_{\mathbf{N}} \quad (4.62)$$

unter Ausnutzung der Isometrie $\|\widehat{f}_+\| = \|\widehat{f}_-\|$. Also folgt $\|\sigma(z)\| \leq 1$.

Schritt 4: Für beliebige $\mathbf{n} \in \mathbf{N}$, $\mathbf{m} \in \widetilde{\mathbf{N}}$ ist die Funktion $\zeta \mapsto (\sigma(\zeta)\mathbf{n}, \mathbf{m})_{\widetilde{\mathbf{N}}}$ holomorph in \mathbb{C}_- und beschränkt. Damit existiert für fast alle $\xi \in \mathbb{R}$ der Grenzwert

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^-} (\sigma(\xi + i\eta)\mathbf{n}, \mathbf{m})_{\widetilde{\mathbf{N}}} \quad (4.63)$$

Wählt man eine abzählbare dichte Teilmenge an \mathbf{m}, \mathbf{n} , so ergibt sich Konvergenz bis auf eine Nullmenge in ξ für alle diese \mathbf{m}, \mathbf{n} und damit, da σ eine Kontraktion ist auch die schwache Konvergenz von $\sigma(\xi + i\eta)$ für fast alle ξ . Der Grenzwert wird als $\sigma(\xi) \in \mathcal{L}(\mathbf{N}, \widetilde{\mathbf{N}})$ bezeichnet. Die Konvergenz ist sogar stark. Setzt man speziell $\widehat{f}_-(\zeta) = \frac{1}{\zeta - i}\mathbf{n}$, so folgt

$$\sigma(\zeta)\widehat{f}_-(\zeta) = \frac{1}{\zeta - i}\sigma(\zeta)\mathbf{n} = \widehat{f}_+(\zeta), \quad (4.64)$$

und nach dem Satz von Paley–Wiener konvergiert die rechte Seite mit $\zeta = \xi + i\eta$ für $\eta \rightarrow 0^-$ in $L^2(\mathbb{R}; \widetilde{\mathbf{N}})$. Damit muss aber $\sigma(\zeta)\mathbf{n}$ in $\widetilde{\mathbf{N}}$ konvergieren und starke Konvergenz folgt. Da weiterhin $\|\widehat{f}_-\| = \|\widehat{f}_+\|$ gelten muss, folgt

$$|\mathbf{n}|_{\mathbf{N}}^2 \int \frac{d\xi}{|\xi - i|^2} = \int \frac{|\sigma(\xi)\mathbf{n}|_{\widetilde{\mathbf{N}}}^2}{|\xi - i|^2} d\xi \leq |\mathbf{n}|_{\mathbf{N}}^2 \int \frac{d\xi}{|\xi - i|^2} \quad (4.65)$$

gelten und in $|\sigma(\xi)\mathbf{n}|_{\widetilde{\mathbf{N}}} \leq |\mathbf{n}|_{\mathbf{N}}$ muss fast überall Gleichheit gelten.

Der Operator $\widetilde{S} : L^2(\mathbb{R}; \mathbf{N}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}; \widetilde{\mathbf{N}})$ kommutiert mit Multiplikationen mit beschränkten stetigen Funktionen. Da er auf $\mathcal{H}^2(\mathbb{C}_-; \mathbf{N})$ durch σ gegeben ist und Produkte aus Hardyfunktionen und beschränkten stetigen Funktionen dicht in $L^2(\mathbb{R}; \mathbf{N})$ sind, gilt für jedes $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}; \mathbf{N})$

$$(\widetilde{S}\widehat{f})(\xi) = \sigma(\xi)\widehat{f}(\xi) \quad (4.66)$$

und da dieser Operator \widetilde{S} unitär ist, muss $\sigma(\xi)$ fast überall invertierbar sein und damit fast überall unitär. \square

Im Weiteren identifizieren wir \mathbf{N} mit $\widetilde{\mathbf{N}}$. Die Abbildung $\sigma : \mathbb{C}_- \rightarrow \mathcal{L}(\mathbf{N})$ wird als *Streumatrix* bezeichnet.

4.4.4 Satz. *Angenommen, $\sigma(\zeta)$ ist bis auf eine diskrete Teilmenge von $\overline{\mathbb{C}_-}$ invertierbar, so liefert*

$$\sigma(\zeta)^{-1} = \sigma(\bar{\zeta})^*, \quad \zeta \in \mathbb{C}_+, \quad (4.67)$$

eine meromorphe Fortsetzung von σ auf ganz \mathbb{C} . Insbesondere ist σ in einer Umgebung der reellen Achse analytisch.

Beweis. Spiegelungsprinzip. Die Funktion $\zeta \mapsto \sigma(\zeta)$ ist auf \mathbb{C}_- holomorph und $\zeta \mapsto (\sigma^*(\bar{\zeta}))^{-1}$ auf \mathbb{C}_+ meromorph. Auf \mathbb{R} stimmen sie fast überall überein und bleiben lokal beschränkt. Damit ist die eine aber die meromorphe Fortsetzung der anderen. \square

4.5 Die Lax–Phillips-Halbgruppe

4.5.1. Sei $\mathbf{K} = \mathbf{H} \ominus (\mathbf{F}_+ \oplus \mathbf{F}_-) = (\mathbf{F}_+ \oplus \mathbf{F}_-)^\perp$ und bezeichne P_\pm den Orthogonalprojektor auf $\mathbf{H} \ominus \mathbf{F}_\pm$. Wir definieren

$$Z(t) = P_+U(t)P_-, \quad t \geq 0. \quad (4.68)$$

Als Komposition aus unitären Abbildungen und Projektoren gilt damit offenbar $\|Z(t)\| \leq 1$. Da $P_-\mathbf{F}_- = \{0\}$ gilt und nach **(U2)** P_- auf $\mathbf{F}_+ \subset \mathbf{F}_-^\perp$ die Identität ist, folgt weiterhin $U(t)P_-\mathbf{F}_+ = U(t)\mathbf{F}_+ \subset \mathbf{F}_+$ und somit $Z(t)\mathbf{F}_+ = Z(t)\mathbf{F}_- = \{0\}$ für $t \geq 0$. Eingeschränkt auf \mathbf{K} sind die Operatoren $Z(t)$ interessant:

4.5.2 Lemma. *Angenommen **(U1 $_\pm$)** und **(U2)** sind erfüllt. Dann gilt $Z(t) \in \mathcal{L}(\mathbf{K})$ und die Operatorfamilie $Z(t)$ bildet eine stark stetige Kontraktionshalbgruppe auf \mathbf{K} mit*

$$\text{s-lim}_{t \rightarrow \infty} Z(t) = 0. \quad (4.69)$$

Sie wird als Lax–Phillips-Halbgruppe bezeichnet.

Beweis. Sei $x \in \mathbf{K}$. Dann gilt $P_-x = x \in \mathbf{F}_-^\perp$ und somit $Z(t)x = P_+U(t)x \in P_+\mathbf{F}_-^\perp = \mathbf{K}$, da \mathbf{F}_-^\perp nach **(U1 $_-$)** unter $U(t)$ für $t \geq 0$ invariant ist. Damit gilt aber, da auch \mathbf{F}_+ nach **(U1 $_+$)** unter $U(t)$ für $t \geq 0$ invariant ist,

$$Z(t)Z(s)x = P_+U(t)P_+U(s)x = P_+U(t)U(s)x - \underbrace{P_+U(t)(I - P_+)U(s)x}_{=0} = Z(t+s)x \quad (4.70)$$

und $Z(t)$ ist eine Halbgruppe.

Da weiterhin $\bigvee_s U(s)\mathbf{F}_+ = \mathbf{H}$ gilt, existiert für jedes $x \in \mathbf{K}$ und jedes $\varepsilon > 0$ ein $y \in \mathbf{F}_+$ und ein $s > 0$, so dass $\|x - U(-s)y\| < \varepsilon$. Da $P_+U(t)$ eine Kontraktion ist, folgt daraus

$$\|P_+U(t)x - P_+U(t)U(-s)y\| = \|Z(t)x - P_+U(t-s)y\| < \varepsilon \quad (4.71)$$

und da für $t > s$ stets $P_+U(t-s)y = 0$ gilt, folgt $\lim_{t \rightarrow \infty} Z(t)x = 0$ und damit die Behauptung. \square

Betrachtet man Streuung von Wellen an Hindernissen, so beschreibt die Lax–Phillips-Halbgruppe gerade das lokale Verhalten in der Nähe des Hindernisses. Es liegt nahe, dass die Halbgruppe mit der Streumatrix $\sigma : \mathbb{C}_- \rightarrow \mathcal{L}(\mathbf{N})$ zusammenhängt. Wir bezeichnen mit G den Erzeuger der Halbgruppe $Z(t)$ auf \mathbf{K} .

4.5.3 Satz. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

- (i) *Es existiert $\varphi \in \mathbf{K}$ mit $Z(t)\varphi = e^{\gamma t}\varphi$.*
- (ii) *$\gamma \in \mathbb{C}$ mit $\text{Re } \gamma < 0$ ist Eigenwert von G .*

(iii) Es gilt $\ker \sigma^*(i\bar{\gamma}) \neq \{0\}$ für $\operatorname{Re} \gamma < 0$.

Dabei entspricht die Dimension des Nullraumes $\ker \sigma^*(i\bar{\gamma})$ gerade der Vielfachheit des Eigenwertes γ von G .

Beweis. (i) \Leftrightarrow (ii) Sei $\varphi \in \mathbf{K}$ mit $Z(t)\varphi = e^{\gamma t}\varphi$. Dann impliziert $Z(t)\varphi \rightarrow 0$ schon $\operatorname{Re} \gamma < 0$ und es gilt $\varphi \in D(G)$ mit

$$G\varphi = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (Z(t)\varphi - \varphi) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{\gamma t} - 1}{t} \varphi = \gamma\varphi. \quad (4.72)$$

Umgekehrt löst zu jeder Eigenfunktion $\varphi \in D(G)$ die Funktion $x(t) = e^{\gamma t}\varphi$ das Anfangswertproblem $\dot{x}(t) = Gx(t)$, $x(0) = \varphi$, und es folgt $x(t) = Z(t)\varphi$.

(ii) \Rightarrow (iii) Sei nun $\varphi \in D(G)$ Eigenvektor zum Eigenwert γ mit $\operatorname{Re} \gamma < 0$ und bezeichne f_+ die auslaufende Translationsdarstellung von φ . Da $\varphi \perp \mathbf{F}_+$ gilt, folgt $f_+ \in L^2(\mathbb{R}_-; \mathbf{N})$ und aus $Z(t)\varphi = P_+U(t)\varphi = e^{\gamma t}\varphi$ folgt

$$f_+(s-t) = e^{\gamma t}f_+(s), \quad s \leq 0. \quad (4.73)$$

Das impliziert aber $f_+(s) = e^{-\gamma s}\mathbf{n}$ für $s \leq 0$ und damit im holomorphen Modell

$$\widehat{f}_+(\zeta) = \frac{1}{i\zeta - \gamma} \mathbf{n} \quad (4.74)$$

sowie (da $\sigma(\xi)^{-1} = \sigma^*(\xi)$ für $\xi \in \mathbb{R}$)

$$\widehat{f}_-(\zeta) = \sigma^*(\bar{\zeta})\widehat{f}_+(\zeta) = \frac{1}{i\bar{\zeta} - \gamma} \sigma^*(\bar{\zeta})\mathbf{n} \quad (4.75)$$

für alle $\zeta \in \mathbb{R}$. Nach Konstruktion sind $\widehat{f}_- \in \mathcal{H}^2(\mathbb{C}_+; \mathbf{N})$ und $\widehat{f}_+ \in \mathcal{H}^2(\mathbb{C}_-; \mathbf{N})$ analytisch in den jeweiligen Halbebenen. Ebenso ist $\sigma^*(\bar{\zeta})$ analytisch in \mathbb{C}_+ . Damit impliziert die angegebene Darstellung aber $\mathbf{n} \in \ker \sigma^*(i\bar{\gamma})$.

(iii) \Rightarrow (i) Sei $\mathbf{n} \in \ker \sigma^*(i\bar{\gamma})$. Dann ist die Funktion

$$\widehat{f}_-(\zeta) = \frac{1}{i\zeta - \gamma} \sigma^*(\bar{\zeta})\mathbf{n} \quad (4.76)$$

analytisch in $\zeta \in \mathbb{C}_+$ und gehört damit zu $\mathcal{H}^2(\mathbb{C}_+; \mathbf{N})$. Sei nun $\varphi \in \mathbf{H}$ das Element mit einlaufender Darstellung \widehat{f}_- . Dann gilt $\varphi \perp \mathbf{F}_-$ und $\widehat{f}_+(\sigma) = (i\zeta - \gamma)^{-1}\mathbf{n}$ ist die zugehörige auslaufende Darstellung. Dies impliziert aber $f_+(s) = e^{-\gamma s}\mathbf{n}1_{\mathbb{R}_-}(s)$ und somit $\varphi \perp \mathbf{F}_+$ und damit $Z(t)\varphi = e^{\gamma t}\varphi$. \square

4.5.4. In praktischen Anwendungen ist $Z(t)$ für $t > 0$ oft ein kompakter Operator. Dann besitzt $Z(t)$ diskretes Spektrum in $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ und sein Erzeuger G entsprechend diskretes Spektrum in der Halbebene $\{\gamma : \operatorname{Re} \gamma < 0\}$. Damit folgt Meromorphie von σ auf der ganzen komplexen Zahlenebene \mathbb{C} mit Polen in der oberen Halbebene. Diese werden oft als *Streupole* bezeichnet und lassen sich als asymptotische Terme für das lokale Verhalten in der Nähe des Hindernisses interpretieren.

5 Anwendungen

5.1 Billiards

5.1.1. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Außengebiet mit glattem Rand ∂G und $\mathbb{R}^n \setminus G \subset B_R$. Auf G betrachten wir ein *Billiard*. Dazu verwenden wir Teilchen, welche sich mit konstanter Geschwindigkeit (normiert auf 1) entlang von Geraden bewegen und am Rand ∂G reflektiert werden.

Zustände der Teilchen werden durch Positionen $x \in G$ zusammen mit Richtungsvektoren $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ beschrieben. Sei $\tilde{\Omega} = G \times \mathbb{S}^{n-1}$ der Zustandsraum und für $t \in \mathbb{R}$ sowie $X = (x, \omega) \in \tilde{\Omega}$

$$\Phi_t(X) = (x + t\omega, \omega) \quad (5.1)$$

solange $\Phi_t(X)$ den Rand ∂G nicht erreicht und entsprechend fortgesetzt durch Reflexion an ∂G . Dabei bleibt die Ortskomponente stetig und die Richtungskomponente wird (solange wir nicht tangential in den Rand hineinlaufen) am Normalenvektor zu ∂G gespiegelt. Dies liefert eine Abbildung

$$\Phi_t : \tilde{\Omega} \rightarrow \tilde{\Omega}, \quad (5.2)$$

welche jedem Teilchen seinen Zustand nach t Zeiteinheiten zuordnet. Die Funktionen Φ_t sind bis auf eine stückweise glatte Hyperfläche in $\tilde{\Omega}$ differenzierbar und auf dieser besitzen sie Sprünge. Damit sind alle Φ_t messbar. Sie erfüllen nach Konstruktion

$$\Phi_{s+t} = \Phi_s \circ \Phi_t. \quad (5.3)$$

Wir versehen $\tilde{\Omega}$ mit dem Produkt des Lebesguemaßes auf G und des Oberflächenmaßes auf \mathbb{S}^{n-1} .

5.1.2 Lemma. Φ_t ist maßerhaltend auf $\tilde{\Omega}$, es gilt für jede messbare Teilmenge $B \subset \tilde{\Omega}$

$$|B| = |\Phi_t(B)|. \quad (5.4)$$

Wir bezeichnen einen Punkt $X \in \tilde{\Omega}$ als

- *vorwärts frei*, falls die Trajektorie $\Phi_t(X)$ für $t > 0$ keine Reflexionen mehr durchläuft;
- *rückwärts frei*, falls die Trajektorie $\Phi_t(X)$ für $t < 0$ keine Reflexionen durchläuft;
- *vorwärts eingefangen*, falls $\{\Phi_t(X) : t \geq 0\} \subset \tilde{\Omega}$ beschränkt ist, die Menge der zugehörigen Positionen also beschränkt sind;
- *rückwärts eingefangen*, falls $\{\Phi_t(X) : t \leq 0\} \subset \tilde{\Omega}$ beschränkt ist.

Weiter bezeichne $\Omega \subset \tilde{\Omega}$ die Teilmenge der Zustände, die nicht gleichzeitig vorwärts und rückwärts eingefangen sind.

5.1.3 Lemma. Sei Ω_+ die Menge der rückwärts eingefangenen Zustände, deren Trajektorien vorwärts unbeschränkt sind. Dann gilt $|\Omega_+| = 0$.

Beweis. Sei $X \in \Omega_+$. Wir bezeichnen mit

$$T(X) = \inf\{t \in \mathbb{R} : \Phi_t(X) \text{ vorwärts frei}\} \quad (5.5)$$

den Zeitpunkt der letzten Reflexion in der Trajektorie von X . Dann ist nach Voraussetzung $T(X) \in \mathbb{R}$.

Schritt 1: Es gilt

$$\{X \in \Omega_+ : T(X) \geq 0\} \subset \text{conv}(\partial G) \times \mathbb{S}^{n-1}. \quad (5.6)$$

Angenommen, ein $X = (x, \omega) \in \tilde{\Omega}$ gehört nicht zu der Menge auf der rechten Seite. Wir unterscheiden zwei Fälle. Schneidet der Strahl $\{x + t\omega : t \in \mathbb{R}_+\}$ die Menge $\text{conv}(\partial G)$ nicht, so ist der Zustand vorwärts frei und die letzte Reflexion (so es eine gab) muss in der Vergangenheit liegen. Ist $X \in \Omega_+$, so gilt also $T(X) < 0$. Schneidet der Strahl $\{x + t\omega : t \in \mathbb{R}_-\}$ die Menge $\text{conv}(\partial G)$ nicht, so ist der Punkt X rückwärts frei, kann also nicht in Ω_+ liegen. Weitere Möglichkeiten gibt es aufgrund der Konvexität von $\text{conv}(\partial G)$ nicht.

Schritt 2: Sei nun $\Omega_{(j)} = \{X \in \Omega_+ ; T(X) \in [j, j+1)\}$. Dann ist jede dieser Mengen messbar und es gilt $\Omega_{(j)} = \Phi_1(\Omega_{(j+1)})$, also nach Lemma 5.1.2 auch $|\Omega_{(j)}| = |\Omega_{(0)}|$. Weiterhin gilt

$$\Omega_+ = \bigcup_{j=-\infty}^{\infty} \Omega_{(j)} \quad (5.7)$$

als disjunkte Vereinigung. Da allerdings auch

$$\bigcup_{j=0}^{\infty} \Omega_{(j)} = \{X \in \Omega_+ : T(X) \geq 0\} \quad (5.8)$$

gilt und damit in der beschränkten Menge $\text{conv}(\partial G) \times \mathbb{S}^{n-1}$ enthalten sein muss, haben alle $\Omega_{(j)}$ Maß Null und es folgt $|\Omega_{(j)}| = |\Omega_+| = 0$. \square

Wir nehmen an, dass $\mathbb{R}^n \setminus G \subset B_R$ gilt und definieren uns die beiden Teilmengen

$$\mathcal{E}_+ = \{X = (x, \omega) \in \Omega : x \cdot \omega \geq R\}, \quad \mathcal{E}_- = \{X = (x, \omega) \in \Omega : x \cdot \omega \leq -R\}, \quad (5.9)$$

so dass offenbar Zustände aus \mathcal{E}_+ vorwärts frei und Zustände aus \mathcal{E}_- rückwärts frei sind. Jeder Zustand, der eine für positive Zeiten ins unendliche verlaufende Trajektorie besitzt, wird durch Φ_t mit t groß genug, in \mathcal{E}_+ abgebildet. Damit gilt

5.1.4 Lemma. *Es gilt*

- (i) $\mathcal{E}_+(t) = \Phi_t(\mathcal{E}_+) \subset \mathcal{E}_+$ für $t \geq 0$;
- (ii) $\mathcal{E}_-(t) = \Phi_t(\mathcal{E}_-) \subset \mathcal{E}_-$ für $t \leq 0$;
- (iii) $\bigcap \mathcal{E}_+(t) = \bigcap \mathcal{E}_-(t) = \emptyset$;
- (iv) $\bigcup \mathcal{E}_+(t)$ und $\bigcup \mathcal{E}_-(t)$ unterscheiden sich von Ω nur um eine Nullmenge;
- (v) $\mathcal{E}_+ \cap \mathcal{E}_- = \emptyset$.

Beweis. Die Aussagen **(i)**–**(iii)**,**(v)** sind nach Definition der Mengen klar. Es bleibt also **(iv)** zu zeigen. Die Menge $\bigcup \mathcal{E}_-(t) \subset \Omega$ besteht aus allen Zuständen mit rückwärts unbeschränkten Trajektorien. Ihr Komplement ist damit in Ω_+ , also einer Nullmenge, enthalten. Die Argumentation für $\bigcup \mathcal{E}_+(t)$ verläuft analog. \square

Das Modell passt zur Streutheorie nach Lax und Phillips. Wir wählen $\mathbf{H} = L^2(\Omega)$ und betrachten die Abbildung

$$U(t)f = f \circ \Phi_{-t}. \quad (5.10)$$

Diese sind nach Lemma 5.1.2 unitär auf $L^2(\Omega)$ und bilden eine stark stetige Operatorgruppe. Weiter sei $\mathbf{F}_\pm \subset L^2(\Omega)$ der Teilraum der auf \mathcal{E}_\pm getragenen Funktionen. Dann gilt nach obigem Lemma

5.1.5 Lemma. *Es gilt*

- (i)** $U(t)\mathbf{F}_+ \subset \mathbf{F}_+$ für $t \geq 0$;
- (ii)** $U(t)\mathbf{F}_- \subset \mathbf{F}_-$ für $t \leq 0$;
- (iii)** $\bigcap U(t)\mathbf{F}_+ = \bigcap U(t)\mathbf{F}_- = \{0\}$;
- (iv)** $\bigvee U(t)\mathbf{F}_+ = \bigvee U(t)\mathbf{F}_- = \mathbf{H}$;
- (v)** $\mathbf{F}_+ \perp \mathbf{F}_-$.

Beweis. Ergibt sich direkt aus Lemma 5.1.4. \square

5.1.6. Damit ist die Lax–Phillips Streutheorie anwendbar. Es bleibt, eine sinnvolle Form der Translationsdarstellungen zu konstruieren. Dazu betrachten wir den Fall des Ganzraumes $\Omega_0 = \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^{n-1}$ als Phasenraum, wählen

$$\mathcal{E}_+^0 = \{X = (x, \omega) \in \Omega_0 : x \cdot \omega \geq 0\}, \quad \mathcal{E}_-^0 = \{X = (x, \omega) \in \Omega_0 : x \cdot \omega \leq 0\}, \quad (5.11)$$

und bezeichnen mit $U_0(t)$ die zugeordnete (freie) unitäre Gruppe auf $L^2(\Omega_0)$. Weiter sei \mathbf{F}_\pm^0 der Teilraum der auf \mathcal{E}_\pm^0 getragenen Funktionen. Da $\mathcal{E}_+ \cap \mathcal{E}_-$ eine Nullmenge ist, gilt wiederum Lemma 5.1.5.

Wir parametrisieren Geraden durch ihren Richtungsvektor $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ und einen Vektor $\theta \in \mathbb{R}^n$ mit $\theta \perp \omega$. Die Menge dieser Paare (ω, θ) kann in natürlicher Weise mit dem Tangentialbündel $M = T\mathbb{S}^{n-1}$ identifiziert werden. Nun kann man jeder Funktion $f \in L^2(\Omega_0)$ eine Funktion $k_0 \in L^2(\mathbb{R}; L^2(M))$ zuordnen. Dazu schreiben wir für $X = (x, \omega) \in \Omega_0$

$$x = \theta + s\omega, \quad \theta \perp \omega \quad (5.12)$$

und setzen

$$k_0(s, \omega, \theta) = f(\theta + s\omega, \omega). \quad (5.13)$$

Dann gilt, wie man sich leicht überzeugen kann,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |f(x, \omega)|^2 d\omega dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_{\omega^\perp} |k_0(s, \omega, \theta)|^2 d\theta d\omega ds \quad (5.14)$$

und nach Konstruktion ist die Zuordnung $f \mapsto k_0$ eine Translationsdarstellung, die sowohl ein- als auch auslaufend für $U_0(t)$ bezüglich der Teilräume \mathbf{F}_\pm^0 ist.

Auf \mathbf{F}_+ und für $t \geq 0$ stimmt $U(t)$ mit $U_0(t)$ überein. Entsprechendes gilt auf \mathbf{F}_- und für $t \leq 0$. Wir nutzen auf den Teilräumen die gerade konstruierte Translationsdarstellung und schreiben entsprechend $k_+(s) = k_0(s + R)$ und $k_-(s) = k_0(s - R)$. Die Verschiebung liefert dabei gerade die richtigen Trägereigenschaften. Es gilt also für $f \in \mathbf{F}_+$

$$k_+(s, \omega, \theta) = f(\theta + (s + R)\omega, \omega) = f(\Phi_s(\theta + R\omega, \omega)) \quad (5.15)$$

und für $f \in \mathbf{F}_-$ entsprechend

$$k_-(s, \omega, \theta) = f(\theta + (s - R)\omega, \omega) = f(\Phi_s(\theta - R\omega, \omega)), \quad (5.16)$$

wobei jeweils $\theta \perp \omega$ gilt. Die Darstellung über Φ_s liefert dabei die Fortsetzung auf den gesamten Hilbertraum, gilt also für alle $f \in \mathbf{H} = L^2(\Omega)$. Damit ist

$$\mathbb{R} \times M \ni (s, \omega, \theta) \mapsto X_+ = \Phi_s(\theta + R\omega, \omega) \in \Omega \quad (5.17)$$

maßerhaltend und (fast überall) bijektiv und entsprechend auch

$$\mathbb{R} \times M \ni (s, \omega, \theta) \mapsto X_- = \Phi_s(\theta - R\omega, \omega) \in \Omega. \quad (5.18)$$

Wir bezeichnen die Umkehrfunktionen als $s_{\pm}(X)$, $\omega_{\pm}(X)$ und $\theta_{\pm}(X)$. Insbesondere existiert eine (fast überall) Bijektion $(s_-, \omega_-, \theta_-) \mapsto (s_+, \omega_+, \theta_+)$. Dabei gilt

$$s_-(s_+, \omega_+, \theta_+) - s_+ = \ell(\omega_+, \theta_+) \quad (5.19)$$

unabhängig von s_+ (Translationsinvarianz!) und die Zuordnung $(s_+, \omega_+, \theta_+) \mapsto (\omega_-, \theta_-)$ ist unabhängig von s_+ . Was wir gerade beschrieben haben, sieht wie folgt aus: Ein Teilchen, welches zum Zeitpunkt Null \mathcal{E}_- im Punkt $\theta_- - R\omega_-$ in Richtung ω_- verlässt wird (nach Reflexionen) zum Zeitpunkt $\ell(\omega_+, \theta_+)$ die Menge \mathcal{E}_+ im Punkt $\theta_+ + R\omega_+$ erreichen. Die Zahl $\ell(\omega_+, \theta_+)$ wird als *Verweildauer* bezeichnet.

Im Folgenden werden wir für $(s_+, \omega_+, \theta_+)$ wieder kurz (s, ω, θ) schreiben und die auslaufende Darstellung verwenden. Es gilt also

$$k_+(s, \omega, \theta) = f(\Phi_s(\theta + R\omega, \omega)) = f(\Phi_{s_-}(\theta_- - R\omega_-, \omega_-)) = k_-(s + \ell(\omega, \theta), \omega_-, \theta_-) \quad (5.20)$$

und damit insbesondere folgendes Lemma:

5.1.7 Lemma. *Die Streuabbildung $S : k_- \mapsto k_+$ ist im Fourierbild durch*

$$\widehat{k}_+(\zeta)(\omega, \theta) = (\sigma(\zeta)\widehat{k}_+(\zeta))(\omega, \theta) = e^{-i\ell(\omega, \theta)\zeta}\widehat{k}_-(\zeta, \omega_-, \theta_-), \quad (5.21)$$

also durch eine maßerhaltende Punkttransformation auf M (also eine konstante unitäre Abbildung auf $L^2(M)$) gefolgt von einer Multiplikation mit $e^{-i\ell(\omega, \theta)\sigma}$ gegeben.

5.1.8 Satz. *Sei $\ell(G) = \text{ess sup}_{(\omega, \theta) \in M} \ell(\omega, \theta)$.*

(i) *Angenommen, $\ell(G) < \infty$. Dann besitzt σ eine holomorphe Fortsetzung auf ganz \mathbb{C} .*

(ii) *Gilt $\ell(G) = \infty$, so ist σ holomorph in \mathbb{C}_- und besitzt \mathbb{R} als natürliche Grenze.*

Beweis. Ist die Verweildauer ℓ essentiell beschränkt, so ist $e^{-i\ell(\omega, \theta)\zeta} \neq 0$ für fast alle $(\omega, \theta) \in M$ und $\zeta \in \mathbb{C}$ und die Streumatrix σ ist ganz. Ist andererseits die Verweildauer unbeschränkt, so ist die Multiplikation mit $e^{-i\ell(\omega, \theta)\zeta}$ für kein $\zeta \in \mathbb{C}_-$ invertierbar und σ kann nicht in die obere Halbebene fortgesetzt werden. \square

5.2 Wellengleichungen in Außengebieten

5.2.1. Als nächstes betrachten wir Wellengleichungen auf einem Außengebiet $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O}$, n ungerade, mit geeigneten Randbedingungen¹. Wir setzen wiederum voraus, dass $\mathcal{O} \subset B_R$ gilt und bezeichnen mit $\mathbf{H} = \dot{H}_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ den Energieraum sowie mit $\mathbf{F}_\pm \subset \mathbf{H}$ die Teilräume bestehend aus den Cauchydaten für Lösungen mit $\text{supp } u(t, \cdot) \cap B_{R\pm t} = \emptyset$ für $\pm t \geq 0$.

Es ist evident, dass dann

$$U(t)\mathbf{F}_\pm \subset \mathbf{F}_\pm, \quad \pm t \geq 0 \quad (5.22)$$

und ebenso

$$\bigcap_{\pm t > 0} U(t)\mathbf{F}_\pm = \{0\} \quad (5.23)$$

gilt. Um die Streutheorie nach Lax und Phillips anzuwenden, bleibt nachzurechnen, dass die weiteren Bedingungen für die Annahmen $(\mathbf{U1}_\pm)$, $(\mathbf{U2})$ erfüllt sind.

5.2.2 Lemma. *Es gilt $\mathbf{F}_- \perp \mathbf{F}_+$.*

Beweis. Wir bezeichnen mit $\mathbf{H}_0 = \dot{H}^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ den Energieraum der freien Wellengleichung und betten \mathbf{H} in \mathbf{H}_0 dadurch ein, dass wir in \mathcal{O} mit Null fortsetzen. Die Einbettung ist isometrisch. Wendet man die Radontransformation als freie Translationsdarstellung an, so wird dabei \mathbf{F}_+ auf $L^2([R, \infty); L^2(\mathbb{S}^{n-1}))$ und \mathbf{F}_- auf $L^2((-\infty, -R]; L^2(\mathbb{S}^{n-1}))$ abgebildet. Die freie Translationsdarstellung ist unitär, \mathbf{F}_\pm sind damit orthogonal. \square

Die Dichtheit von $\bigcup_t U(t)\mathbf{F}_+$ in \mathbf{H} kann auf lokales Abfallen der Energie zurückgeführt werden.

5.2.3 Lemma. *Angenommen, für jede beschränkte Teilmenge $B \subset \Omega$ und jede Lösung $u(t, x)$ der Wellengleichung gilt*

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_B |\nabla u(t, x)|^2 + |\partial_t u(t, x)|^2 dx = 0. \quad (5.24)$$

Dann gilt $(\mathbf{U1}_+)$.

Beweis. Schritt 1: Angenommen, $\mathbf{v} = (v_0, v_1) \in \mathbf{H}$ erfüllt $(\mathbf{v}, U(t)\mathbf{u}_+) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle $\mathbf{u}_+ = (u_0, u_1) \in \mathbf{F}_+$. Da $U(t)$ unitär ist, impliziert dies also $(U(-t)\mathbf{v}, \mathbf{u}_+) = 0$ und $U(-t)\mathbf{v} \perp \mathbf{F}_+$.

Schritt 2: Sei $\mathbf{w} = (w_0, w_1) \perp \mathbf{F}_+$ und u_+ die Lösung der freien Wellengleichung zu Anfangsdaten w_0, w_1 (fortgesetzt durch Null in \mathcal{O}). Die freie Translationsdarstellung dieser Lösung ist ein Element von $L^2((-\infty, R]; L^2(\mathbb{S}^{n-1}))$ und es gilt

$$u_+(t, x) = U_0(t)\mathbf{w}(x) = 0 \quad \text{für } |x| \leq -t - R, t < -R. \quad (5.25)$$

Da damit diese Lösung für $t < -2R$ insbesondere in \mathcal{O} verschwindet gilt

$$U_0(t)\mathbf{w} = U(t + 2R)U_0(-2R)\mathbf{w}, \quad t < -2R. \quad (5.26)$$

¹Das nachfolgende ist für Dirichletrandbedingungen aufgeschrieben, für andere Randbedingungen kann man ähnlich vorgehen.

Schritt 3: Wir nutzen die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit. Für jedes $\mathbf{u} = (u_0, u_1) \in \mathbf{H}$ gilt

$$U_0(-2R)\mathbf{u}(x) = U(-2R)\mathbf{u}(x) \quad \text{für } |x| > 3R, \quad (5.27)$$

entsprechend gilt auch für die lokale Energie

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}(R)}^2 = \int_{\Omega \cap B_R} |\nabla u_0(t, x)|^2 + |u_1(t, x)|^2 dx \quad (5.28)$$

aufgrund der Ausbreitungsgeschwindigkeit Eins die Abschätzung

$$\|U_0(-2R)\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}(3R)} \leq \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}(5R)}, \quad \|U(-2R)\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}(3R)} \leq \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}(5R)}. \quad (5.29)$$

Schritt 4: Sei \mathbf{v} wie in Schritt 1 und $\varepsilon > 0$. Dann existiert wegen (5.24) eine Folge $s_j \rightarrow \infty$ mit

$$\|U(s_j)\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}(5R)} < \varepsilon \quad (5.30)$$

für alle j . Damit folgen

$$\|U_0(-2R)U(s_j)\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}(3R)} < \varepsilon, \quad \|U(-2R)U(s_j)\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}(3R)} < \varepsilon \quad (5.31)$$

und somit

$$\|U_0(-2R)U(s_j)\mathbf{v} - U(s_j - 2R)\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}(3R)} < 2\varepsilon. \quad (5.32)$$

Da $U(s_j)\mathbf{v} \perp \mathbf{F}_+$ gilt, stimmen beide Terme für $|x| > 3R$ überein. Es gilt also

$$\|U(2R - s_j)U_0(-2R)U(s_j)\mathbf{v} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{H}} = \|U_0(-2R)U(s_j)\mathbf{v} - U(s_j - 2R)\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}} < 2\varepsilon. \quad (5.33)$$

Für $s_j > 2R$ gilt aber $U(2R - s_j)U_0(-2R)U(s_j)\mathbf{v} = U_0(-s_j)U(s_j)\mathbf{v}$ nach Schritt 2 und somit, da dies für $|x| < s_j - 2R$ verschwindet $\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}(s_j-2R)} < 2\varepsilon$. Da aber s_j beliebig groß und ε beliebig klein waren, muss damit $\mathbf{v} = 0$ gelten. \square

Die Annahme (**U1**₋) folgt entsprechend aus dem Abfallen der lokalen Energie für $t \rightarrow -\infty$. Es stellt sich die Frage, wie man das lokale Abfallen der Energie beweist. Eine Möglichkeit bieten sogenannte Morawetz-Abschätzungen. Diese zeigen, dass für sternförmige Gebiete die lokale Energie wie t^{-1} für $t \rightarrow \infty$ abfällt. Eine Alternative liefern spektrale Charakterisierungen. Wir zeigen, dass lokales Energieabfallen aus der Nichtexistenz von Eigenwerten für den Erzeuger der Halbgruppe folgt. Dazu nutzen wir:

5.2.4 Satz (Rellich, Vekua). *Sei $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O}$ zusammenhängend mit glattem Rand und $n \geq 3$. Dann gelten die folgenden beiden Aussagen:*

- (i) *Angenommen $\Delta u = 0$ mit $u|_{\partial\Omega} = 0$. Gilt dann $u \in L^2(\Omega)$, so folgt $u = 0$.*
- (ii) *Gilt $\Delta u + \lambda^2 u = 0$ auf Ω für ein $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $u \in L^2(\Omega)$, so folgt $u = 0$.*

Beweis. Zuerst bemerken wir, dass jedes $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ mit $\Delta u = \lambda u$ automatisch zu $C^\infty(\Omega)$ gehört (Elliptische Regularität). Wir können also mit den Funktionen punktweise rechnen. Die erste Aussage ist dabei einfach, die zweite bedarf eines genaueren Hinsehens.

(i) Aus $\Delta u = 0$ für ein $u \in L^2(\Omega)$ folgt zusammen mit der Randbedingung $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Damit gilt aber insbesondere auch

$$0 = - \int_{\Omega} \overline{u(x)} \Delta u(x) dx = \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \quad (5.34)$$

und u ist konstant, also aufgrund der Randbedingungen insbesondere auch $u = 0$.

(ii) Diese Aussage kommt ohne Randbedingungen aus. Da λ reell ist, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass auch u reellwertig ist. Wir betrachten die Lösung $u(x)$ für $|x| > R$ und entwickeln diese in eine Reihe nach (reellwertigen) Kugelfunktionen

$$u(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\nu_j} b_{j,k}(r) \mathcal{Y}_{j,k}(\omega), \quad x = r\omega, \quad r > R. \quad (5.35)$$

Dabei gilt $\Delta_{\omega} \mathcal{Y}_{j,k} + \mu_j \mathcal{Y}_{j,k} = 0$, alle Kugelfunktionen sind normiert in $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ und paarweise orthogonal. Eingesetzt in die Ausgangsgleichung ergibt dies unter Ausnutzung der Darstellung des Laplaceoperators in Kugelkoordinaten

$$b_{j,k}''(r) + \frac{n-1}{r} b_{j,k}'(r) - \frac{\mu_j}{r^2} b_{j,k}(r) + \lambda^2 b_{j,k}(r) = 0. \quad (5.36)$$

Weiterhin impliziert $u \in L^2(\Omega)$ die Quadratintegrierbarkeit von $c_{j,k}(r) = r^{(n-1)/2} b_{j,k}(r)$ auf $[R, \infty)$, da

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\nu_j} \int_R^{\infty} |c_{j,k}(r)|^2 dr = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\nu_j} \int_R^{\infty} |b_{j,k}(r)|^2 r^{n-1} dr = \int_{|x|>R} |u(x)|^2 dx < \|u\|. \quad (5.37)$$

Die $c_{j,k}$ erfüllen die Differentialgleichung

$$c_{j,k}''(r) + \frac{4n - n^2 - 3 - 4\mu_j}{4r^2} c_{j,k}(r) + \lambda^2 c_{j,k}(r) = 0, \quad (5.38)$$

es ist also auch $c_{j,k}'$ quadratintegrierbar und damit auch $c_{j,k}'$. Multipliziert man die Gleichung mit $2c_{j,k}'$ und integriert von r bis ∞ , so folgt

$$\begin{aligned} 0 &= -c_{j,k}'(r)^2 + (4n - n^2 - 3 - 4\mu_j) \int_r^{\infty} \frac{c_{j,k}(s) c_{j,k}'(s)}{2s} ds - \lambda^2 c_{j,k}(r)^2 \\ &= -c_{j,k}'(r)^2 - \frac{4n - n^2 - 3 - 4\mu_j}{4r} c_{j,k}(r)^2 \\ &\quad + (4n - n^2 - 3 - 4\mu_j) \int_r^{\infty} \frac{c_{j,k}(s)^2}{2s^3} ds - \lambda^2 c_{j,k}(r)^2. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Der erste und der dritte Term sind dabei nichtpositiv ($n \geq 3$ und $\mu_1 \geq 0$). Ebenso ist die Summe aus dem zweiten und dem vierten Term für große r nichtpositiv. Da insgesamt Null entstehen muss, sind also alle Summanden für hinreichend großes r gleich Null. Nun löst aber $c_{j,k}$ eine Differentialgleichung. Damit folgt aus $c_{j,k}(r) = 0$ für r groß schon $c_{j,k}(r) = 0$ für alle $r > R$. Also ist $\text{supp } u \subset B_R$. Mit dem Satz von Holmgren folgt $u = 0$ auf Ω . \square

5.2.5 Lemma (Wiener). Sei $\mu \in \mathbb{M}(\mathbb{R})$ von beschränkter Totalvariation und atomfrei, es gelte also $\mu(\{\xi\}) = 0$ für jedes $\xi \in \mathbb{R}$. Dann gilt für

$$\widehat{\mu}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{it\xi} d\mu(\xi) \quad (5.40)$$

die Abschätzung

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T |\widehat{\mu}(t)|^2 dt = 0. \quad (5.41)$$

Beweis. Da μ von beschränkter Totalvariation ist, ist die Funktion $\widehat{\mu}(t)$ gleichmäßig beschränkt. Sei nun $\varepsilon > 0$. Wir betrachten die Differenz $\mu(\cdot + \varepsilon) - \mu(\cdot - \varepsilon)$ und deren Fouriertransformierte $2i \sin(\varepsilon t) \widehat{\mu}(t)$. Da nun offenbar die Funktion $2t^{-1} \sin(\varepsilon t) \widehat{\mu}(t)$ quadratintegrierbar ist und dies gerade der Fouriertransformierten der Differenz der Verteilungsfunktionen

$$m(\lambda + \varepsilon) - m(\lambda - \varepsilon) \quad \text{für} \quad m(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} d\mu(\xi) \quad (5.42)$$

entspricht, folgt nach Plancherel

$$\int |m(\lambda + \varepsilon) - m(\lambda - \varepsilon)|^2 d\lambda = 4 \int \frac{\sin^2(\varepsilon t)}{t^2} |\widehat{\mu}(t)|^2 dt. \quad (5.43)$$

Setzt man nun

$$M(\varepsilon) = \sup_{\lambda} |m(\lambda + \varepsilon) - m(\lambda - \varepsilon)|, \quad (5.44)$$

so folgt für die linke Seite von (5.43) die Abschätzung

$$\begin{aligned} \dots &\leq M(\varepsilon) \int |m(\lambda + \varepsilon) - m(\lambda - \varepsilon)| d\lambda \\ &= M(\varepsilon) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{(2k-1)\varepsilon}^{(2k+1)\varepsilon} |m(\lambda + \varepsilon) - m(\lambda - \varepsilon)| d\lambda \\ &= M(\varepsilon) \underbrace{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |m((2k+1)\varepsilon + \tau) - m((2k-1)\varepsilon + \tau)| d\tau}_{\leq \|\mu\|} \leq 2\varepsilon M(\varepsilon) \|\mu\|. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Andererseits ist die rechte Seite von (5.43) wegen $2/\pi \leq |(\varepsilon t)^{-1} \sin(\varepsilon t)|$ für alle $|\varepsilon t| \leq \pi/2$ nach unten durch

$$\dots \geq 4\varepsilon^2 \int \frac{\sin^2(\varepsilon t)}{(\varepsilon t)^2} |\widehat{\mu}(t)|^2 dt \geq \frac{4}{T^2} \int_{-T}^T |\widehat{\mu}(t)|^2 dt \quad (5.46)$$

mit $T = \pi/(2\varepsilon)$ abschätzbar.

Da μ atomfrei ist, ist aber $m(\lambda)$ gleichmäßig stetig und damit gilt $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M(\varepsilon) = 0$. Wählt man nun zu gegebenem $\delta > 0$ den Parameter ε so klein (also T so groß), dass $\pi M(\varepsilon) \|\mu\| < 4\delta$ gilt, so folgt

$$\frac{1}{T} \int_{-T}^T |\widehat{\mu}(t)|^2 dt \leq \delta \quad (5.47)$$

und da δ beliebig war die Behauptung. □

5.2.6 Satz. Sei $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O}$ mit \mathcal{O} einfach zusammenhängend und mit glattem Rand. Dann gilt für jedes $\mathbf{u} \in \mathbf{H}$ und jedes $R > 0$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \|U(t)\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}(R)} = 0. \quad (5.48)$$

Insbesondere sind die Voraussetzungen $(\mathbf{U1}_{\pm})$, $(\mathbf{U2})$ erfüllt.

Beweis. Schritt 1: Wir zeigen zuerst nur die schwache Konvergenz

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} (U(t)\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \quad (5.49)$$

für beliebige $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}$ und nutzen dafür die Darstellung der unitären Gruppe über den Spektralsatz²

$$(U(t)\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\zeta} d\mu_{\mathbf{u}, \mathbf{v}}(\zeta) \quad (5.50)$$

unter Nutzung des projektionswertigen Spektralmaßes μ und der zugeordneten skalaren Maße $\mu_{\mathbf{u}, \mathbf{v}}(\cdot) = (\mu(\cdot)\mathbf{u}, \mathbf{v})$. Da nach Satz 5.2.4 der Dirichlet-Laplace auf Ω keine Eigenwerte besitzt, hat der Erzeuger der Gruppe $U(t)$

$$iA = i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{-\Delta} & i \\ \sqrt{-\Delta} & -i \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sqrt{-\Delta} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-\Delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{-\Delta} & i \\ \sqrt{-\Delta} & -i \end{pmatrix}, \quad (5.51)$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{-\Delta} & i \\ \sqrt{-\Delta} & -i \end{pmatrix} : \dot{H}_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \xrightarrow{\simeq} L^2(\Omega; \mathbb{C}^2), \quad (5.52)$$

keine Eigenwerte (und darüberhinaus ganz \mathbb{R} als Spektrum). Damit ist aber das Spektralmaß atomfrei und das Wiener-Lemma anwendbar. Also gilt

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T |(U(t)\mathbf{u}, \mathbf{v})|^2 dt = 0. \quad (5.53)$$

Sei nun $(\mathbf{v}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine in \mathbf{H} dichte Folge. Dann existiert zu jedem j eine Zahl $T > j$ mit

$$\int_{-T}^T |(U(t)\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_l)|^2 dt < \frac{T}{3j^3} \quad \text{für } 1 \leq k, l \leq j \quad (5.54)$$

Damit existiert aber insbesondere auch ein $s_j \in (T/2, T)$ mit

$$|(U(s_j)\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_l)| \leq \frac{1}{j} \quad \text{für } 1 \leq k, l \leq j. \quad (5.55)$$

Für diese Folge gilt also $\lim_{j \rightarrow \infty} (U(s_j)\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_l) = 0$ für alle k, l und zusammen mit der Abschätzung $|(U(t)\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$ folgt

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} (U(t)\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \quad (5.56)$$

für alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}$.

Schritt 2: Als zweiten Schritt führen wir die starke Konvergenz auf die schwache zurück. Es genügt wiederum, die Aussage für eine dichte Teilmenge zu zeigen und wir ersetzen $U(t)\mathbf{u}$ durch

$$U(t)\mathbf{u}_\varphi = \int \varphi(r)U(t+r)\mathbf{u} dr \quad (5.57)$$

²Den wir hier an dieser Stelle als bekannt voraussetzen. Er wird in der angegebenen Form oft als Satz von Stone bezeichnet. Wir beweisen diese Form der Spektraldarstellung in Kapitel 7.1.

für ein $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Dann gilt $\mathbf{v}_\varphi \rightarrow \mathbf{v}$ für eine δ -Folge φ . Darüberhinaus sind die so konstruierten Lösungen $(u^{(\varphi)}, u_t^{(\varphi)})^\top = U(t)\mathbf{u}_\varphi$ glatt in t , ihre t -Ableitungen also ebenso Lösungen der Wellengleichung. Damit erhalten wir

$$\|u_{tt}^{(\varphi)}\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u_t^{(\varphi)}\|_{L^2(\Omega)} \leq C^{(\varphi)} \quad (5.58)$$

gleichmäßig in t und (diesmal aufgrund der Gleichung für $u^{(\varphi)}$)

$$\|\Delta u^{(\varphi)}\|_{L^2(\Omega)} \leq C^{(\varphi)}. \quad (5.59)$$

Da $\partial\Omega$ glatt ist, impliziert letzteres entsprechende gleichmäßige Schranken für alle zweiten Ableitungen (elliptische Regularität des Dirichlet-Laplace). Damit können wir den Satz von Rellich anwenden, die Menge $\{U(t)\mathbf{u}_\varphi : t > 0\}$ ist relativ kompakt im *lokalen* Energieraum $\mathbf{H}(R)$ für jedes $R > 0$. Es existiert also eine Teilfolge der Folge s_j aus Schritt 1, so dass $U(s_{j_k})\mathbf{u}_\varphi$ in der lokalen Energienorm konvergiert. Da der schwache Grenzwert schon als Null identifiziert ist, folgt

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|U(s_{j_k})\mathbf{u}_\varphi\|_{\mathbf{H}(R)} = 0. \quad (5.60)$$

Die Ausweitung auf alle \mathbf{u} folgt nun mit einem Diagonalfolgenargument. □

Damit ist die Streutheorie nach Lax und Phillips anwendbar. Wie man in diesem Fall genau die Streumatrix ausrechnet, werden wir im nächsten Kapitel diskutieren. Vorerst beschränken wir uns auf ein Resultat, welches die Lax–Phillips-Halbgruppe mit der Gebietsgeometrie verbindet. Dazu sei wiederum R so groß, dass $\partial\Omega \subset B_R$. Weiter bezeichne $\ell(\Omega)$ das Supremum über die Länge der Billiardtrajektorien innerhalb $\Omega \cap B_R$ (mit Reflexionen an $\partial\Omega$). Es gilt

5.2.7 Satz. (i) *Gilt $\ell(\Omega) < \infty$, so ist $Z(t)$ kompakt für t hinreichend groß.*

(ii) *Gilt $\ell(\Omega) = \infty$, so folgt $\|Z(t)\| = 1$ für alle $t > 0$ und $Z(t)$ ist für kein $t > 0$ kompakt.*

Bemerkung zum Beweis. Für einen Beweis der ersten Aussage und weitere Hinweise sei auf das Buch von Lax [3] verwiesen. Die zugrundeliegende Idee besteht in der Nutzung der Ausbreitungsergebnisse für Singularitäten. Diese folgen gerade den Billiardtrajektorien und liefern (so $\ell(\Omega)$ endlich ist) damit eine Glättung lokal in der Nähe des Hindernisses \mathcal{O} und damit die Möglichkeit den Satz von Rellich anzuwenden. Für die zweite Aussage muss man sich Lösungen in Form geeigneter Wellenpakete konstruieren. □

5.3 Kirchhoff-Graphen

5.3.1. Sei \mathcal{G} ein Graph mit endlich vielen Knoten und Kanten und mindestens einer unbeschränkten Kante. Wir betrachten zum Kirchhoff-Laplace auf \mathcal{G} die zugeordnete Wellengleichung

$$u_{tt} = \Delta_{\mathcal{G}} u \quad (5.61)$$

mit Kirchhoffbedingungen an allen Knoten. Wir nutzen wiederum als Energieraum den Raum $\mathbf{H} = \dot{H}^1(\mathcal{G}) \times L^2(\mathcal{G})$ (beziehungsweise einen abgeschlossenen Teilraum davon), beschreiben aber die Konstruktion der unitären Gruppe $U(t)$ explizit. Auf jeder Kante ist die Gleichung durch

$$u_{tt} = u_{xx} \quad (5.62)$$

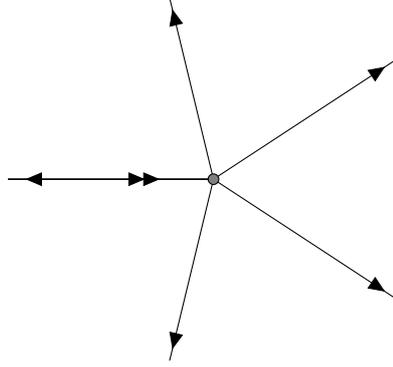


Abbildung 5.1: Streuung im Sterngraph (hier vom Grad 5). Auf einer Kante gibt es ein- und auslaufende Wellen, auf den anderen Kanten werden nur auslaufende Wellen betrachtet.

gegeben, besitzt also als Lösung nach d'Alembert die Summe einer nach links und einer nach rechts verlaufenden Welle

$$u_e(t, x) = u_{-,e}(x - t) + u_{+,e}(x + t), \quad e \in E, x \in I_e \quad (5.63)$$

auf jeder Kante e . Im Energierraum $\mathbf{H} = \dot{H}^1(\mathcal{G}) \times L^2(\mathcal{G})$ und mit der (isometrischen) Identifikation $\dot{H}^1 \in f \mapsto f' \in L^2$ auf unbeschränkten (gerichteten) Graphen ergibt sich daraus

$$\begin{pmatrix} u'_{+,e} + u'_{-,e} \\ u'_{+,e} - u'_{-,e} \end{pmatrix} = u'_{+,e} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u'_{-,e} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in L^2(I_e; \mathbb{C}^2), \quad e \in E. \quad (5.64)$$

Zur Bestimmung der Evolution $U(t)$ bleibt zu berechnen, was beim Auftreffen einer solchen Welle auf einen Knoten geschieht. Wir identifizieren den Knoten auf jeder inzidenten Kante mit dem Nullpunkt und betrachten das Ganze lokal in Knotennähe:

5.3.2 Lemma. Sei \mathcal{G}_d ein Sterngraph mit d unbeschränkten Kanten und einem Knoten vom Grad d . Angenommen auf einer Kante läuft eine Welle $f(x + t)$, $f \in \dot{H}^1(\mathbb{R}_+)$, ein. Dann ergeben sich die reflektierte Welle $g(x - t)$ auf derselben Kante und die transmittierten Wellen $h(x - t)$ auf allen anderen Kanten nach folgender Formel

$$g(t) = \frac{2-d}{d}f(-t), \quad h(t) = \frac{2}{d}f(-t). \quad (5.65)$$

Beweis. Aus Symmetriegründen stimmen die auslaufenden Wellen auf allen anderen Kanten überein. Damit bleibt, die Randbedingungen als Gleichungssystem aufzuschreiben und zu lösen. Die zu fordernden Bedingungen sind für alle $t \in \mathbb{R}$

$$h(-t) = g(-t) + f(t), \quad (d-1)h'(-t) + g'(-t) + f'(t) = 0. \quad (5.66)$$

Wir nehmen an, dass das einlaufende Wellenpaket f kompakt getragen ist. Dann sind f , g und h für hinreichend kleine (oder große) t jeweils Null und wir können die zweite Gleichung integrieren. Dies liefert

$$-(d-1)h(-t) - g(-t) + f(t) = 0 \quad (5.67)$$

und als Lösung des Gleichungssystems erhalten wir

$$g(-t) = \frac{2-d}{d}f(t), \quad h(-t) = \frac{2}{d}f(t) \quad (5.68)$$

und damit nach Substitution die Behauptung. \square

5.3.3 Bemerkung. (i) Für $d = 1$ ergibt sich formal eine Neumann-Randbedingung. Die Stetigkeitsbedingung am Knoten entfällt und die Kirchhoffbedingung liefert $f'(t) + g'(-t) = 0$ und damit $f(t) = g(-t)$. Alternativ kann man auch eine Dirichlet-Bedingung stellen, diese liefert $f(t) + g(-t) = 0$ und damit $f(t) = -g(-t)$. In beiden Fällen erfolgt eine Reflexion, jedoch mit verschiedenen Vorzeichen.

(ii) Knoten mit $d = 2$ und Kirchhoff-Bedingung können entfernt werden. Hier folgt $g = 0$ und $f(t) = h(-t)$ und Wellen laufen durch den Knoten einfach hindurch.

5.3.4 Beispiel. Wir können die Streuabbildung für den Graphen \mathcal{G}_d aus obigem Lemma direkt ablesen. Als einlaufenden Teilraum $\mathbf{F}_- \subset \mathbf{H}$ nehmen wir den Teil des Energieraums bestehend aus Daten für einlaufende Wellen auf allen d Strahlen, als auslaufenden Teilraum $\mathbf{F}_+ \subset \mathbf{H}$ entsprechend die Daten auslaufender Wellen. Damit ergeben sich zwei Translationsdarstellungen mit Bildräumen $L^2(\mathbb{R}_\pm; \mathbb{C}^d)$ zu den Teilräumen \mathbf{F}_\pm ,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_- &\ni \begin{pmatrix} f_e \\ f_e \end{pmatrix}_{e \in E} \longrightarrow (f_e(\cdot))_{e \in E} \in L^2(\mathbb{R}_-; \mathbb{C}^d), \\ \mathbf{F}_+ &\ni \begin{pmatrix} f_e \\ -f_e \end{pmatrix}_{e \in E} \longrightarrow (f_e)_{e \in E} \in L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^d), \end{aligned} \quad (5.69)$$

hier werden bis auf eine Spiegelung am Ursprung die Funktionswerte der jeweiligen ein/auslaufenden Welle im Nullpunkt des Strahls zum Zeitpunkt t genutzt, was auch ebenso die Fortsetzung der Translationsdarstellung auf ganz \mathbf{H} liefert. Die Streuabbildung ist dann durch die (konstante!) Matrix

$$S = \begin{pmatrix} \frac{2-d}{d} & \frac{2}{d} & \cdots & \frac{2}{d} \\ \frac{2}{d} & \frac{2-d}{d} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \frac{2}{d} \\ \frac{2}{d} & \cdots & \frac{2}{d} & \frac{2-d}{d} \end{pmatrix} \quad (5.70)$$

sowohl in der Translationsdarstellung als auch im Fourierbild gegeben. Die Matrix ist unitär,

$$\frac{(2-d)^2}{d^2} + (d-1)\frac{4}{d^2} = \frac{d^2}{d^2} = 1, \quad 2\frac{(2-d)2}{d^2} + (d-2)\frac{4}{d^2} = 0. \quad (5.71)$$

Beide Translationsdarstellungen liefern jeweils unitäre Abbildungen

$$\mathbf{H} = \dot{H}^1(\mathcal{G}_d) \times L^2(\mathcal{G}_d) \xrightarrow{\simeq} L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}^d) \quad (5.72)$$

des gesamten Energieraumes auf den zugeordneten L^2 der \mathbb{C}^d -wertigen Funktionen.

5.3.5 Beispiel. Die Evolution der Wellengleichung auf komplizierteren Graphen lassen sich aus den einzelnen Knoten und den Kantenlängen dazwischen zusammensetzen. Wir betrachten

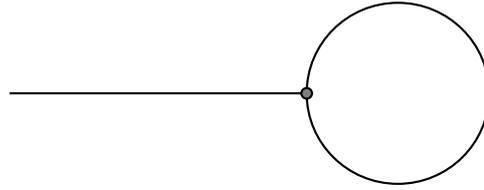


Abbildung 5.2: Der Lollipop-Graph

dazu ein Beispiel, den Lollipop-Graph aus Bild 5.2 bestehend aus einer unbeschränkten Kante und einem Kreis der Länge 1. In diesem Fall kann die Translationsdarstellung nicht auf dem gesamten Energieraum definiert sein, es gibt Wellen die auf dem Strahl identisch verschwinden. Diese betrachten wir zuerst, für diese gilt also

$$u_{\text{strahl}}(t, x) = 0, \quad u_{\text{kreis}}(t, 0) = u_{\text{kreis}}(t, 1) = 0, \quad u'_{\text{kreis}}(t, 0) = u'_{\text{kreis}}(t, 1) \quad (5.73)$$

und $u_{\text{kreis}}(t, x)$ zerfällt in Eigenfunktionen $e^{\pm 2\pi i k t} \sin(2\pi k x)$ des entsprechenden periodischen Problems auf $[0, 1]$. Wir bezeichnen mit

$$\mathbf{H}_{\text{ac}}^{\pm} = \bigvee_t U(t) \mathbf{F}_{\pm} \quad (5.74)$$

den Teil des Energieraumes, welcher von den ein- beziehungsweise auslaufenden Wellen ausgeschöpft wird. Analog zu Lemma 5.2.3 und Satz 5.2.6 zeigt man, dass dabei $\mathbf{H}_{\text{ac}}^{+} = \mathbf{H}_{\text{ac}}^{-}$ dem orthogonalen Komplement der oben beschriebenen Eigenfunktionen im Energieraum entspricht. Der Beweis nutzt dabei nur die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit und das Huygensprinzip (Korollar 3.3.4) im Energieraum, welches in einer Raumdimension gilt.

Unser Ziel ist es, die zugehörige Streumatrix zu bestimmen. Statt der Spektraldarstellung betrachten wir vorerst die Translationsdarstellung und Fragen, zu welchen späteren Zeitpunkten welcher Anteil der gerade einlaufenden Welle zu einer auslaufenden Welle wird. Da der einzige Knoten vom Grad 3 ist, werden jeweils $-1/3$ reflektiert und auf jede andere Richtung werden $2/3$ transferiert. Damit ergeben sich nachfolgende Werte

Zeitpunkt	0	1	2	3	...
reflektierter Anteil	$-\frac{1}{3}$	$2\frac{2}{3}\frac{2}{3} = \frac{8}{9}$	$2\frac{2}{3}(\frac{2}{3} - \frac{1}{3})\frac{2}{3} = \frac{8}{27}$	$2\frac{2}{3}(\frac{2}{3} - \frac{1}{3})(\frac{2}{3} - \frac{1}{3})\frac{2}{3} = \frac{8}{81}$...

und entsprechend zum Zeitpunkt k , $k \in \mathbb{N}$ jeweils $8/3^{k+1}$. Damit ergibt sich in der Translationsdarstellung für die Streuabbildung die Faltung

$$Sf(t) = -\frac{1}{3}f(t) + \frac{8}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(t+k)}{3^k} = f * \left(-\frac{1}{3}\delta_0 + \frac{8}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} \delta_{-k} \right) \quad (5.75)$$

und entsprechend in der Spektraldarstellung

$$\sigma(\zeta) = -\frac{1}{3} + \frac{8}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-ik\zeta}}{3^k} = -\frac{1}{3} + \frac{8}{3} \frac{e^{-i\zeta}}{3} \frac{3}{3 - e^{-i\zeta}} = \frac{8}{3} \frac{e^{-i\zeta}}{3 - e^{-i\zeta}} - \frac{1}{3} = \frac{3e^{-i\zeta} - 1}{3 - e^{-i\zeta}}. \quad (5.76)$$

Für reelle ζ gilt dabei $|\sigma(\zeta)| = 1$, ebenso besitzt die Funktion Polstellen in ζ mit $e^{-i\zeta} = 3$, also in $\zeta = 2m\pi + i \ln 3$, $m \in \mathbb{Z}$. Sie ist beschränkt und holomorph in der unteren Halbebene \mathbb{C}_- .

5.3.6. Notation. Wir bezeichnen allgemeiner für einen Graphen \mathcal{G} mit unbeschränkten Kanten nummeriert von 1 bis d (und $d = \#E_\infty$) die Menge der Wege (mit Reflexion an Knoten) von Kante i nach Kante j mit $\mathcal{L}_{i,j}$. Für jeden Weg $w \in \mathcal{L}_{i,j}$ sei $\ell(w)$ die Länge des Weges und $c(w)$ das Produkt über die Transmissions- beziehungsweise Reflexionskoeffizienten entlang des Weges.

Weiterhin sei \mathcal{G}_b der Graph der entsteht, wenn man die unbeschränkten Kanten alle entfernt. Eine Funktion $f \in D(\Delta_{\mathcal{G}_b}) \subset H^2(\mathcal{G}_b)$ mit

$$\Delta_{\mathcal{G}_b} f + \lambda^2 f = 0, \quad \lambda^2 \geq 0, \quad (5.77)$$

zusammen mit den Kirchhoff-Bedingungen an allen Knoten wird als Eigenfunktion von \mathcal{G}_b bezeichnet. Da die Einbettung von $D(\Delta_{\mathcal{G}_b})$ in $L^2(\mathcal{G}_b)$ kompakt ist, besitzt die Eigenwertgleichung (5.77) nur für eine diskrete Menge an λ mit Häufungspunkt im Unendlichen einen nichttrivialen Lösungsraum und dieser ist endlichdimensional.

Eine solche Eigenfunktion bezeichnen wir als Streu-Eigenfunktion, falls sie zusätzlich an den Knoten von \mathcal{G}_b , die in \mathcal{G} zu einer unendlichen Kante inzident sind, den Funktionswert Null annimmt. Setzt man diese durch Null fort, so ergeben sich Eigenfunktionen von $\Delta_{\mathcal{G}}$ und jede Eigenfunktion von $\Delta_{\mathcal{G}}$ ist von dieser Form.

Weiter bezeichne $\mathbf{F}_\pm \subset \mathbf{H}$ die Teilräume des Energieraums, die zu auf den Strahlen einbeziehungsweise auslaufenden Wellen gehören. Dann gilt, analog zu obigem Beispiel,

5.3.7 Satz. *Sei \mathcal{G} ein Graph mit d unbeschränkten Kanten.*

- (i) *Der Energieraum \mathbf{H} zerfällt in die direkte Summe $\mathbf{H} = \mathbf{H}_p \oplus \mathbf{H}_{ac}$, wobei \mathbf{H}_p von den durch Null fortgesetzten Streu-Eigenfunktionen $(f'_e, \pm f'_e)_{e \in E_0}$ aufgespannt wird und*

$$\bigvee_{t \in \mathbb{R}} U(t) \mathbf{F}_\pm = \mathbf{H}_{ac} \quad (5.78)$$

gilt.

- (ii) *Die ein- und auslaufenden Translationsdarstellungen*

$$\cdot_\pm : \mathbf{H}_{ac} \longrightarrow L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}^d) \quad (5.79)$$

und die zugehörigen Spektraldarstellungen

$$\widehat{\cdot}_\pm : \mathbf{H}_{ac} \longrightarrow L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}^d) \quad (5.80)$$

sind unitäre Abbildungen.

- (iii) *Die Streumatrix $\sigma(\zeta)$ besitzt die Einträge $\sigma_{i,j}(\zeta)$*

$$\sigma_{i,j}(\zeta) = \sum_{w \in \mathcal{L}_{i,j}} c(w) e^{-i\zeta \ell(w)}, \quad (5.81)$$

sie ist insbesondere für alle $\zeta \in \mathbb{C}_-$ symmetrisch und darüberhinaus für $\zeta \in \mathbb{R}$ unitär.

Beweisskizze. (i) folgt analog zu Lemma 5.2.3 und Satz 5.2.6 mit wenigen Modifikationen.

• (ii) ist ein Resultat der Streutheorie von Lax und Phillips, die dazu nötigen Voraussetzungen ergeben sich direkt aus der ersten Teilaussage. • (iii) ergibt sich durch Verfolgen einlaufender Wellen entlang aller Wege analog zu Beispiel 5.3.5. \square

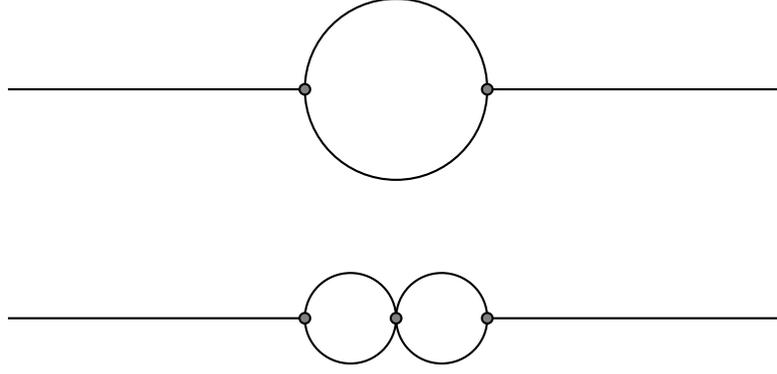


Abbildung 5.3: Die Graphen zu Beispiel 5.3.8 und 5.3.9

5.3.8 Beispiel. Als zweites Beispiel betrachten wir einen Graphen mit zwei unbeschränkten Kanten und dazwischen einem Kreis bestehend aus zwei Kanten der Länge $1/2$ (siehe Bild 5.3). Dann ergibt sich nach obiger Rechenvorschrift für den Reflexionsanteil der Streumatrix

$$\begin{aligned}
 \sigma_{1,1}(\zeta) = \sigma_{2,2}(\zeta) &= -\frac{1}{3} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-in\zeta} \left(\frac{2}{3}\right)^{2 \cdot 2n-1} \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} (-1)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{2n-1-k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \\
 &= -\frac{1}{3} + 2 \frac{2^2}{3^2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-in\zeta} \frac{1}{3^{2n-1}} \\
 &= -\frac{1}{3} + \frac{8}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-in\zeta}}{9^n} = -\frac{1}{3} + \frac{8}{3} \frac{e^{-i\zeta}}{9 - e^{-i\zeta}} = \frac{3(e^{-i\zeta} - 1)}{9 - e^{-i\zeta}}
 \end{aligned} \tag{5.82}$$

und entsprechend für den Transmissionsanteil

$$\begin{aligned}
 \sigma_{1,2}(\zeta) = \sigma_{2,1}(\zeta) &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i(n+\frac{1}{2})\zeta} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{2n-k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \\
 &= 2 \frac{2^2}{3^2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i(n+\frac{1}{2})\zeta} \frac{1}{3^{2n}} \\
 &= \frac{8}{9} e^{-\frac{i}{2}\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-in\zeta}}{9^n} = 8 \frac{e^{-\frac{i}{2}\zeta}}{9 - e^{-i\zeta}}.
 \end{aligned} \tag{5.83}$$

Also ergibt sich

$$\sigma(\zeta) = \begin{pmatrix} \sigma_{1,1}(\zeta) & \sigma_{1,2}(\zeta) \\ \sigma_{2,1}(\zeta) & \sigma_{2,2}(\zeta) \end{pmatrix} = \frac{1}{9 - e^{-i\zeta}} \begin{pmatrix} 3(e^{-i\zeta} - 1) & 8e^{-\frac{i}{2}\zeta} \\ 8e^{-\frac{i}{2}\zeta} & 3(e^{-i\zeta} - 1) \end{pmatrix} \tag{5.84}$$

mit Polstellen in ζ mit $e^{-i\zeta} = 9$, also in $\zeta = 2m\pi + 3i \ln 3$, symmetrisch und unitär auf der reellen Achse und bestehend aus Kontraktionen in \mathbb{C}_- .

5.3.9 Beispiel (Kurasov, Stenberg³). Ersetzt man den einen Kreis durch eine liegende 8 mit gleicher Gesamtlänge, so ergibt sich ebenso die Streumatrix (5.84). Die hinzukommenden Wege kürzen sich in der Summenformel aufgrund der Knoten vom Grad 4 mit Reflexionskoeffizient $-1/2$ und Transmissionskoeffizient $+1/2$ sowie der gleichen Kreisbogenlängen heraus.

5.3.10 Satz. (i) *Die Streumatrix bestimmt im allgemeinen nicht die Struktur des metrischen Graphen.*

(ii) *Sind die (endlichen) Kantenlängen eines metrischen Graphen \mathbb{Q} -linear unabhängig, existieren weder Mehrfachkanten noch Loops, und besitzt der Graph mindestens eine unendliche Kante, so bestimmt die Streumatrix den Graphen eindeutig.*

³P. Kurasov, F. Stenberg, *On the inverse scattering problem on branching graphs*, J. Phys. A: Math. Gen. 35 (2002) 101–121

6 Stationäre Streutheorie

6.1 Spektraldarstellungen auf Kirchhoffgraphen und Berechnung der Streumatrix

6.1.1. Wir betrachten zuerst als Modellfall einen Kirchhoff-Graphen \mathcal{G} mit einer unbeschränkten Kante. Wir identifizieren die unbeschränkte Kante mit \mathbb{R}_+ und bezeichnen mit \mathcal{G}_b den beschränkten Teilgraphen.

Sei \mathbf{H} der zugeordnete Energieraum, $\mathbf{H}_{\text{ac}} = \mathbf{H}_p^\perp$ und bezeichne \mathbf{F}_\pm die den ein- beziehungsweise auslaufenden Wellen auf zugeordneten Teilräume. Diese bestehen aus auf dem Strahl getragenen Funktionen und sind von der Form

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_- &= \{\mathbf{f} = (f, f')^\top : \text{supp } f \subset \mathbb{R}_+\}, \\ \mathbf{F}_+ &= \{\mathbf{f} = (f, -f')^\top : \text{supp } f \subset \mathbb{R}_+\}.\end{aligned}\tag{6.1}$$

Die Translationsdarstellungen sind auf \mathbf{F}_\pm direkt gegeben, bei der einlaufenden Translationsdarstellung wird

$$\mathbf{F}_- \ni \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix} \longrightarrow \sqrt{2}f'(-\cdot) \in L^2(\mathbb{R}_-)\tag{6.2}$$

und bei der auslaufenden Translationsdarstellung

$$\mathbf{F}_+ \ni \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f \\ -f' \end{pmatrix} \longrightarrow -\sqrt{2}f' \in L^2(\mathbb{R}_+)\tag{6.3}$$

zugeordnet. Der Normierungsfaktor sichert die Isometrie. Das funktionale Modell und damit die Spektraldarstellung ergibt sich durch Fouriertransformation. Für die einlaufende Darstellung erhalten wir

$$\mathbf{F}_- \ni \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix} \longrightarrow \widehat{\mathbf{f}}_-(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{ix\zeta} f'(-x) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-ix\zeta} f'(x) dx,\tag{6.4}$$

was sich (zumindest für kompakt getragene $\mathbf{f} \in \mathbf{F}_-$) formal als Innenprodukt

$$\widehat{\mathbf{f}}_-(\zeta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty f'(x) \overline{\partial_x \frac{e^{ix\zeta}}{i\zeta}} dx + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty f'(x) \overline{e^{ix\zeta}} dx = (\mathbf{f}, \mathbf{e}_-(\cdot, \zeta))_{\mathbf{H}}\tag{6.5}$$

mit der Funktion

$$\mathbf{e}_-(x, \zeta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}i\zeta} e^{ix\zeta} \begin{pmatrix} 1 \\ i\zeta \end{pmatrix}, \quad \zeta \in \mathbb{R},\tag{6.6}$$

schreiben lässt. Für die auslaufende Spektraldarstellung auf \mathbf{F}_+ ergibt sich entsprechend

$$\widehat{\mathbf{f}}_+(\zeta) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty f'(x) \overline{\partial_x \frac{e^{-ix\zeta}}{-i\zeta}} dx - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty f'(x) \overline{e^{-ix\zeta}} dx = (\mathbf{f}, \mathbf{e}_+(\cdot, \zeta))_{\mathbf{H}}\tag{6.7}$$

als Innenprodukt mit

$$\mathbf{e}_+(x, \zeta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi i}\zeta} e^{-ix\zeta} \begin{pmatrix} 1 \\ i\zeta \end{pmatrix}, \quad \zeta \in \mathbb{R}. \quad (6.8)$$

6.1.2. Wir suchen als Fortsetzung der Spektraldarstellungen auf ganz \mathbf{H}_{ac} entsprechende Kernfunktionen für die Integraltransformation

$$\mathbf{e}_\pm(\cdot, \zeta) : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{C}^2 \quad (6.9)$$

parametrisiert durch $\zeta \in \mathbb{C}$ mit

$$A\mathbf{e}_\pm(\cdot, \zeta) := \begin{pmatrix} & 1 \\ \Delta_{\mathcal{G}} & \end{pmatrix} \mathbf{e}_\pm(\cdot, \zeta) = i\zeta \mathbf{e}_\pm(\cdot, \zeta), \quad (6.10)$$

welche in jedem Knoten die Kirchhoff-Bedingung erfüllen und darüberhinaus auf dem Strahl eine Darstellung der Form

$$\mathbf{e}_-(x, \zeta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi i}\zeta} \left[e^{ix\zeta} \begin{pmatrix} 1 \\ i\zeta \end{pmatrix} + r_-(\zeta) e^{-ix\zeta} \begin{pmatrix} 1 \\ i\zeta \end{pmatrix} \right] \quad (6.11)$$

beziehungsweise

$$\mathbf{e}_+(x, \zeta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi i}\zeta} \left[e^{-ix\zeta} \begin{pmatrix} 1 \\ i\zeta \end{pmatrix} + r_+(\zeta) e^{ix\zeta} \begin{pmatrix} 1 \\ i\zeta \end{pmatrix} \right] \quad (6.12)$$

mit noch zu bestimmenden Koeffizienten $r_\pm(\zeta) \in \mathbb{C}$ besitzen.

6.1.3 Lemma. (i) *Bis auf eine diskrete Ausnahmемenge existieren für alle $\zeta \in \mathbb{C}$ eindeutig bestimmte Funktionen $\mathbf{e}_\pm(\cdot, \zeta)$ mit (6.10) und (6.11) beziehungsweise (6.12). Die auftretenden Koeffizienten r_\pm sind dabei meromorphe Funktionen auf \mathbb{C} .*

(ii) *Die ein- und auslaufenden Spektraldarstellungen*

$$\widehat{\cdot}_\pm : \mathbf{H}_{\text{ac}} \longrightarrow L^2(\mathbb{R}) \quad (6.13)$$

sind für kompakt getragene $\mathbf{f} \in \mathbf{H}_{\text{ac}}$ durch

$$\widehat{\mathbf{f}}_\pm(\zeta) = (\mathbf{f}, \mathbf{e}_\pm(\cdot, \zeta))_{\mathbf{H}}, \quad \zeta \in \mathbb{R}, \quad (6.14)$$

gegeben.

(iii) *Es gilt $\mathbf{e}_-(x, \zeta) = r_-(\zeta)\mathbf{e}_+(x, \zeta)$ und $\mathbf{e}_+(x, \zeta) = r_+(\zeta)\mathbf{e}_-(x, \zeta)$.*

(iv) *Es gilt $r_-(\zeta)r_+(\zeta) = 1$ für alle $\zeta \in \mathbb{C}$.*

(v) *Es gilt $\overline{\mathbf{e}_\pm(x, \zeta)} = \mathbf{e}_\pm(x, -\bar{\zeta})$ und damit insbesondere auch $\overline{r_\pm(\zeta)} = r_\pm(-\bar{\zeta})$.*

Beweis. (i) folgt aus den allgemeineren Betrachtungen im Anschluss des Beweises, da es sich bei den Komponenten der vektorwertigen Funktionen $\mathbf{e}_\pm(\cdot, \zeta)$ wegen

$$A^2 = \begin{pmatrix} & 1 \\ \Delta_{\mathcal{G}} & \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \Delta_{\mathcal{G}} & \\ & \Delta_{\mathcal{G}} \end{pmatrix} \quad (6.15)$$

um formale Eigenfunktionen des Kirchhoff-Laplace Δ_G handelt. • (ii) ist nachzurechnen. Dazu nutzen wir, dass für $\mathbf{f} \in \mathbf{H}_{ac}$ kompakt getragen und jedes $t \in \mathbb{R}$ auch $U(t)\mathbf{f}$ kompakt getragen ist. Damit gilt

$$\frac{d}{dt}(U(t)\mathbf{f}, \mathbf{e}_{\pm}) = (AU(t)\mathbf{f}, \mathbf{e}_{\pm}) = -(U(t)\mathbf{f}, A\mathbf{e}_{\pm}) = i\zeta(U(t)\mathbf{f}, \mathbf{e}_{\pm}), \quad \zeta \in \mathbb{R}, \quad (6.16)$$

und somit als Lösung dieser Differentialgleichung auch

$$(U(t)\mathbf{f}, \mathbf{e}_{\pm}) = e^{it\zeta}(\mathbf{f}, \mathbf{e}_{\pm}), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (6.17)$$

Für $\mathbf{f} \in \mathbf{F}_{\pm}$ ist durch $(\mathbf{f}, \mathbf{e}_{\pm})_{\mathbf{H}}$ aber die ein- beziehungsweise auslaufende Spektraldarstellung gegeben. Da $\bigvee_{t \in \mathbb{R}} U(t)\mathbf{F}_{\pm} = \mathbf{H}_{ac}$ gilt, liefert (6.17) die gesuchte Fortsetzung der Spektraldarstellungen auf ganz \mathbf{H}_{ac} als unitäre Abbildung. • (iii) Da

$$r_+(\zeta)\mathbf{e}_-(x, \zeta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi i}\zeta} \left[r_+(\zeta)e^{ix\zeta} \begin{pmatrix} 1 \\ i\zeta \end{pmatrix} + r_-(\zeta)r_+(\zeta)e^{-ix\zeta} \begin{pmatrix} 1 \\ i\zeta \end{pmatrix} \right] \quad (6.18)$$

ebenso eine Lösung bestimmt, impliziert für $r_+(\zeta)r_-(\zeta) \neq 0$ die Eindeutigkeit aus dem ersten Teil

$$r_+(\zeta)\mathbf{e}_-(x, \zeta) = r_-(\zeta)r_+(\zeta)\mathbf{e}_+(x, \zeta) \quad (6.19)$$

und damit die Behauptung $\mathbf{e}_-(x, \zeta) = r_-(\zeta)\mathbf{e}_+(x, \zeta)$ und analog $\mathbf{e}_+(x, \zeta) = r_+(\zeta)\mathbf{e}_-(x, \zeta)$. • (iv) folgt da $\mathbf{e}_+(x, \zeta) = r_+(\zeta)\mathbf{e}_-(x, \zeta) = r_+(\zeta)r_-(\zeta)\mathbf{e}_+(x, \zeta)$. • (v) folgt wiederum aus der Eindeutigkeit der Funktionen \mathbf{e}_{\pm} , da

$$\overline{\mathbf{e}_-(x, -\bar{\zeta})} = \frac{1}{2\sqrt{\pi i}\zeta} \left[e^{ix\zeta} \begin{pmatrix} 1 \\ i\zeta \end{pmatrix} + \overline{r_-(\zeta)}e^{-ix\zeta} \begin{pmatrix} 1 \\ i\zeta \end{pmatrix} \right] = \mathbf{e}_-(x, \zeta) \quad (6.20)$$

wiederum dieselbe Lösung bestimmt. Für \mathbf{e}_+ verläuft die Argumentation analog. \square

Insbesondere ist die Streuabbildung für Graphen mit einer unbeschränkten Kante durch Multiplikation mit

$$\sigma(\zeta) = \overline{r_+(\zeta)} = r_-(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{R}, \quad (6.21)$$

gegeben, für das zweite Gleichheitszeichen wurde dabei $|\sigma(\zeta)| = 1$ auf \mathbb{R} genutzt.

6.1.4 Beispiel. Als einfaches Beispiel betrachten wir wiederum den Lollipop-Graph (Beispiel 5.3.5) mit einem Kreis der Länge 1. Die zu bestimmende Funktion $\mathbf{e}_-(x, \zeta)$ ist damit auf dem Strahl durch

$$\mathbf{e}_-(x, \zeta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi i}\zeta} \left[e^{ix\zeta} \begin{pmatrix} 1 \\ i\zeta \end{pmatrix} + r_-(\zeta)e^{-ix\zeta} \begin{pmatrix} 1 \\ i\zeta \end{pmatrix} \right], \quad x \in \mathbb{R}_+ \quad (6.22)$$

und auf dem Kreis durch

$$\mathbf{e}_-(x, \zeta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi i}\zeta} \left[a(\zeta)e^{ix\zeta} \begin{pmatrix} 1 \\ i\zeta \end{pmatrix} + b(\zeta)e^{-ix\zeta} \begin{pmatrix} 1 \\ i\zeta \end{pmatrix} \right], \quad x \in (0, 1) \quad (6.23)$$

gegeben. Die Koeffizienten $a(\zeta)$, $b(\zeta)$ und $r_-(\zeta)$ sind zu bestimmen. Die Kirchhoff-Bedingungen am Knoten ergeben dafür Gleichungen

$$\begin{aligned} 1 + r_-(\zeta) &= a(\zeta) + b(\zeta) = a(\zeta)e^{i\zeta} + b(\zeta)e^{-i\zeta} \\ 1 - r_-(\zeta) + a(\zeta) - b(\zeta) - a(\zeta)e^{i\zeta} + b(\zeta)e^{-i\zeta} &= 0 \end{aligned} \quad (6.24)$$

deren Lösung sich aus

$$a(\zeta)(1 - e^{i\zeta}) = b(\zeta)(e^{-i\zeta} - 1), \quad b(\zeta) = a(\zeta) \frac{1 - e^{i\zeta}}{e^{-i\zeta}(1 - e^{i\zeta})} = a(\zeta)e^{i\zeta} \quad (6.25)$$

und damit

$$1 + r_-(\zeta) = a(\zeta)(1 + e^{i\zeta}), \quad 1 - r_-(\zeta) = 2a(\zeta)(e^{i\zeta} - 1) \quad (6.26)$$

zu

$$a(\zeta) = \frac{2}{3e^{i\zeta} - 1}, \quad r_-(\zeta) = \frac{2(1 + e^{i\zeta})}{3e^{i\zeta} - 1} - 1 = \frac{3e^{-i\zeta} - 1}{3 - e^{-i\zeta}} \quad (6.27)$$

ergibt.

6.1.5. Im allgemeinen Fall mit d unbeschränkten Kanten wird jede der Spektraldarstellungen durch d Funktionen $e_{\pm,j}(x, \zeta)$, $j = 1, \dots, d$, beschrieben. Jede der Funktionen liefert die Berechnung einer der Komponenten der Abbildung

$$\mathbf{H}_{ac} \ni \mathbf{f} \longrightarrow \widehat{\mathbf{f}}_{\pm} \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}^d). \quad (6.28)$$

Die Funktionen $e_{\pm,j}$ ergeben sich wiederum als formale Lösungen der Eigenwertgleichung $Ae_{\pm,j}(\cdot, \zeta) = i\zeta e_{\pm,j}(\cdot, \zeta)$ auf \mathcal{G} mit Kirchhoffbedingungen an allen Knoten und dem Verhalten

$$e_{-,j}(x, \zeta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi i \zeta}} \begin{cases} e^{ix\zeta} \begin{pmatrix} 1 \\ i\zeta \end{pmatrix} + s_{-,j,j}(\zeta) e^{-ix\zeta} \begin{pmatrix} 1 \\ i\zeta \end{pmatrix}, & \text{auf Strahl } j, \\ s_{-,j,k}(\zeta) e^{-ix\zeta} \begin{pmatrix} 1 \\ i\zeta \end{pmatrix} & \text{auf Strahl } k, \end{cases} \quad (6.29)$$

auf den Strahlen aus E_{∞} . Die Koeffizienten $s_{-,j,k}(\zeta)$ sind dabei für fast alle $\zeta \in \mathbb{C}$ eindeutig bestimmt und liefern wiederum die Einträge der Streumatrix. Dies nachzurechnen verbleibt als Übungsaufgabe.

6.1.6. Es bleibt die oben schon genutzte Eindeutigkeit zu zeigen. Dafür betrachten wir allgemeiner Kirchhoff-Graphen \mathcal{G} mit $d = \#E_{\infty}$ unbeschränkten Kanten. Wir bezeichnen wiederum mit \mathcal{G}_b den beschränkten Teilgraphen, in dem diejenigen Knoten markiert sind, die in \mathcal{G} mit unbeschränkten Kanten inzidieren. Wir betrachten nun Randwertprobleme auf \mathcal{G}_b .

Sei dazu $\zeta \in \mathbb{C}$ ein Parameter. Lösungen von $\Delta_{\mathcal{G}} f = -\zeta^2 f$ sind auf jeder Kante $e \in E$ von der Form

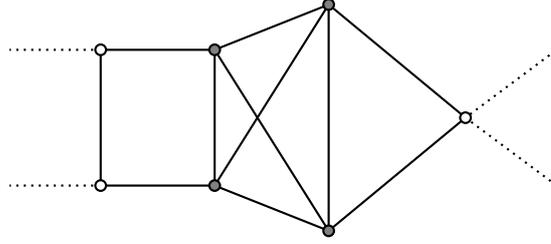
$$f_e(x) = a_e^+ e^{ix\zeta} + a_e^- e^{-ix\zeta}, \quad x \in I_e = (-\ell_e, \ell_e), \quad (6.30)$$

mit Koeffizienten $a_e^{\pm} \in \mathbb{C}$ und $\ell_e = \ell(e)/2$. Wir betrachten die Einschränkung von f auf \mathcal{G}_b und parametrisieren diese mit dem Koeffizientenvektor $((a_e^-)_{e \in E_0}, (a_e^+)_{e \in E_0})^T \in \mathbb{C}^{2\#E_0}$. Sei V_i die Menge der inneren Knoten von \mathcal{G}_b . In diesen Knoten sind die Stetigkeitsbedingung und die Kirchhoffbedingung für die Ableitungen zu erfüllen. Dies sind

$$\sum_{v \in V_i} \deg v \quad (6.31)$$

Gleichungen. An den Randknoten $V_{\partial} = V \setminus V_i$ liefert die Stetigkeitsbedingung weitere

$$\sum_{v \in V_{\partial}} (\deg_0 v - 1) = \sum_{v \in V_{\partial}} (\deg v - 1 - \deg_{\infty} v) \quad (6.32)$$


 Abbildung 6.1: Graph \mathcal{G}_b mit in weiß drei markierten Randknoten und vier inneren Knoten

Gleichungen, wobei \deg_0 den Knotengrad in \mathcal{G}_b und $\deg_\infty v$ die Anzahl der zu v inzidenten unbeschränkten Kanten in \mathcal{G} bezeichnet. Die Parametrisierungen der zulässigen Lösungen liefert damit einen Teilraum $\mathcal{L} \subset \mathbb{C}^{2\#E_0}$ der Dimension

$$\dim \mathcal{L} \geq 2\#E_0 - \sum_{v \in V_i} \deg v - \sum_{v \in V_\partial} (\deg_0 v - 1). \quad (6.33)$$

Es stellt sich die Frage, durch welche weiteren Bedingungen an den Knoten aus V_∂ diese Lösungen eindeutig bestimmt werden. Dazu nutzen wir

6.1.7 Lemma. *Es gilt*

$$2\#E_0 = \sum_{v \in V} \deg_0 v \quad (6.34)$$

sowie

$$\#E_\infty + 2\#E_0 = \sum_{v \in V} \deg v. \quad (6.35)$$

Beweis. Auf \mathcal{G}_b besitzt jede Kante einen Anfangs- und einen Endknoten, dies liefert die erste der Abzählformeln. Für die zweite nutzen wir, dass jede unendliche Kante nur einen Anfangsknoten besitzt. \square

Da für Knoten aus V_i beide Gradbegriffe übereinstimmen, ist der Ausdruck auf der rechten Seite von (6.33) durch $\#V_\partial$ gegeben. In (6.33) gilt im wesentlichen Gleichheit.

6.1.8 Lemma. *Bis auf eine diskrete Ausnahmемenge in $\zeta \in \mathbb{C}$ gilt $\dim \mathcal{L}(\zeta) = \#V_\partial$.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass die $2\#E_0 - \#V_\partial$ Gleichungen der Kirchhoff-Bedingungen über dem Körper $\mathbb{C}[e^{\pm i\ell_e \zeta} : e \in E_0] \subset \mathfrak{M}(\mathbb{C})$ der von den Koeffizientenfunktionen erzeugten meromorphen Funktionen linear unabhängig sind, also maximalen Rang besitzen. Da dann beim Anwenden des Gauss-Algorithmus keine Nullzeile auftritt, folgt lineare Unabhängigkeit über \mathbb{C} für alle ζ , welche keine gemeinsamen Nullstellen der letzten Zeile und keine Polstellen auftretender Koeffizienten einer der Zeilen sind.

Für dies genügt es, dass für $\zeta \in \mathbb{C}_-$ mit hinreichend großem Imaginärteil die Gleichungen linear unabhängig sind.

Schritt 1: Wir normieren alle Stetigkeitsbedingungen auf \mathbb{C}_- , indem wir durch den in \mathbb{C}_- führenden exponentiell wachsenden Koeffizienten dividieren. Dies führt auf Gleichungen der Form

$$\begin{aligned} a_e - a_{e'} &= \mathcal{O}(e^{\ell_e \operatorname{Im} \zeta}), & \ell_e &= \ell_{e'} \\ a_e &= \mathcal{O}(e^{(\ell_e - \ell_{e'}) \operatorname{Im} \zeta}), & \ell_e &> \ell_{e'} \end{aligned} \quad (6.36)$$

für $e, e' \in E_v \cap E_0$ und alle $v \in V$. Die Ableitungsbedingung ist nur an $v \in V_i$ zu Stellen und bleibt von der Form

$$\sum_{e \in E_v} a_e e^{-i\ell_e \zeta} = \mathcal{O}(e^{\ell_{\bar{e}} \operatorname{Im} \zeta}), \quad \ell_{\bar{e}} = \min_{e' \in E_v} \ell_{e'}. \quad (6.37)$$

Dabei steht a_e jeweils für einen der beiden Koeffizienten a_e^\pm je nach Kantenorientierung.

Schritt 2: Wir ersetzen zuerst alle nun exponentiell fallenden Koeffizienten durch Null. Dann zerfällt das System in $\#V$ unabhängige Blöcke. Jeder der Koeffizienten a_e^\pm tritt dabei nur an einem der zur Kante e inzidenten Knoten auf und für jeden Knoten $v \in V$ ergibt sich aus den Stetigkeitsbedingungen das System der $\deg_0 v - 1$ Gleichungen

$$\begin{aligned} a_e &= a_{\bar{e}}, & \ell_e &= \ell_{\bar{e}} = \min_{e' \in E_v} \ell_{e'}, \\ a_e &= 0, & \ell_e &> \ell_{\bar{e}} \end{aligned} \quad (6.38)$$

und für innere Knoten $v \in V_i$ zusätzlich die Gleichung

$$\sum_{e \in E_v} e^{-i\ell_e \zeta} a_e = 0. \quad (6.39)$$

Diese Gleichungen sind linear unabhängig.

Fall 1: $v \in V_\partial$. In diesem Fall sind die $\deg_0 v - 1$ angegebenen Gleichungen unabhängig mit $a_{\bar{e}}$ als freiem Parameter.

Fall 2: $v \in V_\partial$. Hier entspricht die Zahl der Gleichungen der Zahl der Variablen und es genügt zu zeigen, dass alle Koeffizienten a_e Null sind. Einsetzen der ersten Gleichungen in die letzte liefert

$$\sum_{e \in E_v \text{ minimal}} e^{-i\ell_e \zeta} a_{\bar{e}} = 0 \quad (6.40)$$

und damit $a_e = 0$ für alle $e \in E_v$.

Schritt 3. Das volle System der Kirchhoff-Bedingungen ergibt sich aus dem in Schritt 2 betrachteten als Störung mit Norm $\mathcal{O}(e^{\ell_{\bar{e}} \operatorname{Im} \zeta})$. Da die Menge der Matrizen maximalen Ranges offen in der Menge aller Matrizen ist, ist dieses System damit für $\operatorname{Im} \zeta < -N$ und N hinreichend groß von vollem Rang und das Lemma ist bewiesen. \square

6.1.9 Bemerkung. Betrachtet man analog die Menge aller formalen Lösungen auf dem gesamten Graphen \mathcal{G} (wiederum verstanden durch die Koeffizienten vor den Exponentialtermen auf den Kanten), so ergibt sich ein Teilraum der Dimension

$$\dim\{f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{C} \mid \Delta_{\mathcal{G}} f = -\zeta^2 f\} = \#E_\infty \quad (6.41)$$

von $\mathbb{C}^{2\#E_\infty}$. Für die Randknoten $v \in V_\partial$ ergeben sich dabei zusätzliche Gleichungsbedingungen der Form

$$b_e^+ + b_e^- = b_{e'}^+ + b_{e'}^-, \quad e, e' \in E_v \cap E_\infty \quad (6.42)$$

und

$$\sum_{e \in E_v \cap E_0} a_e e^{-i\ell_e \zeta} = \sum_{e \in E_v \cap E_\infty} (b_e^+ - b_e^-), \quad (6.43)$$

wobei die unbeschränkten Kanten wiederum mit \mathbb{R}_+ identifiziert wurden und der Ansatz $f_e(x) = b_e^+ e^{ix\zeta} + b_e^- e^{-ix\zeta}$ genutzt wurde.

6.1.10. Wir definieren nun weitere Abbildungen. Sei zuerst

$$\gamma = (\gamma_0, \gamma_1) : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{C}^{\#V_\partial} \quad (6.44)$$

die Abbildung, welche jeder zulässigen Lösung f parametrisiert durch ihre Koeffizienten $\tilde{f} \in \mathcal{L}$ die Funktionswerte

$$\gamma_0 \tilde{f}(v) = f(v), \quad v \in V_\partial, \quad (6.45)$$

und die äußere Ableitung

$$\gamma_1 \tilde{f}(v) = - \sum_{e \in E_v \cap E_0} f'_e(v), \quad v \in V_\partial, \quad (6.46)$$

in den markierten Knoten zuordnet. Die Abbildung γ hängt vom Parameter ζ ab. Mit diesen Notationen gilt

Lemma. (i) *Es gilt $\ker \gamma_1(\zeta) \neq \{0\}$ genau dann, wenn $-\zeta^2$ ein Eigenwert des Kirchhoff-Laplace auf dem Graphen \mathcal{G}_b ist. Insbesondere ist diese Ausnahmemenge reell, diskret und besitzt einen Häufungspunkt in ∞ .*

(ii) *Es gilt $\ker \gamma_0(\zeta) \neq \{0\}$ genau dann, wenn $-\zeta^2$ ein Dirichlet-Eigenwert des Kirchhoff-Laplace auf dem in den markierten Knoten aufgeschnittenen Graphen $\tilde{\mathcal{G}}_b$ ist. Insbesondere ist diese Ausnahmemenge reell, diskret und besitzt einen Häufungspunkt in ∞ .*

(iii) *Es gilt $\ker \gamma(\zeta) \neq \{0\}$ genau dann, wenn es zu ζ eine Streu-Eigenfunktion auf \mathcal{G} gibt.*

Für $\zeta \in \mathbb{C}$, die weder Dirichlet- noch Neumann-eigenwerte sind, existiert damit eine Bijektion zwischen Neumann-Daten $\gamma_1 \tilde{f}$, den Parametern $\tilde{f} \in \mathcal{L}$ und Dirichlet-Daten $\gamma_0 \tilde{f}$. Die Abbildung

$$\mathcal{D}(\zeta) : \mathbb{C}^{\#V_\partial} \ni \gamma_1 \tilde{f} \mapsto \gamma_0 \tilde{f} \in \mathbb{C}^{\#V_\partial} \quad (6.47)$$

wird als Neumann-Dirichlet-Operator des markierten Graphen \mathcal{G}_b bezeichnet. Die Zuordnung $\zeta \mapsto \mathcal{D}(\zeta)$ ist dabei meromorph mit Polen höchstens auf \mathbb{R} .

6.1.11. Es bleibt, die Eindeutigkeit der Lösung $e_{\pm,j}(x, \zeta)$ zu zeigen. Wir betrachten den Fall mit d Strahlen ins Unendliche und fügen falls es Knoten $v \in E_\infty$ mit $\deg_\infty v > 1$ gibt, weitere Knoten vom Grad 2 auf den Strahlen ein. Dann gilt $d = \#V_\partial = \dim \mathcal{L}$ bis auf eine diskrete Ausnahmemenge in ζ und die gerade konstruierten Neumann-Dirichlet-Operatoren sind nutzbar. Das Verhalten von e_\pm auf den Strahlen bestimmt dabei jeweils Dirichlet- und Neumann-daten.

Zuerst der Fall einen Strahls ins Unendliche. Dann gilt

$$2\sqrt{\pi}i\zeta\gamma_0 = 1 + r_-(\zeta), \quad 2\sqrt{\pi}\gamma_1 = 1 - r_-(\zeta) \quad (6.48)$$

und es ist die Gleichung $i\zeta\mathcal{D}(\zeta)(1 - r_-(\zeta)) = 1 + r_-(\zeta)$ zu erfüllen. Damit folgt

$$r_-(\zeta) = \frac{i\zeta\mathcal{D}(\zeta) - 1}{i\zeta\mathcal{D}(\zeta) + 1} \quad (6.49)$$

für alle ζ mit $i\zeta\mathcal{D}(\zeta) \neq -1$. Da \mathcal{D} meromorph und nicht gleich i/ζ ist, ist dies eine diskrete Ausnahmemenge. Polstellen von $r_-(\zeta)$ sind gerade die Nullstellen von $i\zeta\mathcal{D}(\zeta) + 1$.

Für d Strahlen ins Unendliche ergibt sich analog in Matrixform (die j -te Spalte entspricht dabei der Funktion $e_{-,j}$ mit den Strahlen entsprechenden Zeilen und $S_-(\zeta)$ der Matrix mit den Einträgen $s_{-,j,k}(\zeta)$)

$$2\sqrt{\pi}i\zeta\gamma_0 = I + S_-(\zeta), \quad 2\sqrt{\pi}\gamma_1 = I - S_-(\zeta), \quad (6.50)$$

so dass wiederum

$$S_-(\zeta) = (i\zeta\mathcal{D}(\zeta) + I)^{-1}(i\zeta\mathcal{D}(\zeta) - I) \quad (6.51)$$

folgt. Bis auf eine diskrete Ausnahmemenge ist $i\zeta\mathcal{D}(\zeta) + I$ invertierbar.

6.2 Jostfunktionen und Marchenko-Gleichung

6.2.1. Für eindimensionale Probleme können weitere Eigenschaften von Differentialgleichungen direkt genutzt werden. Wir betrachten hier in diesem Abschnitt den Differentialoperator

$$A = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \quad (6.52)$$

auf \mathbb{R} für ein reellwertiges kompakt getragenes Potential $V \in C_c^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. Dann ist der Operator mit Definitionsbereich $D(A) = H^2(\mathbb{R})$ assoziiert zur Form

$$a(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\overline{g'(x)} dx + \int_{-\infty}^{\infty} V(x)f(x)\overline{g(x)} dx \quad (6.53)$$

und selbstadjungiert. Die zugehörige Wellengleichung

$$u_{tt} = u_{xx} - V(x)u \quad (6.54)$$

kann wiederum mit der Energieform

$$\int |u_0'(x)|^2 dx + \int V(x)|u_0(x)|^2 dx + \int |u_1(x)|^2 dx \quad (6.55)$$

behandelt werden, jedoch ist für (durchaus interessante) Potentiale V mit nichttrivialem Negativteil diese quadratische Form nicht positiv und erzeugt damit keinen Hilbertraum. Wir nutzen Ideen aus dem letzten Abschnitt und diskutieren stattdessen das Verhalten der verallgemeinerten Eigenfunktionen des Operators.

6.2.2. Wir konstruieren *Jostlösungen* zum Operator A . Dies sind Lösungen der Differentialgleichung

$$AJ_\pm(x, \zeta) = -J_\pm''(x, \zeta) + V(x)J_\pm(x, \zeta) = \zeta^2 J_\pm(x, \zeta), \quad (6.56)$$

die auf einem Halbstrahl außerhalb des Trägers von V durch

$$J_-(x, \zeta) = e^{-ix\zeta}, \quad x < \inf \operatorname{supp} V \quad (6.57)$$

und

$$J_+(x, \zeta) = e^{ix\zeta}, \quad x > \sup \operatorname{supp} V \quad (6.58)$$

charakterisiert sind. Die so definierten Lösungen sind glatt in x und holomorph in ζ . Auf dem jeweils anderen Halbstrahl ergeben sich Kombinationen der Exponentialfunktionen mit holomorphen Koeffizienten

$$J_-(x, \zeta) = a_-(\zeta)e^{-ix\zeta} + b_-(\zeta)e^{ix\zeta}, \quad x > \sup \text{supp } V, \quad (6.59)$$

und

$$J_+(x, \zeta) = b_+(\zeta)e^{-ix\zeta} + a_+(\zeta)e^{ix\zeta}, \quad x < \inf \text{supp } V. \quad (6.60)$$

Die Jostlösungen erfüllen $J_{\pm}(x, -\zeta) = \overline{J_{\pm}(x, \bar{\zeta})}$ und damit gelten für die Koeffizienten die Symmetriebeziehungen $a_{\pm}(-\zeta) = \overline{a_{\pm}(\bar{\zeta})}$ und $b_{\pm}(-\zeta) = \overline{b_{\pm}(\bar{\zeta})}$. Weitere Beziehungen zwischen den Koeffizienten ergeben sich durch Auswerten von Wronski-Determinanten.

6.2.3 Lemma. *Die Koeffizienten erfüllen*

$$|a_-(\zeta)|^2 - |b_-(\zeta)|^2 = |a_+(\zeta)|^2 - |b_+(\zeta)|^2 = 1, \quad \zeta \in \mathbb{R}, \quad (6.61)$$

sowie

$$a_+(\zeta) = a_-(\zeta) \quad \text{und} \quad b_+(\zeta) = -b_-(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{C}. \quad (6.62)$$

Beweis. Wir nutzen Eigenschaften der Wronski-Determinante. Da für reelle ζ neben $J_-(x, \zeta)$ auch $\overline{J_-(x, \zeta)}$ die Differentialgleichung erfüllt, ist die Determinante

$$\det \begin{pmatrix} J_-(x, \zeta) & \overline{J_-(x, \zeta)} \\ \partial_x J_-(x, \zeta) & \partial_x \overline{J_-(x, \zeta)} \end{pmatrix} \quad (6.63)$$

unabhängig von x . Ausgewertet auf dem linken Halbstrahl ergibt sich

$$\det \begin{pmatrix} e^{-ix\zeta} & e^{ix\zeta} \\ -i\zeta e^{-ix\zeta} & i\zeta e^{ix\zeta} \end{pmatrix} = 2i\zeta \quad (6.64)$$

und entsprechend auf dem rechten Halbstrahl

$$\begin{aligned} & \det \begin{pmatrix} a_-(\zeta)e^{-ix\zeta} + b_-(\zeta)e^{ix\zeta} & \overline{a_-(\zeta)}e^{ix\zeta} + \overline{b_-(\zeta)}e^{-ix\zeta} \\ -i\zeta a_-(\zeta)e^{-ix\zeta} + i\zeta b_-(\zeta)e^{ix\zeta} & i\zeta \overline{a_-(\zeta)}e^{ix\zeta} - i\zeta \overline{b_-(\zeta)}e^{-ix\zeta} \end{pmatrix} \\ &= i\zeta (|a_-(\zeta)|^2 - a_-(\zeta)\overline{b_-(\zeta)}e^{-2ix\zeta} + \overline{a_-(\zeta)}b_-(\zeta)e^{2ix\zeta} - |b_-(\zeta)|^2) \\ & \quad + i\zeta (|a_-(\zeta)|^2 + a_-(\zeta)\overline{b_-(\zeta)}e^{-2ix\zeta} - \overline{a_-(\zeta)}b_-(\zeta)e^{2ix\zeta} - |b_-(\zeta)|^2) \\ &= 2i\zeta (|a_-(\zeta)|^2 - |b_-(\zeta)|^2). \end{aligned} \quad (6.65)$$

Also gilt $|a_-(\zeta)|^2 - |b_-(\zeta)|^2 = 1$ und analog ebenso $|a_+(\zeta)|^2 - |b_+(\zeta)|^2 = 1$. Betrachtet man die Wronski-Determinante für das System J_- und J_+ , so ergibt sich auf dem linken Halbstrahl

$$\det \begin{pmatrix} e^{-ix\zeta} & b_+(\zeta)e^{-ix\zeta} + a_+(\zeta)e^{ix\zeta} \\ -i\zeta e^{-ix\zeta} & -i\zeta b_+(\zeta)e^{-ix\zeta} + i\zeta a_+(\zeta)e^{ix\zeta} \end{pmatrix} = 2i\zeta a_+(\zeta) \quad (6.66)$$

und auf dem rechten Halbstrahl

$$\det \begin{pmatrix} a_-(\zeta)e^{-ix\zeta} + b_-(\zeta)e^{ix\zeta} & e^{ix\zeta} \\ -i\zeta a_-(\zeta)e^{-ix\zeta} + i\zeta b_-(\zeta)e^{ix\zeta} & i\zeta e^{ix\zeta} \end{pmatrix} = 2i\zeta a_-(\zeta) \quad (6.67)$$

und damit $a_-(\zeta) = a_+(\zeta)$. Betrachtet man für reelle ζ analog J_- und $\overline{J_+}$, so ergibt sich

$$\det \begin{pmatrix} e^{-ix\zeta} & \overline{b_+(\zeta)}e^{ix\zeta} + \overline{a_+(\zeta)}e^{-ix\zeta} \\ -i\zeta e^{-ix\zeta} & i\zeta \overline{b_+(\zeta)}e^{ix\zeta} - i\zeta \overline{a_+(\zeta)}e^{-ix\zeta} \end{pmatrix} = 2i\zeta \overline{b_+(\zeta)} \quad (6.68)$$

und auf dem rechten Halbstrahl

$$\det \begin{pmatrix} a_-(\zeta)e^{-ix\zeta} + b_-(\zeta)e^{ix\zeta} & e^{-ix\zeta} \\ -i\zeta a_-(\zeta)e^{-ix\zeta} + i\zeta b_-(\zeta)e^{ix\zeta} & -i\zeta e^{-ix\zeta} \end{pmatrix} = -2i\zeta b_-(\zeta) \quad (6.69)$$

und $b_+(\zeta) = -\overline{b_-(\zeta)} = -b_-(\overline{\zeta})$. Durch holomorphes Fortsetzen folgt dies für alle $\zeta \in \mathbb{C}$. \square

Wir schreiben kurz $a(\zeta) := a_+(\zeta) = a_-(\zeta)$ und $b(\zeta) = b_+(\zeta)$. Aus den Symmetriebeziehungen ergibt sich $b_-(\zeta) = -\overline{b_+(\zeta)} = -b(\overline{\zeta})$. Die Funktion $a(\zeta)$ wird als *Jostfunktion* des Operators A bezeichnet. Sie steht in engem Zusammenhang zu spektralen Eigenschaften von A .

6.2.4 Lemma. (i) Ein Punkt $\zeta \in \mathbb{C}_+$ ist genau dann eine Nullstelle der Jostfunktion a , wenn ζ^2 ein Eigenwert von $A : L^2(\mathbb{R}) \supset D(A) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ ist. Der zugehörige Eigenraum ist eindimensional und durch $\ker(A - \zeta^2) = \text{span}\{J_+(\cdot, \zeta)\}$ gegeben.

(ii) Die Nullstellen der Jostfunktion in \mathbb{C}_+ sind rein imaginär und einfach.

Beweis. (i) Die Jostlösung J_+ ist auf den beiden Halbstrahlen durch

$$J_+(x, \zeta) = \begin{cases} b(\zeta)e^{-ix\zeta} + a(\zeta)e^{ix\zeta}, & x < \inf \text{supp } V, \\ e^{ix\zeta}, & x > \sup \text{supp } V, \end{cases} \quad (6.70)$$

gegeben. Für $\zeta \in \mathbb{C}_+$ mit $a(\zeta) = 0$ fällt damit $J_+(\cdot, \zeta)$ in beiden Richtungen exponentiell und gehört damit zu $L^2(\mathbb{R})$. Da darüberhinaus $(A - \zeta^2)J_+(\cdot, \zeta) = 0$ gilt, ist $J_+(\cdot, \zeta)$ Eigenfunktion. Eigenräume sind eindimensional, da es im zweidimensionalen Lösungsraum der Differentialgleichung ebenso wachsende Lösungen gibt.

Ist umgekehrt $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ eine Eigenfunktion, so muss ψ an beiden Enden fallen und somit ein Vielfaches von $J_+(x, \zeta)$ mit $a(\zeta) = 0$ sein. • (ii) Da A selbstadjungiert ist, sind die Eigenwerte ζ^2 reell, die entsprechenden ζ also rein imaginär. Angenommen, für ein $\zeta_0 \in \mathbb{C}_+$ gilt $a'(\zeta_0) = a(\zeta_0) = 0$. Dann folgt für dieses ζ_0

$$\partial_\zeta J_+(x, \zeta_0) = \begin{cases} b'(\zeta_0)e^{-ix\zeta_0} - ix b(\zeta_0)e^{-ix\zeta_0}, & x < \inf \text{supp } V, \\ ix e^{ix\zeta_0}, & x > \sup \text{supp } V, \end{cases} \quad (6.71)$$

und $\partial_\zeta J_+(\cdot, \zeta_0)$ gehört ebenso zu $L^2(\mathbb{R})$. Da aber damit auch $(A - \zeta_0^2)\partial_\zeta J_+(\cdot, \zeta_0) = 2\zeta_0 J_+(\cdot, \zeta_0)$ und somit wegen der Selbstadjungiertheit des Operators $A - \zeta_0^2$ auch $J_+(\cdot, \zeta_0) \in \text{ran}(A - \zeta_0^2) \cap \ker(A - \zeta_0^2) = \{0\}$ gilt, folgt ein Widerspruch zu $J_+(\cdot, \zeta) \neq 0$. \square

6.2.5 Lemma. Sei $\zeta \in \mathbb{C}_+$ und ζ^2 kein Eigenwert von A . Dann besitzt die Resolvente des Operators A die Darstellung als Integraloperator

$$(\zeta^2 - A)^{-1}f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} R(x, y, \zeta)f(y) dy \quad (6.72)$$

mit Kern

$$R(x, y, \zeta) = \frac{1}{2i\zeta a(\zeta)} \begin{cases} J_-(x, \zeta)J_+(y, \zeta), & y \leq x, \\ J_+(x, \zeta)J_-(y, \zeta), & x \leq y. \end{cases} \quad (6.73)$$

Beweis. Ergibt sich aus der Definition der Jostlösungen J_{\pm} zusammen mit der gerade berechneten Wronski-Determinante. Die Kernfunktion fällt exponentiell für $x \rightarrow \pm\infty$, ist bis auf die Diagonale $x = y$ glatt und erfüllt

$$(\zeta^2 - A)R(\cdot, y, \zeta) = 0 \quad \text{auf } \mathbb{R} \setminus \{y\}, \quad (6.74)$$

ist also eine in y getragene Distribution. Da

$$\partial_x R(x, y, \zeta) = \frac{1}{2i\zeta a(\zeta)} \begin{cases} J'_-(x, \zeta)J_+(y, \zeta), & y < x, \\ J'_+(x, \zeta)J_-(y, \zeta), & x > y \end{cases} \quad (6.75)$$

in $x = y$ einen Sprung der Höhe

$$\frac{J'_+(x, \zeta)J_-(x, \zeta) - J'_-(x, \zeta)J_+(x, \zeta)}{2i\zeta a(\zeta)} = 1 \quad (6.76)$$

besitzt, folgt $(\zeta^2 - A)R(\cdot, y, \zeta) = \delta_y$. Entsprechend folgt $(\zeta^2 - A)R(x, \cdot, \zeta) = \delta_x$ und damit die Behauptung. \square

6.2.6 Korollar. *Der Kern der Resolvente besitzt eine meromorphe Fortsetzung nach \mathbb{C}_- mit Polen in den Nullstellen $\{a(\zeta) = 0\}$ der Jostfunktion. Für die den Eigenwerten von A entsprechenden $\zeta_j \in \mathbb{C}_+$ mit $a(\zeta_j) = 0$ gilt dabei*

$$\begin{aligned} \text{Res}(R(x, y, \zeta); \zeta = \zeta_j) &= \frac{1}{2i\zeta_j a'(\zeta_j)} \begin{cases} J_-(x, \zeta_j)J_+(y, \zeta_j), & y \leq x, \\ J_+(x, \zeta_j)J_-(y, \zeta_j), & x \leq y, \end{cases} \\ &= \frac{1}{2\zeta_j} \varphi_j(x)\varphi_j(y) \end{aligned} \quad (6.77)$$

für eine reellwertige normierte Eigenfunktion $\varphi_j \in \ker(A - \zeta_j^2)$. Dabei gilt insbesondere $J_+(x, \zeta_j) = b(\zeta_j)J_-(x, \zeta_j)$ und somit auch

$$J_-(x, \zeta) = \sqrt{\frac{b(\zeta_j)}{ia'(\zeta_j)}} \varphi_j(x). \quad (6.78)$$

Beweis. Die Nullstellen der Jostfunktion in der Halbebene \mathbb{C}_+ sind nach Lemma 6.2.4 einfach. Damit ergibt sich direkt die erste Formel für die Residuen. Andererseits sind die Residuen der Resolvente in den Eigenwerten gerade die Spektralprojektoren und also solche (für den reellen Operator $A - \zeta_j^2$) über normierte reelle Eigenfunktionen darstellbar. \square

6.2.7. Die Jostlösungen stehen in einer engen Beziehung zu Streuproblemen. Dividiert man die Jostlösungen durch die Jostfunktion, so ergeben sich

$$\psi_1(x, \zeta) = \frac{J_-(x, \zeta)}{a(\zeta)} = \begin{cases} e^{-ix\zeta} - \frac{b(-\zeta)}{a(\zeta)} e^{ix\zeta}, & x > \sup \text{supp } V, \\ \frac{1}{a(\zeta)} e^{-ix\zeta}, & x < \inf \text{supp } V, \end{cases} \quad (6.79)$$

und

$$\psi_2(x, \zeta) = \frac{J_+(x, \zeta)}{a(\zeta)} = \begin{cases} \frac{1}{a(\zeta)} e^{ix\zeta}, & x > \sup \text{supp } V, \\ e^{ix\zeta} + \frac{b(\zeta)}{a(\zeta)} e^{-ix\zeta}, & x < \inf \text{supp } V, \end{cases} \quad (6.80)$$

also Funktionen die formal den Kernfunktionen $e_{-,j}(x, \zeta)$, $j = 1, 2$, aus dem letzten Abschnitt entsprechen. Direkt abzulesen ist eine formale Streumatrix

$$S(\zeta) = \frac{1}{a(\zeta)} \begin{pmatrix} 1 & b(\zeta) \\ -b(-\zeta) & 1 \end{pmatrix} \quad (6.81)$$

die nach vorigem Lemma für reelle ζ unitär ist. Mit diesen Funktionen kann wiederum eine Integraltransformation

$$L^2(\mathbb{R}) \ni f \mapsto \hat{f}_- = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \begin{pmatrix} \psi_1(x, \cdot) \\ \psi_2(x, \cdot) \end{pmatrix} dx \in L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2) \quad (6.82)$$

definieren, welche eingeschränkt auf das orthogonale Komplement der Eigenfunktionen $\{\varphi_j\}$ von A unitär ist und A zu einer Multiplikation mit ζ^2 transformiert. Für positive Potentiale V folgt dies aus der aufgebauten Streutheorie, für allgemeine Potentiale werden wir später ein abstraktes Resultat beweisen, siehe Kapitel 7.2 und dort insbesondere Beispiel 7.2.13.

6.2.8 Lemma (Marchenko). **(i)** Die Jostlösung $J_-(x, \zeta)$ erfüllt die Integralgleichung

$$J_-(x, \zeta) = e^{-ix\zeta} + \frac{1}{\zeta} \int_{-\infty}^x \sin((x-y)\zeta) V(y) J_-(y, \zeta) dy. \quad (6.83)$$

(ii) Die Jostlösung besitzt eine Darstellung der Form

$$J_-(x, \zeta) = e^{-ix\zeta} + \int_{-\infty}^x K(x, \tau) e^{-i\tau\zeta} d\tau, \quad \zeta \in \mathbb{C}_+, \quad (6.84)$$

mit einem von ζ unabhängigen Integralkern K .

(iii) Für jedes feste x und $\varepsilon > 0$ ist $\zeta \mapsto J_-(x, \zeta) e^{ix\zeta}$ auf $\{\zeta \in \mathbb{C}_+ : \text{Im } \zeta \geq \varepsilon\}$ beschränkt.

(iv) Es gilt

$$K(x, x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x V(\tau) d\tau. \quad (6.85)$$

Beweis. **(i)** Sei $h(x, \zeta) = e^{ix\zeta} J_-(x, \zeta)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} h'(x, \zeta) &= i\zeta e^{ix\zeta} J_-(x, \zeta) + e^{ix\zeta} J'_-(x, \zeta) \\ h''(x, \zeta) &= -\zeta^2 e^{ix\zeta} J_-(x, \zeta) + 2i\zeta e^{ix\zeta} J'_-(x, \zeta) + e^{ix\zeta} J''_-(x, \zeta) \end{aligned} \quad (6.86)$$

und damit

$$-h''(x, \zeta) + 2i\zeta h'(x, \zeta) + V(x)h(x, \zeta) = e^{ix\zeta} (-J''_-(x, \zeta) + V(x)J_-(x, \zeta) - \zeta^2 J_-(x, \zeta)) = 0. \quad (6.87)$$

Also folgt $V(x)h(x, \zeta) = h''(x, \zeta) - 2i\zeta h'(x, \zeta)$ und damit nach Integration (und unter Ausnutzung des kompakten Trägers / schnellen Fallens von V)

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2i\zeta} \int_{-\infty}^x (e^{2i(x-y)\zeta} - 1) V(y)h(y, \zeta) dy \\ &= \frac{1}{2i\zeta} \int_{-\infty}^x (e^{2i(x-y)\zeta} - 1) (h''(y, \zeta) - 2i\zeta h'(y, \zeta)) dy \\ &= \int_{-\infty}^x e^{2i(x-y)\zeta} h'(y, \zeta) dy - \int_{-\infty}^x (e^{2i(x-y)\zeta} - 1) h'(y, \zeta) dy \\ &= \int_{-\infty}^x h'(y, \zeta) dy = 1 + h(x, \zeta). \end{aligned} \quad (6.88)$$

Dabei wurde in der letzten Zeile genutzt, dass $h(x, \zeta) = 1$ für $x < \inf \text{supp } V$ gilt. Also folgt

$$h(x, \zeta) = 1 + \frac{1}{2i\zeta} \int_{-\infty}^x (e^{2i(x-y)\zeta} - 1) V(y) h(y, \zeta) dy \quad (6.89)$$

und damit für die Jostlösung $J_-(x, \zeta) = h(x, \zeta)e^{-ix\zeta}$ die zu zeigende Integralgleichung

$$J_-(x, \zeta) = e^{-ix\zeta} + \frac{1}{2i\zeta} \int_{-\infty}^x (e^{i(x-y)\zeta} - e^{-i(x-y)\zeta}) V(y) J_-(y, \zeta) dy. \quad (6.90)$$

Wir schreiben im nachfolgenden diese Gleichung als $J_-(\cdot, \zeta) = e^{-ix\zeta} + LJ_-(\cdot, \zeta)$ mit einem Integraloperator L . • **(ii)** Als Volterrasche Integralgleichung folgt für die Lösung eine Reihendarstellung

$$J_-(x, \zeta) = e^{-ix\zeta} + \sum_{n=1}^{\infty} L^n [e^{-ix\zeta}] \quad (6.91)$$

und es verbleibt die einzelnen Summanden zu berechnen. Für den ersten erhalten wir

$$\begin{aligned} L[e^{-ix\zeta}] &= \frac{1}{2i\zeta} \int_{-\infty}^x (e^{i(x-y)\zeta} - e^{-i(x-y)\zeta}) V(y) e^{-iy\zeta} dy \\ &= \frac{1}{2i\zeta} \int_{-\infty}^x V(y) (e^{i(x-2y)\zeta} - e^{-ix\zeta}) dy = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x V(y) \left(\int_{2y-x}^x e^{-i\tau\zeta} d\tau \right) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x \left(\int_{-\infty}^{\frac{x+\tau}{2}} V(y) dy \right) e^{-i\tau\zeta} d\tau = \int_{-\infty}^x k_1(x, \tau) e^{-i\tau\zeta} d\tau \end{aligned} \quad (6.92)$$

als Integraloperator mit Kern k_1 . Für die weiteren zeigen wir induktiv eine Darstellung der Form

$$L^n [e^{-ix\zeta}] = \int_{-\infty}^x k_n(x, \tau) e^{-i\tau\zeta} d\tau \quad (6.93)$$

zusammen mit einer Rekursionsvorschrift für die Kerne k_n . Es gilt unter Nutzung von (6.93) für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} L^{n+1}[e^{-ix\zeta}] &= \frac{1}{2i\zeta} \int_{-\infty}^x (e^{i(x-y)\zeta} - e^{-i(x-y)\zeta}) V(y) \int_{-\infty}^y k_n(y, t) e^{-it\zeta} dt dy \\ &= \frac{1}{2i\zeta} \int_{-\infty}^x V(y) \int_{-\infty}^y k_n(y, t) (e^{i(x-y-t)\zeta} - e^{-i(x-y+t)\zeta}) dt dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x V(y) \int_{-\infty}^y k_n(y, t) \int_{-x+y+t}^{x-y+t} e^{-i\tau\zeta} d\tau dt dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x \left(\int_{-\infty}^x V(y) \int_{\tau-x+y}^{\tau+x-y} k_n(y, t) dt dy \right) e^{-i\tau\zeta} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^x k_{n+1}(x, \tau) e^{-i\tau\zeta} d\tau \end{aligned} \quad (6.94)$$

und damit rekursiv die Gleichung (6.93) für alle $n \in \mathbb{N}$ zusammen mit der Rekursionsvorschrift

$$k_{n+1}(x, \tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x V(y) \int_{\tau-x+y}^{\tau+x-y} k_n(y, t) dt dy, \quad k_1(x, \tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\frac{x+\tau}{2}} V(y) dy. \quad (6.95)$$

Dabei gilt für alle $-\infty < \tau \leq x$ (wie man ebenso rekursiv zeigt)

$$|k_{n+1}(x, \tau)| \leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\frac{x+\tau}{2}} |V(y)| dy \frac{1}{n!} \left(\int_{\frac{x+\tau}{2}}^x \int_{-\infty}^{\tau} |V(t)| dt dy \right)^n \quad (6.96)$$

und die Reihe

$$K(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n(x, \tau) \quad (6.97)$$

konvergiert absolut und lokal gleichmäßig gegen eine stetige Kernfunktion, welche

$$|K(x, \tau)| \leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\frac{x+\tau}{2}} |V(y)| dy \exp \left(\int_{\frac{x+\tau}{2}}^x \int_{-\infty}^{\tau} |V(t)| dt dy \right) \quad (6.98)$$

erfüllt. Insbesondere folgt die zweite Behauptung. • **(iii)** Es gilt mit der gerade gezeigten Darstellung von $J_-(x, \zeta)$

$$J_-(x, \zeta) e^{ix\zeta} = 1 + \int_{-\infty}^x K(x, \tau) e^{i(x-\tau)\zeta} d\tau \quad (6.99)$$

und damit unter Ausnutzung von $|K(x, \tau)| \leq C_x$ gleichmäßig in $\tau \leq x$

$$|J_-(x, \zeta) e^{ix\zeta} - 1| \leq C_x e^{x \operatorname{Im} \zeta} \int_{-\infty}^x e^{-\tau \operatorname{Im} \zeta} d\tau = \frac{C_x}{\operatorname{Im} \zeta} \quad (6.100)$$

und damit die Behauptung. • **(iv)** Die Rekursion (6.95) schreibt sich in den Variablen $v = (x + \tau)/2$ und $w = (x - \tau)/2 \geq 0$ und entsprechend $v' = (y + t)/2$, $w' = (y - t)/2$ als

$$\tilde{k}_{n+1}(v, w) = k_{n+1}(v + w, v - w) = \int_{-\infty}^v \int_0^w V(v' + w') k_n(v' + w', v' - w') dv' dw' \quad (6.101)$$

und für $w = 0$ folgt insbesondere $\tilde{k}_n(v, 0) = 0$ für alle $n \geq 2$. Also gilt $K(x, x) = k_1(x, x)$ und damit die Behauptung. \square

6.2.9. Nutzt man nun den Zusammenhang zwischen der Jostlösung und den Streudaten, so ergibt sich eine Gleichung zum Rekonstruieren des Potentials. Dazu nutzen wir die für alle $x \in \mathbb{R}$ gültige Beziehung

$$\frac{J_+(x, \zeta)}{a(\zeta)} = J_-(x, -\zeta) + \frac{b(\zeta)}{a(\zeta)} J_-(x, \zeta), \quad (6.102)$$

die durch Vergleich des Verhaltens beider Seiten für $x < \inf \operatorname{supp} V$ folgt (Gleichung (6.60)). Damit gilt als Folgerung des obigen Lemmas

$$\frac{J_+(x, \zeta)}{a(\zeta)} = e^{ix\zeta} + \int_{-\infty}^x K(x, \tau) e^{i\tau\zeta} d\tau + \frac{b(\zeta)}{a(\zeta)} \left(e^{-ix\zeta} + \int_{-\infty}^x K(x, \tau) e^{-i\tau\zeta} d\tau \right). \quad (6.103)$$

Sei nun $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp} \psi \subset (-\infty, y]$ für ein $y < x$. Dann ist

$$\widehat{\psi}(\zeta) = \int_{-\infty}^y \psi(t) e^{-it\zeta} dt \quad (6.104)$$

ganz in ζ und schnell fallend entlang der reellen Achse. Weiterhin gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}(\zeta) e^{ix\zeta} d\zeta = \psi(x) = 0 \quad (6.105)$$

mit der Fourierschen Inversionsformel und entsprechend

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}(\zeta) \int_{-\infty}^x K(x, \tau) e^{i\tau\zeta} d\tau d\zeta \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^y \psi(t) \int_{-\infty}^x K(x, \tau) e^{i(\tau-t)\zeta} d\tau dt d\zeta = \int_{-\infty}^y \psi(t) K(x, t) dt. \end{aligned} \quad (6.106)$$

Weiter gilt mit

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b(\zeta)}{a(\zeta)} e^{-it\zeta} d\zeta \quad (6.107)$$

die Beziehung

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}(\zeta) \frac{a(\zeta)}{b(\zeta)} e^{-ix\zeta} d\zeta \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^y \psi(t) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a(\zeta)}{b(\zeta)} e^{-i(x+t)\zeta} d\zeta dt = \int_{-\infty}^y \psi(t) F(x+t) dt \end{aligned} \quad (6.108)$$

und ebenso

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}(\zeta) \int_{-\infty}^x K(x, \tau) e^{i\tau\zeta} d\tau d\zeta \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^y \psi(t) \frac{b(\zeta)}{a(\zeta)} \int_{-\infty}^x K(x, \tau) e^{i(\tau-t)\zeta} d\tau dt d\zeta \\ = \int_{-\infty}^y \psi(t) \int_{-\infty}^x K(x, \tau) F(\tau+t) d\tau dt. \end{aligned} \quad (6.109)$$

Durch Addition der Gleichungen (6.105), (6.106), (6.108) und (6.109) ergibt sich das Integral der rechten Seite von Gleichung (6.103) multipliziert mit $\widehat{\psi}$. Für die linke Seite nutzen wir Residuensatz und Jordanlemma in der oberen Halbebene und erhalten entsprechend

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}(\zeta) \frac{J_+(x, \zeta)}{a(\zeta)} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^y \psi(t) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_+(x, \zeta)}{a(\zeta)} e^{-it\zeta} d\zeta dt \\ = i \sum_{\zeta_j \in \mathbb{C}_+ : a(\zeta_j)=0} \frac{J_+(x, \zeta_j)}{a'(\zeta_j)} \int_{-\infty}^y \psi(t) e^{-it\zeta_j} dt = \int_{-\infty}^y \psi(t) G(t) dt \end{aligned} \quad (6.110)$$

unter Ausnutzung der Tatsache, dass die Nullstellen von a in \mathbb{C}_+ einfach sind und mit

$$G(x, t) = i \sum_{\zeta_j \in \mathbb{C}_+ : a(\zeta_j)=0} \frac{J_+(x, \zeta_j)}{a'(\zeta_j)} e^{-it\zeta_j}. \quad (6.111)$$

Damit haben wir gezeigt:

6.2.10 Korollar (Marchenko-Gleichung). *Es gilt die Marchenko-Gleichung*

$$F(x+t) + K(x, t) + \int_{-\infty}^x K(x, \tau) F(\tau+t) d\tau = G(x, t). \quad (6.112)$$

Dabei sind die Funktionen F und G durch die Streudaten a und b sowie die Eigenfunktionen zu den negativen Eigenwerten des Operators A bestimmt.

6.3 Wellengleichungen auf Außengebieten und Berechnung der Streumatrix

6.3.1. Wir betrachten nun wieder Streuung von Wellen an einem Hindernis und folgen dabei der Notation aus Abschnitt 5.2. Ohne Hindernis ist die (freie) Spektraldarstellung im wesentlichen eine Fouriertransformation. Sei dazu $\mathbf{H}_0 = \dot{H}^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ für $n \geq 3$ ungerade und bezeichne $U_0(t)$ die von der freien Wellengleichung erzeugte unitäre Gruppe auf \mathbf{H}_0 zum Erzeuger A_0 . Dann ist die für $x \in \mathbb{R}^n$, $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ und $\zeta \in \mathbb{C}$ definierte Funktion

$$\mathbf{e}_0(x, \omega, \zeta) = -\frac{(-i\zeta)^{(n-3)/2}}{(2\pi)^{n/2}} e^{i\zeta x \cdot \omega} \begin{pmatrix} 1 \\ i\zeta \end{pmatrix} \quad (6.113)$$

formale Eigenfunktion des Erzeugers A_0 , es gilt also

$$A_0 \mathbf{e}_0(\cdot, \omega, \zeta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \mathbf{e}_0(\cdot, \omega, \zeta) = i\zeta \mathbf{e}_0(\cdot, \omega, \zeta). \quad (6.114)$$

Als Erzeuger der unitären Gruppe $U_0(t)$ ist A_0 auf dem Energierraum \mathbf{H}_0 schiefselfbstadjungiert, erfüllt also $A_0^* = -A_0$. Damit gilt für jedes kompakt getragene $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0$ unter Ausnutzung der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit und für beliebige reelle ζ

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(U_0(t)\mathbf{u}, \mathbf{e}_0(\cdot, \omega, \zeta)) &= (A_0 U_0(t)\mathbf{u}, \mathbf{e}_0(\cdot, \omega, \zeta)) \\ &= -(U_0(t)\mathbf{u}, A_0 \mathbf{e}_0(\cdot, \omega, \zeta)) = i\zeta (U_0(t)\mathbf{u}, \mathbf{e}_0(\cdot, \omega, \zeta)), \end{aligned} \quad (6.115)$$

und damit als Lösung dieser Gleichung

$$(U_0(t)\mathbf{u}, \mathbf{e}_0) = e^{i\zeta t} (\mathbf{u}, \mathbf{e}_0). \quad (6.116)$$

Das charakterisiert aber gerade eine Spektraldarstellung der unitären Gruppe / Darstellung der Gruppe im funktionalen Modell. Es ist die Darstellung, die wir schon einmal als Fouriertransformation der Translationsdarstellung bestimmt haben:

Lemma. Für kompakt getragene glatte Daten $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0$ ist die zugehörige (freie) Spektraldarstellung in $L^2(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{S}^{n-1}))$ durch

$$\widehat{\mathbf{u}}(\zeta, \omega) = (\mathbf{u}, \mathbf{e}_0(\cdot, \omega, \zeta))_{\mathbf{H}_0} \quad (6.117)$$

gegeben.

Beweis. Sei $\mathbf{u} = (u_0, u_1)$. Dann gilt nach Definition des Energieinnerproduktes

$$\begin{aligned} \frac{(2\pi)^{n/2}}{(-i\zeta)^{(n-3)/2}} (\mathbf{u}, \mathbf{e}_0)_{\mathbf{H}_0} &= -(\nabla u_0, \nabla e^{i\zeta x \cdot \omega})_{L^2} + i\zeta (u_1, e^{i\zeta x \cdot \omega})_{L^2} \\ &= -\zeta^2 (u_0, e^{i\zeta x \cdot \omega})_{L^2} + i\zeta (u_1, e^{i\zeta x \cdot \omega})_{L^2} \\ &= \frac{(2\pi)^{n/2}}{(-i\zeta)^{(n-3)/2}} \left((-i\zeta)^{(n+1)/2} \widehat{u}_0(\zeta\omega) - (-i\zeta)^{(n-1)/2} \widehat{u}_1(\zeta\omega) \right), \end{aligned} \quad (6.118)$$

der erste Term ist dabei gerade in ζ und der zweite ungerade. Fouriertransformation in ζ liefert daraus zusammen mit dem gewählten Normierungsfaktor gerade die Ableitungen der Radontransformierten der Daten u_0 und u_1 , wie sie in (4.41) zur Definition der freien Translationsdarstellung genutzt wurden. \square

6.3.2. Sei nun $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O}$ zusammenhängend. Wir betrachten die Wellengleichung auf Ω mit Dirichlet-Randbedingungen an $\partial\Omega$ auf dem zugehörigen Energie-
raum $\mathbf{H} = \dot{H}_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Wir nehmen desweiteren an, dass das Hindernis \mathcal{O} nicht einfangend
ist, also die zugehörige Lax-Phillips-Halbgruppe $Z(t)$ exponentiell fällt.

Die einlaufenden und die auslaufenden Spektraldarstellungen auf \mathbf{H} wollen wir analog zur
freien Darstellung durch schwach verstandene Integraloperatoren definieren. Dazu suchen wir
Funktionen $\mathbf{e}_\pm(\cdot, \omega, \zeta)$, so dass

$$\widehat{\mathbf{u}}_\pm(\zeta, \omega) = (\mathbf{u}, \mathbf{e}_\pm(\cdot, \omega, \zeta))_{\mathbf{H}} \quad (6.119)$$

für alle kompakt getragenen $\mathbf{u} \in \mathbf{H}$ gilt und nutzen dafür als Ansatz

$$\mathbf{e}_\pm(x, \omega, \zeta) = \mathbf{e}_0(x, \omega, \zeta) + \mathbf{f}_\pm(x, \omega, \zeta), \quad x \in \Omega. \quad (6.120)$$

Um eine Spektraldarstellung zu erhalten, muss dabei formal $A\mathbf{e}_\pm(\cdot, \omega, \zeta) = i\zeta\mathbf{e}_\pm(\cdot, \omega, \zeta)$ für
alle $\zeta \in \mathbb{R}$ und $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ gelten. Also ergeben sich zur Bestimmung der Funktionen $\mathbf{f}_\pm(\cdot, \omega, \zeta)$
die Bedingungen

(f1) $A\mathbf{f}_\pm(\cdot, \omega, \zeta) = i\zeta\mathbf{f}_\pm(\cdot, \omega, \zeta)$ für alle $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ und $\zeta \in \mathbb{R}$;

(f2) $\mathbf{f}_\pm(x, \omega, \zeta) = -\mathbf{e}_0(x, \omega, \zeta)$ für alle $x \in \partial\Omega$ und für alle $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ und $\zeta \in \mathbb{R}$;

(f3) $_{\pm}$ für kompakt getragene $\mathbf{u} \in \mathbf{F}_{\pm}$ gilt $(\mathbf{u}, \mathbf{f}_\pm(\cdot, \omega, \zeta)) = 0$ für jedes $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ und $\zeta \in \mathbb{R}$.

Diese Bedingungen bestimmen die Funktionen \mathbf{f}_\pm eindeutig, ebenso die Spektraldarstellungen:

Lemma. (i) *Es existiert genau eine Funktion \mathbf{f}_\pm mit (f1), (f2) und (f3) $_{\pm}$.*

(ii) *Die ein- und auslaufenden Spektraldarstellungen*

$$\mathbf{H} \ni \mathbf{u} \mapsto \widehat{\mathbf{u}}_\pm \in L^2(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{S}^{n-1})) \quad (6.121)$$

sind für kompakt getragene $\mathbf{u} \in \mathbf{H}$ durch

$$\widehat{\mathbf{u}}_\pm(\zeta, \omega) = (\mathbf{u}, \mathbf{e}_\pm(\cdot, \omega, \zeta))_{\mathbf{H}} \quad (6.122)$$

gegeben.

Beweis. Wir führen den Beweis für \mathbf{f}_- und zerlegen ihn in drei Schritte.

Schritt 1: Existenz. Sei R so groß, dass $\mathcal{O} \subset B_R(0)$ gilt und $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ getragen in $B_R(0)$
mit $\chi(x) = 1$ auf \mathcal{O} . Sei weiter

$$\mathbf{g}(\cdot, \omega, \zeta) = (A - i\zeta)(\mathbf{e}_0(\cdot, \omega, \zeta)\chi) \quad (6.123)$$

und

$$\mathbf{f}_-(\cdot, \omega, \zeta) = -\mathbf{e}_0(\cdot, \omega, \zeta)\chi - \int_0^\infty e^{-i\zeta t} U(t) \mathbf{g}(\cdot, \omega, \zeta) dt. \quad (6.124)$$

Der Integrand ist für jedes t glatt und kompakt getragen bezüglich x . Darüberhinaus fällt er
punktweise exponentiell (da das Hindernis als nicht einfangend vorausgesetzt ist). Damit gilt

$$(A - i\zeta)\mathbf{f}_-(\cdot, \omega, \zeta) = -\mathbf{g}(\cdot, \omega, \zeta) - \int_0^\infty (A - i\zeta)(e^{-i\zeta t} U(t)) \mathbf{g}(\cdot, \omega, \zeta) dt = 0, \quad (6.125)$$

da $A - i\zeta$ die Halbgruppe $e^{-it\zeta}U(t)$ erzeugt. Also gilt **(f1)**. Weiterhin verschwindet $\mathbf{g}(x, \omega, \zeta)$ in einer Umgebung von Ω und erfüllt damit die Randbedingungen. Also erfüllt auch $U(t)\mathbf{g}(\cdot, \omega, \zeta)$ die Randbedingungen und somit gilt **(f2)**. Für **(f3)**₋ wählen wir uns ein $\mathbf{u} \in \mathbf{F}_-$ und nutzen, dass damit sein Träger außerhalb von $B_R(0)$ liegt. Damit folgt

$$(\mathbf{u}, \mathbf{f}_-(\cdot, \omega, \zeta))_{\mathbf{H}} = -(\mathbf{u}, \mathbf{e}_0(\cdot, \omega, \zeta)\chi)_{\mathbf{H}} - \int_0^\infty e^{i\zeta t} (U(-t)\mathbf{u}, \mathbf{g}(\cdot, \omega, \zeta))_{\mathbf{H}} dt = 0 \quad (6.126)$$

da in allen Innenproduktion die Träger der auftretenden Funktionen disjunkt sind.

Schritt 2: Spektraldarstellung. Die verwendeten Eigenschaften der Funktion \mathbf{f}_- implizieren, dass es sich bei (6.122) um eine Spektraldarstellung handelt. Da diese aber auf \mathbf{F}_- mit der freien Spektraldarstellung übereinstimmt, folgt aus $\mathbf{H} = \bigvee_{t \in \mathbb{R}} U(t)\mathbf{F}_-$, dass durch (6.122) auf ganz \mathbf{H} die einlaufende Spektraldarstellung bestimmt ist.

Schritt 3: Eindeutigkeit. Angenommen, es gäbe zwei solche Funktionen \mathbf{f}_- und $\tilde{\mathbf{f}}_-$. Dann würden diese dieselbe (einlaufende) Spektraldarstellung bestimmen. Für ihre Differenz gilt $\mathbf{f}_- - \tilde{\mathbf{f}}_- = (v, i\zeta v)^\top$. Wir wählen nun eine beliebige kompakt getragene Funktion $\chi \in C_c^\infty(\Omega)$ und betrachten $(0, \chi v) \in \mathbf{H}$. Für dieses Element ist die Differenz der Spektraldarstellungen durch $(v, \chi v) = 0$ gegeben. Da χ beliebig war, folgt $v = 0$.

Bemerkung. Für \mathbf{f}_+ gilt die Darstellung durch

$$\mathbf{f}_+(\cdot, \omega, \zeta) = -\mathbf{e}_0(\cdot, \omega, \zeta)\chi + \int_{-\infty}^0 e^{-i\zeta t} U(t)\mathbf{g}(\cdot, \omega, \zeta) dt, \quad (6.127)$$

die Beweisschritte sind analog zu den für \mathbf{f}_- geführten. □

Wir schreiben

$$\mathbf{f}_\pm(x, \omega, \zeta) = f_\pm(x, \omega, \zeta) \begin{pmatrix} 1 \\ i\zeta \end{pmatrix} \quad (6.128)$$

und betrachten im Weiteren die skalare Funktion f_\pm .

6.3.3 Lemma. (i) *Die Funktion f_\pm besitzt das asymptotische Verhalten*

$$\begin{aligned} f_\pm(r\theta, \omega, \zeta) &= s_\pm(\theta, \omega, \zeta) \frac{e^{\pm i\zeta r}}{r^{(n-1)/2}} + \mathcal{O}(r^{-(n+1)/2}) \\ \partial_r f_\pm(r\theta, \omega, \zeta) &= \pm i\zeta s_\pm(\theta, \omega, \zeta) \frac{e^{\pm i\zeta r}}{r^{(n-1)/2}} + \mathcal{O}(r^{-(n+1)/2}) \end{aligned} \quad (6.129)$$

für $r \rightarrow \infty$ gleichmäßig in $\theta, \omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ und lokal gleichmäßig in $\zeta \in \mathbb{R} \setminus 0$.

(ii) *Es gilt die Sommerfeldsche Strahlungsbedingung*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{(n-1)/2} (\partial_r f_\pm \mp i\zeta f_\pm) = 0. \quad (6.130)$$

Beweisskizze. Da wir uns hier für das Verhalten weit entfernt vom Hindernis interessieren, nutzen wir Aussagen zu Lösungen des freien Problems und stellen \mathbf{f}_- mit Hilfe der freien Translationsdarstellung dar. Wir setzen dazu $\mathbf{f}_-(x, \omega, \zeta)$ glatt ins Innere von \mathcal{O} fort und definieren die Hilfsfunktion

$$\mathbf{g}_0(\cdot, \omega, \zeta) = (A_0 - i\zeta)\mathbf{f}_-(\cdot, \omega, \zeta). \quad (6.131)$$

Die Funktion \mathbf{g}_0 ist glatt und in \mathcal{O} getragen, gehört insbesondere zu \mathbf{H}_0 . Damit impliziert das Huygensprinzip (Korollar 3.3.4) aber, dass die Funktion $\mathbf{w}(t, \cdot, \omega, \zeta) = U_0(t)\mathbf{g}_0(\cdot, \omega, \zeta)$ im Ring $t - R \leq |x| \leq t + R$ getragen ist.

Schritt 1. Wir zeigen, dass dann mit $r = |x|$ die Integraldarstellung

$$\mathbf{f}_-(x, \omega, \zeta) = - \int_0^\infty e^{-i\zeta t} U_0(t) \mathbf{g}_0(x, \omega, \zeta) dt = - \int_{r-R}^{r+R} e^{-i\zeta t} \mathbf{w}(t, x, \omega, \zeta) dt \quad (6.132)$$

von \mathbf{f}_- gilt. Das Integral konvergiert, da \mathbf{w} glatt ist und die Integrationswege jeweils endlich sind.

Einerseits gilt (da A_0 die unitäre Gruppe $U_0(t)$ erzeugt)

$$(A_0 - i\zeta) \int_0^\infty e^{-i\zeta t} U_0(t) \mathbf{g}_0(\cdot, \omega, \zeta) dt = -\mathbf{g}_0(\cdot, \omega, \zeta) \quad (6.133)$$

und darüberhinaus für jedes kompakt getragene $\mathbf{u} \in \mathbf{F}_-$

$$(\mathbf{u}, \int_0^\infty e^{-i\zeta t} U_0(t) \mathbf{g}_0(\cdot, \omega, \zeta) dt)_{\mathbf{H}} = \int_0^\infty e^{i\zeta t} (U_0(t)\mathbf{u}, \mathbf{g}_0(\cdot, \omega, \zeta))_{\mathbf{H}} dt = 0 \quad (6.134)$$

da die Träger von $U_0(t)\mathbf{u}$ (enthalten in $\mathbb{R}^n \setminus B_R$) und von $\mathbf{g}_0(\cdot, \omega, \zeta)$ (enthalten in B_R) disjunkt sind. Beides zusammen bestimmt die Funktion \mathbf{f}_- aber eindeutig.

Schritt 2. Wir untersuchen das asymptotische Verhalten von f_- mit Hilfe der Methode der stationären Phase. Dazu stellen wir \mathbf{w} über die Lösungsdarstellung der freien Wellengleichung als

$$\mathbf{w}(t, x, \omega, \zeta) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \mathbf{h}(x \cdot \eta - t, \eta, \omega, \zeta) d\eta \quad (6.135)$$

als Überlagerung ebener Wellen dar. Dabei ist \mathbf{h} glatt und in $[-R, R] \times \mathbb{S}^{n-1}$ getragen. Damit folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_-(r\theta, \omega, \zeta) &= - \int_{r-R}^{r+R} e^{-i\zeta t} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \mathbf{h}(r\theta \cdot \eta - t, \eta, \omega, \zeta) d\eta dt \\ &= - \int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{i\zeta r\theta \cdot \eta} \int_{r(\theta \cdot \eta - 1) - R}^{r(\theta \cdot \eta - 1) + R} e^{-i\rho\zeta} \mathbf{h}(\rho, \eta, \omega, \zeta) d\rho d\eta \\ &= \frac{e^{i\zeta r}}{r^{(n-1)/2}} s_-(\theta, \omega, \zeta) \begin{pmatrix} 1 \\ i\zeta \end{pmatrix} + \mathcal{O}(r^{-\frac{n+1}{2}}), \end{aligned} \quad (6.136)$$

das äußere Integral nur für $\theta \cdot \omega = \pm 1$ stationäre Punkte besitzt, von diesen aber nur der stationäre Punkt bei $\theta \cdot \eta = 1$ aufgrund des Trägers des inneren Integranden einen Beitrag liefert.

Schritt 3. Durch Differenzieren erhält man eine Darstellung von $\partial_r \mathbf{f}_-$

$$\begin{aligned} \partial_r \mathbf{f}_-(r\theta, \omega, \zeta) &= -i\zeta \int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{i\zeta r\theta \cdot \eta} \rho \cdot \eta \int_{r(\theta \cdot \eta - 1) - R}^{r(\theta \cdot \eta - 1) + R} e^{-i\rho\zeta} \mathbf{h}(\rho, \eta, \omega, \zeta) d\rho d\eta \\ &\quad - \int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{i\zeta r\theta \cdot \eta} (\theta \cdot \eta - 1) \mathbf{h}(r(\theta \cdot \eta - 1) + R, \eta, \omega, \zeta) d\eta \end{aligned} \quad (6.137)$$

in der nur der erste Summand Beiträge zu führender Ordnung besitzt und diese (bis auf den zusätzlichen Faktor $i\zeta$) mit denen aus Schritt 2 übereinstimmen. Dies beweist **(i)** und **(ii)** folgt durch Addition der Asymptotiken. \square

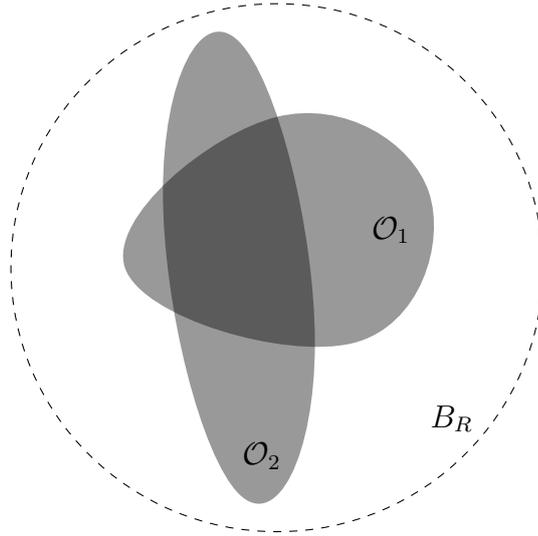


Abbildung 6.2: Zum Beweis von Satz 6.3.4

6.3.4 Satz. *Der Koeffizient $s_-(\theta, \omega, \zeta)$ bestimmt die Menge \mathcal{O} eindeutig.*

Beweis. Angenommen, für zwei verschiedene Hindernisse $\mathcal{O}_1 \subset B_R$ und $\mathcal{O}_2 \subset B_R$ (mit jeweils glattem Rand und zusammenhängenden Komplement) ergeben sich in (6.129) dieselben Koeffizienten $s_-(\theta, \omega, \zeta)$ für $\zeta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $\theta, \omega \in \mathbb{S}^{n-1}$. Dann gilt für die zugehörigen Funktionen $f_-^{(i)}(\cdot, \omega, \zeta)$, $i = 1, 2$

$$(f_-^{(1)} - f_-^{(2)})(r\theta, \zeta, \omega) = \mathcal{O}(r^{-\frac{n+1}{2}}), \quad r \rightarrow \infty \quad (6.138)$$

und damit $(f_-^{(1)} - f_-^{(2)})(\cdot, \zeta, \omega) \in L^2(\mathbb{R}^n \setminus B_R)$. Da darüberhinaus $(\Delta + \zeta^2)(f_-^{(1)} - f_-^{(2)}) = 0$ gilt, folgt mit dem Satz von Rellich–Vekua (Satz 5.2.4) schon $f_-^{(1)}(x, \zeta, \omega) = f_-^{(2)}(x, \zeta, \omega)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus (\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2)$. Betrachtet man nun $g_1(x) = e_0(x, \omega, \zeta) + f_-^{(1)}(x, \omega, \zeta)$ auf $\mathcal{O}_2 \setminus \mathcal{O}_1$, so folgt

$$\Delta g_1 + \zeta^2 g_1 = 0 \quad (6.139)$$

zusammen mit der Randbedingung $g_1 = 0$ auf $\partial(\mathcal{O}_2 \setminus \mathcal{O}_1)$ (unter Ausnutzung der Randbedingungen für $f_-^{(\pm)}$ auf den jeweiligen Randstücken aus $\partial\mathcal{O}_i$). Also handelt es sich um eine Dirichlet-Eigenfunktion zum Eigenwert $-\zeta^2$. Ist nun $\mathcal{O}_2 \setminus \mathcal{O}_1 \neq \emptyset$, so besitzt diese Menge nach Voraussetzung innere Punkte und enthält also insbesondere eine Kugel und der Dirichlet-Laplace hat darauf diskretes Spektrum. Liegt aber nun $-\zeta^2$ in der Resolventenmenge des Dirichlet-Laplace, so folgt damit $g_1 = 0$ und damit $e_-^{(1)} = e_0 + f_-^{(1)} = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Das kann aber nicht sein. Das kann aber nicht sein, da die einlaufende Spektraldarstellung unitär und insbesondere nicht Null ist. Widerspruch. \square

6.3.5 Bemerkung. (i) Es gilt ein analoges Resultat für $\Delta + V(x)$ für kompakt getragene Potentiale $V(x)$. Im allgemeinen Fall (also ohne die Trägerbedingung) ist das Problem schwerer (und offen).

(ii) Es genügt $s_-(\theta, \omega, \zeta)$ für eine offenen Menge an $\zeta \in I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ein festes ω und alle $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ zu kennen.

6.3.6 Satz. Die Streuabbildung $\sigma(\zeta) : L^2(\mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow L^2(\mathbb{S}^{n-1})$, $\zeta \in \mathbb{R}$, ist durch

$$\widehat{u}_+(\zeta, \omega) = \sigma(\zeta)[\widehat{u}_-(\zeta, \cdot)](\omega) = \widehat{u}_-(\zeta, \omega) + \sqrt{2\pi} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \overline{s_+(-\theta, \omega, \zeta)} \widehat{u}_-(\zeta, \theta) d\theta \quad (6.140)$$

mit s_+ aus (6.129) gegeben.

Beweisskizze. Für einen Beweis verweisen wir auf das Buch von Lax und Phillips [4] Kapitel V.5. und skizzieren hier nur die wesentlichen Schritte. Wir nutzen den Ansatz $\sigma(\zeta) = I + K(\zeta)$ mit einem noch zu bestimmenden Integraloperator zum Kern $K(\theta, \omega, \zeta)$, erwarten also

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}, \mathbf{e}_+(\cdot, \omega, \zeta))_{\mathbf{H}} &= (\mathbf{u}, \mathbf{e}_-(\cdot, \omega, \zeta))_{\mathbf{H}} + \int_{\mathbb{S}^{n-1}} K(\theta, \omega, \zeta) (\mathbf{u}, \mathbf{e}_-(\cdot, \theta, \zeta))_{\mathbf{H}} d\theta \\ &= (\mathbf{u}, \mathbf{e}_-(\cdot, \omega, \zeta) + \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \overline{K(\theta, \omega, \zeta)} \mathbf{e}_-(\cdot, \theta, \zeta) d\theta)_{\mathbf{H}} \end{aligned} \quad (6.141)$$

für jedes kompakt getragene $\mathbf{u} \in \mathbf{H}$. Das bedeutet aber

$$0 = \mathbf{e}_+(x, \omega, \zeta) - \mathbf{e}_-(x, \omega, \zeta) - \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \overline{K(\theta, \omega, \zeta)} \mathbf{e}_-(x, \theta, \zeta) d\zeta =: \Phi(x, \omega, \zeta). \quad (6.142)$$

Umgekehrt impliziert die Gültigkeit dieser Gleichung, dass es sich bei K um den Kern des Integraloperators handelt. Wir formulieren sie in der freien Translationsdarstellung um und nutzen dazu einige Hilfsaussagen. Wir bezeichnen mit Φ die rechte Seite der Gleichung, fortgesetzt durch Null ins Innere von \mathcal{O} .

Schritt 1. Es gilt $(A_0 - i\zeta)\Phi(\cdot, \omega, \zeta) = 0$ und damit für die (schwach verstandene) freie Translationsdarstellung \mathbf{j} von Φ auch $(-\partial_s - i\zeta)\mathbf{j} = 0$. Gilt also $\text{supp } \mathbf{j} \subset [N, \infty)$ für eine Zahl N , existiert also ein t mit $U_0(t)\Phi$ schwach orthogonal zu \mathbf{F}_- , so folgt $\Phi = 0$.

Schritt 2. Die freie Translationsdarstellung von $\mathbf{e}_0(\cdot, \omega, \zeta)$ als Element von $\mathcal{D}'(\mathbb{R}; \mathcal{D}'(\mathbb{S}^{n-1}))$ ist von der Form

$$(2\pi)^{-1/2} e^{-i\zeta t} \delta(\eta - \omega), \quad (6.143)$$

die freie Translationsdarstellung von \mathbf{f}_- verschwindet für $t < -R$ und die von \mathbf{f}_+ ist (für $t < -R$) durch

$$e^{-i\zeta t} \mathbf{n}(\eta, \omega, \zeta) \quad (6.144)$$

mit einer in θ , ω und ζ glatten Funktion gegeben. Dies folgt aus (6.132). Zeigt man nun $\mathbf{n}(\theta, \omega, \zeta) = s_-(-\eta, \omega, \zeta)$, so ist für alle $t < -R$

$$s_+(-\eta, \omega, \zeta) e^{-it\zeta} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \overline{K(\theta, \omega, \zeta)} e^{-it\zeta} \delta(\eta - \theta) d\theta \quad (6.145)$$

die freie Translationsdarstellung für Φ . Für die Wahl $\overline{K(\theta, \omega, \zeta)} = \sqrt{2\pi} s_+(-\theta, \omega, \zeta)$ verschwindet diese somit identisch und die Behauptung folgt. \square

7 Abstrakte Streutheorie

Wir wollen zum Schluss noch einen abstrakteren Standpunkt einnehmen und die Streutheorie aus rein funktionalanalytischer Sicht betrachten. Ziel ist es, verschiedene unitäre Gruppen von Operatoren bezüglich ihres asymptotischen Verhaltens zu vergleichen.

7.1 Spektralsätze

7.1.1. Sei \mathbf{H} ein Hilbertraum und $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbf{H})$ eine stark stetige Gruppe unitärer Operatoren. Wir bezeichnen den Erzeuger von $U(t)$ mit iA , dann ist $A : \mathbf{H} \supset D(A) \rightarrow \mathbf{H}$ selbstadjungierter Operator. Ausgehend von der unitären Gruppe $U(t)$ soll in diesem Abschnitt ein Funktionalkalkül für den Operator A aufgebaut und damit in verschiedenen Fassungen ein Spektralsatz für A bewiesen werden.

Als Folgerung aus Lemma 2.2.3 ergibt sich die Darstellung der Resolvente

$$R_A(\zeta) = (\zeta - A)^{-1} = \begin{cases} i \int_0^\infty e^{-it\zeta} U(t) dt, & \text{Im } \zeta < 0, \\ -i \int_{-\infty}^0 e^{-it\zeta} U(t) dt, & \text{Im } \zeta > 0 \end{cases} \quad (7.1)$$

als $\mathcal{L}(\mathbf{H})$ -wertiges Integral. Als direkte Folgerung ergibt sich

$$\|R_A(\zeta)\| \leq \int_0^\infty e^{-|\text{Im } \zeta|t} dt = \frac{1}{|\text{Im } \zeta|}, \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \quad (7.2)$$

und ebenso basierend auf der Inversionsformel der Fourier-Laplace-Transformation (hingeschrieben für skalarwertige Integrale)

$$(U(t)x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^\infty e^{it(\xi - i\eta)} (R_A(\xi - i\eta)x, y) d\xi, & t > 0, \\ \frac{-1}{2\pi i} \int_{-\infty}^\infty e^{it(\xi + i\eta)} (R_A(\xi + i\eta)x, y) d\xi, & t < 0. \end{cases} \quad (7.3)$$

Für die verbleibenden $t \neq 0$ ergeben diese Integrale jeweils Null. Damit kann man beides kombinieren und zumindest formal

$$U(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint e^{it\zeta} R_A(\zeta) d\zeta \quad (7.4)$$

als komplexes Kurvenintegral schreiben. Der Integrationsweg verläuft dabei in der unteren Halbebene parallel zur reellen Achse von links nach rechts und in der oberen zurück von rechts nach links.

7.1.2 (Crashkurs zum Spektralkalkül). Wir bezeichnen mit \mathcal{A} die Menge der Funktionen φ , die in einem Streifen $S_\delta = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} \zeta| < \delta\}$ holomorph sind und für die $\zeta^2 \varphi(\zeta)$ auf S_δ beschränkt ist. Die Menge \mathcal{A} bildet offenbar eine Algebra über \mathbb{C} mit Involution $\varphi^*(\zeta) = \overline{\varphi(\bar{\zeta})}$.

Für ein $\varphi \in \mathcal{A}$ definieren wir

$$\begin{aligned} \varphi(A) &= \frac{1}{2\pi i} \oint \varphi(\zeta) R_A(\zeta) d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi(\xi - i\eta) R_A(\xi - i\eta) - \varphi(\xi + i\eta) R_A(\xi + i\eta)) d\xi. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Da φ quadratisch fällt und R_A entlang des Integrationsweges nach (7.2) beschränkt ist, konvergiert das Integral und definiert einen beschränkten Operator $\varphi(A) \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$. Die Abbildung $\mathcal{A} \ni \varphi \mapsto \varphi(A) \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ erfüllt darüberhinaus

$$\begin{aligned} (\varphi + \lambda\psi)(A) &= \varphi(A) + \lambda\psi(A) \\ (\varphi\psi)(A) &= \varphi(A)\psi(A) \\ \varphi^*(A) &= \varphi(A)^* \end{aligned} \quad (7.6)$$

für $\varphi, \psi \in \mathcal{A}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Während die erste und die dritte Aussage klar sind, ergibt sich die zweite aus dem Integralsatz von Cauchy zusammen mit der Resolventenidentität.

Aus diesen Eigenschaften folgt eine Normabschätzung für den Operator $\varphi(A)$. Ist nun $c > \|\varphi\|_\infty := \max_{\xi \in \mathbb{R}} |\varphi(\xi)|$, so gilt

$$\psi = c - \sqrt{c^2 - \varphi^* \varphi} \in \mathcal{A} \quad (7.7)$$

und damit $c^2 - \varphi^* \varphi = (c - \psi^*)(c - \psi)$. Also folgt

$$\|\varphi(A)x\|^2 + \|(c - \psi(A))x\|^2 = c^2 \|x\|^2 \quad (7.8)$$

und damit $\|\varphi(A)\| \leq \|\varphi\|_\infty$.

Die Algebra \mathcal{A} ist dicht in $C_0(\mathbb{R})$. Dies folgt direkt aus $\mathcal{A} + \mathbb{C}$ dicht in $C(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$, $\mathcal{A} \ni \varphi \mapsto \varphi(A) \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ stetig fortsetzen zu einem *-Homomorphismus $C_0(\mathbb{R}) \ni \varphi \mapsto \varphi(A) \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$. Insbesondere existieren nach dem Rieszschen Darstellungssatz zu $x, y \in \mathbf{H}$ komplexwertige Maße $\mu_{x,y} \in \mathbb{M}(\mathbb{R})$ mit

$$(\varphi(A)x, y) = \int \varphi(\xi) d\mu_{x,y}(\xi) \quad (7.9)$$

für alle $\varphi \in C_0(\mathbb{R})$ mit $\|\mu_{x,y}\| \leq \|x\| \|y\|$. Darüberhinaus ist $\mu_{x,x} \geq 0$ nichtnegativ und somit für $\|x\| = 1$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

Das kann man zu Ausgangspunkt nehmen, für beliebige beschränkte borelmeßbare Funktionen $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ durch die Intgerale (7.9) einen Operator $\varphi(A) \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ zu definieren. Die Menge der beschränkten Borelfunktionen bildet wiederum eine \mathbb{C} -Algebra und die Operatorzuordnung erfüllt (7.6).

7.1.3. Für eine $x \in \mathbf{H}$ sei

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}_A(x) &= \overline{\operatorname{span}}\{\varphi(A)x : \varphi \in \mathcal{A}\} \\ &= \overline{\operatorname{span}}\{(\zeta - A)^{-1}x : \zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\} \\ &= \bigvee_{t \in \mathbb{R}} U(t)x \end{aligned} \quad (7.10)$$

der von x erzeugte zyklische Unterraum. Die Äquivalenz der Definitionen ergibt sich aus obiger Konstruktion des Funktionalkalküls. Offenbar ist jeder zyklische Unterraum A -invariant, es gilt also für $y \in D(A) \cap \mathfrak{Z}_A(x)$ stets $Ay \in \mathfrak{Z}_A(x)$. Ein erster Spektralsatz gilt für zyklische Unterräume:

Satz. *Die Abbildung*

$$\mathfrak{Z}_A(x) \ni \varphi(A)x \mapsto \varphi \in L^2(\mathbb{R}; d\mu_{x,x}) \quad (7.11)$$

ist unitär und transformiert den Operator A zu einer Multiplikation mit der Variablen ξ ,

$$A\varphi(A)x \quad \text{entspricht} \quad \xi \mapsto \xi\varphi(\xi). \quad (7.12)$$

Beweisskizze. Wir betrachten nur $\varphi \in \mathcal{A}$. Dann gilt

$$\|\varphi(A)x\|^2 = (\varphi^*(A)\varphi(A)x, x) = \int |\varphi(\xi)|^2 d\mu_{x,x} \quad (7.13)$$

und die Zuordnung der Funktion φ ist Isometrisch (wobei auf der rechten Seite φ modulo $\mu_{x,x}$ -Nullfunktionen zu verstehen ist). Die Abbildung setzt sich stetig zu einer Isometrie auf $\mathfrak{Z}_A(x)$ fort.

Diese Abbildung ist surjektiv. Dazu approximiert man die Funktionen $\varphi \in L^2(\mathbb{R}; d\mu_{x,x})$ durch $\varphi_n(\xi) = \varphi(\xi)1_{\{|\varphi(\xi)| \leq n\}}$ und betrachtet die Elemente $\varphi_n(A)x \in \mathfrak{Z}_A(x)$. Diese konvergieren in der Norm und bestimmen damit ein $y \in \mathfrak{Z}_A(x)$, welches φ zugeordnet wird. Also ist die Abbildung unitär.

Weiter entspricht das Element $U(t)\varphi(A)x$ nach Konstruktion der Funktion $\xi \mapsto e^{it\xi}\varphi(\xi)$, die Gruppe $U(t)$ also der Multiplikation mit den Exponentialfunktionen $\xi \mapsto e^{it\xi}$ diese hat als Erzeuger die Multiplikation mit ξ und es folgt

$$D(A) \longrightarrow \{\varphi \in L^2(\mathbb{R}; d\mu_{x,x}) : (\xi \mapsto \xi\varphi(\xi)) \in L^2(\mathbb{R}; d\mu_{x,x})\} \quad (7.14)$$

zusammen mit der zweiten Behauptung. □

7.1.4. Existiert ein $x \in \mathbf{H}$ mit $\mathfrak{Z}_A(x) = \mathbf{H}$, so heißt x zyklischer Vektor für A und obiger Spektralsatz liefert eine unitäre Transformation von \mathbf{H} in $L^2(\mathbb{R}; d\mu_{x,x})$. Gilt dies nicht, so kann man für einen separablen Hilbertraum \mathbf{H} analog zum Gram-Schmidt-Algorithmus eine orthogonale Zerlegung in zyklische Unterräume

$$\mathbf{H} = \bigoplus_j \mathfrak{Z}_A(x_j) \quad (7.15)$$

für eine (möglicherweise endliche) Folge $(x_j)_{j=1}^{(\infty)}$ mit $\|x_j\| = 1$ und $x_i \perp x_j$ für $i \neq j$ konstruieren. Dazu beachte man, dass für $y \perp \mathfrak{Z}_A(x)$ stets $\mathfrak{Z}_A(x) \perp \mathfrak{Z}_A(y)$ gilt. Also erhält man eine unitäre Abbildung

$$\mathbf{H} \longrightarrow \bigoplus_j L^2(\mathbb{R}; d\mu_{x_j, x_j}). \quad (7.16)$$

Für eine absolut summierbare Folge c_j sei

$$\mu = \sum_j c_j \mu_{x_j, x_j} \in \mathbb{M}(\mathbb{R}). \quad (7.17)$$

Wir bezeichnen dieses Maß als dominant, jedes der Maße μ_{x_j, x_j} ist absolutstetig bezüglich μ . Damit ist aber (Polarisationsformel!) jedes der Maße $\mu_{x, y}$ für $x, y \in \mathbf{H}$ absolutstetig bezüglich μ und es gilt

$$d\mu_{x, y}(\xi) = \rho_{x, y}(\xi) d\mu \quad (7.18)$$

für komplexwertige messbare Funktionen $\rho_{x, y}$. Die Zuordnung $(x, y) \mapsto \rho_{x, y}$ ist sesquilinear, $\rho_{x, x}(\xi) \geq 0$ fast überall und es gilt

$$\|x\|^2 = \int d\mu_{x, x} = \int \rho_{x, x}(\xi) d\mu(\xi). \quad (7.19)$$

Die Dichtefunktionen $\rho_{x, x}$ sind also μ -integrierbar.

7.1.5 Bemerkung. (i) Dies kann kanonisch gemacht werden indem man die Folge der x_j derart wählt, dass

$$\mu_{x_j, x_j} \ll \mu_{x_k, x_k}, \quad j \geq k \quad (7.20)$$

gilt. Das dabei entstehende Maß $\mu := \mu_{x_1, x_1}$ ist dominant.

(ii) Der Raum $L^2(\mathbb{R}; d\mu)$ im Spektralsatz hängt bis auf unitäre Äquivalenz nur von der Absolutstetigkeitsklasse des Maßes μ ab, sind μ und ν gegenseitig absolutstetig, gilt also $d\mu(\xi) = \rho(\xi) d\nu(\xi)$ mit $\rho(\xi) > 0$ für ν -fast alle ξ , so ist

$$L^2(\mathbb{R}, d\nu) \ni f \mapsto \rho^{1/2} f \in L^2(\mathbb{R}, d\mu) \quad (7.21)$$

unitär und erhält als punktweise definierte Transformation auf dem Raum definierte Multiplikationsoperatoren.

7.1.6. Die Lebesgue-Zerlegung des dominanten Maßes μ liefert eine Darstellung als Summe

$$\mu = \mu_{pp} + \mu_{ac} + \mu_{sc} \quad (7.22)$$

gegenseitig singulärer Maße $\mu_{pp} \perp \mu_{ac}$, $\mu_{ac} \perp \mu_{sc}$, $\mu_{sc} \perp \mu_{pp}$ mit

- μ_{pp} atomar, also auf der Menge $\{\xi \in \mathbb{R} : \mu(\{\xi\}) > 0\}$ getragen;
- μ_{ac} absolutstetig bezüglich des Lebesguemaßes $d\xi$;
- μ_{sc} singulär und atomfrei.

Der Lebesgue-Zerlegung des Maßes entspricht eine Orthogonalzerlegung der Räume

$$L^2(\mathbb{R}; d\mu) = L^2(\mathbb{R}; d\mu_{pp}) \oplus L^2(\mathbb{R}; d\mu_{ac}) \oplus L^2(\mathbb{R}; d\mu_{sc}), \quad (7.23)$$

entsprechend für alle darüberliegenden Räume in der Spektraldarstellung. Wir definieren zugeordnete Projektoren $P_{ac}(A), P_{pp}(A), P_{sc}(A) \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ durch

$$(P_{\star}(A)x, y) = \int_{\mathbb{R}} \rho_{x, y}(\xi) d\mu_{\star}, \quad \star \in \{pp, ac, sc\}, \quad (7.24)$$

7.2 Streutheorie für zwei unitäre Gruppen

7.2.1. Seien nun e^{iAt} und e^{itB} zwei unitäre Gruppen auf einem Hilbertraum \mathbf{H} mit zugeordneten Operatoren $A : \mathbf{H} \supset D(A) \rightarrow \mathbf{H}$ und $B : \mathbf{H} \supset D(B) \rightarrow \mathbf{H}$. Unser Ziel besteht darin, das asymptotische Verhalten der unitären Gruppen in Bezug zu setzen, dafür also zu gegebenen $x \in \mathbf{H}$ zugeordnete $y \in \mathbf{H}$ zu finden, für die die Differenz

$$e^{itA}y - e^{itB}x \rightarrow 0 \quad (7.25)$$

für $t \rightarrow \infty$ oder $t \rightarrow -\infty$ gegen Null strebt. Ist $x \in D(B)$ eine Eigenfunktion von B zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$, so gilt $e^{itB}x = e^{i\lambda t}x$ und (7.25) kann nur dann gelten, wenn λ ebenso Eigenwert von A ist und $y = x$ gilt.

Jedoch ist (7.25) für den absolutstetigen Anteil der Operatoren A und B eine interessante Eigenschaft.

Definition. Falls der starke Grenzwert

$$\mathcal{W}_{\pm}(A, B) = \text{s-lim}_{t \rightarrow \pm\infty} e^{-itA} e^{itB} P_{\text{ac}}(B) \quad (7.26)$$

existiert, wird er als verallgemeinerter Wellenoperator (oder Møller-Wellenoperator) bezeichnet. In diesem Fall seien weiter

$$\mathbf{H}_{\pm} = \text{ran } \mathcal{W}_{\pm}(A, B). \quad (7.27)$$

7.2.2 Lemma. Angenommen $\mathcal{W}_{\pm} = \mathcal{W}_{\pm}(A, B)$ existiert. Dann gilt

- (i) \mathcal{W}_{\pm} ist eine partielle Isometrie auf \mathbf{H} mit Ausgangsraum $\text{ran } P_{\text{ac}}(B)$ und Bildraum \mathbf{H}_{\pm} ;
- (ii) die Teilräume \mathbf{H}_{\pm} sind A -invariant und es gilt

$$\mathcal{W}_{\pm}[D(B)] \subset D(A) \quad \text{und} \quad A\mathcal{W}_{\pm} = \mathcal{W}_{\pm}B; \quad (7.28)$$

- (iii) $\mathbf{H}_{\pm} \subset P_{\text{ac}}(A)\mathbf{H}$.

Beweis. (i) Nach Konstruktion gilt $(\text{ran } P_{\text{ac}}(B))^{\perp} \subset \ker \mathcal{W}_{\pm}$. Weiterhin gilt für $x \in \text{ran } P_{\text{ac}}(B)$

$$\|e^{-itA} e^{itB} P_{\text{ac}}(B)x\| = \|e^{-itA} e^{itB} x\| = \|x\| \quad (7.29)$$

und somit $\|\mathcal{W}_{\pm}x\| = \|x\|$. Damit ist \mathcal{W}_{\pm} Isometrie auf $\text{ran } P_{\text{ac}}(B)$ mit Bildraum $\mathbf{H}_{\pm} = \text{ran } \mathcal{W}_{\pm}$ und es gilt $\ker \mathcal{W}_{\pm} = (\text{ran } P_{\text{ac}}(B))^{\perp}$. • (ii) Es gilt

$$\mathcal{W}_{\pm} = \text{s-lim}_{t \rightarrow \pm\infty} e^{-itA} e^{itB} P_{\text{ac}}(B) = \text{s-lim}_{t \rightarrow \pm\infty} e^{-i(t-s)A} e^{i(t-s)B} P_{\text{ac}}(B) = e^{iAs} \mathcal{W}_{\pm} e^{-iBs} \quad (7.30)$$

da die unitäre Gruppe mit dem Projektor $P_{\text{ac}}(B)$ kommutiert. Also folgt für beliebiges $t \in \mathbb{R}$

$$e^{iAt} \mathcal{W}_{\pm} = \mathcal{W}_{\pm} e^{iBt} \quad (7.31)$$

und damit nach Definition des Erzeugers einer unitären Gruppe für $x \in D(B)$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{it} (e^{iAt} \mathcal{W}_{\pm} x - \mathcal{W}_{\pm} x) = \lim_{t \rightarrow 0} \mathcal{W}_{\pm} \frac{1}{it} (e^{iBt} x - x) = \mathcal{W}_{\pm} Bx \quad (7.32)$$

und $\mathcal{W}_{\pm}x \in D(A)$ sowie $A\mathcal{W}_{\pm}x = \mathcal{W}_{\pm}Bx$. • (iii) Damit ist aber die Einschränkung von A auf \mathbf{H}_{\pm} unitär äquivalent zur Einschränkung von B auf $\text{ran } P_{\text{ac}}(B)$. Also besitzt A auf dem Teilraum rein absolutstetiges Spektrum und $\mathbf{H}_{\pm} \subset \text{ran } P_{\text{ac}}(A)$. \square

7.2.3 Lemma (Kettenregel für Wellenoperatoren). *Angenommen $\mathcal{W}_\pm(A, B)$ und $\mathcal{W}_\pm(B, C)$ existieren. Dann existiert $\mathcal{W}_\pm(A, C)$ und es gilt*

$$\mathcal{W}_\pm(A, C) = \mathcal{W}_\pm(A, B)\mathcal{W}_\pm(B, C). \quad (7.33)$$

Beweis. Da $\text{ran } \mathcal{W}_\pm(B, C) \subset \text{ran } P_{\text{ac}}(B)$ gilt, folgt für jedes $x \in \mathbf{H}$

$$(1 - P_{\text{ac}}(B))\mathcal{W}_\pm(B, C) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|(1 - P_{\text{ac}}(B))e^{itB}e^{-itC}P_{\text{ac}}(C)x\| = 0. \quad (7.34)$$

Also gilt

$$\begin{aligned} e^{itA}e^{-itC}x &= e^{itA}e^{-itB}e^{itB}e^{-itC}P_{\text{ac}}(C)x \\ &= e^{itA}e^{-itB}P_{\text{ac}}(B)e^{itB}e^{-itC}P_{\text{ac}}(C)x \\ &\quad + e^{itA}e^{-itB}(1 - P_{\text{ac}}(B))e^{itB}e^{-itC}P_{\text{ac}}(C)x \\ &\longrightarrow \mathcal{W}_\pm(A, B)\mathcal{W}_\pm(B, C)x + 0 \end{aligned} \quad (7.35)$$

für $t \rightarrow \pm\infty$ und der Wellenoperator $\mathcal{W}_\pm(A, C)$ existiert und die Behauptung folgt. \square

Der Wellenoperator $\mathcal{W}_\pm(A, B)$ wird als *vollständig* bezeichnet, falls

$$\text{ran } \mathcal{W}_\pm(A, B) = \mathbf{H}_\pm = \text{ran } P_{\text{ac}}(A) \quad (7.36)$$

gilt.

7.2.4 Lemma. *Angenommen $\mathcal{W}_\pm(A, B)$ existiert. Dann ist $\mathcal{W}_\pm(A, B)$ genau dann vollständig, wenn $\mathcal{W}_\pm(B, A)$ existiert.*

Beweis. Existieren sowohl $\mathcal{W}_\pm(A, B)$ als auch $\mathcal{W}_\pm(B, A)$, so folgt

$$P_{\text{ac}}(A) = \mathcal{W}_\pm(A, A) = \mathcal{W}_\pm(A, B)\mathcal{W}_\pm(B, A) \quad (7.37)$$

und damit ist $\text{ran } P_{\text{ac}}(A) \subset \text{ran } \mathcal{W}_\pm(A, B) = \mathbf{H}_\pm$. Zusammen mit Lemma 7.2.2(iii) folgt $\text{ran } P_{\text{ac}}(A) = \mathbf{H}_\pm$ und $\mathcal{W}_\pm(A, B)$ ist vollständig.

Ist umgekehrt $\mathcal{W}_\pm(A, B)$ vollständig, so existiert zu gegebenem $y \in \text{ran } P_{\text{ac}}(A)$ ein $x \in \mathbf{H}$ mit $y = \mathcal{W}_\pm(A, B)x$. Also gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein T_0 , so dass für $|t| > T_\varepsilon$

$$\|e^{-itB}e^{itA}y - P_{\text{ac}}(B)x\| = \|y - e^{-itA}e^{itB}P_{\text{ac}}(B)x\| < \varepsilon. \quad (7.38)$$

Damit folgt aber die Existenz von $\mathcal{W}_\pm(B, A)$ und $\mathcal{W}_\pm(B, A)y = P_{\text{ac}}(B)x$. \square

Es bleibt, Kriterien für Existenz und Vollständigkeit von Wellenoperatoren anzugeben.

7.2.5 Satz (Cook). *Angenommen, es gibt eine Teilmenge $\mathcal{D} \subset D(B) \cap \text{ran } P_{\text{ac}}(B)$, welche in $\text{ran } P_{\text{ac}}(B)$ dicht ist, und ein $T_0 > 0$, so dass*

(i) $e^{itB}x \in D(A)$ für alle $x \in \mathcal{D}$ und $|t| > T_0$ und

(ii)

$$\int_{T_0}^{\infty} (\|(A - B)e^{-itB}x\| + \|(A - B)e^{itB}x\|) dt < \infty \quad (7.39)$$

für alle $x \in \mathcal{D}$ gilt.

Dann existiert $\mathcal{W}_\pm(A, B)$.

Beweis. Wegen Eigenschaft (i) gilt für $x \in \mathcal{D}$ und große t

$$i \frac{d}{dt} (e^{-itA} e^{itB} x) = e^{-itA} (A - B) e^{itB} x \quad (7.40)$$

und damit

$$e^{-itA} e^{itB} x - e^{-isA} e^{isB} x = -i \int_s^t e^{-i\theta A} (A - B) e^{i\theta B} x d\theta. \quad (7.41)$$

Also folgt mit (ii)

$$\|e^{-itA} e^{itB} x - e^{-isA} e^{isB} x\| \leq \int_s^t \|(A - B) e^{i\theta B} x\| d\theta \longrightarrow 0, \quad s, t \rightarrow \infty, \quad (7.42)$$

und die Behauptung folgt. Der Fall $t \rightarrow -\infty$ ist analog. \square

Den gerade bewiesenen Satz kann man verallgemeinern, indem man geschickt Kompaktheit ausnutzt. Dazu verwenden wir folgendes Lemma. Da wir von nun an die dominanten Maße und insbesondere ihre absolutstetigen Anteile für beide Operatoren A und B benötigen, verwenden wir die Notation $\mu^{(B)}$ beziehungsweise $\mu_{ac}^{(B)}$ für die durch B bestimmten Maße. Ebenso schreiben wir $\rho_{x,y}^{(B)}$ für die zugehörige Dichtefunktion von $\mu_{x,y}^{(B)}$ bezüglich $\mu^{(B)}$.

7.2.6 Lemma. *Es gilt*

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (e^{itB} x, y) = 0 \quad (7.43)$$

für alle $x, y \in \text{ran } P_{ac}(B)$.

Beweis. Wir bezeichnen die Dichtefunktion des Maßes $\mu_{ac}^{(B)}$ bezüglich des Lebesguemaßes mit $\eta^{(B)}(\xi)$, es gilt also $d\mu_{ac}^{(B)}(\xi) = \eta^{(B)}(\xi) d\xi$. Dann folgt die Behauptung wegen

$$(e^{itB} x, y) = \int e^{it\xi} \rho_{x,y}^{(B)}(\xi) d\mu_{ac}^{(B)}(\xi) = \int e^{it\xi} \rho_{x,y}^{(B)}(\xi) \eta^{(B)}(\xi) d\xi \quad (7.44)$$

zusammen mit $\rho_{x,y}^{(B)} \eta^{(B)} \in L^1(\mathbb{R})$ aus dem Riemann–Lebesgue–Lemma. \square

7.2.7 Satz (Kupsch–Sandhas). *Angenommen, es gibt eine Teilmenge $\mathcal{D} \subset D(B^n) \cap \text{ran } P_{ac}(B)$, welche in $\text{ran } P_{ac}(B)$ dicht ist, einen Operator $J \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ und ein $T_0 > 0$, so dass*

- (i) $J e^{itB} x \in D(A)$ für alle $x \in \mathcal{D}$ und $|t| > T_0$;
- (ii) für alle $x \in \mathcal{D}$

$$\int_{T_0}^{\infty} (\|(AJ - JB)e^{-itB} x\| + \|(AJ - JB)e^{itB} x\|) dt < \infty; \quad (7.45)$$

- (iii) und $(1 - J)(i - B)^{-n}$ kompakt ist.

Dann existiert $\mathcal{W}_\pm(A, B)$.

Beweis. Den ersten Beweisteil können wir von Satz 7.2.5 abschreiben. Es gilt wegen Eigenschaft (i) gilt für $x \in \mathcal{D}$ und große t

$$i \frac{d}{dt} (e^{-itA} J e^{itB} x) = e^{-itA} (AJ - JB) e^{itB} x \quad (7.46)$$

und damit

$$e^{-itA} e^{itB} x - e^{-isA} e^{isB} x = -i \int_s^t e^{-i\theta A} (AJ - JB) e^{i\theta B} x \, d\theta. \quad (7.47)$$

Also folgt mit (ii)

$$\|e^{-itA} J e^{itB} x - e^{-isA} J e^{isB} x\| \leq \int_s^t \|(AJ - JB) e^{i\theta B} x\| \, d\theta \longrightarrow 0, \quad s, t \rightarrow \infty \quad (7.48)$$

und der Grenzwert

$$s\text{-}\lim_{t \rightarrow \mp\infty} e^{-itA} J e^{itB} P_{ac}(B) \quad (7.49)$$

existiert. Für den noch fehlenden Term nutzen wir Lemma 7.2.6 und schließen aus (iii) zusammen mit $(i - B)^n x \in \text{ran } P_{ac}(B)$

$$(1 - J) e^{itB} x = (1 - J) (i - B)^{-n} \underbrace{e^{itB} (i - B)^n x}_{\rightarrow 0} \longrightarrow 0 \quad (7.50)$$

und damit

$$e^{-itA} (1 - J) e^{itB} x \longrightarrow 0. \quad (7.51)$$

□

7.2.8 Bemerkung. Hat man zwei verschiedene Hilberträume \mathbf{H}_1 und \mathbf{H}_2 und unitäre Gruppen $U_1(t) = e^{itB}$ auf \mathbf{H}_1 und $U_2(t) = e^{itA}$ auf \mathbf{H}_2 und gilt für einen beschränkten Operator $J : \mathbf{H}_1 \rightarrow \mathbf{H}_2$ und eine Menge $\mathcal{D} \subset D(B) \cap \text{ran } P_{ac}(B)$ dicht in $\text{ran } P_{ac}(B)$

(i) $J e^{itB} x \in D(A)$ für alle $x \in \mathcal{D}$ und $|t| > T_0$ und

(ii) für alle $x \in \mathcal{D}$

$$\int_{T_0}^{\infty} (\|(AJ - JB) e^{-itB} x\| + \|(AJ - JB) e^{itB} x\|) \, dt < \infty, \quad (7.52)$$

so folgt die Existenz des verallgemeinerten Wellenoperators

$$\mathcal{W}_{\pm}(A, B; J) = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{-itA} J e^{itB} P_{ac}(B). \quad (7.53)$$

Für Anwendungen ist dabei J injektiv (etwa die Einbettung des Energieraums auf dem Außengebiet in den freien Energieraum bei Dirichlet-Randbedingungen) und isometrisch, jedoch nicht bijektiv. Wir nennen diese Wellenoperatoren wiederum vollständig, falls $\text{ran } \mathcal{W}_{\pm}(A, B; J) = \text{ran } P_{ac}(A)$ gilt. Vollständigkeit folgt hier jedoch nicht mehr aus der Existenz eines zweiten Wellenoperators und ist direkt zu zeigen!

Im Weiteren sei

$$\mathcal{M}(B) = \left\{ x \in \text{ran } P_{ac}(B) : \frac{d\mu_{x,x}}{d\xi} \in L^{\infty}(\mathbb{R}) \right\} \quad (7.54)$$

die Menge aller $x \in \mathbf{H}$ mit beschränkter Dichte des Spektralmaßes $\mu_{x,x}$ bezüglich des Lebesguemaßes. Wir schreiben kurz $\|x\|_{\mathcal{M}}^2$ für die Supremumsnorm dieser Dichte.

7.2.9 Lemma. (i) $\mathcal{M}(B)$ ist dicht in $\text{ran } P_{\text{ac}}(B)$.

(ii) Für $x \in \mathcal{M}(B)$ und $y \in \mathbf{H}$ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(e^{-itB}x, y)|^2 dt \leq 2\pi \|x\|_{\mathcal{M}}^2 \|y\|^2. \quad (7.55)$$

(iii) Für jeden Hilbert–Schmidt-Operator $G \in \mathfrak{S}_2(\mathbf{H})$ und $x \in \mathcal{M}(B)$ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|Ge^{-itB}x\|^2 dt \leq 2\pi \|x\|_{\mathcal{M}}^2 \|G\|_{\mathfrak{S}_2}^2. \quad (7.56)$$

Beweis. (i) Der Beweis erfolgt durch Abschneiden. Sei $x \in \text{ran } P_{\text{ac}}(B)$ und gelte $d\mu_{x,x}(\xi) = f(\xi) d\xi$. Dann gilt $f \geq 0$ und wegen

$$\|x\|^2 = \int d\mu_{x,x} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) d\xi \quad (7.57)$$

auch $f \in L^1(\mathbb{R})$. Wir betrachten nun zu $n \in \mathbb{N}$ das Element $x_n = 1_{\{f \leq n^2\}}(B)x \in \text{ran } P_{\text{ac}}$. Für dieses gilt $\|x_n\|_{\mathcal{M}} \leq n$ und

$$\|x - x_n\| = \int 1_{\{f < n^2\}}(\xi) d\mu_{x,x}(\xi) = \int_{\{f(\xi) > n^2\}} f(\xi) d\xi \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad (7.58)$$

auf Grund der absoluten Integrierbarkeit von f . • (ii) Sei $Q : \mathbf{H} \rightarrow \mathfrak{Z}_B(x)$ der Orthogonalprojektor auf den x erzeugten zyklischen Teilraum und $Qy = q^*(B)x$ für ein $q \in L^2(\mathbb{R}; d\mu_{x,x})$. Dann gilt

$$(e^{-itB}x, y) = (e^{-itB}x, Qy) = \int e^{-it\xi} q(\xi) d\mu_{x,x}(\xi) \quad (7.59)$$

und damit

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |(e^{-itB}x, y)|^2 dt &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |q(\xi)|^2 \left(\frac{d\mu_{x,x}}{d\xi} \right) d\xi \\ &\leq 2\pi \|x\|_{\mathcal{M}}^2 \int_{-\infty}^{\infty} |q(\xi)|^2 \left(\frac{d\mu_{x,x}}{d\xi} \right) d\xi \\ &\leq 2\pi \|x\|_{\mathcal{M}}^2 \|Qy\|^2 \leq 2\pi \|x\|_{\mathcal{M}}^2 \|y\|^2 \end{aligned} \quad (7.60)$$

mit Plancherel. • (iii) Der Hilbert–Schmidt-Operator G ist von der Form

$$Gx = \sum_j \lambda_j(x, e_j) f_j \quad (7.61)$$

mit Orthonormalsystemen (e_j) und (f_j) und Singulärwerten $\lambda_j \geq 0$ mit $\|G\|_{\mathfrak{S}_2}^2 = \sum_j \lambda_j^2 < \infty$. Damit gilt für $x \in \mathcal{M}(B)$

$$Ge^{-itB}x = \sum_j \lambda_j (e^{-itB}x, e_j) f_j, \quad \|Ge^{-itB}x\|^2 \leq \sum_j \lambda_j^2 |(e^{-itB}x, e_j)|^2 \quad (7.62)$$

und mit (ii)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|Ge^{-itB}x\|^2 dt \leq 2\pi \sum_j \lambda_j^2 \|x\|_{\mathcal{M}}^2 = 2\pi \|x\|_{\mathcal{M}}^2 \|G\|_{\mathfrak{S}_2}^2. \quad (7.63)$$

□

Wir erinnern daran, dass ein Operator $G \in \mathcal{K}(\mathbf{H})$ Spurklasse ist, falls seine Singulärwerte absolut summierbar sind, es also eine Darstellung

$$Gx = \sum_j \lambda_j(x, e_j) f_j \quad (7.64)$$

für Orthonormalbasen (e_j) und (f_j) und Zahlen $\lambda_j > 0$ mit $\|G\|_{\mathfrak{S}_1} = \sum_j \lambda_j < \infty$ gibt. Dies ist äquivalent dazu, dass G Produkt von zwei Hilbert–Schmidt-Operatoren ist und wiederum äquivalent dazu ist, dass

$$\|G\|_{\mathfrak{S}_1} = \sup_{(e_j), (f_j) \in \mathcal{O}} \sum_j |(Ge_j, f_j)| < \infty \quad (7.65)$$

gilt. Dabei bezeichnet \mathcal{O} die Menge aller Orthonormalbasen von \mathbf{H} .

7.2.10 Satz (Kato–Rosenblum). *Angenommen, der Operator $A - B$ ist ein Spurklasseoperator. Dann existiert $\mathcal{W}_{\pm}(A, B)$ und ist vollständig.*

Beweis. Sei $W(t) = e^{itA} e^{-itB}$. Dann ist $W(t) - W(s)$ für $s, t \in \mathbb{R}$ stets Spurklasse. Dazu nutzen wir die Charakterisierung (7.65) für Spurklasseoperatoren. Es gilt

$$((W(t) - W(s))e_j, f_j) = \int_s^t ((A - B)e^{-i\theta B} e_j, e^{-i\theta A} f_j) d\theta \quad (7.66)$$

und da $e^{-i\theta B} e_j$ wiederum Orthonormalbasis ist folgt nach Supremumsbildung

$$\|W(t) - W(s)\|_{\mathfrak{S}_1} \leq \int_s^t \sup_{(e_j), (f_j) \in \mathcal{O}} ((A - B)e^{-i\theta B} e_j, e^{-i\theta A} f_j) d\theta \leq |t - s| \|A - B\|_{\mathfrak{S}_1}. \quad (7.67)$$

Insbesondere ist also $W(t) - W(s)$ kompakt und damit gilt

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} (W(t) - W(s))e^{-i\rho B} x = 0 \quad (7.68)$$

für jedes $x \in \text{ran } P_{\text{ac}}(B)$. Damit können wir uns dem eigentlichen Beweis zuwenden. Es ist zu zeigen, dass für $x \in \mathcal{M}(B) \cap \mathcal{D}(B)$ (was ebenso in $\text{ran } P_{\text{ac}}(B)$ dicht ist)

$$\|(W(t) - W(s))x\|^2 = (W^*(t)(W(t) - W(s))x, x) - (W^*(s)(W(t) - W(s))x, x) \quad (7.69)$$

für $s, t \rightarrow \infty$ gegen Null strebt. Aus Symmetriegründen können beide Terme gleich behandelt werden. Weiter gilt

$$\begin{aligned} & (W^*(t)(W(t) - W(s))x, x) \\ &= \lim_{\rho \rightarrow \infty} (W^*(t)(W(t) - W(s))x - e^{i\rho B} W^*(t)(W(t) - W(s))e^{-i\rho B} x, x) \end{aligned} \quad (7.70)$$

und es bleibt zu zeigen, dass

$$((W^*(t)W(s) - e^{i\rho B} W^*(t)W(s)e^{-i\rho B})x, x) \quad (7.71)$$

für $s, t \rightarrow \infty$ gleichmäßig in $\rho > 0$ gegen Null strebt. Dafür leiten wir zuerst nach ρ ab. Es gilt

$$i \frac{d}{d\rho} = ([W^*(t)W(s), B]e^{-i\rho B}x, e^{-\rho B}x) = [(A - B), e^{-i(t-s)A}]e^{-i(s+\rho)B}x, e^{-i(t+\rho)B}x), \quad (7.72)$$

da

$$\begin{aligned} [W^*(t)W(s), B] &= e^{itB}e^{-itA}e^{isA}e^{-isB}B - Be^{itB}e^{-itA}e^{isA}e^{-isB} \\ &= e^{itB}[e^{-i(t-s)A}, B]e^{-isB} = e^{itB}[(A - B), e^{-i(t-s)A}]e^{-isB}, \end{aligned} \quad (7.73)$$

und damit

$$\begin{aligned} ((W^*(t)W(s) - e^{i\rho B}W^*(t)W(s)e^{-i\rho B})x, x) \\ = i \int_0^\rho [(A - B), e^{-i(t-s)A}]e^{-i(s+\theta)B}x, e^{-i(t+\theta)B}x) d\theta. \end{aligned} \quad (7.74)$$

Wir betrachten wiederum beide Terme des Kommutators einzeln und nutzen $A - B = G_1^*G_2$ für zwei Hilbert–Schmidt-Operatoren G_1 und G_2 . Dann gilt mit Cauchy–Schwarz

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^\rho ((A - B)e^{-i(t-s)A}e^{-i(s+\theta)B}x, e^{-i(t+\theta)B}x) \right| \\ &= \left| \int_0^\rho (G_2e^{-i(t-s)A}e^{-i(s+\theta)B}x, G_1e^{-i(t+\theta)B}x) d\theta \right| \\ &\leq \int_0^\rho \|G_2e^{-i(t-s)A}e^{-i(s+\theta)B}x\| \|G_1e^{-i(t+\theta)B}x\| d\theta \\ &\leq \left(\int_0^\rho \|G_2e^{-i(t-s)A}e^{-i(s+\theta)B}x\|^2 d\theta \right)^{1/2} \left(\int_0^\rho \|G_1e^{-i(t+\theta)B}x\|^2 d\theta \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_s^{s+\rho} \|G_2e^{-i(t-s)A}e^{-i\theta B}x\|^2 d\theta \right)^{1/2} \left(\int_t^{t+\rho} \|G_1e^{-i\theta B}x\|^2 d\theta \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (7.75)$$

und der erste Term ist beschränkt durch $\sqrt{2\pi}\|x\|_{\mathcal{M}}\|G_2\|_{\mathfrak{S}_2}$, da $G_2e^{-i(t-s)A} \in \mathfrak{S}_2$ dieselbe Hilbert–Schmidt-Norm wie G_2 hat, während der zweite für $t \rightarrow \infty$ gleichmäßig in $\rho > 0$ und s gegen Null strebt. Analoges gilt für

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^\rho (e^{-i(t-s)A}(A - B)e^{-i(s+\theta)B}x, e^{-i(t+\theta)B}x) \right| \\ &= \left| \int_0^\rho (G_2e^{-i(s+\theta)B}x, G_1e^{i(t-s)A}e^{-i(t+\theta)B}x) d\theta \right| \end{aligned} \quad (7.76)$$

und $s \rightarrow \infty$ gleichmäßig in $\rho > 0$ und t . In Summe folgt die Behauptung. \square

Um weitere allgemeinere Resultate zu erhalten, verallgemeinern wir obigen Beweis und fügen wieder einen Operator J ein. Dies führt zu

7.2.11 Satz (Pearson). *Angenommen, $AJ - JB$ ist Spurklasse für einen beschränkten Operator J . Dann existieren die Wellenoperatoren*

$$\mathcal{W}_\pm(A, B; J) = \text{s-lim}_{t \rightarrow \mp\infty} e^{itA} J e^{-itB} P_{\text{ac}}(B) \quad (7.77)$$

und

$$\mathcal{W}_\pm(B, A; J^*) = \text{s-lim}_{t \rightarrow \mp\infty} e^{itB} J^* e^{-itA} P_{\text{ac}}(A). \quad (7.78)$$

Beweisskizze. Wir diskutieren nur die Unterschiede im Beweis. Setzt man analog $W(t) = e^{itA} J e^{-itB}$, so folgt analog

$$((W(t) - W(s))e_j, f_j) = \int_s^t ((AJ - JB)e^{-i\theta B} e_j, e^{-i\theta A} f_j) d\theta \quad (7.79)$$

und damit $W(t) - W(s) \in \mathfrak{S}_1(\mathbf{H})$ und damit für $x \in \mathcal{M}(B) \cap D(B)$

$$\begin{aligned} \|(W(t) - W(s))x\|^2 &= (W^*(t)(W(t) - W(s))x, x) - (W^*(s)(W(t) - W(s))x, x) \\ &= \lim_{\rho \rightarrow \infty} (W^*(t)(W(t) - W(s))x - e^{i\rho B} W^*(t)(W(t) - W(s))e^{-i\rho B} x, x) \\ &\quad - \lim_{\rho \rightarrow \infty} (W^*(s)(W(t) - W(s))x - e^{i\rho B} W^*(s)(W(t) - W(s))e^{-i\rho B} x, x). \end{aligned} \quad (7.80)$$

Es sind also wiederum die Terme

$$\begin{aligned} &((W^*(t)W(t) - e^{i\rho B} W^*(t)W(t)e^{-i\rho B})x, x), \\ &((W^*(t)W(s) - e^{i\rho B} W^*(t)W(s)e^{-i\rho B})x, x) \end{aligned} \quad (7.81)$$

(und dazu noch mit s und t vertauscht) zu untersuchen. Dazu nutzen wir analog

$$\begin{aligned} &((W^*(t)W(s) - e^{i\rho B} W^*(t)W(s)e^{-i\rho B})x, x) \\ &= i \int_0^\rho ((J^*A - BJ^*)e^{-i(t-s)A} J - J^*e^{-i(t-s)A}(AJ - JB))e^{-i(s+\theta)B} x, e^{-i(t+\theta)B} x) d\theta. \end{aligned} \quad (7.82)$$

was wiederum aus

$$\begin{aligned} (W^*(t)W(s), B) &= e^{itB} J^* e^{-itA} e^{isA} J e^{-isB} B - B e^{itB} J^* e^{-itA} e^{isA} J e^{-isB} \\ &= e^{itB} ((J^*A - BJ^*)e^{-i(t-s)A} J - J^*e^{-i(t-s)A}(AJ - JB))e^{-isB}, \end{aligned} \quad (7.83)$$

folgt. Da J und J^* beschränkt sind und $J^*A - BJ^*$ sowie $AJ - JB$ beide Spurklasse sind, kann wieder wie im vorherigen Beweis argumentiert werden. \square

7.2.12 Korollar (Kuroda–Birman). *Angenommen, $(i - A)^{-1} - (i - B)^{-1}$ ist Spurklasse. Dann existieren $\mathcal{W}_\pm(A, B)$ und sind vollständig.*

Beweis. Mit $J = (i - A)^{-1}(i - B)^{-1}$ gilt $AJ - JB = (i - A)^{-1} - (i - B)^{-1}$ und damit ist der Satz von Pearson anwendbar. Es existieren also die Grenzwerte

$$\text{s-lim}_{t \rightarrow \mp\infty} e^{itA} (i - A)^{-1} (i - B)^{-1} e^{-itB} P_{\text{ac}}(B) = \text{s-lim}_{t \rightarrow \mp\infty} e^{itA} (i - A)^{-1} e^{-itB} (i - B)^{-1} P_{\text{ac}}(B) \quad (7.84)$$

und da $(i - B)^{-1} \text{ran } P_{\text{ac}}(B)$ dicht im Bild $\text{ran } P_{\text{ac}}(B)$ ist und $e^{itA} (i - A)^{-1} e^{-itB}$ gleichmäßig in t beschränkt sind folgt damit die Existenz von

$$\text{s-lim}_{t \rightarrow \mp\infty} e^{itA} (i - A)^{-1} e^{-itB} P_{\text{ac}}(B). \quad (7.85)$$

Da nun aber $(i - A)^{-1} - (i - B)^{-1}$ kompakt ist, gilt

$$\text{s-lim}_{t \rightarrow \mp\infty} ((i - A)^{-1} - (i - B)^{-1}) e^{-itB} P_{\text{ac}}(B) = 0 \quad (7.86)$$

und

$$\text{s-lim}_{t \rightarrow \mp\infty} e^{itA} (i - B)^{-1} e^{-itB} P_{\text{ac}}(B) = \text{s-lim}_{t \rightarrow \mp\infty} e^{itA} e^{-itB} (i - B)^{-1} P_{\text{ac}}(B). \quad (7.87)$$

existiert ebenso. Damit folgt aber die Existenz von $\mathcal{W}_\pm(A, B)$. Aus Symmetriegründen folgt ebenso die Existenz von $\mathcal{W}_\pm(B, A)$ und damit die Vollständigkeit. \square

7.2.13 Beispiel. Seien auf $\mathbf{H} = L^2(\mathbb{R})$ für eine Funktion $V \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ mit die beiden Operatoren

$$A = -\frac{d^2}{dx^2}, \quad B = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \quad (7.88)$$

mit gemeinsamem Definitionsbereich $D(A) = D(B) = H^2(\mathbb{R})$ gegeben. Dann sind alle Voraussetzungen des Satzes von Kuroda-Birman erfüllt. Dazu betrachten wir die Differenz der Resolventen

$$R_A(\zeta) - R_B(\zeta) = -R_A(\zeta)V R_B(\zeta) = -R_A(\zeta)V R_A(\zeta)(\zeta - A)R_B(\zeta) \quad (7.89)$$

(wobei V den Operator der Multiplikation mit V bezeichnet). Der Operator $(\zeta - A)R_B(\zeta)$ ist beschränkt, wir schreiben den verbleibenden Operator als Produkt von zwei Termen, $R_A(\zeta)|V|^{1/2}$ und $\exp(i \arg V) |V|^{1/2}R_A(\zeta)$, und betrachten beide einzeln. Jeder dieser Terme ist für $\zeta = -1$ Hilbert-Schmidt, da

$$\iint \frac{|V(x)|}{(1 + |\xi|^2)^2} d\xi dx = \int |V(x)| dx \int \frac{d\xi}{(1 + |\xi|^2)^2} < \infty \quad (7.90)$$

bis auf eine Konstante das Quadrat der zugehörigen Hilbert-Schmidt-Norm liefert. Damit sind die formal in Kapitel 6.2 berechneten Spektraldarstellungen insbesondere auch wirklich unitäre Abbildungen auf dem absolutstetigen Teil des Spektrums!

Literaturverzeichnis

- [1] Mikhael Agranovich. *Sobolev Spaces, Their Generalizations and Elliptic Problems in Smooth and Lipschitz Domains*. Springer-Verlag, 2015.
- [2] Olga A. Ladyzhenskaya. *The Boundary Value Problems of Mathematical Physics*. Applied Mathematical Sciences Vol. 49, Springer-Verlag, 1985.
- [3] Peter D. Lax. *Hyperbolic Partial Differential Equations*. Courant Lecture Notes 14. American Mathematical Society 2006.
- [4] Peter D. Lax, Ralph S. Phillips. *Scattering Theory*. Academic Press 1989.
- [5] William McLean. *Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations*. Cambridge University Press. 2000.
- [6] K.-J. Engel, R. Nagel. *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*. Graduate Texts in Mathematics Vol. 194, Springer-Verlag 2000.
- [7] Wolfgang Rudin. *Reelle und komplexe Analysis*. Oldenbourg Wissenschaftsverlag 2009.
- [8] Dmitri R. Yafaev. *Mathematical Scattering Theory: Analytic Theory*. Mathematical Surveys and Monographs Vol. 158, AMS 2010.

Index

- Billiard
 - Punkt
 - rückwärts eingefangen, 57
 - rückwärts frei, 57
 - vorwärts eingefangen, 57
 - vorwärts frei, 57
 - Verweildauer, 60
- Differentialoperator, 14
 - gleichmäßig elliptisch, 14
 - Hauptteil, 14
 - Laplace
 - Dirichlet-Laplace, 22, 33
 - Dirichlet-Neumann-Operator, 24
 - Kirchhoff-Laplace, 25
 - Neumann-Laplace, 24, 33
 - Poissonoperator, 24
 - Robin-Laplace, 24
- ebene Welle, 42
- Elliptizitätsabschätzung, 14
- Form, 15
 - Dirichletform, 22
 - koerziv, 15
 - symmetrisch, 18
- Graph
 - Kanten, 25
 - Knoten, 25
 - metrischer Graph, 25
- Halbgruppe
 - Erzeuger, 27
 - Kontraktionshalbgruppe, 30
 - stark stetige Operatorhalbgruppe, 27
- Jostfunktion, 82
- Jostlösungen, 80
- Lösungsbegriff
 - klassische Lösung, 40
 - schwache Lösung, 40
 - starke Lösung, 40
- Lebesgue-Zerlegung
 - eines Spektralmaßes, 98
- Modell
 - Billiard, 57
- Norm
 - Graphennorm, 18
 - Sobolev-Seminorm, 13, 19
 - Sobolevnorm, 13, 19, 20
- Operator
 - maximal dissipativ, 31
 - Resolvente, 29
- Problem
 - Helmholtzgleichung, 10
 - Poisson-Problem, 23
 - Wellengleichung, 9
- Radontransformation, 43
- Raum
 - Dirichletraum, 34
 - Hardyraum, 47
 - Sobolevraum, 19
- Resolventenmenge, 29
- Satz
 - diskretes funktionales Modell, 47
 - Methode von Cook, 100
 - Spektralsatz für Selbstadjungierte Operatoren, 97
 - Spursatz für Sobolevräume, 22
 - von Hille–Yosida, 30
 - von Kato–Rosenblum, 104
 - von Kuroda–Birman, 106
 - von Lax–Milgram, 16

- von Lumer–Phillips, 31
- von Sinai, 48
- von Stone, 32
- Sommerfeldsche Strahlungsbedingung, 90
- Streuabbildung, 52
- Streumatrix, 54
- Streupole, 56

- Ungleichung
 - Friedrichssche Ungleichung, 23

- verallgemeinerter Wellenoperator, 99

- Wellenoperator
 - vollständig, 100