Prüfungsfragen zur Vorlesung Harmonische Analysis

1. In der Vorlesung wurde sowohl das Spektrum einer kommutativen Banachalgebra als auch das Spektrum eines Elementes in einer Banachalgebra betrachtet. Wie sind diese definiert und welche Beziehung besteht zwischen diesen?

   Gebe zwei wesentlich verschiedene nichttriviale Beispiele zu Banachalgebren, ihren Spektren und Spektren ihrer Elemente an.

2. Definiere den Begriff eines Spektralmaßes. Was sind die wichtigsten Eigenschaften des meßbaren Spektralkalküls? Wie kommt man von einer kommutativen C^*-Algebra zu einem Spektralmaß?

3. Wieso sind kompakte Gruppen stets unimodular?

4. Was ist eine unitäre Darstellung? Gebe zwei (wesentlich verschiedene) nichttriviale Beispiele. Wann sind Darstellungen zyklisch, wann irreduzibel? Formuliere und beweise das Lemma von Schur.

5. Welcher Zusammenhang besteht zwischen Funktionen positivem Typs und zyklischen Darstellungen?

6. Was besagt der Satz von Gelfand–Raikov und welche Implikationen hat er?

7. Gebe Beispiele lokalkompakter abelscher Gruppen an. Was sind die zugehörigen Duale? Formuliere jeweils die resultierende Plancherel-Identität und die Fouriersche Inversionsformel.

8. Wozu nützt die Floquet–Bloch-Transformation?

9. Was sind kanonische Modelle für Spektralmaße? Wie kann man damit

   (a) entscheiden, ob zwei unitäre Darstellungen $\pi_i : G \to \mathcal{L}(H_i)$, $i = 1, 2$ in separablen Hilberträumen H_i unitär äquivalent sind;

   (b) den allgemeinsten Operator $A : H_1 \to H_1$ beschreiben, welcher

   $$A\pi_1(x) = \pi_1(x)A \qquad \text{für alle } x \in G$$

   erfüllt?

10. Formuliere und beweise den Satz von Peter und Weyl. Nutze diesen um alle beschränkten Operatoren auf $\mathrm{L}^2(G)$ zu charakterisieren, welche mit Linkstranslationen der Gruppe kommutieren.

11. Wie kann man alle irreduziblen unitären Darstellungen der Heisenberggruppe $\mathbb{H}_n$ konstruieren? Welcher Zusammenhang besteht zwischen diesen und

    (a) der (Fourier–) Wigner-Verteilung einer Funktion $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$;

    (b) der Bargmanntransformation;

    (c) der Weylquantisierung von Operatoren.