Prof. Dr. Jens Wirth
Institut für Analysis, Dynamik und Modellierung
Universität Stuttgart

Analysis 1

©2022/23 Jens Wirth

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen aus Logik und Mengenlehre **7**
1.1 Aussagenlogik . . . 7
1.2 Mengen . . . 10
1.3 Prädikatenlogik . . . 12
1.4 Zur Struktur mathematischer Sätze . . . 14
1.5 Axiome der natürlichen Zahlen . . . 16
1.6 Rekursive Definitionen und Beweise durch Induktion . . . 19
1.7 Äquivalenzrelationen und -klassen . . . 23
1.8 Ordnungsrelationen . . . 27
1.9 Reelle Zahlen . . . 30
1.10 Komplexe Zahlen . . . 37

2 Grenzwerte von Folgen und Reihen **45**
2.1 Zahlenfolgen und Grenzwerte . . . 45
2.2 Elementare Grenzwertsätze . . . 49
2.3 Cauchyfolgen und Vollständigkeit . . . 54
2.4 Reihen . . . 56
2.5 Konvergenzkriterien für Reihen . . . 58
2.6 Die Eulersche Zahl e . . . 65
2.7 Umordnen von Reihen . . . 67
2.8 Exponentialreihe und Exponentialfunktion . . . 69

3 Stetigkeit und Funktionsgrenzwerte **73**
3.1 Stetigkeit von Funktionen . . . 73
3.2 Hauptsätze über stetige Funktionen . . . 75
3.3 Gleichmäßige Stetigkeit . . . 78
3.4 Grenzwerte von Funktionen . . . 80
3.5 Monotonie und Umkehrfunktionen . . . 84

4 Differentialrechnung in einer Variablen **87**
4.1 Differenzierbarkeit . . . 87
4.2 Elementare Funktionen . . . 91
4.3 Hauptsätze über differenzierbare Funktionen . . . 95
4.4 Die Regel von l'Hôpital . . . 98
4.5 Die Taylorsche Formel . . . 104
4.6 Kurvendiskussionen . . . 108
4.7 Stammfunktionen . . . 114

Vorrede

Die Grundvorlesung der Analysis soll in mathematisches Denken einführen und dabei die Grundlagen der Differential- und Integralrechnung vermitteln. Nach einer Einführung in mathematische Logik und Mengenlehre werden wir uns deswegen den Zahlen, insbesondere den *reellen Zahlen* und den *komplexen Zahlen*, zuwenden und kennenlernen, wie man damit *Funktionen* definiert und untersucht.

Zentrale Begriffe der Analysis sind dabei *Grenzwerte* und über Grenzwerte definierte mathematische Objekte. Viele davon sind aus der Schule bekannt oder werden aus der Schule bekannt vorkommen. Wir werden trotzdem versuchen, mathematisch exakt und mit mehr Tiefgang vorzugehen und (auch Ihnen bekannt vorkommende Konzepte) sauber und präzise zu definieren. Lassen Sie sich überraschen!

Literatur (-empfehlungen)

[1] Konrad Königsberger, *Analysis 1*, Springer-Verlag, 2004
`https://doi.org/10.1007/978-3-642-18490-1`

[2] Vladimir A. Zorich, *Analysis I*, Springer-Verlag, 2006
`https://doi.org/10.1007/3-540-33278-2`

[3] Harro Heuser, *Lehrbuch der Analysis*, Band 1, Springer-Verlag, 2003
`https://doi.org/10.1007/978-3-322-96828-9`

[4] Grigori M. Fichtenholz, *Differential- und Integralrechnung*, Band 1, Verlag Harri Deutsch, 2006

[5] Tom Apostol, *Mathematical Analysis*, Addison-Wesley, 1974

[6] Wolfgang Rudin, *Analysis*, Oldenbourg, 2009

[7] Pólya, Szegő, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I*, Springer-Verlag, 1998
`https://doi.org/10.1007/978-3-642-61983-0`

[8] Hans von Mangoldt, Konrad Knopp, *Einführung in die Höhere Mathematik*, Band 1 und 2, S. Hirzel Verlag, 1963

[9] Richard Courant, *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung*, Band 1, Springer-Verlag, 1971
`https://doi.org/10.1007/978-3-642-61988-5`

Zeitplan Analysis 1

Woche	Themen	
1	Aussagenlogik, Mengen, Prädikatenlogik	1.1, 1.2, 1.3, 1.4
2	Peanoaxiome, Induktionsbeweise, Rekursive Def's	1.5, 1.6
3	Äquivalenzrelationen, ganze und rationale Zahlen	1.7
4	Ordnungsrelationen, reelle Zahlen	1.8, 1.9
5	Komplexe Zahlen	1.10
6	Konvergenz, Grenzwertsätze	2.1, 2.2
7	Cauchyfolgen, Reihen	2.3,2.4
8	Konvergenzkriterien, Eulersche Zahl e	2.5,2.6
9	Umordnungen, Exponentialfunktion, Stetigkeit	2.7,2.8,3.1
10	Hauptsätze über stetige Funktionen	3.2, 3.3
11	Grenzwerte, Monotonie und Umkehrfunktionen	3.4, 3.5
12	Differenzierbarkeit, elementare Funktionen, Hauptsätze über differenzierbare Funktionen	4.1, 4.2, 4.3
13	Regel von l'Hôpital, Taylorsche Formel	4.4, 4.5
14	Kuvendiskussionen, Stammfunktionen	4.6, 4.7

1 Grundlagen aus Logik und Mengenlehre

Zuerst müssen wir uns darüber verständigen, wie wir uns miteinander verständigen wollen. Das soll heißen, wir müssen uns darüber einigen, welche Bedeutung Begriffe haben und wie wir mathematische Sachverhalte so formulieren, dass diese unmissverständlich und klar sind. Wir schärfen also unsere Werkzeuge, bevor wir damit arbeiten.

1.1 Aussagenlogik

1.1.1. Mathematische Sachverhalte werden in Form von Aussagen formuliert. Eine Aussage ist dabei ein sprachliches Gebilde, welchem auf eindeutige Weise einer der Wahrheitswerte **wahr** oder **falsch** zugeordnet werden kann.

Beispiele sind

- *Es gibt fünf Primzahlen kleiner als* 10. (**falsch**)
- *Die Zahl* 2 *ist gerade.* (**wahr**)
- *Jede ungerade Zahl, die sich als Summe zweier gerader Zahlen schreiben lässt, ist eine Primzahl.* (**wahr**)

Andererseits handelt es sich bei

- *Diese Aussage ist falsch.*
- *Diese Aussage ist wahr.*
- *Wer das liest ist blau.*
- *Heute ist Montag.*

nicht um Aussagen. Jede Zuordnung eines Wahrheitswertes ist hier problematisch. Die erste führt direkt zu einem Widerspruch in sich, die zweite erlaubt beide Wahrheitswerte gleichermaßen. In der dritten spielt der Leser eine Rolle, in der vierten der Tag an dem die Aussage gelesen[1] wird.

1.1.2. Im Weiteren wollen wir Aussagen verknüpfen und mit Aussagen rechnen. Aussagen bezeichnen wir im Folgenden mit Kleinbuchstaben $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \ldots$. Desweiteren schreiben wir kurz **w** und **f** für die Wahrheitswerte **wahr** und **falsch**.

Ergebnisse von Verknüpfungen von Aussagen / Operationen mit Aussagen hängen nur

[1] In einer Vorlesung wird diese natürlich zu einer Aussage, hier ist der Tag 'heute' spezifiziert. Verwirrend?

vom Wahrheitswert der beteiligten Aussagen ab, nicht von deren genauer Formulierung. Wir diskutieren die wichtigsten kurz und vereinbaren Notationen dafür.

Die *Negation* $\neg\mathbf{p}$ einer Aussage kehrt die Wahrheitswerte um. In Tabellenform aufgeschrieben liest sich das als

$\mathbf{p}$	$\neg\mathbf{p}$
w	**f**
f	**w**

(1.1.**2-A**)

Solche Wahrheitswerttabellen helfen, Verknüpfungen von Aussagen zu untersuchen und auch zu entscheiden, ob zwei Formeln in Aussagenvariablen stets zu denselben Wahrheitswerten führen. Zwei solche Ausdrücke nennt man in der Aussagenlogik dann *werteverlaufsgleich* und schreibt $\equiv$ zwischen die Formeln. So gilt für jede Aussage $\mathbf{p}$

$$\neg\neg\mathbf{p} \;\equiv\; \mathbf{p}. \tag{1.1.2-B}$$

Dies wird als *Satz von der doppelten Verneinung* bezeichnet.

Die *Konjunktion* $\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}$ zweier Aussagen $\mathbf{p}$ und $\mathbf{q}$ ist wahr, wenn beide Aussagen wahr sind. In Tabellenform festgelegt liest sich das

$\mathbf{p}$	$\mathbf{q}$	$\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}$
w	**w**	**w**
w	**f**	**f**
f	**w**	**f**
f	**f**	**f**

(1.1.**2-C**)

Die Aussage $\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}$ wird als '$\mathbf{p}$ und $\mathbf{q}$' gelesen.

Die *Disjunktion* $\mathbf{p} \vee \mathbf{q}$ zweier Aussagen $\mathbf{p}$ und $\mathbf{q}$ ist wahr, wenn mindestens eine der beiden Aussagen wahr ist. In Tabellenform festgelegt liest sich das

$\mathbf{p}$	$\mathbf{q}$	$\mathbf{p} \vee \mathbf{q}$
w	**w**	**w**
w	**f**	**w**
f	**w**	**w**
f	**f**	**f**

(1.1.**2-D**)

Die Aussage $\mathbf{p} \vee \mathbf{q}$ wird als '$\mathbf{p}$ oder $\mathbf{q}$' gelesen.

Disjunktion und Konjunktion sind über eine Negation verbunden. Es gilt die *Regel von de Morgan*[2]

$$\neg(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \;\equiv\; (\neg\mathbf{p}) \wedge (\neg\mathbf{q}). \tag{1.1.2-E}$$

Auch dies rechnen wir durch eine Wahrheitstabelle nach. Das schrittweise Ausfüllen der Tabelle liefert einen Beweis der Regel. Da in

$\mathbf{p}$	$\mathbf{q}$	$\mathbf{p} \vee \mathbf{q}$	$\neg(\mathbf{p} \vee \mathbf{q})$	$\neg\mathbf{p}$	$\neg\mathbf{q}$	$(\neg\mathbf{p}) \wedge (\neg\mathbf{q})$
w	**w**	**w**	**f**	**f**	**f**	**f**
w	**f**	**w**	**f**	**f**	**w**	**f**
f	**w**	**w**	**f**	**w**	**f**	**f**
f	**f**	**f**	**w**	**w**	**w**	**w**

(1.1.**2-F**)

[2] Augustus de Morgan, 1806–1871

die vierte und die letzte Spalte übereinstimmen, sind die Ausdrücke wertverlaufsgleich.

Die *Implikation* $\mathbf{p} \implies \mathbf{q}$ wird als 'wenn $\mathbf{p}$ gilt, dann gilt $\mathbf{q}$' gelesen. Sie trifft keine Aussage was passiert, wenn $\mathbf{p}$ nicht gilt und erscheint auf den ersten Blick unintuitiv. Sie ist durch

$\mathbf{p}$	$\mathbf{q}$	$\mathbf{p} \implies \mathbf{q}$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

(1.1.**2-G**)

definiert. Auch hier gilt eine Identität

$$\mathbf{p} \implies \mathbf{q} \qquad \equiv \qquad \mathbf{q} \vee \neg\mathbf{p} \tag{1.1.2-H}$$

die wir durch eine Tabelle beweisen. Es gilt

$\mathbf{p}$	$\mathbf{q}$	$\mathbf{p} \implies \mathbf{q}$	$\neg\mathbf{p}$	$\mathbf{q} \vee \neg\mathbf{p}$
w	w	w	f	w
w	f	f	f	f
f	w	w	w	w
f	f	w	w	w

(1.1.**2-I**)

Die *Äquivalenz* $\mathbf{p} \iff \mathbf{q}$ ist eine Kurzschreibweise für $(\mathbf{p} \implies \mathbf{q}) \wedge (\mathbf{q} \implies \mathbf{p})$. Auch hier geben wir die Wahrheitswerttabelle an:

$\mathbf{p}$	$\mathbf{q}$	$\mathbf{p} \iff \mathbf{q}$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

(1.1.**2-J**)

1.1.3. Eine aussagenlogische Formel, die bei jeder Belegung mit Wahrheitswerten zu einer wahren Aussage wird, bezeichnet man als *Tautologie*. Beispiele von Tautologien haben wir schon gesehen, wenn man obige $\equiv$ durch $\iff$ ersetzt, ergeben sich welche. Tautologien sind also komplizierte Wege die Aussage $\mathbf{w}$ aufzuschreiben. Nichtsdestotrotz sind Tautologien nützlich.

Eine Erste ist das *Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten*

$$\mathbf{p} \vee \neg\mathbf{p} \tag{1.1.3-A}$$

welches besagt, dass eine Aussage oder ihre Negation wahr sein muss. Damit folgt das *Prinzip vom ausgeschlossenen Widerspruch*

$$\neg(\mathbf{p} \wedge \neg\mathbf{p}) \tag{1.1.3-B}$$

welches besagt, dass eine Aussage nicht gleichzeitig mit ihrer Negation wahr sein kann.

1.1.4. Aussagen, die von Parametern abhängen, die also erst beim Belegen einer Variablen mit einem Wert zu einer Aussage werden, bezeichnet man als *Aussageform*. Eine Aussageform $\mathbf{p}(x)$ wird also erst dadurch, dass man weiß was x ist, zu einer Aussage. Mit Aussageformen kann man genauso rechnen wie mit Aussagen, die obige Notation überträgt sich also direkt.

1.2 Mengen

1.2.1. In der Cantorschen Mengenlehre[3] sind Mengen Zusammenfassungen wohlunterschiedlicher Objekte zu einem Ganzen.[4] Dafür haben sich Notationen eingebürgert, die wir zuerst einführen wollen. Eine *Menge* kann durch Aufzählen der Objekte, ihrer *Elemente*, angegeben werden. Dazu verwendet man die Mengenklammern { und } und schreibt zum Beispiel

$$\{M, e, n, g, l, h, r\} \tag{1.2.1-A}$$

für die Menge der Buchstaben des Wortes Mengenlehre. Dabei tritt jedes Element nur einmal in der Menge auf (egal wie oft man es in der Notation in die Menge hineinschreibt). Die beiden Mengen $\{1\}$ und $\{1, 1\}$ haben also beide jeweils ein Element. Zwei Mengen sind gleich wenn sie dieselben Elemente besitzen.

1.2.2. In der Mathematik können Mengen beliebig[5] viele Elemente besitzen. So werden wir später die Menge der (rationalen oder reellen) Zahlen oder die Menge aller Funktionen betrachten. Wir benötigen also Schreibweisen, die es erlauben, ohne das Aufzählen aller Elemente eine Menge anzugeben.

Wir werden im Folgenden davon ausgehen, dass wir eine große Menge M gegeben haben und angeben, wie wir aus dieser Menge weitere Mengen konstruieren können. Dies hilft, sich in die Notation einzugewöhnen, und vermeidet Widersprüche, die sich aus einer zu freizügigen Nutzung der Mengennotation ergeben können. Ist x ein Element der Menge M, so schreibt man kurz

$$x \in M. \tag{1.2.2-A}$$

Ist N eine zweite Menge und gilt für jedes x

$$x \in N \implies x \in M, \tag{1.2.2-B}$$

so sagt man N ist eine *Teilmenge* von M und man schreibt $N \subseteq M$. Die Menge ohne Elemente wird als *leere Menge* bezeichnet, in Symbolen schreibt man dafür $\varnothing$.

Für eine Aussageform $\mathbf{p}(x)$, die für Elemente der Menge M definiert ist, kann man durch

$$\{x \in M \mid \mathbf{p}(x)\} \tag{1.2.2-C}$$

die Teilmenge der Elemente x auswählen, für welche $\mathbf{p}(x)$ wahr ist. Auf diese Weise entsprechen Aussageformen für Elemente einer Menge Teilmengen (und Teilmengen ebenso Aussageformen). Operationen der Aussagenlogik ergeben Operationen für Mengen. Wir führen diese kurz ein.

1.2.3. Der *Schnitt* $A \cap B$ zweier Mengen A und B ist definiert über

$$x \in A \cap B \iff x \in A \ \wedge \ x \in B \tag{1.2.3-A}$$

[3] Georg Cantor, 1845–1918

[4] Dieser wie eine Definition klingende Satz stammt von Cantor. Dass er problematisch ist, werden wir noch sehen. Vorerst tun wir naiv so, als ob alles gut wäre und führen Notation ein. Für kleine (sprich endliche) Mengen ist das auch kein Problem.

[5] Siehe vorherige Fußnote.

und *Vereinigung* $A \cup B$ entsprechend

$$x \in A \cup B \iff x \in A \ \vee \ x \in B. \tag{1.2.3-B}$$

Wir schreiben dies mit der oben gelernten Notation als Definitionen auf. Damit gilt

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \in B\}, \qquad A \cup B := \{x \mid x \in A \ \vee \ x \in B\}. \tag{1.2.3-C}$$

Gilt $A \cap B = \varnothing$ für zwei Mengen A und B, so heißen diese Mengen *disjunkt*. Neben Vereinigung und Schnitt spielt auch die *Differenzmenge*

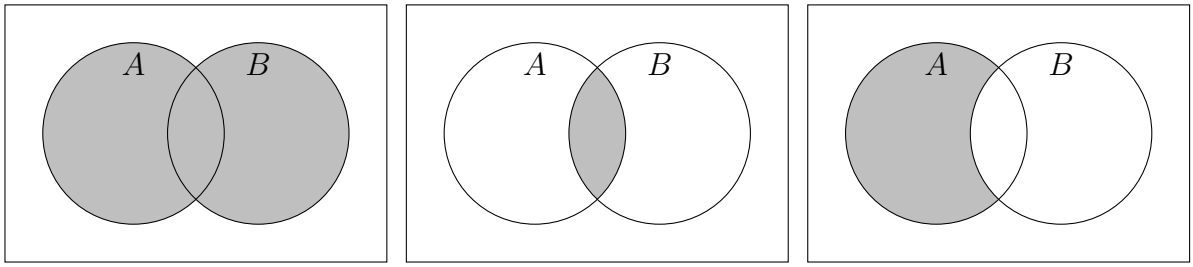
$$A \setminus B := \{x \in A \mid \neg(x \in B)\} = \{x \in A \mid x \notin B\} \tag{1.2.3-D}$$

und das *Komplement*

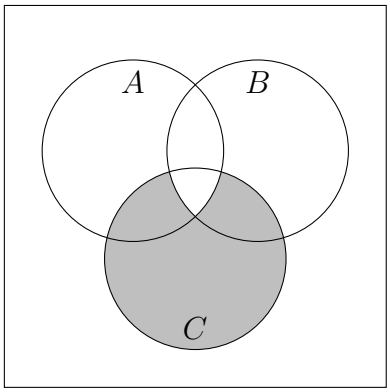
$$A^{\mathrm{c}} := \{x \in M \mid x \notin A\} = M \setminus A \tag{1.2.3-E}$$

eine Rolle.

Zur bildhaften Illustration nutzt man *Euler-Venn-Diagramme*[6]. Hier dargestellt für $A \cup B$, $A \cap B$ und $A \setminus B$.



Solche Diagramme helfen zum Veranschaulichen von Sachverhalten. Wenn die Diagramme allgemein genug sind (also alle Schnitte und Komplemente nicht leer sind), so kann man damit auch in Bildern beweisen. Ein Beispiel dazu: In folgendem Diagramm



ist die Formel

$$C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B) = (C \setminus (A \cup B)) \cup ((C \cap A) \setminus B) \cup ((C \cap B) \setminus A) \tag{1.2.3-F}$$

[6] Leonhard Euler, 1707–1783 ; John Venn, 1834–1932.

ablesbar. [7]

1.2.4. Tautologien der Aussagenlogik liefern direkt Rechenregeln für Mengenoperationen. So gilt für Teilmengen einer gegebenen Obermenge M

$$A \cup A^{\mathrm{c}} = M, \qquad A \cap A^{\mathrm{c}} = \varnothing \tag{1.2.4-A}$$

und

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C). \tag{1.2.4-B}$$

Die Regeln von de Morgan liefern Aussagen über Komplemente

$$(A \cup B)^{\mathrm{c}} = A^{\mathrm{c}} \cap B^{\mathrm{c}}, \qquad (A \cap B)^{\mathrm{c}} = A^{\mathrm{c}} \cup B^{\mathrm{c}}. \tag{1.2.4-C}$$

1.3 Prädikatenlogik

1.3.1. Wir haben schon Variablen in Aussagen verwendet, wir wollen dies um eine weitere Notation erweitern. Sei dazu $\mathbf{p}(x)$ eine Aussageform. Wir schreiben

$$\forall x : \mathbf{p}(x) \tag{1.3.1-A}$$

für *die Aussageform* $\mathbf{p}(x)$ *ist für jede Belegung der Variablen* x *wahr* und entsprechend

$$\exists x : \mathbf{p}(x) \tag{1.3.1-B}$$

für *es existiert eine Variablenbelegung für* x*, so dass* $\mathbf{p}(x)$ *wahr wird.* Das Symbol $\forall$ bezeichnet man dabei als *Allquantor* und $\exists$ als *Existenzquantor*.

1.3.2. Analog zu den Wahrheitstabellen zum Festlegen der Symbole in der Aussagenlogik, legt man diese Quantoren durch ihre Eigenschaften fest. Diese sind in der verallgemeinerten *Regel von de Morgan*

$$\neg\forall x : \mathbf{p}(x) \qquad \equiv \qquad \exists x : \neg\mathbf{p}(x) \tag{1.3.2-A}$$

und dem Verhalten in Bezug auf die logischen Operationen $\wedge$ und $\vee$

$$\exists x : \mathbf{p}(x) \ \vee \ \mathbf{q}(x) \qquad \equiv \qquad (\exists x : \mathbf{p}(x)) \ \vee \ (\exists x : \mathbf{q}(x)), \tag{1.3.2-B}$$

$$\forall x : \mathbf{p}(x) \ \wedge \ \mathbf{q}(x) \qquad \equiv \qquad (\forall x : \mathbf{p}(x)) \ \wedge \ (\forall x : \mathbf{q}(x)) \tag{1.3.2-C}$$

gegen. Darüberhinaus gelten die Implikationen

$$\forall x : \mathbf{p}(x) \implies \exists x : \mathbf{p}(x), \tag{1.3.2-D}$$

$$\neg\exists x : \mathbf{p}(x) \implies \neg\forall x : \mathbf{p}(x) \tag{1.3.2-E}$$

[7] Es ist mitunter schwer sicherzustellen, dass Bilder allgemein genug sind um auch wirklich einen Beweis zu liefern. Da ist Aufschreiben in Formeln besser. Für Formeln der elementaren Mengenlehre nutze man deshalb Beweise durch Aussagenlogik und für Formeln der Aussagenlogik Wahrheitswerttabellen. Da kann man systematisch sicherstellen, wirklich alle Fälle diskutiert zu haben.

und

$$\forall x : \mathbf{p}(x) \ \wedge \ \mathbf{q}(x) \implies \forall x : \mathbf{p}(x), \tag{1.3.2-F}$$

$$\exists x : \mathbf{p}(x) \implies \exists x : \mathbf{p}(x) \ \vee \ \mathbf{q}(x). \tag{1.3.2-G}$$

Bei jedem Paar von Regeln entsteht die zweite aus der ersten durch geeignetes Anwenden von de Morgan und umgekehrt.

1.3.3. Das mag nach einem komplizierten Formalismus aussehen, der einfache Dinge komplizierter beim Aufschreiben macht. Dem ist nicht so; es ist sogar umgekehrt. Durch formales Aufschreiben präzisiert man Dinge, die umgangssprachlich missverstanden werden können.

Darüberhinaus sind Variablen durchaus vielfältig. So verstehen wir in $\mathbf{p}(x)$ $\mathbf{p}$ als Aussageform und x als Variable; verstehen wir jedoch $\mathbf{p}(x)$ als eine 'Formel' in der Variablen x, so kann man auch über alle 'Formeln' Aussagen treffen. Ein Beispiel wäre

$$\forall \mathbf{p} : \forall x : \mathbf{p}(x) \ \vee \ \neg \mathbf{p}(x) \tag{1.3.3-A}$$

oder jede andere Tautologie der Aussagenlogik, wie zum Beispiel

$$\forall \mathbf{p} : \forall \mathbf{q} : \neg(\mathbf{p} \ \vee \ \mathbf{q}) \iff (\neg \mathbf{p}) \ \wedge \ (\neg \mathbf{q}). \tag{1.3.3-B}$$

1.3.4. Wir werden im Weiteren zwei Abkürzungsschreibweisen verwenden, die entsprechend den Vereinbarungen der Mengenlehre davon ausgehen, dass Variablen aus gewissen Grundbereichen stammen sollten. Sei dazu M eine Menge. Wir schreiben

$$\exists_{x \in M} \quad \mathbf{p}(x) \qquad :\equiv \qquad \exists x : x \in M \ \wedge \ \mathbf{p}(x) \tag{1.3.4-A}$$

und

$$\forall_{x \in M} \quad \mathbf{p}(x) \qquad :\equiv \qquad \forall x : (x \in M \implies \mathbf{p}(x)). \tag{1.3.4-B}$$

Darüberhinaus vereinbaren wir, dass wir nach einem Quantor auch mehrere Variablen schreiben dürfen. Das dient aber wirklich nur der Verkürzung der Schreibweise.

✂ **Ergänzung.** Verknüpft man Quantoren wiederum mit Mengen, so kann man zwei weitere Formen von Schnitten und Vereinigung definieren. Sei J eine beliebige Menge und sei A_j für jedes $j \in J$ eine Menge. Dann bezeichnen wir mit

$$\bigcap_{j \in J} A_j := \{x \mid \forall_{j \in J} \quad x \in A_j\} \tag{1.3.4-C}$$

den *Schnitt* aller A_j und mit

$$\bigcup_{j \in J} A_j := \{x \mid \exists_{j \in J} \quad x \in A_j\} \tag{1.3.4-D}$$

die *Vereinigung*. Es wiederum als Folgerung der Regeln von de Morgan

$$\left(\bigcap_{j \in J} A_j \right)^{\mathrm{c}} = \bigcup_{j \in J} (A_j)^{\mathrm{c}}. \tag{1.3.4-E}$$

1.4 Zur Struktur mathematischer Sätze

1.4.1. Die Mathematik besteht aus zunehmend komplexer werdenden wahren Aussagen und ihrer zugrundeliegenden logischen Struktur. Wir haben bisher Sprechweisen vereinbart und wir werden uns an die Verwendung der zugrundeliegenden Symbolik mit der Zeit gewöhnen. Im Weiteren werden wir präziser werden. Dazu dienen zuallererst *Definitionen*, diese fixieren mathematische Begriffe und legen diese im Rahmen der schon bekannten (sprich definierten) mathematischen Objekte fest.[8]

Zur Sammlung wichtiger wahrer Aussagen über solche definierten Objekte dienen *Sätze (Theoreme)*. Dabei dürfen wir Sätze nicht einfach glauben, wir müssen ihre Wahrheit zweifelsfrei nachweisen. Dies geschieht in der Mathematik durch *Beweise*. Im Rahmen der Beweise werden wir auf *Hilfsaussagen (Lemmata)* treffen, oft beweist man diese separat vorher. Mitunter liefern Beweise in speziellen Fällen mehr als das im Satz formulierte und wir fassen solche Aussagen zu *Folgerungen (Korollare)* zusammen.

1.4.2. Mathematische Sätze können verschiedene Strukturen haben.

Existenzaussagen sind Sätze der formalen Struktur

$$\exists_{x\in M} \quad \mathbf{p}(x) \tag{1.4.2-A}$$

Um diese zu beweisen, genügt es ein Beispiel eines solchen x anzugeben. Das mag einfach klingen, aber wenn ein Beispiel offensichtlich ist, ist diese Aussage die Bezeichnung Satz nicht wirklich wert. Mitunter muss man hart arbeiten, um ein solches x zu konstruieren. In einigen Fällen beweist man die Existenz eines solchen x ohne es explizit konstruieren zu können.

Allausagen sind (wegen de Morgan) negierte Existenzaussagen. Diese haben die Form

$$\forall_{x\in M} \quad \mathbf{p}(x) \qquad \big(\text{d.h.} \quad \neg\exists_{x\in M} \quad \neg\mathbf{p}(x)\big) \tag{1.4.2-B}$$

und zum Beweis genügt diesmal nicht die Angabe eines Beispiels. Es ist wirklich für jedes x nachzuweisen, dass $\mathbf{p}(x)$ wahr ist. Oft hilft hier auch eine *Fallunterscheidung*. Um zu zeigen, dass eine Allaussage falsch ist, genügt umgekehrt natürlich ein *Gegenbeispiel*.

Implikationen sind Sätze der formalen Struktur

$$\mathbf{p} \implies \mathbf{q} \tag{1.4.2-C}$$

oder auch oft mit entsprechenden Variablen

$$\forall_{x\in M} \quad \mathbf{p}(x) \implies \mathbf{q}(x). \tag{1.4.2-D}$$

Zum Beweis solcher Sätze geben wir eine Folge von bekannten Sätzen an, die Schrittweise von $\mathbf{p}$ zu $\mathbf{q}$ führen. So ein Beweis heißt *direkter Beweis*.

[8] Wenn wir durch Gleichungen oder aussagenlogische Äquivalenzen definieren, werden wir im Weiteren die Symbole $:=$ und $:\Longleftrightarrow$ verwenden. Nachdem wir eine Definition zur Kenntnis genommen (und gelernt) haben, entspricht jede Formel mit $:=$ natürlich einer wahren Aussage mit $=$.

Äquivalenzaussagen sind von der Form

$$\mathbf{p} \iff \mathbf{q} \tag{1.4.2-E}$$

und bestehen aus zwei Implikationen, nämlich $\mathbf{p} \implies \mathbf{q}$ und $\mathbf{q} \implies \mathbf{p}$. Hier sind also zwei direkte Beweise (für jede Richtung einer) zu führen. Mitunter kann man das abkürzen und Äquivalenzaussagen aus anderen Äquivalenzaussagen zusammensetzen. Die Äquivalenz von drei oder mehr Aussagen wird mitunter auch in Form der Schlusskette

$$\mathbf{p}_1 \implies \mathbf{p}_2, \quad \mathbf{p}_2 \implies \mathbf{p}_3, \quad \dots \quad \mathbf{p}_{n-1} \implies \mathbf{p}_n, \quad \mathbf{p}_n \implies \mathbf{p}_1 \tag{1.4.2-F}$$

gezeigt.

Kontraposition Der Satz $\mathbf{p} \implies \mathbf{q}$ ist, das haben wir in der Aussagenlogik nachgerechnet, äquivalent zu

$$\neg\mathbf{q} \implies \neg\mathbf{p} \tag{1.4.2-G}$$

und kann damit auch in dieser Form aufgeschrieben und bewiesen werden. Nutzt man dies zum Beweis, so spricht man von einem *Beweis durch Kontraposition*. Dies ist eine spezielle Form des direkten Beweises.

Indirekte Beweise sind ähnlich zu Beweisen durch Kontraposition, hier wird $\mathbf{p} \implies \mathbf{q}$ umgeformt zu $\neg(\mathbf{p} \wedge \neg\mathbf{q})$ und man zeigt dies, indem man aus den Annahmen $\mathbf{p}$ und $\neg\mathbf{q}$ einen Widerspruch herleitet, also

$$(\mathbf{p} \wedge \neg\mathbf{q} \implies \mathbf{a}) \wedge (\mathbf{p} \wedge \neg\mathbf{q} \implies \neg\mathbf{a}) \tag{1.4.2-H}$$

beweist. Wir werden dies in Beispielen sehen. Oft verwendet man das Symbol $\lightning$ für einen Widerspruch, zeigt also

$$\mathbf{p} \wedge \neg\mathbf{q} \implies \lightning. \tag{1.4.2-I}$$

Das ist natürlich nur rein symbolisch gemeint, $\lightning$ ist keine Aussage...

✂ **Ergänzung.** Die Aussagenlogik erklärt, wie man Aussagen zu neuen Aussagen verknüpfen kann. Für sich genommen liefert sie keine Notation zum Aufschreiben von Beweisen. Auch das kann man formalisieren, man notiert wahre (gegebene oder schon bewiesene) Aussagen und wendet *Schlussregeln* zum schließen neuer wahrer Aussagen an. Formal schreibt man dazu gegebene wahre Aussagen oberhalb eines Folgerungsstrichs und die gefolgerte Aussage darunter. Die wichtigsten Schlussregeln schreiben sich damit wie folgt:

$$\frac{\begin{array}{l}\mathbf{p}\\ \mathbf{q}\end{array}}{\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}} \qquad \frac{\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}}{\mathbf{p}} \qquad \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{p} \vee \mathbf{q}} \qquad \frac{\begin{array}{l}\mathbf{p}\\ \mathbf{p} \implies \mathbf{q}\end{array}}{\mathbf{q}} \qquad \frac{\begin{array}{l}\mathbf{p} \implies \mathbf{q}\\ \mathbf{p} \implies \neg\mathbf{q}\end{array}}{\neg\mathbf{p}} \tag{1.4.2-J}$$

Die erste verknüpft zwei wahre Aussagen mit einem $\wedge$, während die zweite aus einer wahren $\wedge$-Verknüpfung eine der wahren Aussagen herausliest. Die dritte Schlussregel ergänzt eine wahre Aussage mit einer weiteren beliebigen Aussage durch ein $\vee$. All dies erklärt die Notation $\wedge$ und $\vee$, was wir aber auch schon vorher durch Wahrheitswerttabellen getan haben.

Die vierte Schlussregel ist der *Modus ponens* und impliziert aus einer wahren Aussage $\mathbf{p}$ und der als wahr bekannten Folgerung $\mathbf{p} \implies \mathbf{q}$ die damit ebenso wahre Aussage $\mathbf{q}$. Sie ist die am häufigsten verwendete Regel in Beweisen. Die letzte angegebene Schlussregel ist das Prinzip des indirekten Beweises oder auch die *Reductio ad absurdum*. Wenn aus $\mathbf{p}$ sowohl $\mathbf{q}$ als auch $\neg\mathbf{q}$ folgt, so muss $\mathbf{p}$ falsch sein.

Wir werden Beweise nicht so aufschreiben, sondern in Beweisen die genutzten wahren Aussagen und die verwendeten Schlüsse auflisten. In Textform ist dies lesbarer, auch wenn die logische Struktur in Beweisdiagrammen sicher transparenter wäre.

1.5 Axiome der natürlichen Zahlen

1.5.1. Wir alle wissen, was Zahlen sind (bzw. sein sollen). Um jedoch sicher sein zu können, was wir in Beweisen verwenden dürfen, führen wir die natürlichen Zahlen durch *Axiome* ein. Unter Axiomen verstehen wir dabei Aussagen, die wir ohne sie weiter zu hinterfragen als wahr annehmen. Diese sind im Rahmen der Mathematik nicht beweisbar, nur aus allgemeineren Axiomen herleitbar.

Das nachfolgende Axiomsystem der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ geht auf Peano[9] zurück.

P1 Es gibt eine natürliche Zahl $1 \in \mathbb{N}$.

P2 Jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ besitzt einen eindeutig bestimmten Nachfolger $\mathrm{NF}(n) \in \mathbb{N}$.

P3 Für jede natürliche Zahl n gilt $\mathrm{NF}(n) \neq 1$.

P4 Wenn zwei natürliche Zahlen denselben Nachfolger besitzen, so stimmen sie überein.

P5 Sei $\mathbf{p}(x)$ eine Aussageform über natürliche Zahlen. Gilt dann

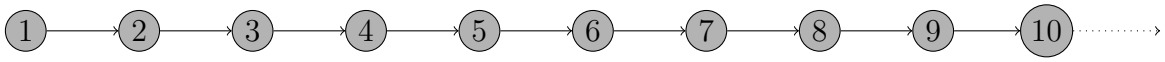
$$\mathbf{p}(1) \tag{1.5.1-A}$$

und

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad \mathbf{p}(n) \implies \mathbf{p}(\mathrm{NF}(n)), \tag{1.5.1-B}$$

so gilt

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad \mathbf{p}(n). \tag{1.5.1-C}$$



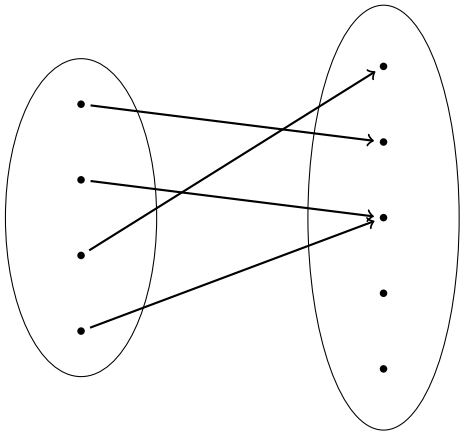
Das Axiom **P5** wird als *Induktionsaxiom* bezeichnet und spielt eine wichtige Rolle für Beweise im Bereich der natürlichen Zahlen. Es wird uns zum *Induktionsbeweis* führen.

Die natürlichen Zahlen sind also bestimmt als Menge $\mathbb{N}$ zusammen mit einem besonderen Element $1 \in \mathbb{N}$ und einer *Funktion* NF die jeder natürlichen Zahl ihren Nachfolger zuordnet. Allgemein sprechen wir von einer Funktion $f : M_1 \to M_2$ von einer Menge M_1 in eine Menge M_2 wenn f jedem Element (*Urbild*) $x \in M_1$ ein eindeutig bestimmtes Element (*Bild*) $f(x) \in M_2$ zuordnet. Wir schreiben für so eine Zuordnung auch $x \mapsto f(x)$.

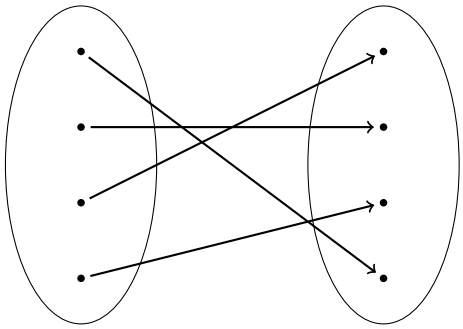
Die Nachfolgerabbildung hat nach **P4** eine Zusatzeigenschaft. Keine zwei verschiedenen Urbilder werden auf dasselbe Bild abgebildet. Eine solche Funktion bezeichnet man als *injektiv*. Ist jedes Element auch ein Bild der Funktion, so heißt die Funktion *surjektiv*.

✂ **Ergänzung.** Funktionen und deren Eigenschaften kann man sich bildhaft veranschaulichen. Wiederum liefern Bilder keine Beweise, allerdings Ideen wie man Beweise aufschreiben sollte. Wir zeichnen Elemente als Punkte in die Mengen ein und zeichnen Pfeile zwischen um die Zuordnungsvorschrift anzugeben. Das könnte zum Beispiel so aussehen:

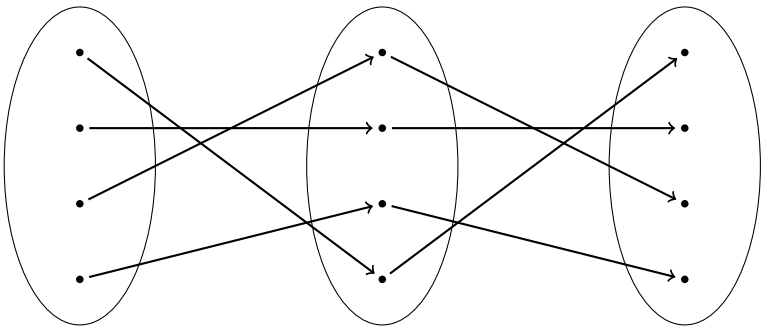
[9] Giuseppe Peano, 1858–1932



Es handelt sich um eine Funktion, da von jedem Element des Definitionsbereichs genau ein Pfeil startet. Die skizzierte Funktion ist nicht injektiv (da mehrere Pfeile auf das gleiche Element zeigen) und ebenso nicht surjektiv (da nicht jedes Element der Zielmenge von einem Pfeil erreicht wird). Gibt es zu jedem Element der zweiten Menge genau einen Pfeil, ist die Funktion also injektiv und surjektiv,



so kann man alle Pfeile umkehren und erhält entsprechend die *Umkehrfunktion* oder *inverse Funktion*. Führt man beide hintereinander aus, verbindet also die Pfeile entsprechend weiter,

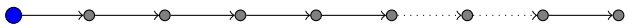


so ergibt sich die Identität. Jedes Element von M_1 wird sich selbst zugeordnet. Funktionen, die sowohl injektiv als auch surjektiv sind, werden als *bijektiv* bezeichnet.

1.5.2. Die Axiome sind unabhängig. Um das zu sehen geben wir (bildhaft) Modelle für alternative natürliche Zahlen (ohne eines der Axiome) an.

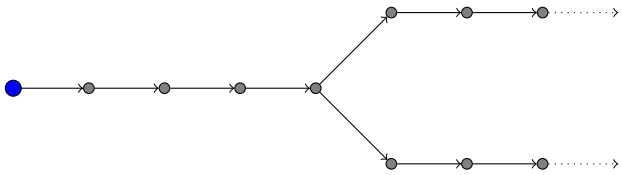
- Ohne **P1** kann $\mathbb{N} = \varnothing$ gelten und trotzdem sind **P2** bis **P5** erfüllt.

- Ohne **P2** kann es eine 'letzte' natürliche Zahl geben



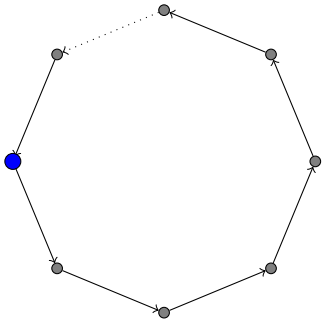
(1.5.**2-A**)

oder es kann uns passieren, dass sich die Zahlen 'verzweigen'



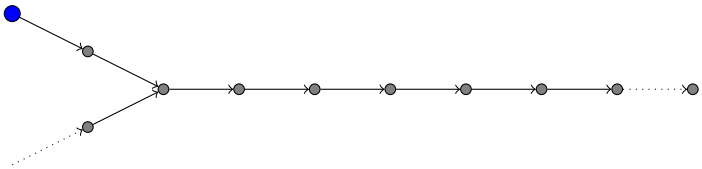
(1.5.**2-B**)

- Axiom **P3** verhindert, dass man mit der Nachfolgerabbildung im Kreis läuft



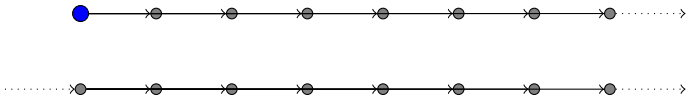
(1.5.**2-C**)

- Axiom **P4** verhindert Verzweigungen der Form



(1.5.**2-D**)

- Axiom **P5** sichert, dass man jede natürliche Zahl in endlich vielen Schritten erreicht



(1.5.**2-E**)

✂ **Ergänzung.** Die Axiome bestimmen die natürlichen Zahlen. Dazu nehmen wir an, es gibt zwei Modelle der Axiome **P1** bis **P5** beschrieben durch Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}'$, ausgezeichnete Elemente 1 und $1'$ und Nachfolgerzuordnungen NF und NF$'$. Dann kann man auf eindeutige Weise eine Zuordnung $\mathbb{N} \to \mathbb{N}'$ konstruieren, die

$$1 \mapsto 1' \tag{1.5.2-F}$$

und

$$\forall_{n,n'} \qquad n \mapsto n' \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{NF}(n) \mapsto \mathrm{NF}(n') \tag{1.5.2-G}$$

erfüllt und dabei sowohl injektiv als auch surjektiv ist. Dies beweisen wir jetzt: Wir definieren die Zuordnung elementweise. Zuerst definieren wir $1 \mapsto 1'$. Wenn wir schon eine Zuordnung $a \mapsto b$ festgelegt haben, so definieren wir $\mathrm{NF}(a) \mapsto \mathrm{NF}(b)$. Da nach **P4** jede Zahl nur höchstens einmal als Nachfolger auftreten kann, ist für jede Zahl damit höchstens ein Bild zugeordnet. Wir zeigen zuerst, dass es sich um eine Funktion handelt. Dazu nutzen wir **P5**. Ist $\mathbf{p}(x)$ die Aussageform 'für $x \in \mathbb{N}$ ist eine Zuordnung

definiert', so gilt $\mathbf{p}(1)$ und ebenso impliziert $\mathbf{p}(n)$ stets $\mathbf{p}(\mathrm{NF}(n))$. Also gilt nach dem Induktionsaxiom $\mathbf{p}(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Die Zuordnung ist surjektiv. Dazu müssen wir zeigen, dass jedes Element von $\mathbb{N}'$ als Bild auftritt. Auch dazu nutzen wir **P5**, wenn $\mathbf{q}(x)$ die Aussageform 'das Element $x \in \mathbb{N}'$ wird bei der Zuordnung einem Element aus $\mathbb{N}$ zugeordnet' bezeichnet, so gilt $\mathbf{q}(1')$ und ebenso impliziert nach Konstruktion $\mathbf{q}(n')$ stets $\mathbf{q}(\mathrm{NF}(n'))$. Also gilt $\mathbf{q}(n')$ für jedes $n' \in \mathbb{N}'$. Wiederum aus **P3** und **P4** folgt, dass die Zuordnung injektiv ist.

1.5.3. Im Weiteren tun wir so, als ob wir schon Addition $+$ und Multiplikation $\cdot$ auf den natürlichen Zahlen definiert hätten. Wer es genauer wissen will, darf gern später als Übung diese (dann rekursiven) Definitionen nachvollziehen. Für das Rechnen mit natürlichen Zahlen gelten also insbesondere

Kommutativgesetz der Addition

$$\forall_{m,n\in\mathbb{N}} \qquad m+n=n+m \tag{1.5.3-A}$$

Assoziativgesetz der Addition

$$\forall_{k,m,n\in\mathbb{N}} \qquad k+(m+n)=(k+m)+n \tag{1.5.3-B}$$

Kommutativgesetz der Multiplikation

$$\forall_{m,n\in\mathbb{N}} \qquad m\cdot n=n\cdot m \tag{1.5.3-C}$$

Assoziativgesetz der Multiplikation

$$\forall_{k,m,n\in\mathbb{N}} \qquad k\cdot(m\cdot n)=(k\cdot m)\cdot n \tag{1.5.3-D}$$

Neutralität der Eins

$$\forall_{m\in\mathbb{N}} \qquad 1\cdot m=m \tag{1.5.3-E}$$

Distributivgesetz

$$\forall_{k,m,n\in\mathbb{N}} \qquad k\cdot(m+n)=k\cdot m+k\cdot n \tag{1.5.3-F}$$

und wie in der Mathematik üblich werden wir $\cdot$ als Operationszeichen weglassen (solange das nicht zu Irritationen führen kann).

1.6 Rekursive Definitionen und Beweise durch Induktion

1.6.1. Rekursive Definitionen nutzen explizit das Induktionsaxiom, um für jede natürliche Zahl n ein A_n zu definieren. Abstrakt geht man dabei wie folgt vor: Zuerst definiert man einen Startwert A_1 und danach fixiert man A_{n+1} jeweils durch schon bekannte A_1 bis A_n. Wir wollen das nicht abstrakt formulieren, sondern an einigen Beispielen genauer anschauen.

✍ **1.6.2 Definition** (Fakultät und Binomialkoeffizient). *Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $n!$ rekursiv durch*

$$0! := 1, \qquad 1! := 1, \qquad (n+1)! := (n+1) \cdot n!. \tag{1.6.2-A}$$

Weiter definieren wir

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{1.6.2-B}$$

Fakultät und Binomialkoeffizienten treten im Zusammenhang mit kombinatorischen Fragestellungen auf. So ist $n!$ die Anzahl der Möglichkeiten, n Objekte der Reihe nach anzuordnen. Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ beschreibt die Anzahl der Möglichkeiten, k Objekte aus n gegebenen Auszuwählen.

☞ **1.6.3 Lemma** (Rekursionsformel für Binomialkoeffizienten). *Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $1 \leq k \leq n$, $k \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}. \tag{1.6.3-A}$$

Beweis. Die Aussage folgt direkt durch Bruchrechnen. Bringt man die linke Seite auf einen Hauptnenner, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!k}{k!(n+1-k)!} + \frac{n!(n+1-k)}{k!(n+1-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \end{aligned} \tag{1.6.3-B}$$

und damit die Behauptung. □

✂ **Ergänzung.** Damit kann man Binomialkoeffizienten in Form des Pascalschen Dreiecks[10] anordnen und auch rekursiv berechnen. Wir geben die ersten Zeilen,

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & & & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\ & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\ 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \end{array} \tag{1.6.3-C}$$

die Rekursionsformel liefert, dass jeder Eintrag die Summe der beiden darüberliegenden Einträge ist.

✍ **1.6.4 Definition** (Summen- und Produktzeichen). *Seien a_k für $k \in \mathbb{N}$ gegebene Zahlen[11]. Dann definieren wir $\sum_{k=1}^{n} a_k$ rekursiv durch*

$$\sum_{k=1}^{1} a_k := a_1, \qquad \sum_{k=1}^{n+1} a_k := \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) + a_{n+1} \tag{1.6.4-A}$$

und $\prod_{k=1}^{n} a_k$ durch

$$\prod_{k=1}^{1} a_k := a_1, \qquad \prod_{k=1}^{n+1} a_k := \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot a_{n+1}. \tag{1.6.4-B}$$

[10] Blaise Pascal, 1623–1662

[11] Oder wofür auch immer + und/oder · eine sinnvolle Operation ist....

✂ **Ergänzung.** Wir vereinbaren für später, dass wir beim kommutativen Addieren und Multiplizieren auch Indexmengen verwenden können. Sei dazu J eine *endliche* Menge und für jedes $j \in J$ sei a_j eine Zahl. Dann definieren wir

$$\sum_{j\in J} a_j, \qquad \prod_{j\in J} a_j \tag{1.6.4-C}$$

analog. Hier ist es sogar schlauer mit der leeren Menge zu starten und

$$\sum_{j\in\varnothing} a_j := 0, \qquad \prod_{j\in\varnothing} a_j := 1 \tag{1.6.4-D}$$

zu definieren. Warum? Die Rekursion besteht dann im Hinzufügen von weiteren Elementen zur Indexmenge. Die Reihenfolge ist dabei egal, weil wir ja Kommutativität vorausgesetzt haben. Es gilt dann insbesondere

$$\sum_{j\in J_1\sqcup J_2} a_j = \left(\sum_{j\in J_1} a_j\right) + \left(\sum_{j\in J_2} a_j\right), \qquad \prod_{j\in J_1\sqcup J_2} a_j = \left(\prod_{j\in J_1} a_j\right)\cdot\left(\prod_{j\in J_2} a_j\right) \tag{1.6.4-E}$$

für disjunkte Vereinigungen $J_1 \sqcup J_2$ der Indexmengen J_1 und J_2.

1.6.5. Aussagen über rekursiv definierte Dinge beweist man durch vollständige Induktion. Dabei geht man wie folgt vor: In einem ersten Schritt (dem *Induktionsanfang*) zeigt man die Aussage für den Startwert (in der Regel für $n = 1$). In einem zweiten Schritt (dem *Induktionsschritt*) beweist man, dass aus der Gültigkeit der Aussage für die Zahl n (oder für alle Zahlen bis zu n) die Aussage für $n+1$ folgt. Damit kann das Induktionsaxiom angewandt werden und die Aussage folgt für alle (weiteren) natürlichen Zahlen.

Auch dazu Beispiele.

⚒ **1.6.6 Beispiel.** Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \tag{1.6.6-A}$$

Beweis. Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt $\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1\cdot 2}{2}$. Induktionsschritt: Angenommen, wir haben die Aussage schon für die Zahl n gezeigt. Dann gilt für $n + 1$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k &= \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)\\ &= \frac{n(n+1)+2n+2}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}\end{aligned} \tag{1.6.6-B}$$

und mit dem Induktionsaxiom folgt die Aussage für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$. □

☞ **1.6.7 Proposition** (Rechenregeln für Summenzeichen).

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1+l}^{n+l} a_{k-l} \tag{1.6.7-A}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) + a_{n+1} = a_1 + \sum_{k=2}^{n+1} a_k \tag{1.6.7-B}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) = \sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) \tag{1.6.7-C}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{l=1}^{m} b_l\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} a_k b_l = \sum_{l=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_k b_l \tag{1.6.7-D}$$

1.6.8 Beispiel (geometrische Summenformel).

$$(a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = a^{n+1} - b^{n+1} \tag{1.6.8-A}$$

Beweis. Wir wenden die Rechenregeln für Summenzeichen direkt an. Es gilt

$$\begin{aligned}(a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n} a^{k+1} b^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} a^k b^{n-k+1} - \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k+1} = a^{n+1} - b^{n+1}\end{aligned} \tag{1.6.8-B}$$

da die beiden letzten Summen bis auf den jeweils letzten bzw. ersten Summanden übereinstimmen. □

1.6.9 Proposition (Rechenregeln für Produktzeichen).

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = \prod_{k=1+l}^{n+l} a_{k-l} \tag{1.6.9-A}$$

$$\prod_{k=1}^{n+1} a_k = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) a_{n+1} = a_1 \prod_{k=2}^{n+1} a_k \tag{1.6.9-B}$$

$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right) = \prod_{k=1}^{n}(a_k b_k) \tag{1.6.9-C}$$

Ergänzung. Rekursiv definieren sollten wir natürlich vorher, wie man natürliche Zahlen addiert und multipliziert. In den Peanoaxiomen festgelegt ist für jede natürliche Zahl n ihr Nachfolger $\mathrm{NF}(n)$. Damit kann man rekursiv definieren, was man unter der Summe $n+m$ versteht. Wir führen dies aus und fordern dazu für alle n und alle m

$$n + 1 := \mathrm{NF}(n), \qquad n + \mathrm{NF}(m) := \mathrm{NF}(n+m). \tag{1.6.9-D}$$

Damit ist für alle $n, m \in \mathbb{N}$ die Summe $n+m$ definiert. Dabei gilt das Kommutativgesetz $n+m = m+n$ sowie das Assoziativgesetz. Beide beweist man durch Induktion (Übung, versuchen Sie sich daran!).

Wir definieren noch die Multiplikation, indem wir

$$1 \cdot n := n, \qquad \mathrm{NF}(m) \cdot n := m \cdot n + n \tag{1.6.9-E}$$

fordern. Damit ist rekursiv wieder $m \cdot n$ für alle natürlichen Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ definiert und es bleiben die Rechenregeln nachzuvollziehen. Es gilt das Kommutativgesetz $m \cdot n = n \cdot m$, das zugehörige Assoziativgesetz und das Distributivgesetz. All dies beweist man wiederum per Induktion.

☞ **1.6.10 Satz** (Binomischer Lehrsatz).

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \tag{1.6.10-A}$$

Beweis. Wir zeigen dies per Induktion über n. Für $n = 1$ entspricht die zu zeigende Formel gerade $(a+b)^1 = a+b$. Für den Induktionsschritt nehmen wir an, dass die zu zeigende Formel für ein n gilt und schließen

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \qquad (1.6.10\text{-B}) \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n-k+1} + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}
\end{aligned}$$

unter Ausnutzung der Rekursionsformel für Binomialkoeffizienten. □

1.7 Äquivalenzrelationen und -klassen

Relationen beschreiben Beziehungen zwischen Elementen zweier Mengen. Wir definieren dies zuerst allgemein und sehen dann, wie wir es in speziellen Fällen anwenden können.

✍ **1.7.1 Definition.** **(i)** *Seien M_1 und M_2 zwei Mengen. Für $a \in M_1$ und $b \in M_2$ bezeichnen wir mit (a,b) das* geordnete Paar *bestehend aus a und b. Dabei vereinbaren wir, dass zwei geordnete Paare (a_1,b_1) und (a_2,b_2) genau dann als gleich gelten sollen, wenn $a_1 = a_2$ und $b_1 = b_2$ gilt.*

Weiter sei das kartesische Produkt

$$M_1 \times M_2 := \{(a,b) \mid a \in M_1 \ \wedge \ b \in M_2\} \tag{1.7.1-A}$$

die Menge der geordneten Paare (a,b) mit $a \in M_1$ und $b \in M_2$.

(ii) *Eine* Relation $\mathcal{R}$ *auf einer Menge M ist eine Teilmenge $\mathcal{R} \subseteq M \times M$. Zur Vereinfachung schreiben wir dabei $a\mathcal{R}b$ statt $(a,b) \in \mathcal{R}$.*

Verallgemeinerung: Eine Relation zwischen Mengen M_1 und M_2 ist entsprechend eine Teilmenge von $M_1 \times M_2$.

✂ **Ergänzung.** Auch Funktionen $f : M_1 \to M_2$ kann man als spezielle Relationen auffassen. Versteht man dabei a in Relation zu b, falls $b = f(a)$ gilt, schreibt also

$$(a, b) \in R_f \qquad :\Longleftrightarrow \qquad b = f(a) \tag{1.7.1-B}$$

so ist $R_f \subseteq M_1 \times M_2$ eine Relation. Diese erfüllt zwei Zusatzeigenschaften. Es gilt

$$(a, b_1) \in R_f \quad \wedge \quad (a, b_2) \in R_f \qquad \Longrightarrow \qquad b_1 = b_2 \tag{1.7.1-C}$$

(man sagt auch R_f sei rechtseindeutig) und

$$\forall_{a \in M_1} \exists_{b \in M_2} \quad (a, b) \in R_f \tag{1.7.1-D}$$

(und man sagt, R_f sei linkstotal). Als Menge selbst entspricht dabei R_f dem Graphen der Funktion f.

✍ **1.7.2 Definition.** *Eine Relation $\mathcal{R}$ auf einer Menge M heißt* Äquivalenzrelation, *falls sie die drei Eigenschaften*

Reflexivität

$$\forall_{a \in M} \qquad a \mathcal{R} a \tag{1.7.2-A}$$

Symmetrie

$$\forall_{a,b \in M} \qquad a \mathcal{R} b \iff b \mathcal{R} a \tag{1.7.2-B}$$

Transitivität

$$\forall_{a,b,c \in M} \qquad a \mathcal{R} b \quad \wedge \quad b \mathcal{R} c \quad \Longrightarrow \quad a \mathcal{R} c \tag{1.7.2-C}$$

erfüllt.

Oft bezeichnet man Äquivalenzrelationen mit Symbolen $\sim$, $\equiv$, $\simeq$ oder Ähnlichem. Suggestive Notationen helfen, sich Eigenschaften besser merken zu können.

⚒ **1.7.3 Beispiel.** Sei $f : M_1 \to M_2$ eine Funktion. Dann bestimmt

$$a_1 \sim a_2 \qquad :\Longleftrightarrow \qquad f(a_1) = f(a_2) \tag{1.7.3-A}$$

eine Äquivalenzrelation auf M_1.

☞ **1.7.4 Satz.** *Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge M. Bezeichne zu $a \in M$*

$$[a]_\sim := \{b \in M \mid a \sim b\} \tag{1.7.4-A}$$

seine Äquivalenzklasse. *Dann gilt $a \in [a]_\sim$ und*

$$[a_1]_\sim \cap [a_2]_\sim \neq \varnothing \iff a_1 \sim a_2. \tag{1.7.4-B}$$

Da darüberhinaus jedes Element von M zu einer Äquivalenzklasse gehört, bestimmt die Menge aller Äquivalenzklassen

$$M/_\sim := \{[a]_\sim \mid a \in M\} \tag{1.7.4-C}$$

eine Zerlegung *der Menge M in paarweise disjunkte Teile. Umgekehrt bestimmt jede Zerlegung der Menge M in paarweise disjunkte Teilmengen eine Äquivalenzrelation auf M.*

Beweis. Zuerst bemerken wir, dass aufgrund der Reflexivität $a \in [a]_\sim$ gilt.

Wenn $a_1 \sim a_2$ gilt, so folgt $a_2 \in [a_1]_\sim$ und damit $a_2 \in [a_1]_\sim \cap [a_2]_\sim$ und der Schnitt ist nicht leer.

Für die Rückrichtung nehmen wir an, dass $[a_1]_\sim \cap [a_2]_\sim \neq \varnothing$ gilt. Sei dann $b \in [a_1]_\sim \cap [a_2]_\sim$. Dann gilt $a_1 \sim b$ und $a_2 \sim b$. Also folgt auch $b \sim a_2$ (Symmetrie) und damit $a_1 \sim a_2$ (Transitivität). □

✂ **Ergänzung.** Ist $f : M_1 \to M_2$ eine Funktion und $\sim$ die in Beispiel 1.7.3 definierte Relation. Dann sind die Äquivalenzklassen

$$[a]_\sim = \{a' \in M_1 \mid f(a) = f(a')\} \subseteq M_1 \tag{1.7.4-D}$$

gerade so definiert, dass f auf diesen Mengen konstant ist. Die Funktion f bestimmt also insbesondere eine wohldefinierte Abbildung

$$M_1/_\sim \ni [a]_\sim \mapsto f(a) \in M_2 \tag{1.7.4-E}$$

auf der Menge der Äquivalenzklassen.

Die Relation $\sim$ wird mitunter als *Kern* der Funktion f bezeichnet, die zugeordnete Funktion $M_1/_\sim \to M_2$ als *induzierte Abbildung*. Nach Konstruktion ist diese stets injektiv.

⚒ **1.7.5 Beispiel.** Als Anwendung des Begriffs der Äquivalenzrelation konstruieren wir ausgehend von den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ die ganzen und die rationalen Zahlen.

Auf der Menge der Paare $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definieren wir die Äquivalenzrelation

$$(n_1, m_1) \sim_\mathbb{Z} (n_2, m_2) \qquad :\Longleftrightarrow \qquad n_1 + m_2 = n_2 + m_1 \tag{1.7.5-A}$$

und bezeichnen $\mathbb{Z} := (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/_{\sim_\mathbb{Z}}$. Definiert[12] man nun auf den Äquivalenzklassen Rechenoperationen

$$\begin{aligned} [(n_1, m_1)] + [(n_2, m_2)] &:= [(n_1 + n_2, m_1 + m_2)] \\ [(n_1, m_1)] - [(n_2, m_2)] &:= [(n_1 + m_2, m_1 + n_2)] \end{aligned} \tag{1.7.5-B}$$

und

$$[(n_1, m_1)] \cdot [(n_2, m_2)] := [(n_1 \cdot n_2 + m_1 \cdot m_2, n_1 \cdot m_2 + n_2 \cdot m_1)], \tag{1.7.5-C}$$

so ergibt sich ein Modell der bekannten ganzen Zahlen. Dabei setzen wir $0 := [(1, 1)] = \{(n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ und identifizieren $[(n+1, 1)]$ mit der natürlichen Zahl n. Wir werden im Folgenden nicht mehr zwischen dem Paar (n, m) und seine Äquivalenzklasse $n - m := [(n, m)]_{\sim_\mathbb{Z}}$ unterscheiden. Wir erhalten damit die ganzen Zahlen

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1\} \cup \{0\} \cup \{1, 2, 3, \ldots\} \tag{1.7.5-D}$$

als Erweiterung der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ mit den zusätzlichen (neuen) Elementen 0 und $-n := 0 - n$ für $n \in \mathbb{N}$.

✂ **Ergänzung.** Die Konstruktion der ganzen Zahlen aus den natürlichen hat zwei wichtige Probleme gelöst. Wir haben die Null 0 hinzugefügt und (was historisch viel früher geschah) wir haben es geschafft *alle* Gleichungen der Form $m + x = n$ zu lösen, egal ob dabei nun $n > m$ oder $n < m$ gilt.

Was wir dabei erhalten haben, ist algebraisch gesehen ein *Ring*. Die Operationen $+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ und $\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ erfüllen dabei

[12] Man muss natürlich zeigen, dass diese Operationen wohldefiniert sind, das Ergebnis der Rechenoperation also wirklich von der Äquivalenzklasse und nicht von den gewählten Repräsentanten abhängt. Dem ist so, was als Übung zum Nachrechnen verbleibt.

Gruppeneigenschaften der Addition

$$\forall_{k,m\in\mathbb{Z}} \quad k+m=m+k \tag{1.7.5-E}$$

$$\forall_{k,m,n\in\mathbb{Z}} \quad k+(m+n)=(k+m)+n \tag{1.7.5-F}$$

$$\forall_{k\in\mathbb{Z}} \quad k+0=k \tag{1.7.5-G}$$

$$\forall_{k\in\mathbb{Z}}\exists_{m\in\mathbb{Z}} \quad k+m=0 \tag{1.7.5-H}$$

Eigenschaften der Multiplikation

$$\forall_{k,m\in\mathbb{Z}} \quad k\cdot m=m\cdot k \tag{1.7.5-I}$$

$$\forall_{k,m,n\in\mathbb{Z}} \quad k\cdot(m\cdot n)=(k\cdot m)\cdot n \tag{1.7.5-J}$$

$$\forall_{k\in\mathbb{Z}} \quad k\cdot 1=k \tag{1.7.5-K}$$

Distributivgesetz

$$\forall_{k,m,n\in\mathbb{Z}} \quad k\cdot(m+n)=k\cdot m+k\cdot n \tag{1.7.5-L}$$

Was in $\mathbb{Z}$ nicht immer gelöst werden kann, sind Gleichungen der Form $mx=n$ für beliebige $m,n\in\mathbb{Z}$, $m\neq 0$. Will man auch diese Gleichungen lösen, so benötigt man als algebraische Struktur einen Körper.

✍ **1.7.6 Definition.** *Eine Menge $\mathbb{K}$ zusammen mit zwei Rechenoperationen $+:\mathbb{K}\times\mathbb{K}\to\mathbb{K}$ und $\cdot:\mathbb{K}\times\mathbb{K}\to\mathbb{K}$ heißt* Körper*, falls es zwei ausgezeichnete Elemente $0,1\in\mathbb{K}$ mit*

Gruppeneigenschaften der Addition

$$\forall_{r,s\in\mathbb{K}} \quad r+s=s+r \tag{1.7.6-A}$$

$$\forall_{r,s,t\in\mathbb{K}} \quad r+(s+t)=(r+s)+t \tag{1.7.6-B}$$

$$\forall_{r\in\mathbb{K}} \quad r+0=r \tag{1.7.6-C}$$

$$\forall_{r\in\mathbb{K}}\exists_{s\in\mathbb{K}} \quad r+s=0 \tag{1.7.6-D}$$

Eigenschaften der Multiplikation

$$\forall_{r,s\in\mathbb{K}} \quad r\cdot s=s\cdot r \tag{1.7.6-E}$$

$$\forall_{r,s,t\in\mathbb{K}} \quad r\cdot(s\cdot t)=(r\cdot s)\cdot t \tag{1.7.6-F}$$

$$\forall_{r\in\mathbb{K}} \quad r\cdot 1=r \tag{1.7.6-G}$$

$$\forall_{r\in\mathbb{K}\setminus\{0\}}\exists_{s\in\mathbb{K}} \quad r\cdot s=1 \tag{1.7.6-H}$$

Distributivgesetz

$$\forall_{r,s,t\in\mathbb{K}} \quad r\cdot(s+t)=r\cdot s+r\cdot t \tag{1.7.6-I}$$

gibt.

⚒ **1.7.7 Beispiel.** Auf der Menge $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ betrachten wir die Äquivalenzrelation

$$(p_1,q_1)\sim_{\mathbb{Q}}(p_2,q_2) \qquad :\Longleftrightarrow \qquad p_1q_2=p_2q_1 \tag{1.7.7-A}$$

und definieren $\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{N})/_{\sim_\mathbb{Q}}$. Die Konstruktion ist so gewählt, dass man $\mathbb{Z}$ vermittels $\mathbb{Z} \ni p \mapsto [(p,1)]_{\sim_\mathbb{Q}} \in \mathbb{Q}$ einbetten kann, sich dabei die Rechenoperationen übertragen und durch

$$\begin{aligned} [(p_1,q_1)] + [(p_2,q_2)] &:= [(p_1q_2 + p_2q_1, q_1q_2)], \\ [(p_1,q_1)] \cdot [(p_2,q_2)] &:= [(p_1p_2, q_1q_2)] \end{aligned} \tag{1.7.7-B}$$

wohldefiniert auf die Äquivalenzklassen von $\mathbb{Q}$ fortsetzen lassen.[13] Damit wird $\mathbb{Q}$ zu einem Körper, dem *Körper der rationalen Zahlen*.

Wir werden im Weiteren natürlich nicht mehr zwischen dem Paar (p,q) und seiner Äquivalenzklasse $\frac{p}{q} := [(p,q)]_{\sim_\mathbb{Q}}$ unterscheiden.

1.8 Ordnungsrelationen

✍ **1.8.1 Definition.** *Eine Relation $\mathcal{R}$ auf einer Menge M heißt* Halbordnung*, falls sie die drei Eigenschaften*

Reflexivität

$$\forall_{a \in M} \qquad a\mathcal{R}a \tag{1.8.1-A}$$

Antisymmetrie

$$\forall_{a,b \in M} \qquad a\mathcal{R}b \quad \wedge \quad b\mathcal{R}a \quad \Longrightarrow \quad a = b \tag{1.8.1-B}$$

Transitivität

$$\forall_{a,b,c \in M} \qquad a\mathcal{R}b \quad \wedge \quad b\mathcal{R}c \quad \Longrightarrow \quad a\mathcal{R}c \tag{1.8.1-C}$$

erfüllt. Gilt darüberhinaus

Totalität

$$\forall_{a,b \in M} \qquad a\mathcal{R}b \quad \vee \quad b\mathcal{R}a \tag{1.8.1-D}$$

so spricht man von einer Ordnungsrelation *oder* Totalordnung.

Für Ordnungsrelationen verwendet man Symbole $\leq$, $\subseteq$, $\lesssim$ etc. Für die 'umgekehrte' Ordnung dreht man dann passenderweise das Symbol, $a \gtrsim b \iff b \lesssim a$.

⚒ **1.8.2 Beispiele.** **(i)** Typische Beispiele für Ordnungsrelationen sind $\leq$ auf $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$. Der Vollständigkeit halber definieren wir diese kurz. Für $m, n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$m \leq n \qquad :\Longleftrightarrow \qquad m = n \quad \vee \quad \exists_{k \in \mathbb{N}} \quad n = m + k \tag{1.8.2-A}$$

und entsprechend in $\mathbb{Q}$

$$\frac{p_1}{q_1} \leq \frac{p_2}{q_2} \qquad :\Longleftrightarrow \qquad p_1q_2 \leq p_2q_1. \tag{1.8.2-B}$$

Hierbei haben wir (wie in der Konstruktion von $\mathbb{Q}$) vorausgesetzt, dass $q_1, q_2 > 0$ gilt.

[13] Das ist nachzuweisen, ebenso wie die wichtigsten Eigenschaften der so konstruierten rationalen Zahlen. Sie dürfen dies gern als Übung selbst machen.

(ii) Die Teilmengenbeziehung $\subseteq$ auf der Potenzmenge $\mathfrak{P}(M) = \{N \mid N \subseteq M\}$ einer Menge ist eine Halbordnung, jedoch keine Ordnungsrelation.

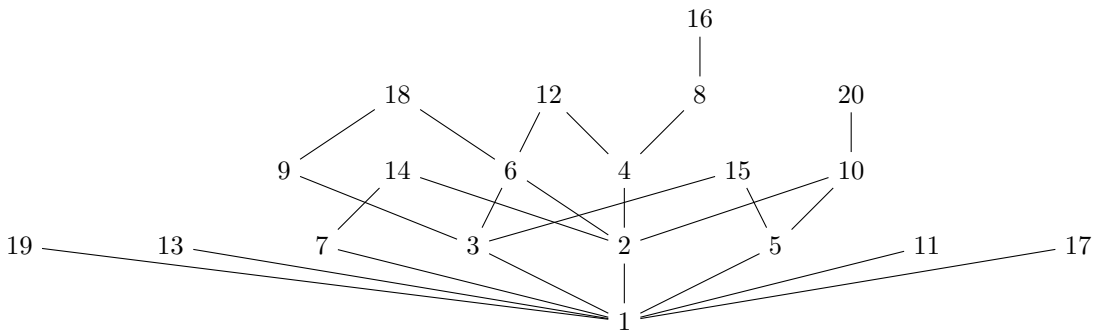
(iii) Auf $\mathbb{N}$ liefert die Teilbarkeitsrelation

$$m|n \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \exists_{k\in\mathbb{N}} \quad n = km \tag{1.8.2-C}$$

ebenso eine Halbordnung.

Weisen Sie als Übung die Eigenschaften einer Ordnung beziehungsweise Halbordnung in diesen Beispielen nach!

✂ **Ergänzung.** Zur graphischen Darstellung von Halbordnungen haben sich Hasse-Diagramme[14] eingebürgert. Als Beispiel geben wir dies für die Teilbarkeitsrelation der natürlichen Zahlen $\{1, 2, \ldots, 20\}$ an:



Dabei ist eine Zahl m durch eine Linie (oder einen Weg) mit einer darüberliegenden Zahl n verbunden, wenn $m|n$ gilt. Die Zahlen, welche direkt mit 1 verbunden sind, heißen *Primzahlen*. Sie besitzen also neben sich selbst und 1 keine weiteren Teiler.

✍ **1.8.3 Definition.** *Sei auf M eine Halbordnung $\leq$ definiert.*

(i) *Wir sagen, eine Teilmenge $A \subseteq M$ ist* nach oben beschränkt *falls es ein $m \in M$ mit $x \leq m$ für alle $x \in A$ gibt. In diesem Fall heißt m obere Schranke von A.*

Entsprechend heißt die Menge A nach unten beschränkt*, falls es ein $m \in M$ mit $x \geq m$ für alle $x \in A$ gibt. Ein solches m wird als untere Schranke von A bezeichnet.*

(ii) *Ist ein Element $x \in A$ obere Schranke von A, so heißt x (ein)* größtes Element*. Entsprechend heißt $x \in A$ (ein)* kleinstes Element*, falls es untere Schranke von A ist.*

(iii) *Wir sagen $x \in A$ ist ein* maximales Element *von A, falls*

$$\forall_{y\in A} \qquad x \leq y \implies x = y \tag{1.8.3-A}$$

gilt. Analog heißt x ein minimales Element *von A, falls*

$$\forall_{y\in A} \qquad y \leq x \implies x = y \tag{1.8.3-B}$$

[14] Helmut Hasse 1898–1979

Größte und kleinste Elemente einer halbgeordneten Teilmenge müssen nicht existieren. Aber wenn sie existieren, sind sie aufgrund der Antisymmetrie der Ordnungsrelation eindeutig bestimmt. Minimale und maximale Elemente einer halbgeordneten Menge brauchen nicht eindeutig zu sein. Ist die Menge jedoch (total) geordnet, so stimmen maximale Elemente mit den größten und minimale Elemente mit den kleinsten überein. In diesem Fall schreibt man

$$x = \max A, \tag{1.8.3-C}$$

für das größte (und maximale) Element von A und

$$x = \min A \tag{1.8.3-D}$$

für das kleinste (und minimale) Element von A.

✂ **Ergänzung.** Um zumindest ein Beispiel für Halbordnungen nachzuliefern betrachten wir wiederum $\mathbb{N}$ mit der Teilbarkeitsrelation $|$. Dann ist 1 kleinstes Element von $\mathbb{N}$, würden wir stattdessen $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ betrachten, so wäre 0 auch größtes Element. Die Teilmenge

$$T_n = \{m \in \mathbb{N} \mid m \text{ teilt } n\} \tag{1.8.3-E}$$

der Teiler der Zahl n ist nach oben beschränkt und besitzt n als obere Schranke und Maximum. Die Menge der gemeinsamen Teiler zweier Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$

$$T_{a,b} = \{m \in \mathbb{N} \mid m \text{ teilt } a \text{ und } m \text{ teilt } b\} = T_a \cap T_b \tag{1.8.3-F}$$

besitzt das Produkt ab als obere Schranke, sie besitzt aber auch ein bezüglich der Teilbarkeit größtes Element, nämlich den *größten gemeinsamen Teiler* $\mathrm{ggT}(a, b)$. Dieser ist *zufällig* auch das bezüglich der Ordnungsrelation $\leq$ größte Element. Die bezüglich Teilbarkeit minimalen Elemente der Menge $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ sind gerade die Primzahlen.

✍ **1.8.4 Definition.** *Ein* geordneter Körper *ist ein Körper* $\mathbb{K}$ *auf dem eine Ordnungsrelation* $\leq$ *mit den Eigenschaften*

$$\forall_{x,y,z \in \mathbb{K}} \qquad x \leq y \quad \Longrightarrow \quad x + z \leq y + z \tag{1.8.4-A}$$

und

$$\forall_{x,y \in \mathbb{K}} \qquad 0 \leq x \quad \wedge \quad 0 \leq y \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq xy \tag{1.8.4-B}$$

definiert ist.

☞ **1.8.5 Lemma.** *In einem geordneten Körper gilt*

$$x \leq y \quad \wedge \quad 0 \leq z \quad \Longrightarrow \quad xz \leq yz \tag{1.8.5-A}$$

und

$$\begin{aligned} x \leq 0 \quad \wedge \quad 0 \leq z \quad &\Longrightarrow \quad xz \leq 0 \\ x \leq 0 \quad \wedge \quad z \leq 0 \quad &\Longrightarrow \quad 0 \leq xz \end{aligned} \tag{1.8.5-B}$$

Insbesondere gilt für jedes $x \in \mathbb{K}$ *stets* $0 \leq x^2$ *und damit auch stets* $0 \leq 1$.

Beweis. Aus $x \leq y$ folgt $0 \leq y - x$ und damit $0 \leq (y - x)z = yz - xz$, also auch $xz \leq yz$. Speziell mit $y = 0$ folgt daraus die zweite Aussage und für die dritte nutzen wir, dass $z \leq 0$ genau dann gilt, wenn $0 \leq -z$ und damit mit der zweiten $-xz = x(-z) \leq 0$ folgt. □

1.8.6 Beispiel. Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ bilden einen geordneten Körper. Es gilt mehr, $\mathbb{Q}$ ist der kleinste geordnete Körper. In jedem geordneten Körper kann ausgehend vom neutralen Element 1 der Multiplikation durch 1, $2 := 1+1$, $3 := 2+1$, etc eine geordnete Menge natürlicher Zahlen $1 < 2 < 3 < \cdots$ definiert werden. Wir erhalten also eine Einbettung von $\mathbb{N}$ (und aufgrund der Körpereigenschaften damit auch von $\mathbb{Q}$) in jeden geordneten Körper.

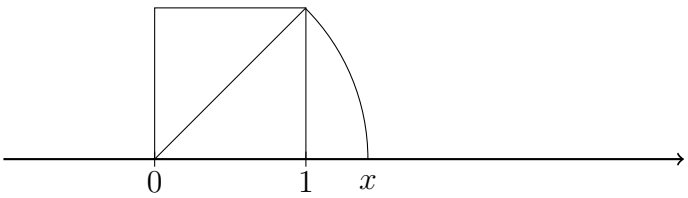
Wir bezeichnen einen geordneten Körper als *archimedisch*, falls die natürlichen Zahlen darin nach oben unbeschränkt sind. Dies ist für $\mathbb{Q}$ der Fall, es gilt

$$\forall_{x\in\mathbb{Q}}\exists_{n\in\mathbb{N}} \quad x \leq n. \tag{1.8.6-A}$$

Nach Konstruktion ist damit $\mathbb{Q}$ der kleinste archimedisch geordnete Körper.

1.9 Reelle Zahlen

1.9.1. Als geordneter Körper ist $\mathbb{Q}$ unvollständig, besitzt also 'Lücken' in der Ordnung. Um dies zu sehen, ordnen wir die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ auf einem Zahlenstrahl an,



und bemerken, dass der Länge der Diagonalen des Einheitsquadrats kein Punkt auf $\mathbb{Q}$ entsprechen kann.

Lemma. *Es gibt keine rationale Zahl $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$.*

Beweis durch Widerspruch. Angenommen es gäbe eine solche Zahl x. Dann kann diese als gekürzter Bruch $x = \frac{p}{q}$ geschrieben werden. Da dann aber $p^2 = 2q^2$ gilt, muss es sich bei p um eine gerade Zahl handeln. Es gilt also $p = 2k$. Eingesetzt liefert dies $4k^2 = 2q^2$ und damit $2k^2 = q^2$. Also ist auch q eine gerade Zahl. Das widerspricht aber der Annahme eines gekürzt dargestellen Bruchs. Also kann es keine solche Zahl geben. □

Wir können also die rationalen Zahlen in zwei Teile $L = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0 \ \vee \ x^2 < 2\}$ und $R = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \ \wedge \ x^2 > 2\}$ zerlegen, zwischen denen als Lücke eine Zahl x mit $x^2 = 2$ zu fehlen scheint.[15] Um eine sinnvolle Interpretation der Zahlengeraden

[15] Wer es ganz genau wissen will, so liefert zu jeder Zahl $x > 0$, $x \in \mathbb{Q}$,

$$y = \frac{2x+2}{x+2} \tag{1.9.1-A}$$

eine neue rationale Zahl y. Ist $x \in L$ so gilt $y > x$ und $y \in L$; ist $y \in R$ so folgt $y < x$ und $y \in R$. Es handelt sich also bei L um eine linke Menge im nachfolgend definierten Sinne und bei R um eine rechte. Weder besitzt L ein größtes Element, noch R ein kleinstes, und zwischen beiden Mengen bleibt als Lücke die später als $\sqrt{2}$ bezeichnete reelle Zahl.

(oder besser, der Punkte auf einer Geraden) zu erhalten, müssen wir also diese Lücken schließen.

✂ **Ergänzung.** Wir können die Lücke bei $\sqrt{2}$ auch einfach schließen, indem wir eine neue Zahl $\sqrt{2}$ hinzunehmen und alles Ergänzen, was zum Rechnen benötigt wird. Auf diese Weise wird

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \tag{1.9.1-B}$$

zu einem echt größerem geordneten Körper. Die Rechenoperationen ergeben sich dabei direkt zu

$$(a + b\sqrt{2}) \pm (c + d\sqrt{2}) = (a \pm c) + (b \pm d)\sqrt{2} \tag{1.9.1-C}$$

für Addition und Subtraktion und

$$(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2} \tag{1.9.1-D}$$

für die Multiplikation. Zur Division nutzt man

$$\frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{a - b\sqrt{2}}{(a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2})} = \frac{a}{a^2 - 2b^2} - \frac{b}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2} \tag{1.9.1-E}$$

und da es keine ganzen (und damit rationalen) Zahlen $a, b \neq 0$ mit $a^2 = 2b^2$ gibt, sind alle von Null verschiedenen Elemente von $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ invertierbar. Es ergibt sich also ein Körper. Dieser ist geordnet,

$$a+b\sqrt{2} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a, b \geq 0 \vee (a > 0 \wedge b < 0 \wedge a^2 > 2b^2) \vee (a < 0 \wedge b > 0 \wedge a^2 < 2b^2). \tag{1.9.1-F}$$

Er besitzt aber immer noch Lücken. So fehlt zum Beispiel $\sqrt{3}$.

1.9.2. Statt nach Lücken zu suchen und diese individuell zu schließen, schließen wir alle auf einmal. Die Idee hinter der Konstruktion geht auf Richard Dedekind[16] zurück. Wir bezeichnen eine nichtleere echte Teilmenge $L \subset \mathbb{Q}$, $L \neq \mathbb{Q}$ als links, falls

$$x \in L \ \wedge \ y < x \implies y \in L \tag{1.9.2-A}$$

und

$$\forall_{y \in L} \exists_{x \in L} \quad y < x \tag{1.9.2-B}$$

gelten. Dann definieren wir (kurz und elegant)

$$\mathbb{R} := \{L \subset \mathbb{Q} \mid L \text{ linke Teilmenge}\}. \tag{1.9.2-C}$$

Wie oben schon angegeben kann damit jeder rationalen Zahl $x \in \mathbb{Q}$ die linke Menge $\{y \in \mathbb{Q} \mid y < x\}$ zugeordnet werden. Aber ebenso haben wir durch $\{y \in \mathbb{Q} \mid y < 0 \ \vee \ y^2 < 2\}$ die zur Lücke $\sqrt{2}$ gehörende linke Menge beschrieben. Aber auch alle anderen potentiellen Lücken sind gefüllt, was wir noch nachweisen werden.

1.9.3. In $\mathbb{R}$ kann man Rechenoperationen definieren, welche die Operationen aus $\mathbb{Q}$ sinnvoll fortsetzen. Dazu nutzen wir

$$L + L' = \{x + y \mid x \in L \ \wedge \ y \in L'\} \tag{1.9.3-A}$$

und (hier muss man vorsichtiger sein) falls $L, L' \geq 0$, also $0 \in L \cap L'$ gilt,

$$LL' = \{z \mid z < xy \text{ für } x, y \geq 0 \ \wedge \ x \in L \ \wedge \ y \in L'\}. \tag{1.9.3-B}$$

[16] Richard Dedekind, 1831–1916

Für den Fall, dass 0 nur in einer oder keiner der Mengen liegt, kann man alternative Definitionen angeben. Einfacher ist es, hinreichend große positive Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ zu wählen, so dass $0 \in L + m$ und $0 \in L' + n$ gilt und

$$LL' = (L + m)(L' + n) - nL - mL' - mn \tag{1.9.3-C}$$

zu setzen. Dabei ist dann $nL = \{nx \mid x \in L\}$.

Auch die Ordnungsstruktur überträgt sich, wir schreiben $L \leq L'$ falls $L \subseteq L'$ gilt.

☞ **1.9.4 Satz.** *Die sich ergebende Menge $\mathbb{R}$ bildet einen geordneten Körper, den* Körper der reellen Zahlen*. Dieser ist der größte archimedisch geordnete Körper.*

Beweisskizze. Die Rechenoperationen besitzen die Körpereigenschaften, dies wäre nachzurechnen.

Ist nun $\mathbb{K}$ irgendein archimedisch geordneter Körper und $I = (a, b) = \{x \mid a < x < b\}$ ein nichtleeres Intervall in $\mathbb{K}$. Wir zeigen, dass dann in I rationale Zahlen existieren. Sei dazu $x = b - a > 0$. Nach dem archimedischen Axiom existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1/x$. Ist nun $b > 0$ (sonst verwende man $-I$), so gibt es eine natürliche Zahl $k > 0$ mit $k > nb$. Sei k die kleinste dieser Zahlen. Dann gilt $(k - 1)/n < b$. Wäre nun $(k - 1)/n \leq a$, so wäre damit $b - a = x \leq 1/n$ im Widerspruch zur Wahl von n. Also ist $(k - 1)/n \in I$.

Ordnet man nun $x \in \mathbb{K}$ die Menge $L_x = \{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \mid \frac{p}{q} < x\}$ zu, so erhält man damit eine injektive Abbildung $\mathbb{K} \to \mathbb{R}$. Ist $x < y$ und $x < \frac{p}{q} < y$, so ist $\frac{p}{q} \in L_y \setminus L_x$. Die Abbildung $x \mapsto L_x$ erhält die Körperstruktur und die Aussage folgt. □

☞ **1.9.5 Satz** (Vollständigkeit von $\mathbb{R}$). **(i)** *Jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ besitzt eine kleinste obere Schranke. Diese wird als* Supremum

$$\sup A := \min\{y \in \mathbb{R} \mid \forall_{x \in A} \quad x \leq y\} \tag{1.9.5-A}$$

bezeichnet.

(ii) *Jede nichtleere nach unten beschränkte Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ besitzt eine größte untere Schranke. Diese wird als* Infimum

$$\inf A := \max\{z \in \mathbb{R} \mid \forall_{x \in A} \quad z \leq x\} \tag{1.9.5-B}$$

bezeichnet.

Beweis. Wir beweisen nur die Existenz des Supremums. Dazu betrachten wir die Menge $S_A = \{y \in \mathbb{R} \mid \forall_{x \in A} \quad x \leq y\}$ der oberen Schranken und ihr Komplement $L = \mathbb{Q} \setminus S_A$. Da A beschränkt ist, ist S_A nichtleer und damit L eine echte Teilmenge. Da A nichtleer war, ist auch L nichtleer.

Darüberhinaus ist L links: Ist $x \in L$ so ist x keine obere Schranke von A und damit ebenso jede kleinere rationale Zahl $y < x$. Es folgt also $y \in L$. Weiter existiert ein $a \in A$ mit $x < a$ und das Intervall (x, a) enthält eine rationale Zahl z. Dieses z erfüllt $z \in L$.

Die durch L bestimmte reelle Zahl ist das gesuchte Supremum. □

⚒ **1.9.6 Beispiele.** Wir wollen einige spezielle Mengen hervorheben und dafür Bezeichungen vereinbaren. Seien dazu $a < b$ reelle Zahlen. *Intervalle* mit den Grenzen a und b sind dann

$$\begin{aligned} [a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}, \\ [a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}, \\ (a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}, \\ (a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \end{aligned} \tag{1.9.6-A}$$

Je nachdem ob die Randpunkte dazugehören, bezeichnet man Intervalle als *abgeschlossen*, *halboffen* oder *offen*. Unabhängig davon gilt jedoch stets

$$\sup[a,b] = \sup[a,b) = \sup(a,b] = \sup(a,b) = b, \tag{1.9.6-B}$$

$$\inf[a,b] = \inf[a,b) = \inf(a,b] = \inf(a,b) = a. \tag{1.9.6-C}$$

Um auch linke und rechte Mengen in die Notation einbeziehen zu können, vereinbaren wir weiterhin

$$\begin{aligned} (-\infty,a] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \le a\}, \\ (-\infty,a) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \ < a\}, \\ [b,+\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid b \le x\}, \\ (b,+\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid b < x\}. \end{aligned} \tag{1.9.6-D}$$

Die Menge der oberen Schranken einer gegebenen Mengen $A \subseteq \mathbb{R}$ ist damit entweder leer (falls A unbeschränkt ist), oder es gilt

$$S_A = \{b \in \mathbb{R} \mid \forall_{x \in A} \quad x \le b\} = [\sup A, +\infty) \tag{1.9.6-E}$$

und entsprechend für die unteren Schranken

$$s_A = \{a \in \mathbb{R} \mid \forall_{x \in A} \quad a \le x\} = (-\infty, \inf A]. \tag{1.9.6-F}$$

Es ist sinnvoll ebenso $\sup \varnothing = -\infty$ und $\inf \varnothing = +\infty$ zu vereinbaren. Bei $\pm\infty$ handelt es sich nicht um reelle Zahlen, als Symbole werden sie uns später aber noch häufig begegnen.

✂ **Ergänzung.** Auf Cantor geht eine alternative (aber äquivalente) Definition der reellen Zahlen zurück. Er nutzte *Intervallschachtelungen* und verwendete dabei Folgen von Intervallen

$$I_n = [a_n, b_n] = \{x \mid a_n \le x \le b_n\} \tag{1.9.6-G}$$

für rationale Zahlen $a_n \le b_n$, $n \in \mathbb{N}$, mit den Eigenschaften

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad I_{n+1} \subseteq I_n \tag{1.9.6-H}$$

und

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{n \in \mathbb{N}} \quad b_n - a_n < \varepsilon. \tag{1.9.6-I}$$

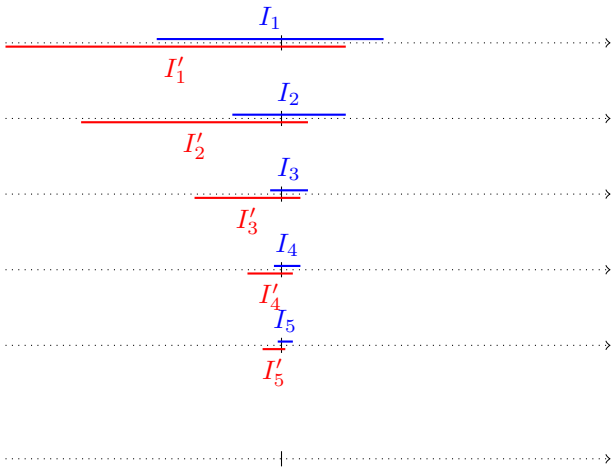
Das Cantorsche Intervallschachtelungsaxiom besagt nun, dass jeder solchen Folge eine (und genau eine) reelle Zahl x

$$\{x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \qquad \Big(= \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \inf\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\} \Big) \tag{1.9.6-J}$$

entspricht. Um daraus eine Definition der reellen Zahlen zu machen, betrachten wir die Menge aller Intervallschachtelungen $\mathcal{I}$ und bezeichnen zwei Intervallschachtelungen $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ und $([a'_n, b'_n])_{n\in\mathbb{N}}$ als äquivalent wenn

$$([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}} \sim ([a'_n, b'_n])_{n\in\mathbb{N}} \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \forall_{n\in\mathbb{N}} \quad a_n \leq b'_n \ \wedge \ a'_n \leq b_n. \tag{1.9.6-K}$$

Dann kann man $\mathbb{R} := \mathcal{I}/_\sim$ definieren. Überlegen Sie sich, wie Rechenoperationen und Ordnung in diesem Fall auf $\mathbb{R}$ definiert werden sollten.



Zwei äquivalente Intervallschachtelungen haben sich überlappende Intervalle und charakterisieren dieselbe reelle Zahl.

✂ **Ergänzung.** Während natürliche Zahlen und auch ganze Zahlen der Reihe nach aufgeschrieben

$$0, \quad -1, \quad 1, \quad -2, \quad 2, \quad -3, \quad 3, \quad -4, \quad 4, \ldots \tag{1.9.6-L}$$

und damit *abgezählt* werden können, scheint es deutlich mehr rationale Zahlen und reelle Zahlen zu geben. Für die rationalen stimmt dies nicht, auch $\mathbb{Q}$ kann abgezählt werden. Dazu betrachten wir der Einfachheit halber nur $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ und zeigen wie das geht. Die Zahlenpaare von $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ kann man tabellarisch anordnen und entsprechend wie in

$$\begin{array}{ccccccccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) & (1,7) & (1,8) & \cdots \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) & (2,7) & (2,8) & \cdots \\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) & (3,7) & (3,8) & \cdots \\
(4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) & (4,7) & (4,8) & \cdots \\
(5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) & (5,7) & (5,8) & \cdots \\
(6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) & (6,7) & (6,8) & \cdots \\
(7,1) & (7,2) & (7,3) & (7,4) & (7,5) & (7,6) & (7,7) & (7,8) & \cdots \\
(8,1) & (8,2) & (8,3) & (8,4) & (8,5) & (8,6) & (8,7) & (8,8) & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

durchlaufen. Streichen wir einfach die Paare (a, b), welche zu nicht gekürzten Brüchen $\frac{a}{b}$ gehören, so erhalten wir damit eine Abzählung von $\mathbb{Q}_+ := \{r \in \mathbb{Q} \mid r > 0\}$.

Allerdings geht so etwas für die reellen Zahlen nun nicht mehr.

✂ **Satz** (Cantor). *Es gibt keine Abzählung der reellen Zahlen* $\mathbb{R}$.

Beweis. Wir zeigen dies nicht für ganz $\mathbb{R}$ sondern für die kleinere Menge $[0, 1]$. Zuerst beobachten wir, dass jedes Intervall $[a, b]$ in drei Teilintervalle $[a, b] = [a, a+d] \cup [a+d, a+2d] \cup [a+2d, b]$ mit $3d = b-a$ zerlegt werden kann. Die Teilintervalle sind nicht disjunkt, jedoch kann ein $x \in [a, b]$ höchstens in zwei der Teilintervalle liegen.

Angenommen, es gäbe eine Abzählung $\mathbb{N} \ni n \mapsto x_n \in [0, 1]$ der Zahlen in $[0, 1]$, also $[0, 1] = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Wir wählen nun eine Folge von Intervallen $I_1, I_2, I_3, \ldots$ in Abhängigkeit der x_n. Zuerst teilen wir $I = [0, 1]$ wie oben in drei gleiche Teilintervalle und wählen als I_1 eines dieser drei Teilintervalle mit $x_1 \notin I_1$. Danach teilen wir I_1 in drei gleiche Teilintervalle und wählen als I_2 eines dieser drei Teilintervalle mit $x_2 \notin I_2$. Auf diese Weise erhalten wir Intervalle I_n mit $x_n \notin I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$ und die Länge des Intervalls I_n ist 3^{-n}. Damit bilden die Intervalle eine Intervallschachtelung und bestimmen eine Zahl $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \subset [0, 1]$. Nach unserer Annahme muss also $x = x_n$ für ein n gelten, allerdings gilt nach Konstruktion $x_n \notin I_n$. Widerspruch! □

Wir haben beim Übergang von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{R}$ deutlich mehr Lücken geschlossen, als $\mathbb{Q}$ Elemente besitzt.

⚒ **1.9.7 Beispiel.** Während rationale Zahlen eine einfache Darstellung als gekürzter Bruch haben, sind *irrationale Zahlen* schwerer zu charakterisieren. Hier kann man sich nur dadurch helfen, diese Zahlen mit möglichst guten Approximationen durch rationale Zahlen einzufangen. Wir geben ein Beispiel, später bei der Diskussion konvergenter Folgen und Reihen werden wir weitere nachliefern.

Wir nutzen dazu die Zahl $\sqrt{2}$ definiert als

$$\sqrt{2} = \sup\{r \in \mathbb{Q} \mid r \leq 0 \ \vee \ r^2 < 2\} = \inf\{r \in \mathbb{Q} \mid r > 0 \ \wedge \ r^2 > 2\} \tag{1.9.7-A}$$

und verwenden, dass nach Konstruktion $(\sqrt{2})^2 = 2$ gilt. Dann gilt $1 < \sqrt{2} < 2$. Um den gebrochenen Anteil $\sqrt{2} - 1$ zu bestimmen, invertieren wir diesen und schauen zwischen welchen natürlichen Zahlen dieser eingeschlossen werden kann. Es gilt

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{2}+1 \in (2, 3) \tag{1.9.7-B}$$

und damit

$$\sqrt{2} - 1 \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right), \qquad \text{d.h.} \quad \sqrt{2} \in \left(\frac{4}{3}, \frac{3}{2}\right). \tag{1.9.7-C}$$

Das kann man so fortführen, wir schreiben dies nur schematisch auf:

$$\begin{array}{r|c|c|c|c|c|c} \sqrt{2}+1 \in & (2,3) & (\frac{7}{3}, \frac{5}{2}) & (\frac{12}{5}, \frac{17}{7}) & (\frac{41}{17}, \frac{29}{12}) & (\frac{70}{29}, \frac{99}{41}) & \cdots \\ \sqrt{2} = 1 + 1/(\sqrt{2}+1) \in & (\frac{4}{3}, \frac{3}{2}) & (\frac{7}{5}, \frac{10}{7}) & (\frac{24}{17}, \frac{17}{12}) & (\frac{41}{29}, \frac{58}{41}) & (\frac{140}{99}, \frac{99}{70}) & \cdots \end{array} \tag{1.9.7-D}$$

Dabei folgt jeweils aus dem oberen Spalteneintrag der untere nach obiger Rechnung und aus dem unteren der nächste obere. Die erhaltenen Intervalle liefern eine Intervallschachtelung zur Bestimmung von $\sqrt{2}$, die bestimmten Intervallgrenzen sind dabei jeweils sehr

gute rationale Näherungen mit kleinen Nennern. Schematisch zusammengefasst erhalten wir eine Darstellung als *Kettenbruch*

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\sqrt{2}-1}}}}}}}} \tag{1.9.7-E}$$

und Ungleichungen nach oben beziehungsweise nach unten, wenn wir den letzten untenstehenden Term mit $2 \leq \frac{1}{\sqrt{2}-1} \leq 3$ abschätzen.

Einige hilfreiche Ungleichungen

☞ **1.9.8 Lemma.** *Für $x, y > 0$ gilt $x \leq y \iff x^2 \leq y^2$.*

Beweis. Da $x+y > 0$ ist, gilt $y^2 - x^2 = (y-x)(x+y) \geq 0$ genau dann, wenn $y - x > 0$. □

☞ **1.9.9 Lemma** (Mittelungleichung)**.** *Für zwei reelle Zahlen $x, y > 0$ gilt*

$$\min\{x, y\} \leq \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \leq \max\{x, y\}, \tag{1.9.9-A}$$

wobei eine Gleichheit schon $x = y$ impliziert.

Beweis. Beweise erfolgen durch Zurückführen auf Lemma 1.8.5. Wir zeigen jede einzelne Ungleichung. Ist $x \leq y$, so gilt $x = \min\{x, y\}$ und

$$x \leq \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = \frac{2xy}{x+y} \iff x^2 + xy \leq 2xy \iff x^2 \leq xy \iff x \leq y \tag{1.9.9-B}$$

und damit das erste Ungleichungszeichen. Für die zweite Ungleichung nutzen wir

$$\begin{aligned} \frac{2xy}{x+y} \leq \sqrt{xy} &\iff \frac{4x^2y^2}{x^2+2xy+y^2} \leq xy \iff 4xy \leq x^2 + 2xy + y^2 \\ &\iff x^2 - 2xy + y^2 = (x-2y)^2 \geq 0 \end{aligned} \tag{1.9.9-C}$$

für die dritte

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \iff xy \leq \frac{x^2+2xy+y^2}{4} \iff x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \tag{1.9.9-D}$$

und für die vierte

$$\frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \iff \frac{x^2+2xy+y^2}{4} \leq \frac{x^2+y^2}{2} \iff 0 \leq x^2 - 2xy + y^2. \tag{1.9.9-E}$$

Die letzte ergibt sich aus

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \leq y \iff \frac{x^2+y^2}{2} \leq y^2 \iff x^2 \leq y^2 \iff x \leq y. \tag{1.9.9-F}$$

□

☞ **1.9.10 Lemma** (Bernoulli[17]-Ungleichung). *Sei $x \geq -1$. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx. \tag{1.9.10-A}$$

Beweis. Für $n = 1$ gilt die Aussage offensichtlich. Angenommen, wir kennen die Aussage schon für n. Dann gilt (wegen $1 + x \geq 0$)

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x \tag{1.9.10-B}$$

und mit dem Induktionsprinzip gilt die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$. □

1.10 Komplexe Zahlen

1.10.1. Auch wenn wir $\mathbb{R}$ durch das Füllen aller Lücken in $\mathbb{Q}$ konstruiert haben, so ist der Körper der reellen Zahlen noch nicht zum Lösen aller Gleichungen geeignet. So gibt es keine reelle Zahl x mit $x^2 = -1$ (da, wie wir schon gesehen haben, Quadrate reeller Zahlen immer nichtnegativ sind).

Man kann $\mathbb{R}$ so erweitern, dass diese und als Nebeneffekt dann sogar alle Polynomgleichungen lösbar sind. Dabei verlieren wir die Ordnungsstruktur, gewinnen aber viele andere neue Einsichten.

✍ **1.10.2 Definition.** **(i)** *Auf $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definieren wir durch*

$$(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v), \quad (x, y) \cdot (u, v) = (xu - yv, xv + yu) \tag{1.10.2-A}$$

Rechenoperationen $+ : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $\cdot : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Schreibt man kurz $0 := (0, 0)$ und $1 := (1, 0)$, so erhält man den Körper der komplexen Zahlen $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$.

(ii) *Wir setzen $\mathrm{i} := (0, 1)$ und schreiben für die komplexe Zahl (x, y) in Zukunft $x + \mathrm{i}y$. Die beiden reellen Zahlen $x =: \operatorname{Re} z$ und $y =: \operatorname{Im} z$ werden als* Realteil *und* Imaginärteil *von z bezeichnet.*

Die Zahl i *bezeichnen wir als* imaginäre Einheit.

(iii) *Zu jeder komplexen Zahl $z = x + \mathrm{i}y$ bezeichnen wir die Zahl*

$$\overline{z} := x - \mathrm{i}y \tag{1.10.2-B}$$

als konjugiert komplexe Zahl *und*

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1.10.2-C}$$

als Betrag.

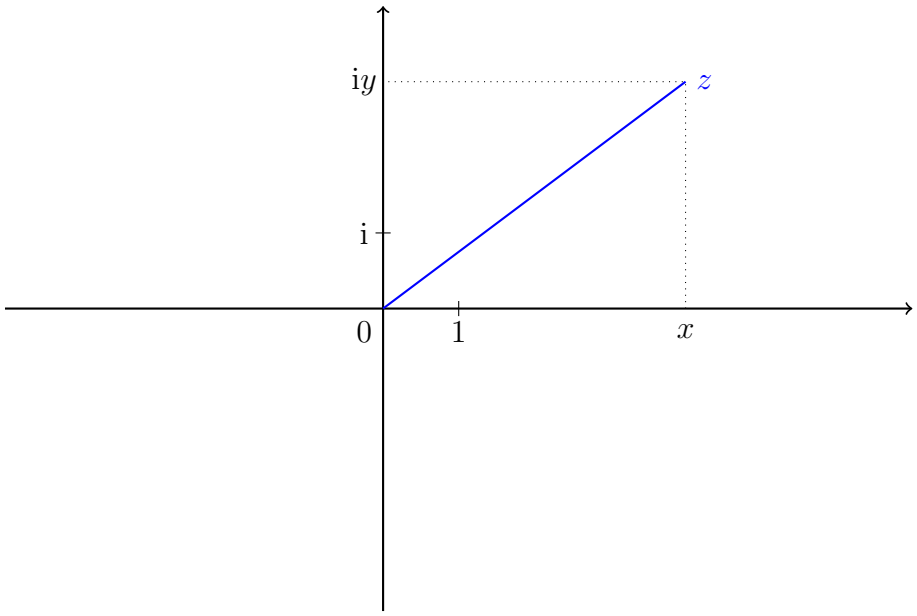
✂ **Ergänzung.** Die Körpereigenschaften sind natürlich nachzuweisen. Während die Eigenschaften der Addition einfach zu sehen sind, ist bei der Multiplikation etwas mehr Aufwand zu treiben. Wir überlassen das als Übungsaufgabe, geben aber die Inverse bezüglich der Multiplikation direkt an. Für $z = x+\mathrm{i}y \neq 0$ gilt

$$z^{-1} = \frac{1}{|z|^2}\overline{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \mathrm{i}\frac{y}{x^2 + y^2} \tag{1.10.2-D}$$

in Analogie zu zu (1.9.**1-E**). Die komplexen Zahlen können nicht als geordneter Körper angeordnet werden, da sonst $0 \leq \mathrm{i}^2 = -1$ zum Widerspruch $1 \leq 0$ führen würde.

[17] Jakob I Bernoulli, 1654–1705

1.10.3. Die komplexen Zahlen stellt man gern als Punkte in der Ebene dar. Diese wird als Gaußsche Zahlenebene[18] oder Argand-Diagramm[19] bezeichnet.



Jeder Zahl $z = x + \mathrm{i}y$ entspricht damit der Punkt mit Koordinaten (x, y) der Ebene. Die horizontale Achse entspricht den reellen Zahlen und wird damit auch als *reelle Achse* bezeichnet. Die vertikale Achse enthält die imaginäre Einheit i und wird als *imaginäre Achse* bezeichnet.

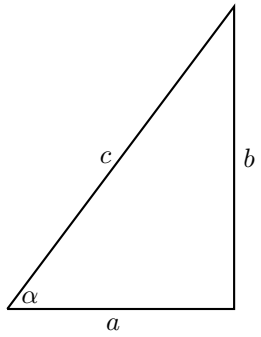
Für eine Zahl z entspricht dann $|z|$ dem Abstand von z vom Ursprung. Den Winkel zwischen der positiven reellen Achse und dem Strahl von 0 nach z werden wir später als *Argument* von z, in Zeichen $\arg(z)$, bezeichnen. Das Argument einer komplexen Zahl ist nicht eindeutig definiert, vielmehr entsprechen die Winkel $\phi + 2\pi k$ mit $k \in \mathbb{Z}$ alle denselben Argumenten. Wir sagen dazu, $\arg(z)$ ist nur modulo 2π definiert und werden auch in Formeln

$$\arg z = \phi \mod 2\pi \qquad \text{kurz für} \qquad \phi - \arg z \in \{2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} \tag{1.10.3-A}$$

schreiben.

✂ **Ergänzung.** Komplexe Zahlen sind eng mit Geometrie und *Winkelfunktionen* insbesondere dem *Sinus* und dem *Cosinus* verbunden. Am rechtwinkligen Dreieck definiert ergeben sich Winkelfunktionen als

[18] Carl Friedrich Gauss, 1777–1855
[19] Jean-Robert Argand, 1768–1822



Streckenverhältnisse

$$\sin\alpha := \frac{b}{c}, \qquad \cos\alpha := \frac{a}{c}, \tag{1.10.3-B}$$

für alle Winkel $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Zum Fortsetzen auf größere Winkel nutzen wir die Formeln

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) &:= \cos\alpha, \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) &:= -\sin\alpha \end{aligned} \tag{1.10.3-C}$$

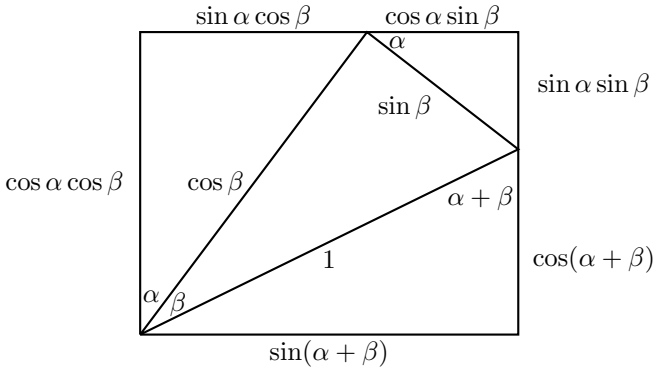
für größere oder negative Winkel entsprechend mehrfach.

Wichtige Formeln für Winkelfunktionen ergeben sich aus den Additionstheoremen, die sich ebenso geometrisch beweisen lassen. Wir werden diese später anders erhalten und dazu eine rein analytische Definition der Winkelfunktionen nutzen. Beide Definitionen stimmen überein, was wiederum eng mit den Additionstheoremen verbunden ist.

✂ **Satz** (Additionstheoreme)**.**

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \end{aligned} \tag{1.10.3-D}$$

Beweisskizze. Hier genügt es, bei geometrischer Definition der Winkelfunktionen und unter der Einschränkung $\alpha, \beta > 0$ und $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$, ein Bild zu zeichnen



und nachzuvollziehen, dass die beschrifteten Winkel und Strecken die entsprechenden Größen haben. Die mit 1 beschriftete Strecke wird dabei als Längeneinheit gewählt.

Die Fortsetzung der Winkelfunktionen auf größere (und kleinere) Winkel ist gerade so gewählt, dass die Additionstheoreme erhalten bleiben. □

☞ **1.10.4 Satz.** *Für jede komplexe Zahl z gilt mit $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$ und $\phi = \arg z$ dem Winkel von z zur reellen Achse*

$$z = r\cos\phi + \mathrm{i}r\sin\phi =: r\exp(\mathrm{i}\phi). \tag{1.10.4-A}$$

Weiterhin gilt für zwei komplexe Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} |zw| &= |z|\,|w| \\ \arg(zw) &= \arg z + \arg w \mod 2\pi. \end{aligned} \tag{1.10.4-B}$$

Beweis. Wir zeigen nur die entscheidende Identität. Es gilt durch Vergleich mit den Additionstheoremen der Winkelfunktionen

$$\begin{aligned}(\cos\phi+\mathrm{i}\sin\phi)&(\cos\psi+\mathrm{i}\sin\psi)\\ &=\cos\phi\cos\psi-\sin\phi\sin\psi+\mathrm{i}(\cos\phi\sin\psi+\sin\phi\cos\psi)\\ &=\cos(\phi+\psi)+\mathrm{i}\sin(\phi+\psi).\end{aligned} \tag{1.10.4-C}$$

Weiterhin gilt $|zw|^2 = zw\overline{zw} = z\overline{z}w\overline{w} = |z|^2|w|^2$. □

☞ **1.10.5 Korollar** (Moivre[20]). *Es gilt*

$$(\cos\phi+\mathrm{i}\sin\phi)^n = \cos(n\phi)+\mathrm{i}\sin(n\phi). \tag{1.10.5-A}$$

Diese einfach zu merkende Aussage enthält alle Informationen über Additionstheoreme für Winkelfunktionen, so ergeben sich für $n = 2$ die *Doppelwinkelformeln*

$$\begin{aligned}\cos(2\phi) &= \cos^2\phi-\sin^2\phi = 2\cos^2\phi-1,\\ \sin(2\phi) &= 2\sin\phi\cos\phi.\end{aligned} \tag{1.10.5-B}$$

Umgestellt ergibt dies andererseits *Halbwinkelformeln*

$$\cos\frac{\phi}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\phi}{2}}, \qquad \sin\frac{\phi}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\phi}{2}} \tag{1.10.5-C}$$

mit passend gewählten Vorzeichnen (je nach Bereich des Winkels ϕ). Diese werden später eine wichtige Rolle beim Rechnen spielen.

1.10.6. Wurzeln komplexer Zahlen existieren stets, sind aber im allgemeinen nicht eindeutig. Mit

$$z = r(\cos\phi+\mathrm{i}\sin\phi) \tag{1.10.6-A}$$

wir erhalten aus obigen Formeln

$$z^n = r^n\big(\cos(n\phi)+\mathrm{i}\sin(n\phi)\big), \qquad n\in\mathbb{N}, \tag{1.10.6-B}$$

und damit auch eine Darstellung aller Lösungen der Gleichung $w^n = z$. Es gilt

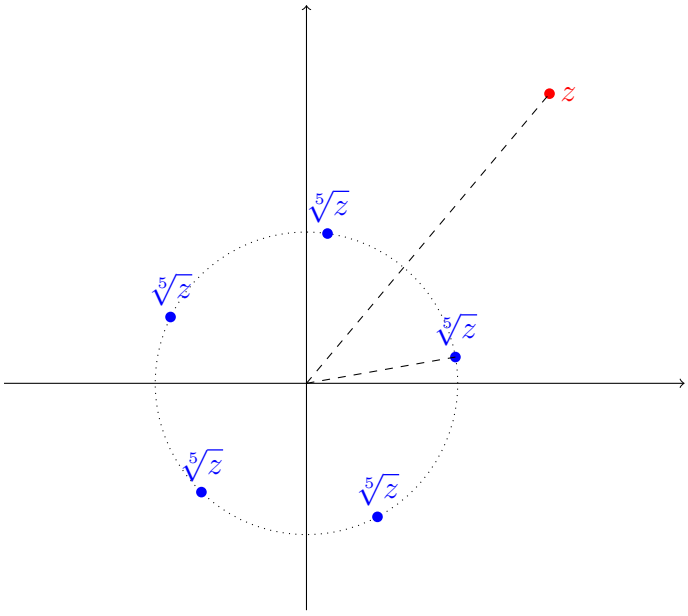
$$w^n = z = r(\cos\phi+\mathrm{i}\sin\phi) \tag{1.10.6-C}$$

genau dann, wenn

$$w = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\phi}{n}+\frac{2\pi k}{n}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\phi}{n}+\frac{2\pi k}{n}\right)\right) \tag{1.10.6-D}$$

mit einem $k\in\mathbb{Z}$. Für jedes $z\neq 0$ existieren damit also insbesondere n verschiedene n-te Wurzeln aus z. Diese bilden die Ecken eines regelmäßigen n-Ecks in der Ebene.

[20] Abraham de Moivre, 1667–1754



Wir haben jede dieser n Wurzeln hier mit $\sqrt[n]{z}$ bezeichnet, es gibt keine sinnvolle Möglichkeit eine davon hervorzuheben und diese als wichtigste Wurzel mit dem Wurzelsymbol zu einer Hauptwurzel zu adeln und die anderen dann als Nebenwurzeln zu behandeln. Nichtsdestotrotz wird in der Literatur oft die Wurzel mit kleinstem Argument als *Hauptwert* und mit $\sqrt[n]{z}$ bezeichnet.[21]

In komplexen Zahlen haben wir also mit der Hinzunahme von Quadratwurzeln aus negativen Zahlen insbesondere alle Wurzeln erhalten. Es gilt sogar noch mehr:

Satz (Fundamentalsatz der Algebra[22])**.** *Jede nicht konstante Polynomfunktion*

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \qquad a_k \in \mathbb{C} \tag{1.10.6-E}$$

mit $n \geq 1$ und $a_n \neq 0$ besitzt Nullstellen. Es existieren also $z \in \mathbb{C}$ mit $p(z) = 0$.

Korollar (Wurzelsatz von Vieta[23])**.** *Zu jeder nicht konstanten Polynomfunktion*

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \qquad a_k \in \mathbb{C} \tag{1.10.6-F}$$

[21] Um von einer Wurzelfunktion zu sprechen, braucht man natürlich stets *einen* Funktionswert. Das kann man auf zweierlei Arten erreichen. Man kann den Hauptwert wählen und erhält dann mitunter inkonsistente Formeln weil Rechengesetze der Wurzelfunktionen kaputtgehen, oder man ändert den Definitionsbereich und definiert die Wurzel auf einer n-blättrigen Fläche über $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ die sich n-fach um den Ursprung windet. Wir werden später letzteres tun und vorerst mit mehreren Funktionswerten pro Stelle leben (müssen).

[22] Auch wenn die Satzbezeichnung Algebra vermuten lässt, so steckt hier wirklich Analysis drin. Der erste vollständige Beweis dieser Aussage geht auf Gauß zurück, wir beweisen den Satz später im Rahmen der Funktionentheorie.

[23] François Viète, Seigneur de la Bigotière, 1540 – 1603
Vieta zeigte die Darstellung der Koeffizienten durch Nullstellen, falls es n Nullstellen gibt. Die Existenz der Nullstellen selbst folgt aus dem später bewiesenen Fundamentalsatz.

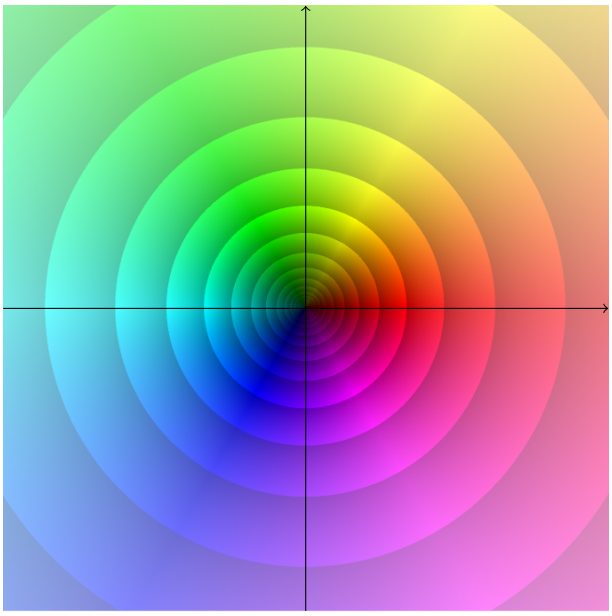
mit $n \geq 1$ und $a_n = 1$ existieren n komplexe Zahlen $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ mit

$$\sum_{k=0}^{n} a_k z^k = \prod_{j=1}^{n} (z - z_j). \tag{1.10.6-G}$$

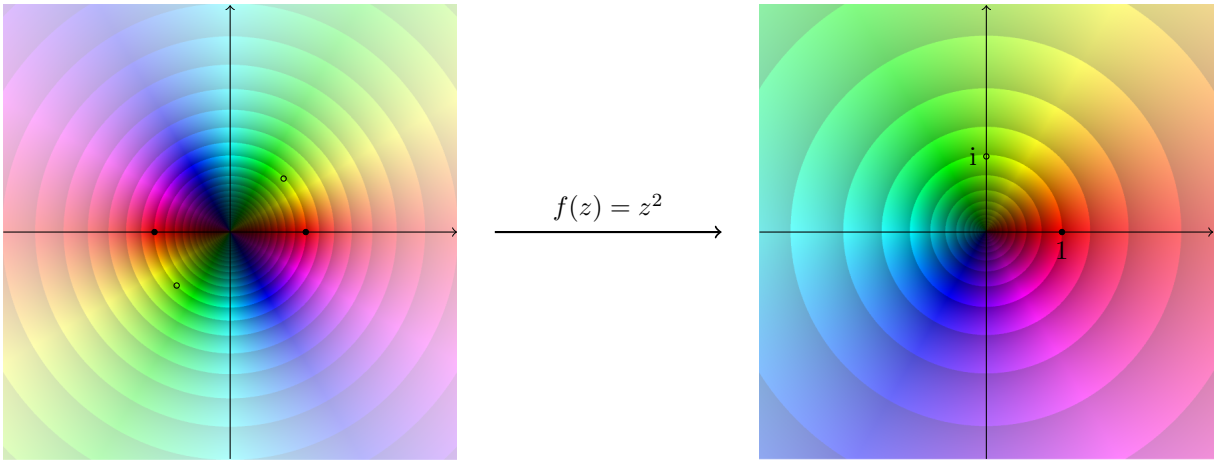
Insbesondere gilt

$$a_0 = (-1)^n \prod_{j=1}^{n} z_j, \quad \ldots \quad a_k = (-1)^{n-1} \sum_{\substack{J \subset \{1,\ldots,n\} \\ \#J = n-k}} \prod_{j \in J} z_j, \quad \ldots \quad a_{n-1} = -\sum_{j=1}^{n} z_j. \tag{1.10.6-H}$$

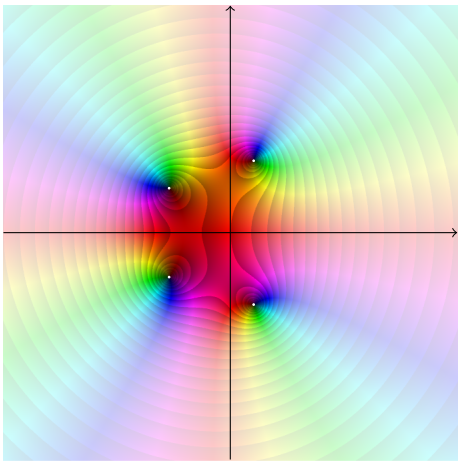
✂ **Ergänzung.** Wie kann man sich komplexe Funktionen vorstellen? Für Abbildungen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind Graphen als Teilmenge von $\mathbb{C}^2$ sicher die falsche Idee. Besser ist, sich $\mathbb{C}$ selbst so gefärbt vorzustellen, dass man aus Farbe und Helligkeit zusammen die komplexe Zahl rekonstruieren kann. Ein Beispiel dazu wäre



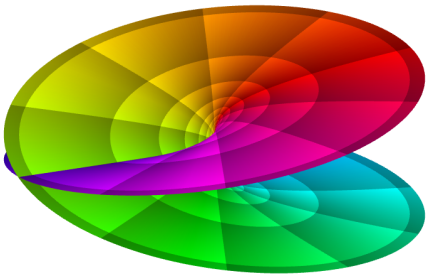
und zur Darstellung einer Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ an jeder Stelle den zugehörigen Farbwert darzustellen. Für $f(z) = z^2$ sähe das dann ungefähr so aus:

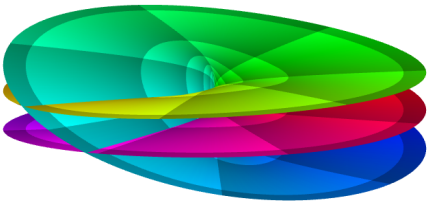


Dabei werden die beiden eingezeichneten Kreise auf i abgebildet und die beiden Punkte auf 1. Es genügt natürlich das linke Bild, um die Funktion darzustellen. Das funktioniert auch für kompliziertere komplexe Funktionen; ein Beispiel ist das Polynom $f(z) = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$ mit folgendem Bild, auf dem seine vier Nullstellen sehr deutlich zu sehen sind.



Für Quadrat- und Kubikwurzeln können wir das jetzt auch auf die Spitze treiben und uns die Funktionswerte auf einer Fläche vorstellen. Wir haben hier noch Linien für konstante Argumente und konstante Beträge der Funktionswerte ergänzt. Hier muss man mehrmals in der komplexen Ebene um den Ursprung laufen, um wieder zum gleichen Funktionswert zurückzukommen.





2 Grenzwerte von Folgen und Reihen

2.1 Zahlenfolgen und Grenzwerte

2.1.1. Sei M eine Menge. Eine *Folge* in M ist eine Abbildung $\mathbb{N} \ni n \mapsto x_n \in M$. Wir schreiben dafür kurz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und bezeichnen x_n als das n-te *Folgenglied*. Die Menge aller Folgen mit Gliedern aus M bezeichnen wir mit $M^{\mathbb{N}}$.

Wir wollen im Weiteren die Glieder einer Folge zueinander und zu weiteren Elementen von M in Beziehung setzen. Dazu definieren wir uns zuerst einen Abstandsbegriff auf der Menge M um nachfolgend zu beschreiben, wann eine Folge Elemente von M bezüglich dieses Abstandsbegriffs approximiert. Das klingt vorerst abstrakt, wird uns aber später helfen, effizienter zu arbeiten.

✍ **2.1.2 Definition.** *Ein* metrischer Raum (M, d) *ist eine Menge M versehen mit einer Abbildung $d : M \times M \to \mathbb{R}$, für die*

M0

$$\forall_{x,y\in M} \quad d(x,y) \geq 0 \tag{2.1.2-A}$$

M1 (Definitheit)

$$\forall_{x,y\in M} \quad d(x,y) = 0 \iff x = y \tag{2.1.2-B}$$

M2 (Symmetrie)

$$\forall_{x,y\in M} \quad d(x,y) = d(y,x) \tag{2.1.2-C}$$

M3 (Dreiecksungleichung)

$$\forall_{x,y,z\in M} \quad d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \tag{2.1.2-D}$$

gilt. Die Abbildung d wird als Metrik *bezeichnet.*

⚒ **2.1.3 Beispiele.** **(i)** Definiert man auf $\mathbb{R}$ den Betrag $|x| := \max\{x, -x\}$, so bestimmt $d(x,y) := |x-y|$ eine Metrik auf $\mathbb{R}$. Auf den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ definiert

$$d(z,w) := |z-w| = \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2} \tag{2.1.3-A}$$

für $z = x + \mathrm{i}y$ und $w = u + \mathrm{i}v$ eine Metrik. Wir werden im Weiteren $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ stets mit dieser Metrik versehen.

(ii) Auf jeder Menge M bestimmt

$$d(x,y) := \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases} \tag{2.1.3-B}$$

eine Metrik, die *triviale Metrik*. Sie ist eher langweilig.

(iii) Eine weitere Metrik in der Ebene $\mathcal{E}$ ist durch die *französische Eisenbahnmetrik* gegeben. Wir fixieren einen Punkt $P \in \mathcal{E}$ und definieren den Abstand zweier Punkte $A, B \in \mathcal{E}$ durch

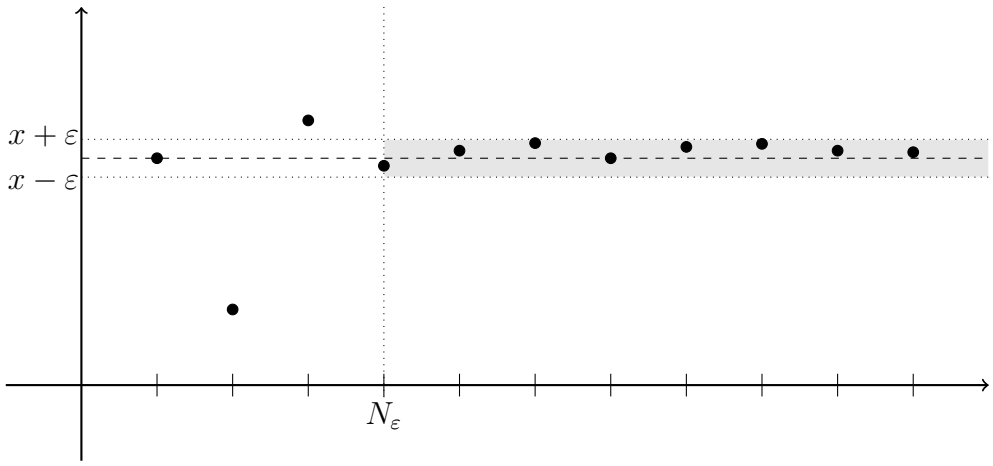
$$d(A,B) := \begin{cases} \overline{AB}, & B \in \overrightarrow{PA}, \\ \overline{AP} + \overline{BP}, & \text{sonst}, \end{cases} \tag{2.1.3-C}$$

wobei $\overline{AB}$ die Länge der Strecke von A nach B und $\overrightarrow{PA}$ den Strahl von P durch A bezeichne.

✍ **2.1.4 Definition.** *Sei (M,d) ein metrischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M. Wir sagen x_n ist* konvergent *gegen den* Grenzwert *$x \in M$, falls*

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n>N} \quad d(x_n, x) < \varepsilon \tag{2.1.4-A}$$

gilt. Wir schreiben dafür kurz $x_n \longrightarrow x$ für $n \to \infty$ oder $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Eine nicht konvergente Folge wird als divergent *bezeichnet.*



Grenzwerte sind dabei eindeutig bestimmt, denn es gilt:

☞ **2.1.5 Lemma.** *Gilt $x_n \longrightarrow x$ und ebenso $x_n \longrightarrow x'$, so folgt $x = x'$.*

Beweis. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es N mit $d(x_n, x) < \varepsilon$ für $n > N$ und ein N' mit $d(x_n, x') < \varepsilon$ für $n > N'$. Also gilt für $n > \max\{N, N'\}$

$$d(x, x') \le d(x, x_n) + d(x_n, x') < 2\varepsilon. \tag{2.1.5-A}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war folgt $d(x, x') = 0$. □

✍ **2.1.6 Definition.** *Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus M heißt* beschränkt *im metrischen Raum (M,d), falls es ein $z \in M$ und ein $R > 0$ mit $d(x_n, z) < R$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt.*

☞ **2.1.7 Lemma.** *Konvergente Folgen sind beschränkt.*

Beweis. Sei x der Grenzwert der Folge. Dann gibt es ein N mit $d(x_n, x) < 1$ für $n > N$. Sei nun

$$R := 1 + \max_{n \in \{1,\dots,N\}} d(x_n, x) \tag{2.1.7-A}$$

so gilt $d(x_n, x) < R$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und Beschränktheit folgt. □

⚒ **2.1.8 Beispiele.** **(i)** Die Folge $x_n = \frac{n+1}{n}$ konvergiert in $\mathbb{R}$ gegen den Grenzwert 1, da

$$d(x_n, 1) = \left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \tag{2.1.8-A}$$

für alle n mit $n > \frac{1}{\varepsilon}$ gilt.

(ii) Die Folge $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ konvergiert in $\mathbb{R}$ gegen den Grenzwert 0, da unter Verwendung der dritten binomischen Formel

$$\begin{aligned} d(x_n, 0) &= \left| \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right| = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon \end{aligned} \tag{2.1.8-B}$$

für $n > \frac{1}{4\varepsilon^2}$ gilt.

Um per Definition die Konvergenz einer Folge nachzuweisen, muss man den Grenzwert der Folge kennen. Wir werden im weiteren Verlauf der Vorlesung insbesondere Kriterien für Konvergenz nachweisen, die ohne explizite Kenntnis des Grenzwertes auskommen (und auf diese Weise die Definition einer Zahl als Grenzwert einer Folge erlauben).

2.1.9. Wir können Folgen mit der Ordnungsstruktur eines geordneten Körpers $\mathbb{K}$ verbinden. Wir sagen eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ist *monoton wachsend*, falls

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad x_n \leq x_{n+1} \tag{2.1.9-A}$$

gilt. Sie heißt *monoton fallend*, falls

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad x_{n+1} \leq x_n \tag{2.1.9-B}$$

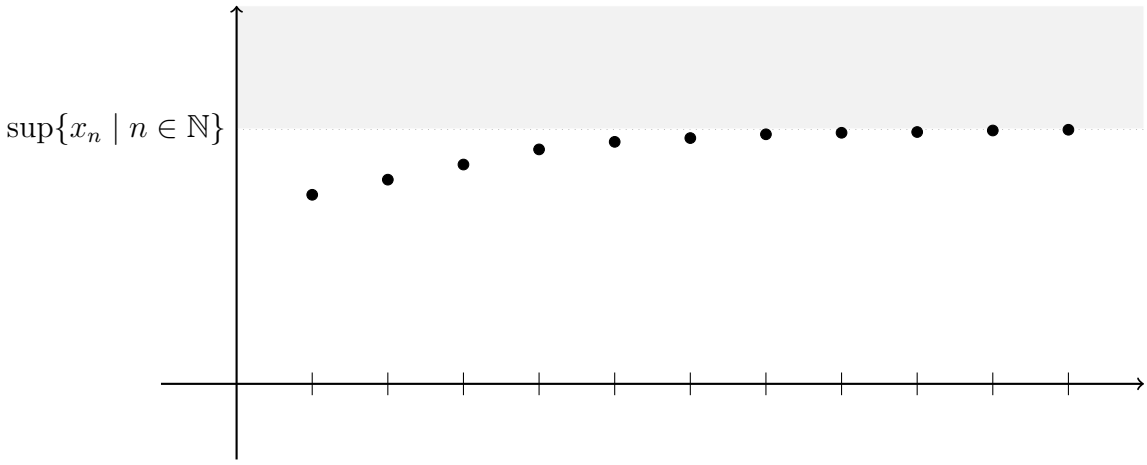
gilt. Im Falle von $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ liefert die Monotonie ein einfaches Konvergenzkriterium:

☞ **2.1.10 Satz** (Hauptsatz über monotone Folgen). *Jede monotone und beschränkte reelle Zahlenfolge ist konvergent.*

Beweis. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass die Folge monoton wachsend ist. Da die Folge beschränkt ist, ist

$$x := \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \tag{2.1.10-A}$$

endlich somit eine reelle Zahl. Wir zeigen, dass nun $x_n \to x$ gilt. Nach Konstruktion gilt $x_n \leq x$ für alle n. Da x Supremum ist, existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein m mit $x - \varepsilon < x_m \leq x$. Damit folgt aber aus der Monotonie für $n > m$ ebenso $x - \varepsilon < x_n \leq x$ und die Konvergenz ist gezeigt. □



2.1.11 Beispiel. Sei $c > 0$. Die Folge

$$x_1 = \sqrt{c}, \quad x_2 = \sqrt{c + \sqrt{c}}, \quad x_3 = \sqrt{c + \sqrt{c + \sqrt{c}}}, \quad \dots \tag{2.1.11-A}$$

also mit $x_{n+1} = \sqrt{c + x_n}$ ist konvergent. Um dies zu zeigen, wenden wir den Hauptsatz über monotone Folgen an. Es gilt $0 < x_n < \sqrt{c} + 1$. Dies zeigen wir per Induktion. Der Induktionsanfang ist durch $\sqrt{c} < \sqrt{c} + 1$ gegeben. Für den Induktionsschritt nehmen wir an, dass $x_n < \sqrt{c} + 1$ gilt. Dann folgt

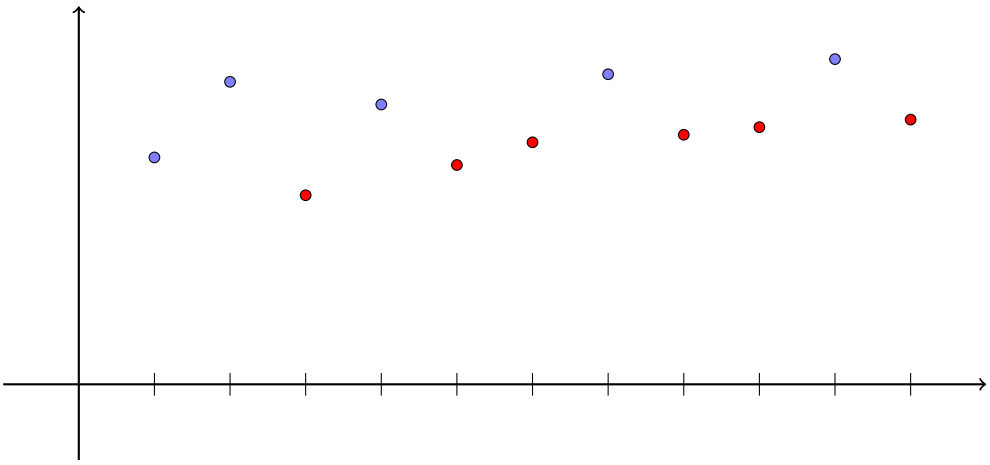
$$x_{n+1} < \sqrt{c + \sqrt{c} + 1} < \sqrt{c + 2\sqrt{c} + 1} = \sqrt{c} + 1. \tag{2.1.11-B}$$

Die Folge ist ebenso monoton. Zum Einen gilt $x_2 = \sqrt{c + \sqrt{c}} > \sqrt{c} = x_1$. Nehmen wir nun an, dass wir schon $x_n > x_{n-1}$ gezeigt haben. Dann folgt $c + x_n > c + x_{n-1}$ und damit durch Wurzelziehen

$$x_{n+1} = \sqrt{c + x_n} > \sqrt{c + x_{n-1}} = x_n \tag{2.1.11-C}$$

und damit per Induktion die Monotonie. Also ist die Folge nach dem Hauptsatz konvergent.

Oft ergeben sich Eigenschaften nicht für die gesamte Folge sondern nur für Teilfolgen. Eine *Teilfolge* $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ entsteht durch 'Weglassen' von Folgengliedern und somit durch Wahl einer streng monoton wachsenden Indexfolge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, also mit $n_{k+1} > n_k$.



☞ **2.1.12 Lemma.** *Jede reelle Zahlenfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt eine monotone Teilfolge.*

Beweis. Wir beweisen dies konstruktiv und suchen rekursiv eine monoton wachsende Teilfolge. Dazu suchen wir uns in jedem Schritt das kleinstmögliche nachfolgende Folgenglied, wollen also insbesondere

$$x_{n_1} = \min\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}. \tag{2.1.12-A}$$

Angenommen, dieses Minimum existiert nicht. Sei dann $y = \inf\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Ist $y = -\infty$, so existiert zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein n_k mit $x_{n_k} < -k$ und $x_{n_k} < x_{n_{k-1}}$. Ist $y \in \mathbb{R}$, so existiert zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein x_{n_k} mit $x_{n_k} < y + \frac{1}{k}$ und $x_{n_k} < x_{n_{k-1}}$. In beiden Fällen ergibt sich eine monoton fallende Teilfolge.

Existiert das Minimum, so bestimmt dies n_1. Wir setzen rekursiv weiter

$$x_{n_{k+1}} = \min\{x_n \mid n > n_k\}, \tag{2.1.12-B}$$

wobei wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die Minima existieren. Andernfalls liefert obiges Argument eine monoton fallende Teilfolge. Die so rekursiv konstruierten x_{n_k} bilden eine monoton wachsende Teilfolge. □

☞ **2.1.13 Satz** (Bolzano[1]–Weierstraß[2]). *Jede beschränkte reelle Zahlenfolge besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Da nach Lemma 2.1.12 eine monotone Teilfolge existiert und diese als Teilfolge einer beschränkten Folge auch beschränkt ist, ergibt sich die Behauptung direkt aus Satz 2.1.10. □

☞ **2.1.14 Lemma.** **(i)** *Jede Teilfolge einer konvergenten Folge ist selbst konvergent.*

(ii) *Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem metrischen Raum (M, d) und $x \in M$. Besitzt jede Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ihrerseits eine gegen x konvergente Teilfolge, so konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x.*

Beweis. **(i)** Klar. **(ii)** Wir zeigen dies per Kontraposition. Angenommen, die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht gegen x konvergent. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass zu jedem $N \in \mathbb{N}$ ein $n > N$ mit $d(x_n, x) > \varepsilon$ existiert. Wir nutzen dies um eine Teilfolge zu wählen. Sei n_1 so gewählt, dass $d(x_{n_1}, x) > \varepsilon$. Sei nun $n_2 > n_1$ so gewählt, dass $d(x_{n_2}, x) > \varepsilon$. Wir setzen dies rekursiv fort und wählen $n_{k+1} > n_k$ derart, dass stets $d(x_{n_{k+1}}, x) > \varepsilon$. Die Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ kann nach Konstruktion keine gegen x konvergente Teilfolge enthalten. □

2.2 Elementare Grenzwertsätze

Mit Grenzwerten von Zahlenfolgen kann man rechnen. Sei dazu $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ein Körper. Wir bemerken zuerst, dass eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$,

[1] Bernard Bolzano, 1781–1848
[2] Karl Weierstrass, 1815–1897

$x_n, y_n \in \mathbb{R}$, genau dann konvergiert, wenn die beiden reellen Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren.

☞ **2.2.1 Satz.** **(i)** *Angenommen, die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren in $\mathbb{K}$. Dann sind auch die Folgen $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n. \tag{2.2.1-A}$$

(ii) *Angenommen, die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren in $\mathbb{K}$. Dann ist auch die Folge $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n \tag{2.2.1-B}$$

(iii) *Angenommen, die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren in $\mathbb{K}$ und die Glieder der Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien ungleich 0. Dann ist auch die Folge $(\frac{x_n}{y_n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n} \tag{2.2.1-C}$$

Beweis. Wir zeigen die erste Aussage und überlassen das Nachrechnen der weiteren als Übung. Angenommen $x_n \longrightarrow x$ und $y_n \longrightarrow y$. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N mit $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n > N$ und ein N' mit $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n > N'$. Ist nun $n > \max\{N, N'\}$, so folgt mit der Dreiecksungleichung

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| = |x_n - x + y_n - y| \le |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \tag{2.2.1-D}$$

und da $\varepsilon > 0$ beliebig war ist $x_n + y_n \longrightarrow x + y$ gezeigt. □

Gerade beim Rechnen mit reellen oder komplexen Folgen bietet es sich an, den Grenzwertbegriff um drei *uneigentliche Grenzwerte* zu erweitern. Dafür könnten wir die Metrik auf $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ anpassen (was wir nicht tun) oder direkt definieren.

✍ **2.2.2 Definition** (uneigentliche Grenzwerte). **(i)** *Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge. Wir sagen $x_n \longrightarrow +\infty$ oder $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$, falls*

$$\forall_{R\in\mathbb{R}}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n>N} \quad x_n > R \tag{2.2.2-A}$$

gilt.

(ii) *Analog definieren $x_n \longrightarrow -\infty$ oder $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ wir für eine reelle Zahlenfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch die Bedingung*

$$\forall_{L\in\mathbb{R}}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n>N} \quad x_n < L. \tag{2.2.2-B}$$

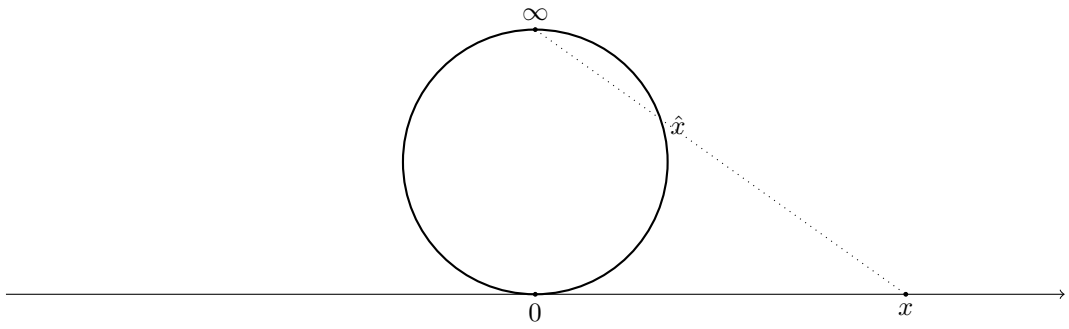
(iii) *Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine komplexe Zahlenfolge. Wir sagen $z_n \longrightarrow \infty$ oder $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$, falls*

$$\forall_{R>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n>N} \quad |z_n| > R \tag{2.2.2-C}$$

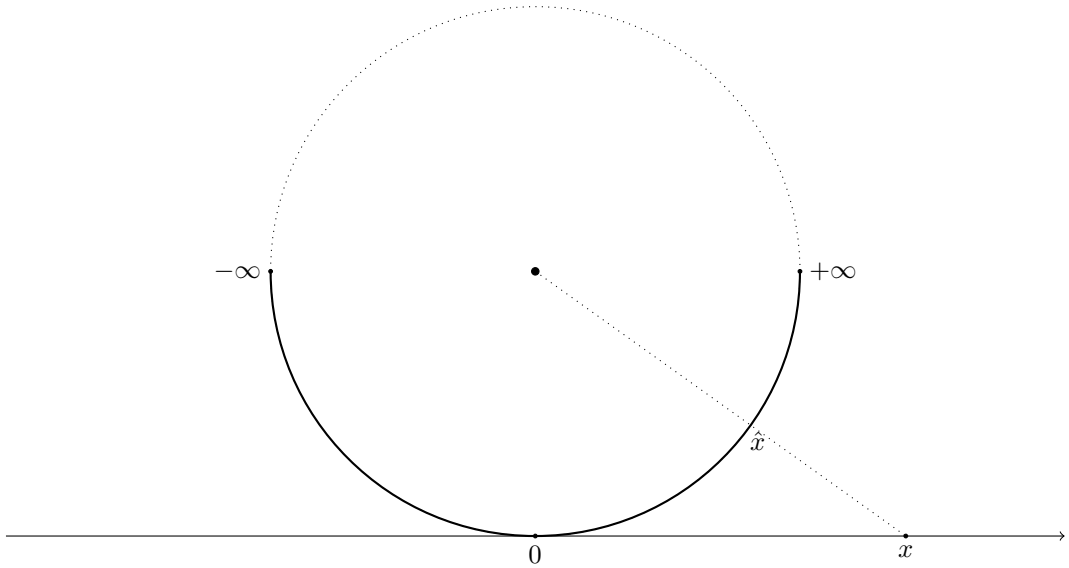
gilt.

Man bezeichnet eine Folge mit uneigentlichem Grenzwert ∞ oder $\pm\infty$ als bestimmt divergent.

✂ **Ergänzung.** Man kann sich die uneigentlichen Grenzwerte ∞ und $\pm\infty$ bildhaft auf durch stereographische Projektion vorstellen. Dazu nur die passenden Bilder, für $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ nutzen wir



und für $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ entsprechend



Die Abstände in der stärker hervorgehobenen Bildlinie ergeben eine Metrik auf $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ beziehungsweise auf $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

☞ **2.2.3 Satz.** *Sei* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$.

(i) *Gilt für zwei konvergente oder bestimmt divergente Folgen* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\exists_{N\in\mathbb{N}} \forall_{n>N} \quad x_n \leq y_n \tag{2.2.3-A}$$

so folgt

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n. \tag{2.2.3-B}$$

(ii) *Seien* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergent mit*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n - z_n) = 0 \tag{2.2.3-C}$$

und

$$\exists_{N\in\mathbb{N}} \forall_{n>N} \quad x_n \leq y_n \leq z_n \tag{2.2.3-D}$$

für eine dritte Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, so ist* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergent und*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n. \tag{2.2.3-E}$$

(iii) *Ist* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *bestimmt divergent mit* $x_n \longrightarrow +\infty$ *und gilt* (2.2.3-A) *für eine zweite Folge* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, so folgt* $y_n \longrightarrow +\infty$.

☞ **2.2.4 Satz** (Elementare Grenzwerte). **(i)** *Für* $k \in \mathbb{Z}$ *gilt*

$$\lim_{n\to\infty} n^k = \begin{cases} 0, & k < 0, \\ 1, & k = 0, \\ +\infty, & k > 0. \end{cases} \tag{2.2.4-A}$$

(ii) *Für* $|a| < 1$ *gilt*

$$\lim_{n\to\infty} a^n = 0 \tag{2.2.4-B}$$

und für $|a| > 1$ *entsprechend*

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \infty. \tag{2.2.4-C}$$

(iii) *Für* $|a| > 1$ *und* $k > 0$ *gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0. \tag{2.2.4-D}$$

(iv) *Für* $a > 0$ *gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1. \tag{2.2.4-E}$$

(v) *Es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1. \tag{2.2.4-F}$$

(vi) *Es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0. \tag{2.2.4-G}$$

Beweis. (i) Für $n > 1$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt $n^k > 1$ und damit $n^k - n = n(n^{k-1} - 1) \geq 0$. Also folgt $n^k \geq n$ und $\lim_{n\to\infty} n^k \geq \lim_{n\to\infty} n = +\infty$. Für $k = 0$ ist wegen $n^0 = 1$ nichts zu zeigen. Für $k < 0$ nutzen wir entsprechend

$$0 < n^k < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad n^{-k} = \frac{1}{n^k} > \frac{1}{\varepsilon} \tag{2.2.4-H}$$

und $n^{-k} \longrightarrow +\infty$.

(ii) Es genügt $|a^n| = |a|^n \longrightarrow 0$ beziehungsweise $|a|^n \longrightarrow +\infty$ zu zeigen. Sei dazu zuerst $|a| > 1$ und $|a| = 1+\lambda$ mit $\lambda > 0$. Dann folgt mit der Bernoulli-Ungleichung

$$|a|^n = (1+\lambda)^n > 1 + n\lambda > R \tag{2.2.4-I}$$

für $n > \frac{R-1}{\lambda}$. Also gilt $\lim_{n\to\infty} a^n = \infty$.

Für $|a| < 1$ gilt entsprechend $b = 1/|a| > 1$ und $b^n \longrightarrow +\infty$. Damit gilt aber $|a|^n < \varepsilon$ genau dann, wenn $b^n > 1/\varepsilon$ und damit wenn $n > \frac{1/\varepsilon - 1}{b-1}$ gilt.

(iii) Für $|a| = 1 + \lambda$, $\lambda > 0$, liefert der binomische Lehrsatz

$$|a^n| = (1+\lambda)^n = 1 + n\lambda + \frac{n(n-1)}{2}\lambda^2 + \cdots + \lambda^n > \frac{n(n-1)}{2}\lambda^2 \tag{2.2.4-J}$$

(wobei wir einfach positive Summanden zum Abschätzen weggelassen haben) und zusammen mit $n - 1 > \frac{n}{2}$ für $n > 2$ folgt damit

$$|a^n| > \frac{n^2}{4}\lambda^2 = \frac{(|a|-1)^2}{4}n^2. \tag{2.2.4-K}$$

Also gilt

$$0 < \frac{n}{|a^n|} < \frac{4}{n(|a|-1)^2} \longrightarrow 0 \tag{2.2.4-L}$$

und $\frac{n}{a^n} \longrightarrow 0$ folgt. Für die weiteren Potenzen nutzen wir, dass

$$\frac{n^k}{a^n} = \left(\frac{n}{(\sqrt[k]{a})^n}\right)^k < \frac{n}{(\sqrt[k]{a})^n} \tag{2.2.4-M}$$

zumindest für hinreichend große n gilt. Da die rechte Seite beliebig klein wird, folgt die Behauptung.

(iv) Sei $a > 1$. Unter Ausnutzung der Bernoulli-Ungleichung erhalten wir

$$0 < \sqrt[n]{a} - 1 < \frac{a-1}{n} < \varepsilon \tag{2.2.4-N}$$

für $n > \frac{a-1}{\varepsilon}$. Für $a = 1$ gilt offenbar $\sqrt[n]{1} = 1$ und es ist nichts zu zeigen. Bleibt der Fall $0 < a < 1$. Hier helfen die Grenzwertsätze, wegen $1/a > 1$ erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = 1 \tag{2.2.4-O}$$

und die Aussage ist gezeigt.

(v) Hier nutzen wir die Ungleichung

$$0 < \sqrt[n]{n} - 1 < \frac{2}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0 \tag{2.2.4-P}$$

die direkt aus (2.2.4-K) mit $a = \sqrt[n]{n}$ folgt zusammen mit dem Kriterium aus Satz 2.2.3.

(vi) Es gilt

$$0 < \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n}\frac{2}{n}\cdots\frac{n-1}{n}\frac{n}{n} \leq \frac{1}{n} \longrightarrow 0, \tag{2.2.4-Q}$$

da jeder der Faktoren kleiner oder gleich 1 ist. Also folgt die Behauptung.

□

✂ **Ergänzung.** Die Rechenregeln für Grenzwerte aus Sätzen 2.2.1 und 2.2.3 ergeben zusammen mit den gerade bewiesenen elementaren Grenzwerten Algorithmen zum Berechnen von Grenzwerten. Dabei liefern die Rechenregeln beim Rechnen nebenbei oft die Existenz der Grenzwerte, die Rechnung selbst ist dabei nur *rückwärts* zu lesen. Dazu zwei Beispiele,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^5+3n^2+4}{n^5+3n^4+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+3n^{-3}+4n^{-5}}{1+3n^{-1}+n^{-5}} = \frac{1+3\lim_{n\to\infty} n^{-3}+4\lim_{n\to\infty} n^{-5}}{1+3\lim_{n\to\infty} n^{-1}+\lim_{n\to\infty} n^{-5}} = 1 \qquad (2.2.\textbf{4-R})$$

und

$$0 = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n} \le \lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n} \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n} = 0. \qquad (2.2.\textbf{4-S})$$

2.3 Cauchyfolgen und Vollständigkeit

✍ **2.3.1 Definition.** *Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (M,d) heißt* Cauchyfolge[3]*, falls*

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{m,n>N} \quad d(x_n,x_m) < \varepsilon \qquad (2.3.\textbf{1-A})$$

gilt.

⚒ **2.3.2 Beispiel.** Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge. Dies rechnen wir kurz nach. Konvergiert $x_n \longrightarrow x$, so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n,x) < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n > N$. Also gilt für $m,n > N$ auf Grund der Dreiecksungleichung

$$d(x_n,x_m) \le d(x_n,x) + d(x,x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad (2.3.\textbf{2-A})$$

und die Folge (x_n) ist Cauchy.

☞ **2.3.3 Lemma.** *Jede Cauchyfolge ist* beschränkt*, d.h. es zu jeder Cauchyfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (M,d) existiert ein $y \in M$ und ein $R > 0$, so dass*

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad d(x_n,y) < R \qquad (2.3.\textbf{3-A})$$

gilt.

Beweis. Wir wählen $\varepsilon = 1$ in der Cauchyeigenschaft und erhalten ein N mit $d(x_n,x_m) < 1$ für $m,n > N$. Wählt man also $y = x_{N+1}$ und $R = 1 + \max_{1\le n\le N} d(x_n,y)$, so folgt die Behauptung. □

☞ **2.3.4 Satz** (Cauchykriterium)**.** *Jede reelle Cauchyfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.*

Beweis. Da jede Cauchyfolge beschränkt ist, enthält sie nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Wir zeigen, dass damit die gesamte Folge konvergiert. Sei $x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$.

Da $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent ist, existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein K mit $d(x_{n_k},x) < \frac{\varepsilon}{2}$ für $k > K$. Ebenso gibt es auf Grund der Cauchyeigenschaft ein N mit $d(x_n,x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ für $m,n > N$.

[3] Augustin-Louis Cauchy, 1789–1857

Wählen wir nun K so groß, dass $n_k > N$ für alle $k > K$ gilt, so erhalten wir mit der Dreiecksungleichung

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \tag{2.3.4-A}$$

mit einem $n_k > N$. Also konvergiert die gesamte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenso gegen x. □

Das Cauchykriterium wird sich im Weiteren als sehr nützlich erweisen. Es ist zentral für Konvergenzbeweise unendlicher Summen und Produkte, wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden. Es ist aber auch verallgemeinert auf metrische Räume von Bedeutung. Hier nimmt es die Form einer Definition an:

✍ **2.3.5 Definition.** *Ein metrischer Raum (M, d) heißt* vollständig*, falls jede Cauchyfolge in (M, d) in M konvergiert.*

⚒ **2.3.6 Beispiele.** Sowohl $\mathbb{R}$ als auch $\mathbb{C}$ sind vollständig.

Der Körper $\mathbb{Q}$ versehen mit der Abstandsmetrik ist nicht vollständig. Ein Beispiel dafür ist die rekursiv definierte Folge

$$x_1 = 2, \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right). \tag{2.3.6-A}$$

Diese besteht aus positiven rationalen Zahlen, ist nach unten durch 1 beschränkt

$$x_{n+1}^2 - 2 = \frac{1}{4}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)^2 - 2 = \frac{1}{4}\left(x_n - \frac{2}{x_n}\right)^2 > 0 \tag{2.3.6-B}$$

und damit monoton

$$x_{n+1} - x_n = \frac{2 - x_n^2}{2x_n} < 0 \tag{2.3.6-C}$$

und somit in $\mathbb{R}$ konvergent. Allerdings erfüllt der Grenzwert $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ auf Grund der Grenzwertsätze

$$x = \frac{x^2 + 2}{2x} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 = 2 \tag{2.3.6-D}$$

und kann also nicht in $\mathbb{Q}$ liegen. Damit ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine in $\mathbb{Q}$ nicht konvergente Cauchyfolge.

✂ **Ergänzung.** Während wir in Kapitel 1 die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ über Dedekindschnitte oder Intervallschachtelungen definiert haben, können wir nach Cauchy auch das Cauchykriterium direkt nutzen. Dazu betrachten wir die Menge

$$\mathrm{CF}(\mathbb{Q}) := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \mid (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Cauchy}\} \tag{2.3.6-E}$$

der rationalen Cauchyfolgen und definieren auf dieser Menge eine Äquivalenzrelation[4]

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0. \tag{2.3.6-F}$$

[4] $\mathbb{Q}$ ist auch ohne die Definition von $\mathbb{R}$ ein metrischer Raum. Man muß dabei in der Definition der 'Metrik' nur die zulässigen Abstände auf rationale Zahlen einschränken....

Dann kann man $\mathbb{R} := \mathrm{CF}(\mathbb{Q})/_\sim$ definieren. Die Rechenoperationen sind in diesem Fall einfacher zu erhalten, Addition und Multiplikation in $\mathbb{R}$ entsprechen gerade die gliedweise Addition und Multiplikation der entsprechenden Folgen

$$[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] + [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}] = [(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}], \qquad [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \cdot [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}] = [(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}]. \tag{2.3.6-G}$$

Es ist leicht zu sehen, dass diese Definition nur von den Äquivalenzklassen und nicht von den Repräsentanten abhängt. Wiederum ist $\mathbb{R}$ geordnet,

$$[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] < [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}] \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \exists_{N\in\mathbb{N}}\exists_{\delta>0}\forall_{n>N} \quad x_n + \delta < y_n, \tag{2.3.6-H}$$

und wir können durch

$$d([(x_n)_{n\in\mathbb{N}}], [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}]) = [(|x_n - y_n|)_{n\in\mathbb{N}}] = |[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] - [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}]| \tag{2.3.6-I}$$

auf $\mathbb{R}$ eine Metrik definieren. Hierbei ist natürlich wiederum $|[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]| = \max\{[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}], -[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]\}$. Weiterhin liefern Äquivalenzklassen konstanter Folgen eine Einbettung von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$.

Alle diese verschiedenen Konstruktionen der reellen Zahlen sind äquivalent, liefern also ein Modell für den Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen mit den gleichen Eigenschaften.

2.4 Reihen

2.4.1. Grenzwerte erlauben es, Rechenoperationen auch 'unendlich' oft durchzuführen. So kann man über Folgen und deren Grenzwerte unendliche Produkte

$$\prod_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} a_k \tag{2.4.1-A}$$

oder unendliche Summen

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \tag{2.4.1-B}$$

definieren. Während erstere gelegentlich auftreten, gute Übungsaufgaben erlauben und sonst ein Nischendasein fristen, sind unendliche Summen zentral in der Analysis. Deshalb – und weil die Notation mit mehreren Bedeutungen überladen ist – eine eigene Definition. Sei im weiteren $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

✍ **2.4.2 Definition.** *Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ eine Folge. Eine* Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{2.4.2-A}$$

ist die formale Notation für die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ihrer Partialsummen

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k. \tag{2.4.2-B}$$

Wir sagen eine Reihe ist konvergent*, falls die Partialsummenfolge konvergiert und definieren dann*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \tag{2.4.2-C}$$

als Wert der Reihe. *Eine nicht konvergente Reihe heißt* divergent.

Wir bezeichnen die Zahlen a_k als die Glieder *der Reihe.*

✂ **Ergänzung.** Man darf also

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \tag{2.4.2-D}$$

schreiben und den Ausdruck als Reihe bezeichnen, auch wenn er keine Zahl darstellt. Offenbar gilt in diesem Beispiel $s_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n-1)}{2} \longrightarrow +\infty$. Jedoch sollte man beim Rechnen mit Reihen darauf achten, dass die Reihen auch konvergieren.

Die Mehrdeutigkeit des Begriffs Reihe ist historisch bedingt. Reihen sind älter als der Konvergenzbegriff in der Analysis. Vor diesem Hintergrund stellt sich auch eine allgemeinere Frage: Ist Konvergenz die einzig sinnvolle Möglichkeit einer Reihe eine Zahl zuzuordnen, oder kann man auch konsistent weiteren divergenten Reihen Zahlen zuordnen ohne nützliche Rechenregeln zu verlieren? Die Antwort ist ja, wir werden dem aber hier nicht weiter nachgehen.[5]

⚒ **2.4.3 Beispiel.** Die geometrische Summenformel (1.6.**8-A**) liefert insbesondere

$$(a-1)\sum_{k=0}^{n} a^k = a^{n+1} - 1 \tag{2.4.3-A}$$

und damit eine explizite Form der Partialsummen

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}. \tag{2.4.3-B}$$

Die rechte Seite konvergiert für $n \to \infty$ genau dann, wenn $|a| < 1$ ist. Es gilt also für die *geometrische Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}, \qquad |a| < 1. \tag{2.4.3-C}$$

Für alle anderen $a \in \mathbb{C}$ ist die geometrische Reihe divergent.

Letzteres hätte man auch direkt mit dem nachfolgenden Ausschlusskriterium gesehen, eine Reihe deren Glieder keine Nullfolge bilden, kann nicht konvergent sein.

☞ **2.4.4 Satz** (Nullfolgenkriterium). *Wenn $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, dann gilt $a_k \longrightarrow 0$.*

Beweis. Bezeichne $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ die Folge der Partialsummen der konvergenten Reihe. Dann ist diese als konvergente Folge Cauchy und für jedes $\varepsilon > 0$ finden wir ein N, so dass insbesondere für $n > N$ stets $|a_{n+1}| = |s_{n+1} - s_n| < \varepsilon$ gilt. Damit folgt aber $a_n \longrightarrow 0$. □

Nicht alle Reihen mit Nullfolgen als Gliedern konvergieren. Dazu auch ein erstes Beispiel.

[5] Wer mehr wissen will, der schaue in G.H. Hardy's *Divergent series*. Die Einleitung liefert auch einige interessante Beispiele und historische Bezüge. Formeln der Form $\sum_{k=1}^{\infty} k = -\frac{1}{12}$ werden wir hier in dieses Skript nicht außerhalb von Fußnoten einbauen, im Kontext dieser Vorlesung ist das einfach falsch.

2.4.5 Beispiel. Die *harmonische Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \tag{2.4.5-A}$$

ist divergent. Da die Glieder der Reihe positive Zahlen sind, ist die Folge der Partialsummen monoton wachsend und es genügt, ihre Unbeschränktheit zu zeigen. Dazu schätzen wir Reihenglieder nach unten ab, und zwar

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots\\
\geq\ &\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots\\
\geq\ &\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots
\end{aligned} \tag{2.4.5-B}$$

und die Divergenz folgt.

2.4.6 Beispiel. Aus konvergenten Folgen kann man konvergente Reihen bauen. Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert x, so liefert $a_k := x_k - x_{k+1}$ Glieder der zugehörigen *Teleskopreihe*

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty} a_k,\\
&\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k+1}) = x_1 - x_{n+1} \longrightarrow x_1 - x,
\end{aligned} \tag{2.4.6-A}$$

die damit gegen $x_1 - x$ konvergiert. In Anwendungen muss man hier oft umgekehrt denken und aus den Gliedern die zugehörige Folge erkennen. So gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1, \tag{2.4.6-B}$$

da die Folge $\frac{1}{k}$ eine Nullfolge bildet.

2.5 Konvergenzkriterien für Reihen

Viele wichtige Konvergenzkriterien für Reihen ergeben sich aus dem Cauchykriterium oder dem Intervallschachtelungsprinzip.

2.5.1 Satz (Leibniz[6]-Kriterium). *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge. Dann konvergiert die Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k \tag{2.5.1-A}$$

[6] Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646–1716

und ihre Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k \tag{2.5.1-B}$$

erfüllen

$$s_{2\ell-1} \leq s_{2\ell+1} \leq s_{2\ell+2} \leq s_{2\ell}. \tag{2.5.1-C}$$

Beweis. Die Ungleichung (2.5.1-C) folgt per Induktion. Damit bilden die Intervalle $[s_{2\ell+1}, s_{2\ell}]$ eine Intervallschachtelung; $(s_{2\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend und $(s_{2\ell+1})_{\ell\in\mathbb{N}}$ kleiner und monoton wachsend. Der Induktionsanfang ergibt sich zu

$$s_1 = -a_1 \leq -a_1 + a_2 = s_2. \tag{2.5.1-D}$$

Angenommen, $s_{2\ell-1} \leq s_{2\ell}$ ist für ein ℓ schon gezeigt. Dann folgt auf Grund der Monotonie der $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$

$$s_{2\ell} - s_{2\ell-1} = a_{2\ell} \geq a_{2\ell+1} \tag{2.5.1-E}$$

und damit

$$s_{2\ell-1} \leq s_{2\ell} - a_{2\ell+1} = s_{2\ell+1} \leq s_{2\ell}. \tag{2.5.1-F}$$

Weiter impliziert $s_{2\ell} - s_{2\ell+1} = a_{2\ell+1} \geq a_{2\ell+2}$ entsprechend

$$s_{2\ell+1} \leq s_{2\ell+1} + a_{2\ell+2} = s_{2\ell+2} \leq s_{2\ell}. \tag{2.5.1-G}$$

Mit dem Induktionsprinzip folgt die Aussage für alle $\ell \in \mathbb{N}$ und die Intervalle $[s_{2\ell-1}, s_{2\ell}]$ für $\ell \in \mathbb{N}$ sind ineinander geschachtelt.

Da ebenso $s_{2\ell} - s_{2\ell-1} = a_{2\ell} \longrightarrow 0$ gilt, handelt es sich um eine Intervallschachtelung und beide gegen Intervallgrenzen streben gegen denselben Grenzwert, den Wert der Reihe. □

✂ **Ergänzung.** Die Voraussetzungen im Leibnizkriterium sind wichtig. Ist die Folge der Glieder $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht monoton, so liefert das Kriterium keine Aussage. Jedoch wird die Monotonie nicht für alle Glieder benötigt, es genügt wenn die Glieder ab einem gewissen Anfangsindex monoton sind. Konvergenz folgt also auch, wenn nur

$$\exists_{N\in\mathbb{N}} \forall_{n>N} \quad 0 \leq a_{n+1} < a_n \tag{2.5.1-H}$$

gilt. Der Beweis folgt durch Abspalten einer endlichen Summe,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{N} a_k + \sum_{k>N} a_k \tag{2.5.1-I}$$

und Leibniz liefert der Konvergenz der verbleibenden Reihe.

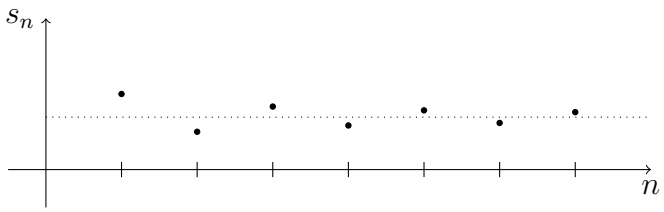
⚒ **2.5.2 Beispiel.** Das Leibnizkriterium impliziert sofort die Konvergenz der Reihe

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}. \tag{2.5.2-A}$$

Es verrät uns aber nicht, wogegen diese Reihe konvergiert. Allerdings lässt sich der Reihenwert gut abschätzen, es handelt sich um eine Zahl x zwischen

$$\frac{1}{2} < \frac{7}{12} < \frac{37}{60} < \cdots < x < \cdots < \frac{47}{60} < \frac{5}{6} < 1. \tag{2.5.2-B}$$

Den genauen Wert werden wir später bestimmen.



✍ **2.5.3 Definition.** *Eine Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *heißt* absolut konvergent*, wenn die Reihe ihrer Beträge* $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *konvergiert.*

☞ **2.5.4 Satz** (Majorantenkriterium)**.** *Sei* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *und gelte ab einem* $N \in \mathbb{N}$

$$\forall_{k\geq N} \quad |a_k| \leq b_k, \tag{2.5.4-A}$$

wobei die Reihe

$$\sum_{k=N}^{\infty} b_k \tag{2.5.4-B}$$

konvergiere. Dann ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergent und es gilt*

$$\left|\sum_{k=N}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=N}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=N}^{\infty} b_k. \tag{2.5.4-C}$$

Die Reihe $\sum_{k=N}^{\infty} b_k$ *wird dabei als konvergente* Majorante *der Reihe* $\sum_k a_k$ *bezeichnet.*

Beweis. Die Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \tag{2.5.4-D}$$

bilden wegen

$$\begin{aligned} |s_m - s_n| &= \left|\sum_{k=1}^{m} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| \leq \sum_{k=N}^{\infty} b_k \longrightarrow 0, \qquad N \to \infty \end{aligned} \tag{2.5.4-E}$$

für $m > n > N$ eine Cauchyfolge. Damit konvergiert die Reihe. □

☞ **2.5.5 Korollar.** *Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent.*

Das war wirklich zu zeigen! Nur weil in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ jede Cauchyfolge konvergent ist, konvergiert auch jede absolut konvergente Reihe.

⚒ **2.5.6 Beispiel.** Wegen $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$ für $k \geq 2$ handelt es sich bei der nach Beispiel 2.4.6 konvergenten Reihe

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = 1 \tag{2.5.6-A}$$

um eine konvergente Majorante für die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}. \tag{2.5.6-B}$$

Damit ist letztere konvergent. Das Majorantenkriterium beantwortet nicht die Frage nach dem Wert dieser Reihe. Die Bestimmung des Grenzwertes bezeichnet man als das Basler Problem; gelöst wurde es durch Leonhard Euler[7]. Wir werden die Lösung später zu gegebener Zeit nachholen.

Typische Vergleichsreihen für das Majorantenkriterium sind geometrische Reihen. Zur Formulierung benötigen wir einen weiteren Grenzwertbegriff für reelle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ und definieren den *limes superior*

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k>n} x_k \tag{2.5.6-C}$$

und entsprechend den den *limes inferior*

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k>n} x_k. \tag{2.5.6-D}$$

Beide existieren stets, es handelt sich dabei um den größten bzw. den kleinsten eigentlichen oder uneigentlichen Grenzwert den Teilfolgen von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ annehmen können.

☞ **2.5.7 Satz** (Wurzelkriterium von Cauchy). *Falls*

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1 \tag{2.5.7-A}$$

gilt, konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *absolut. Gilt andererseits*

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1, \tag{2.5.7-B}$$

so ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *divergent.*

Falls der limes superior gleich 1 ist, so trifft das Wurzelkriterium keine Aussage. In diesem Fall gibt es sowohl konvergente als auch divergente Reihen. Sowohl für die konvergente Reihe (2.4.**6-B**), als auch für die divergente harmonische Reihe (2.4.**5-A**) liefert das Kriterium den Wert 1.

Beweis. Angenommen, es gilt (2.5.**7-A**). Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} + \varepsilon =: q < 1 \tag{2.5.7-C}$$

und nach Definition des limes superior damit ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall_{k>N} \quad \sqrt[k]{|a_k|} \le q. \tag{2.5.7-D}$$

[7] Leonhard Euler, 1707–1783

Das wiederum impliziert für diese k

$$|a_k| \leq q^k \tag{2.5.7-E}$$

und damit ist die geometrische Reihe $\sum_{k=N+1}^{\infty} q^k$ eine konvergente Majorante für den Reihenrest $\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k$ und Konvergenz folgt.

Gilt andererseits (2.5.**7-B**)

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} =: q > 1, \tag{2.5.7-F}$$

so existiert eine Indexfolge $(k_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ mit

$$\lim_{\ell\to\infty} \sqrt[k_\ell]{|a_{k_\ell}|} = q. \tag{2.5.7-G}$$

Damit gibt es aber für $\varepsilon > 0$ mit $q - \varepsilon \geq 1$ auch stets ein L

$$\forall_{\ell>L} \quad |a_{k_\ell}| \geq (q-\varepsilon)^\ell. \tag{2.5.7-H}$$

Da aber $(q-\varepsilon)^\ell$ damit keine Nullfolge bildet, kann auch a_k keine Nullfolge mehr bilden und die Divergenz ist gezeigt. □

Oft ist nachfolgendes Kriterium einfacher anzuwenden, allerdings benötigt es mehr Voraussetzungen und ist schwächer als das vorherige.

☞ **2.5.8 Satz** (Quotientenkriterium, d'Alembertsches[8] Kriterium). *Gilt $a_k \neq 0$ für alle k und*

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < 1 \tag{2.5.8-A}$$

so ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent. Gilt andererseits

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} > 1 \tag{2.5.8-B}$$

so ist die Reihe divergent.

Beweis. Gilt (2.5.**8-A**), so existiert ein $q < 1$ mit $\limsup_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < q$ und nach Definition des limes superior existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall_{k>N} \quad \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < q. \tag{2.5.8-C}$$

Damit folgt aber $|a_{k+1}| < q|a_k|$ und per Induktion $|a_{k+\ell}| \leq q^\ell |a_k|$. Damit erhalten wir aber wiederum eine geometrische Reihe als konvergente Majorante für den Reihenrest ab $N+1$ und absolute Konvergenz folgt.

Ist andererseits (2.5.**8-B**) erfüllt, so existiert ein $q > 1$ mit $\liminf_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} > q$ und damit ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall_{k>N} \quad \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} > q \tag{2.5.8-D}$$

und somit $|a_{k+\ell}| > q^\ell |a_k|$. Für $\ell \to \infty$ strebt diese untere Abschätzung aber gegen $+\infty$ und die Folge der a_k kann keine Nullfolge sein. Die Reihe ist also divergent. □

[8] Jean-Baptiste le Rond d'Alembert, 1717–1783

2.5.9 Beispiel. Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \tag{2.5.9-A}$$

ist konvergent. Dazu benutzen wir das Quotientenkriterium für $a_k = \frac{1}{k!}$ und wegen

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} = \limsup_{k\to\infty} \frac{k!}{(k+1)!} = \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{(k+1)} = 0 \tag{2.5.9-B}$$

folgt Konvergenz.

2.5.10 Beispiel. Die von einem Parameter $z \in \mathbb{C}$ abhängende Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} \tag{2.5.10-A}$$

konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$. Um dies zu sehen, nutzen wir wiederum das Quotientenkriterium. Bezeichnet man $a_k = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}$, so gilt

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{(2k+1)!}{(2k+3)!}|z|^2 = \frac{1}{(2k+2)(2k+3)}|z|^2 \longrightarrow 0 \tag{2.5.10-B}$$

für $k \to \infty$ und alle $z \in \mathbb{C}$.

Ergänzung. Auch *Dezimaldarstellungen* reeller Zahlen sind Reihen. Wir betrachten dazu vorerst nur Zahlen aus $[0,1)$, alle weiteren ergeben sich durch Addition ganzer Zahlen und damit durch das Ergänzen von 'Vorkommastellen'. Sei dazu $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Ziffern, $\alpha_k \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Dieser Folge ordnen wir die Zahl

$$0{,}\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots := \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k 10^{-k} \tag{2.5.10-C}$$

zu. Dabei ist die Zahlendarstellung auf der linken Seite gerade durch die rechtsstehende Reihe definiert. Für jede Wahl der Ziffernfolge konvergiert die Reihe. Dazu nutzen wir das Majorantenkriterium. Alle Ziffern sind kleiner oder gleich als 9 und liefert die geometrische Reihe $\sum_k 9 \cdot 10^{-k}$ eine konvergente Majorante. Es gilt also ebenso wie erwartet

$$0 \le \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k 10^{-k} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k} = 9\left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}} - 1\right) = 9\frac{1}{9} = 1. \tag{2.5.10-D}$$

Warum haben wir Dezimaldarstellungen nicht eher im Skript erwähnt? Das hat zwei Gründe, zum Einen benötigt man Reihen (oder Intervallschachtelungen) um die durch Dezimaldarstellungen bestimmten reellen Zahlen zu definieren. Andererseits bestimmen Zahlen mitunter 'ihre' Dezimaldarstellungen nicht eindeutig. Wir können reelle Zahlen also nicht einfach mit Dezimaldarstellungen identifizieren. Das sieht man am Einfachsten an obiger Rechnung. Es gilt

$$0{,}999999\ldots = \sum_{k=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-k} = 1 = 1{,}00000\ldots \tag{2.5.10-E}$$

und allgemein haben alle Dezimalzahlen, die auf $\overline{9} = 9999\ldots$ enden, eine zweite Darstellung mit der Endung $\overline{0} = 0000\ldots$.

Jede reelle Zahl besitzt allerdings mindestens eine Dezimaldarstellung. Die Abbildung

$$\{0,\ldots,9\}^{\mathbb{N}} \ni (\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k 10^{-k} \in [0,1) \tag{2.5.10-F}$$

ist also surjektiv. Sei dazu $x \in [0,1)$ gegeben. Zerlegt man nun für jedes $k \in \mathbb{N}$ das Intervall $[0,1)$ in die 10^k Teilintervalle

$$I_{k,j} = [j10^{-k}, (j+1)10^{-k}), \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, 10^k - 1, \tag{2.5.10-G}$$

so muss x in genau einem der Teilintervalle liegen. Die Folge der Teilintervalle, in denen x liegt, liefert nun eine Intervallschachtelung zur Bestimmung von x (wenn man die Intervalle am oberen Ende noch abschließt und nutzt, dass $10^{-k} \longrightarrow 0$ gilt). Da dabei die unteren Intervallgrenzen gerade der Dezimalzahl 0,...j (führende Nullen vor j auf k Stellen ergänzt) und damit der k-ten Partialsumme einer Dezimaldarstellung von x entsprechen, haben wir insbesondere eine mögliche Dezimaldarstellung von x gefunden.

✂ **Ergänzung.** Neben Dezimaldarstellungen kann man natürlich auch Darstellungen bezüglich anderer Basen nutzen. Gebräuchlich sind dabei insbesondere *Binärdarstellungen*

$$x = \sum_{k=-N}^{\infty} \beta_k 2^{-k}, \qquad \beta_k \in \{0,1\}, \tag{2.5.10-H}$$

und *Ternärdarstellungen*

$$x = \sum_{k=-N}^{\infty} \beta_k 3^{-k}, \qquad \beta_k \in \{0,1,2\}. \tag{2.5.10-I}$$

Alles oben gesagte gilt natürlich analog auch für diese Formen.

Sowohl Wurzel als auch Quotientenkriterium liefern geometrische Reihen als konvergente Majoranten. Um auch langsamer fallende Reihen untersuchen zu können, benötigt man weitere Vergleichsreihen. Ein hilfreicher Trick ist dabei folgender Satz:

☞ **2.5.11 Satz** (Cauchyscher Verdichtungssatz). *Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ monoton fallende Nullfolge. Dann gilt*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \textit{konvergent} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{\ell=1}^{\infty} 2^\ell a_{2^\ell} \quad \textit{konvergent.} \tag{2.5.11-A}$$

Beweis. Die Aussage folgt wiederum aus dem Majorantenkriterium. Da die Glieder monoton fallend sind, kann durch die Abschätzung

$$a_k \le a_{2^\ell}, \qquad k = 2^\ell, 2^\ell + 1, \ldots 2^{\ell+1} - 1, \tag{2.5.11-B}$$

eine Majorante konstruiert werden. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert also, falls die Majorante

$$a_1 + \underbrace{a_2 + a_3}_{\le 2a_2} + \underbrace{a_4 + a_5 + a_6 + a_7}_{\le 4a_4} + \cdots, \tag{2.5.11-C}$$

also die Reihe $\sum_{\ell=1}^{\infty} 2^\ell a_{2^\ell}$ konvergiert. Andererseits gilt auch die Abschätzung

$$a_k \ge a^{2^{\ell+1}}, \qquad k = 2^\ell + 1, 2^\ell + 2, \ldots 2^{\ell+1} - 1, 2^{\ell+1} \tag{2.5.11-D}$$

und damit besitzt die Reihe $\sum_{\ell=1}^{\infty} 2^\ell a_{2^\ell} = a_1 + 2\sum_{\ell=1}^{\infty} 2^{\ell-1} a_{2^\ell}$ (wobei die Summanden entsprechend Vielfachheit nacheinander ausgeschrieben sind) wegen

$$a_1 + a_2 + \underbrace{a_4 + a_4}_{\le a_3 + a_4} + \underbrace{a_8 + a_8 + a_8 + a_8}_{\le a_5 + a_6 + a_7 + a_8} + \cdots \tag{2.5.11-E}$$

die Majorante $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Die Behauptung folgt. □

2.5.12 Beispiel. Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \tag{2.5.12-A}$$

konvergiert für alle (rationalen[9]) $s > 1$ absolut. Da n^{-s} monoton fällt, darf der Verdichtungssatz angewendet werden. Es reicht also, die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} 2^\ell \frac{1}{2^{s\ell}} = \sum_{\ell=1}^{\infty} 2^{(1-s)\ell} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \left(2^{1-s}\right)^\ell \tag{2.5.12-B}$$

zu untersuchen. Dies ist eine geometrische Reihe und da $2^{1-s} < 1$ genau dann gilt, wenn $s > 1$ ist, folgt die Behauptung.

Ebenso folgt aus dem Verdichtungssatz die Divergenz obiger Reihe für $s \in (0, 1]$.

2.6 Die Eulersche Zahl e

2.6.1 Beispiel. Die Folge

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \tag{2.6.1-A}$$

ist monoton wachsend und beschränkt. Um letzteres zu zeigen, betrachten wir aber besser die zweite Folge

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \tag{2.6.1-B}$$

die wegen $1 + \frac{1}{n} > 1$ offenbar $y_n > x_n$ erfüllt und zeigen, dass diese monoton fallend ist. Beides folgt aus der Bernoullischen Ungleichung (1.9.10-A). Es gilt

$$\begin{aligned} x_{n-1} < x_n \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}} < \frac{(n+1)^n}{n^n} \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{n-1}{n} \frac{n^n}{(n-1)^n} < \frac{(n+1)^n}{n^n} \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{n-1}{n} < \frac{(n^2-1)^n}{(n^2)^n} \\ &\Longleftrightarrow \quad \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n > 1 - \frac{1}{n} \end{aligned} \tag{2.6.1-C}$$

und letzteres folgt aus Bernoulli. Analog ergibt sich

$$y_{n-1} > y_n \quad \Longleftrightarrow \quad \left(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\right)^n > 1 + \frac{1}{n} \tag{2.6.1-D}$$

und Bernoulli liefert wiederum mit $\frac{n}{n^2-1} > \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ die Behauptung. Damit konvergieren sowohl $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als auch $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wegen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 \tag{2.6.1-E}$$

[9] wenn wir es später sauber definieren auch alle reellen

besitzen beide denselben Grenzwert, den wir mit e bezeichnen wollen. Zu Ehren von Leonhard Euler wird e als die *Eulersche Zahl* bezeichnet. Es gilt $2 < \mathrm{e} < 3$.

Die gerade gezeigten Grenzwerte sind wichtig, allerdings eher unpraktisch, um die Zahl e wirklich zu berechnen. Dazu bietet sich die Nutzung einer Reihendarstellung an.

☞ **2.6.2 Satz** (Euler). *Es gilt*

$$\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \tag{2.6.2-A}$$

Beweis. Die Konvergenz der Reihe haben wir schon in Beispiel 2.5.9 gesehen; es bleibt die Gleichheit der Grenzwerte zu zeigen. Mit dem binomischen Lehrsatz folgt

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n^{-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n}\cdot\frac{1}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\prod_{\ell=1}^{k-1}\left(1-\frac{\ell}{n}\right) \le \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!},\end{aligned} \tag{2.6.2-B}$$

da alle Faktoren des Produktes zwischen 0 und 1 liegen. Weiter gilt für $N > n$

$$\left(1+\frac{1}{N}\right)^N = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\prod_{\ell=1}^{k-1}\left(1-\frac{\ell}{N}\right) + \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k!}\prod_{\ell=1}^{k-1}\left(1-\frac{\ell}{N}\right) \tag{2.6.2-C}$$

und für $N \to \infty$ strebt die erste Summe gegen $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$, während die zweite nichtnegativ ist. Also folgt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{1}{N}\right)^N \ge \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \tag{2.6.2-D}$$

und der Grenzwert der Reihe muss mit dem Grenzwert der Folge übereinstimmen. □

Die *Exponentialreihe* $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ konvergiert deutlich schneller gegen e als die angegebenen Folgen. Das ist praktisch um e zu berechnen, erlaubt uns aber auch weitere Eigenschaften der Zahl e zu untersuchen. Dazu zeigen wir zuerst eine Abschätzung für die Konvergenzgeschwindigkeit der Reihe. Es gilt

☞ **2.6.3 Lemma.** *Der Reihenrest der Exponentialreihe erfüllt die Abschätzung*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!} = \frac{1}{n!}\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdots(n+\ell)} < \frac{1}{n!}\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^\ell} = \frac{1}{n\,n!}. \tag{2.6.3-A}$$

☞ **2.6.4 Satz** (Euler). *Die Eulersche Zahl* e *ist nicht rational.*

Beweis. Wir zeigen dies indirekt und nehmen an, dass es natürliche Zahlen $p, q \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = \frac{p}{q} \tag{2.6.4-A}$$

gibt. Wegen $2 < \mathrm{e} < 3$ muss dabei $q \geq 2$ gelten. Weiter gilt auf Grund der Monotonie der Partialsummen und der Restabschätzung (2.6.**3-A**)

$$\sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} < \mathrm{e} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} < \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} + \frac{1}{q\,q!} \tag{2.6.4-B}$$

und damit

$$0 < \frac{p}{q} - \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} < \frac{1}{q\,q!}. \tag{2.6.4-C}$$

Nach Multiplikation mit $q!$ folgt daraus

$$0 < p(q-1)! - \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} < \frac{1}{q}, \tag{2.6.4-D}$$

was aber nicht sein kann. Alle verbleibenden Summanden sind natürliche Zahlen, ihre Summe kann also nicht zwischen 0 und $1/q$ liegen. □

2.7 Umordnen von Reihen

2.7.1. Spielt die Reihenfolge der Summation bei einer Reihe eine Rolle? Man könnte meinen, die Kommutativität der Addition beantwortet diese Frage direkt und wir dürfen in Reihen in beliebiger Reihenfolge summieren. Dem ist nicht so: einer konvergenten aber nicht absolut konvergenten Reihe wird durch Umordnen mitunter ein anderer Grenzwert zugeordnet.

✍ **2.7.2 Definition.** *Eine Reihe heißt* bedingt konvergent*, falls sie konvergiert aber nicht absolut konvergiert.*

☞ **2.7.3 Satz** (Riemannscher Umordnungssatz[10]). *Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ eine reelle Folge, so dass $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bedingt konvergiert. Dann gibt es zu jeder Zahl $x \in \mathbb{R}$ eine Bijektion $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} = x. \tag{2.7.3-A}$$

Beweisskizze. Da die Reihe nicht absolut konvergiert, ist mindestens eine der beiden Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \min\{a_k, 0\}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \max\{a_k, 0\} \tag{2.7.3-B}$$

bestimmt divergent (und nach den Rechenregeln für konvergente Reihen damit beide divergent). Es genügt, in diesem Fall eine passende Umordnung der Reihe zu konstruieren. Dazu gehen wir wie folgt vor:

- wir wählen zuerst so viele Glieder der ersten der beiden Reihen, bis deren Partialsumme *kleiner* als x ist,

[10] Bernhard Riemann, 1826–1866

- danach addieren wir so viele Glieder der zweiten Reihe, bis die Partialsumme *größer* als x ist,
- danach addieren wir so viele Glieder der ersten Reihe, bis die Partialsumme wieder *kleiner* als x ist
- etc.

Auf diese Weise ergibt sich eine Umordnung der Ausgangsreihe. Da die Ausgangsreihe bedingt konvergent war, gilt $a_k \longrightarrow 0$ für $k \to \infty$. Damit bilden die abwechselnd gewählten Partialsummen eine Intervallschachtelung für die Zahl x und die umgeordnete Reihe konvergiert gegen x. □

Ganz entsprechend findet man auch Umordnungen $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} = +\infty \tag{2.7.3-C}$$

und Umordnungen $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} = -\infty. \tag{2.7.3-D}$$

Bedingt konvergente Reihen können durch Umordnen also nicht nur den Wert ändern, sondern sogar ihr Konvergenzverhalten. Für absolut konvergente Reihen ist das anders.

☞ **2.7.4 Satz.** *Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent. Dann gilt für jede Bijektion $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k. \tag{2.7.4-A}$$

Beweis. Es gilt $\sigma(k) \longrightarrow \infty$ für $k \to \infty$, da für jedes $N \in \mathbb{N}$ und mit der Zahl

$$K_N = \max \sigma^{-1}(\{1, \ldots, N\}) \geq N \tag{2.7.4-B}$$

stets $\sigma(k) > N$ für $k > K_N$ gilt.

Wir betrachten nun die Differenz der Partialsummen

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)} - \sum_{k=1}^{n} a_k \right| &\leq \sum_{k \in \sigma(\{1,\ldots,n\}) \setminus \{1,\ldots,n\}} |a_k| + \sum_{k \in \{1,\ldots,n\} \setminus \sigma(\{1,\ldots,n\})} |a_k| \\ &\leq \sum_{k>n} |a_k| + \sum_{\ell>n} |a_{\sigma(\ell)}|, \end{aligned} \tag{2.7.4-C}$$

wobei wir zuerst die gemeinsamen Summanden entfernt und dann die Dreiecksungleichung angewendet haben. Als Reihenreste streben die beiden verbleibenden Summen für $n \to \infty$ gegen Null. Damit konvergieren beide Reihen gegen denselben Grenzwert. □

2.8 Exponentialreihe und Exponentialfunktion

2.8.1. Die Reihe

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \tag{2.8.1-A}$$

konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut und bestimmt eine Funktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die wir als (komplexe) *Exponentialfunktion* bezeichnen. Im Folgenden untersuchen wir einige Eigenschaften dieser Funktion.

2.8.2. Die Reihe kann als absolut konvergente Reihe umsortiert werden, deswegen gilt

$$\begin{aligned} \exp(z+w) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z+w)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+\ell=n} \frac{1}{k!} z^k \frac{1}{\ell!} w^\ell = \exp(z)\exp(w) \end{aligned} \tag{2.8.2-A}$$

und wir erhalten für die Funktion exp die Identität

$$\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w) \tag{2.8.2-B}$$

für alle $z, w \in \mathbb{C}$. Da offenbar auch $\exp(0) = 1$ gilt, folgt insbesondere

$$\exp(z) \neq 0, \tag{2.8.2-C}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$, sowie

$$\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}. \tag{2.8.2-D}$$

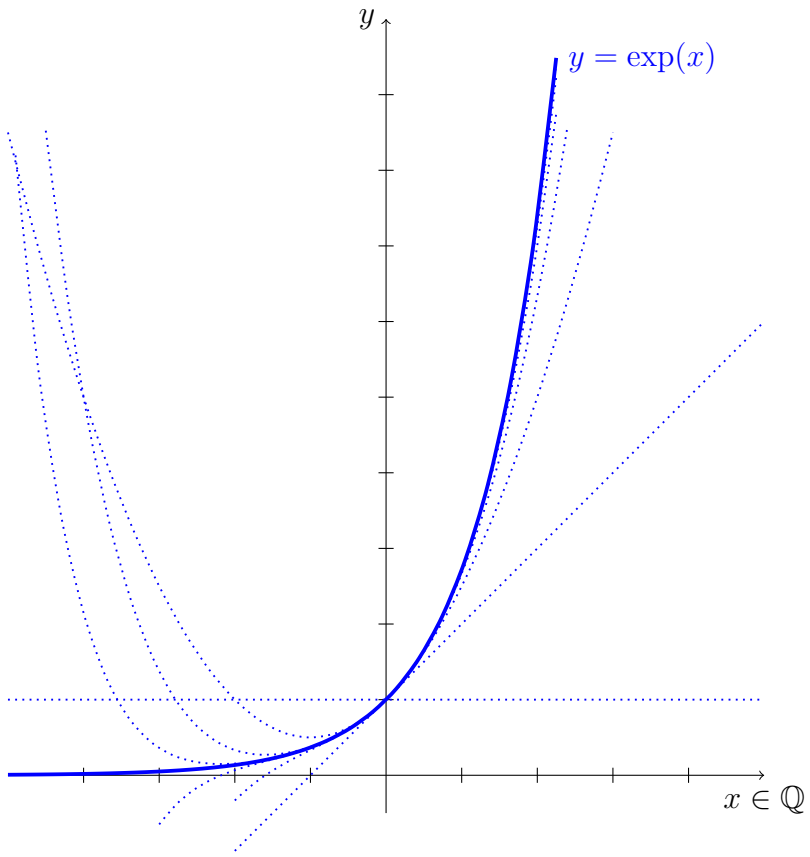
2.8.3. Für spezielle Werte kann man die Exponentialfunktion auch direkt ausrechnen. Dies wollen wir kurz ausführen. Es gilt $\exp(1) = \mathrm{e}$ (da die Eulersche Zahl e ja genau über die Exponentialreihe definiert ist) und damit ebenso

$$\exp(k) = \mathrm{e}^k, \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{2.8.3-A}$$

Für reelle $x > 0$ folgt $\exp(x) > 0$ (als Reihe über positive Summanden) und wegen (2.8.2-D) auch gilt $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit kann man aber auch weitere Werte bestimmen. Da $\exp(\frac{p}{q})^q = \exp(p) = \mathrm{e}^p$ gilt, folgt

$$\exp(\frac{p}{q}) = \sqrt[q]{\mathrm{e}^p} = \mathrm{e}^{\frac{p}{q}} \tag{2.8.3-B}$$

und für alle rationalen Zahlen liefert die Exponentialfunktion genau die entsprechenden Potenzen der Eulerschen Zahl e. Die erhaltene Funktion entspricht im Reellen der bekannten Exponentialfunktion.



Die gepunkteten Kurven stellen die ersten sieben Partialsummen dar. Für positive x ist die Konvergenz der Exponentialreihe monoton, während sie für negative x alterniert (und für hinreichend große n die Abschätzungen aus dem Leibnizkriterium gelten).

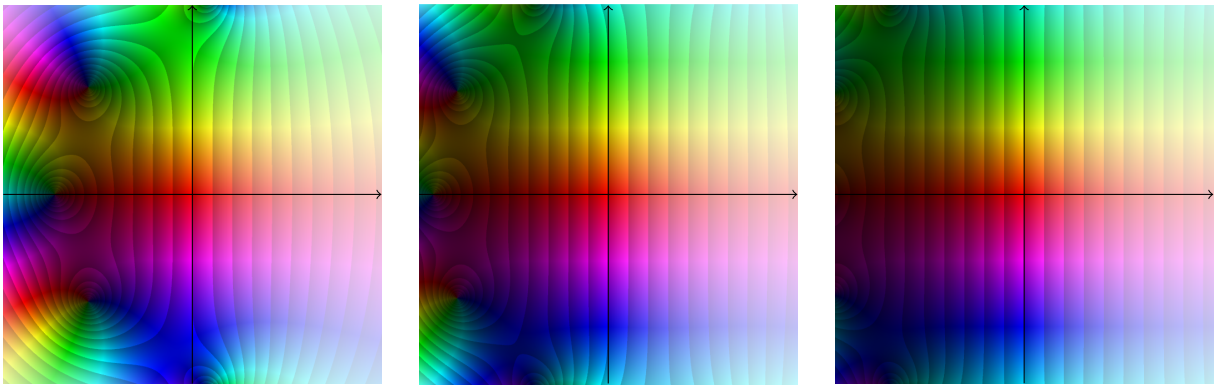
2.8.4. Die Exponentialfunktion erfüllt einige elementare Abschätzungen, die wir später nutzen werden. Für $|z| < 1$ gilt

$$|\exp(z) - 1| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} \leq |z| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = (\mathrm{e} - 1)|z| \tag{2.8.4-A}$$

und

$$|\exp(z) - 1 - z| \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} \leq |z|^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} = (\mathrm{e} - 2)|z|^2. \tag{2.8.4-B}$$

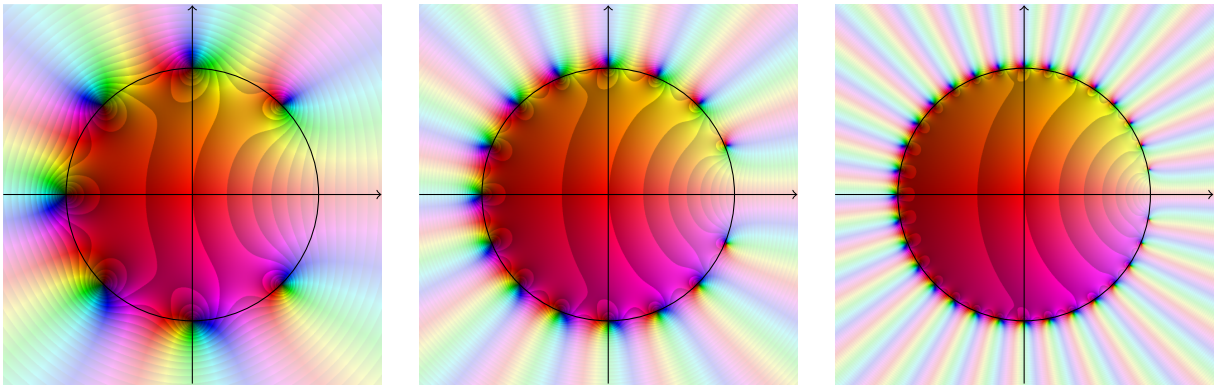
✂ **Ergänzung.** Die Partialsummen der Exponentialreihe kann man sich auf einem Ausschnitt aus $\mathbb{C}$ wieder als Bilder anschauen. Hier dargestellt sind die Summen von jeweils 6, 8 und 10 Termen im Bereich $\{x + \mathrm{i}y \mid x, y \in [-5, 5]\}$. Dabei sieht man an der Konvergenz der Bilder die Konvergenz der Reihe:



Deutlicher als Konvergenz sieht man Divergenz an Bildern. Dargestellt sind die Partialsummen

$$s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k$$

der geometrischen Reihe für $n = 8, 16, 32$ auf $\{x + \mathrm{i}y \mid x, y \in [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]\}$ zusammen mit dem Kreis $|z| = 1$.



3 Stetigkeit und Funktionsgrenzwerte

3.1 Stetigkeit von Funktionen

3.1.1. Funktionen zwischen metrischen Räumen werden als stetig bezeichnet, wenn sie mit Grenzwertbildungen vertauschbar sind, wenn also

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) \tag{3.1.1-A}$$

für konvergente Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt. Sie heißen stetig im Punkt x, wenn (3.1.**1-A**) für alle gegen x konvergenten Folgen gilt.

Auch wenn dies als Definition recht einprägsam erscheint, so ist es doch relativ schwer damit die Stetigkeit einer gegebenen Funktion direkt nachzuweisen. Stattdessen verwenden wir eine Definition (die analog zur Konvergenz von Folgen) auf Ungleichungen basiert.

✍ **3.1.2 Definition.** *Seien (M_1, d_1) und (M_2, d_2) metrische Räume und $f : M_1 \to M_2$ eine Funktion. Die Funktion f heißt* stetig *im Punkt $x \in M_1$, falls*

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{y\in M_1} \quad d_1(x,y) < \delta \implies d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon \tag{3.1.2-A}$$

gilt. Sie heißt stetig auf M_1, *falls sie in jedem Punkt $x \in M_1$ stetig ist.*

⚒ **3.1.3 Beispiele.** Für Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ übersetzen sich die Abschätzungen in der Metrik in Betragsungleichungen. Wir betrachten dazu zwei wichtige Beispiele:

(i) Potenzfunktionen sind stetig. Genauer, für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion $f_n(x) = x^n$ stetig. Um dies zu zeigen betrachten wir die Differenz zweier Funktionswerte

$$f_n(x) - f_n(y) = x^n - y^n = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}. \tag{3.1.3-A}$$

Gilt nun $|y - x| < \delta < 1$, so folgt $|y| \le |x| + 1 =: M$ und damit

$$|f_n(x) - f_n(y)| \le |x-y| n M^{n-1} \le n M^{n-1}\delta < \varepsilon \tag{3.1.3-B}$$

falls $\delta < \frac{\delta}{nM^{n-1}}$ und $\delta < 1$.

(ii) Auf $\mathbb{R}_{>0}$ ist die Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$ stetig. Auch dazu betrachten wir die Differenz zweier Funktionswerte

$$f(x) - f(y) = \sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \tag{3.1.3-C}$$

und erhalten für $|x-y| \le \delta < \frac{1}{2}x$ und damit $0 < \frac{1}{2}x \le y \le \frac{3}{2}x$, dass

$$|f(x)-f(y)| \le |x-y|\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \le \delta\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x/2}} \le \delta\frac{1}{\sqrt{x}} < \varepsilon \qquad (3.1.\mathbf{3\text{-}D})$$

für $\delta < \varepsilon\sqrt{x}$ gilt.

Hier muss man jeweils für gegebenes $\varepsilon > 0$ *ein* eventuell von x abhängendes δ finden. Es geht bei Stetigkeit nicht darum, das optimale δ zu bestimmen, eines mit einer einfach nachvollziehbaren Abschätzung genügt!

⚒ **3.1.4 Beispiel.** Die Betragsfunktion $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig. Dies folgt direkt aus der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$|\,|x|-|y|\,| \le |x-y|, \qquad (3.1.\mathbf{4\text{-}A})$$

deren Beweis wir als Übung überlassen.

⚒ **3.1.5 Beispiel.** Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist stetig. Betrachtet man die Differenz zweier Funktionswerte, so ergibt sich wegen (2.8.**2-A**)

$$\exp(x) - \exp(y) = \exp(x)\,(1-\exp(y-x)) \qquad (3.1.\mathbf{5\text{-}A})$$

und damit aus (2.8.**4-A**)

$$|\exp(x)-\exp(y)| = |\exp(x)|\,|1-\exp(y-x)| \le (\mathrm{e}-1)|\exp(x)|\,|x-y| < \varepsilon \qquad (3.1.\mathbf{5\text{-}B})$$

für $|x-y| < \delta = \frac{\varepsilon}{|\mathrm{e}-1|\,|\exp(x)|}$. Die Stetigkeit ist gezeigt.

☞ **3.1.6 Satz.** *Es gilt* (3.1.**2-A**) *genau dann für einen Punkt x, wenn* (3.1.**1-A**) *für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in M_1^{\mathbb{N}}$ mit $x_n \longrightarrow x$ gilt.*

Beweis. Hinrichtung: Angenommen, f erfüllt (3.1.**2-A**) in x. Ist nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus M_1 mit $x_n \longrightarrow x$, so ist zu zeigen, dass dann $f(x_n) \longrightarrow f(x)$ gilt. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Wegen (3.1.**2-A**) existiert dann ein $\delta > 0$ und auf Grund der Konvergenz $x_n \longrightarrow x$ ein zugehöriges N_δ mit $d(x_n, x) < \delta$ für $n > N_\delta$. Also gilt $d(f(x_n), f(x)) < \varepsilon$ für diese n. Damit ist (3.1.**1-A**) gezeigt.

Rückrichtung: Hierzu zeigen wir die Kontraposition. Angenommen f erfüllt (3.1.**2-A**) in x nicht. Dann gilt

$$\exists_{\varepsilon>0}\forall_{\delta>0}\exists_{y\in M_1} \quad d_1(x,y) < \delta \ \wedge\ d_2(f(x), f(y)) \ge \varepsilon \qquad (3.1.\mathbf{6\text{-}A})$$

und speziell mit $\delta = \frac{1}{n}$ finden wir eine Folge von Elementen $x_n \in M_1$ mit $d_1(x, x_n) < \frac{1}{n}$ und $d_2(f(x), f(x_n)) \ge \varepsilon$. Für diese Folge gilt also $x_n \longrightarrow x$ aber nicht $f(x_n) \longrightarrow f(x)$. Also ist (3.1.**1-A**) nicht erfüllt. □

☞ **3.1.7 Proposition** (Rechnen mit stetigen Funktionen)**.** *Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und seien $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ und $g : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ stetige Funktionen. Dann sind*

$$(f+g)(x) := f(x)+g(x), \qquad (fg)(x) = f(x)g(x), \qquad f\circ g(x) = f(g(x)) \qquad (3.1.\mathbf{7\text{-}A})$$

ebenso stetig.

Beweis. Wir zeigen mehr, die Aussage gilt punktweise. Seien f, g in x stetig in x, so gilt für jede Folge $x_n \longrightarrow x$ aus dem Schnitt der Definitionsbereiche von f und g unter Ausnutzung der Rechenregeln für Grenzwerte in $\mathbb{K}$

$$\lim_{n\to\infty}(f+g)(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) + \lim_{n\to\infty} g(x_n) = f(x) + g(x) = (f+g)(x) \tag{3.1.7-B}$$

und

$$\lim_{n\to\infty}(fg)(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \cdot \lim_{n\to\infty} g(x_n) = f(x)g(x) = (fg)(x). \tag{3.1.7-C}$$

Damit sind die ersten beiden Aussagen gezeigt.

Für die Dritte müssen wir leicht anders argumentieren. Sei dazu g in x stetig und f im Punkt $g(x)$. Sei weiter $x_n \longrightarrow x$ eine Folge aus dem Definitionsbereich von g für die $g(x_n)$ jeweils im Definitionsbereich von f liegt. Dann impliziert die Stetigkeit von g, dass $g(x_n) \longrightarrow g(x)$ gilt und damit folgt aus der Stetigkeit von f direkt $f(g(x_n)) \longrightarrow f(g(x))$. □

3.2 Hauptsätze über stetige Funktionen

Die nachfolgenden Hauptsätze für stetige Funktionen gelten für auf abgeschlossenen und beschränkten Intervallen $[a, b]$ definierte Funktionen. Auf offenen oder unbeschränkten Intervallen sind die Aussagen falsch oder so nicht formulierbar. Überlegen Sie sich dazu Gegenbeispiele!

☞ **3.2.1 Lemma** (Weierstraß, Beschränktheitssatz). *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f beschränkt, es gilt also*

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x)| < \infty. \tag{3.2.1-A}$$

Beweis. Da die Betragsfunktion stetig ist, ist $x \mapsto |f(x)|$ stetig und es genügt, die Aussage für nichtnegative stetige Funktionen zu beweisen. Sei also im folgenden $f : [a, b] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig. Angenommen, die Funktion wäre unbeschränkt. Dann gäbe es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in [a, b]$ mit $f(x_n) > n$. Auf diese Weise erhalten wir eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $[a, b]$. Da das Intervall $[a, b]$ abgeschlossen und beschränkt ist, existiert nach dem Satz 2.1.13 von Bolzano–Weierstrass damit eine in diesem Intervall konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Mit $x_{n_k} \longrightarrow x$ folgt damit aber der Widerspruch

$$\mathbb{R} \ni f(x) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) > n_k \longrightarrow +\infty. \tag{3.2.1-B}$$

Also ist f beschränkt. □

Der Beweis erklärt uns auch, wie man Maximum und Minimum einer stetigen Funktion (unkonstruktiv) findet. Wir erhalten damit Existenzaussagen, die nicht mit einem Beispiel sondern einem 'echten' Beweis gezeigt werden.

☞ **3.2.2 Satz** (Weierstraß, Satz vom Maximum und Minimum). *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existieren ein $x_\bullet \in [a, b]$ und ein $x^\bullet \in [a, b]$, so dass*

$$f(x_\bullet) = \min_{x\in[a,b]} f(x) \qquad \textit{und} \qquad f(x^\bullet) = \max_{x\in[a,b]} f(x). \tag{3.2.2-A}$$

Beweis. Wir beschränken uns auf $x_\bullet$, der Beweis für $x^\bullet$ ist analog. Da die Funktion f beschränkt ist, ist das Infimum über die Funktionswerte

$$y_\bullet = \inf_{x\in[a,b]} f(x) \in \mathbb{R} \tag{3.2.2-B}$$

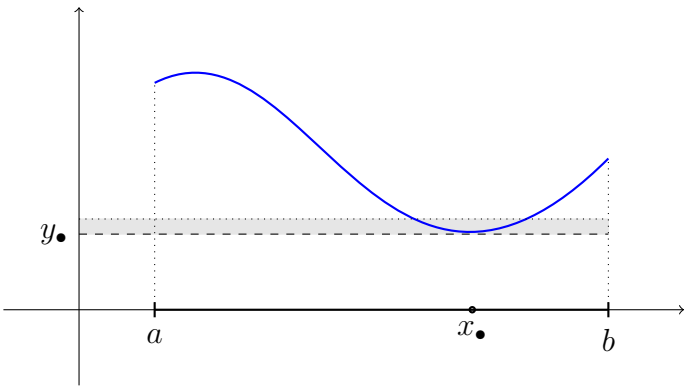
endlich. Damit existiert aber zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein x_n mit

$$y_\bullet \leq f(x_n) < y_\bullet + \frac{1}{n}. \tag{3.2.2-C}$$

Dies liefert wiederum eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus dem Intervall $[a,b]$ und damit eine in diesem Intervall konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Mit $x_\bullet = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$ folgt die Behauptung

$$f(x_\bullet) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = y_\bullet = \inf_{x\in[a,b]} f(x) \tag{3.2.2-D}$$

auf Grund der Stetigkeit von f. □



Der Satz sagt uns nicht, wie man diese Minimal- und Maximalstellen wirklich findet. Dazu später mehr.

✂ **Ergänzung.** Man kann die Voraussetzung eines abgeschlossenen und beschränkten Intervalls in obigen Sätzen stark verallgemeinern. Wir sagen, eine Teilmenge $K \subset M$ eines metrischen Raumes (M,d) ist *kompakt* oder besser ist *folgenkompakt*, falls jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ von Elementen aus K eine in K konvergente Teilfolge besitzt.

Der Satz 2.1.13 von Bolzano–Weierstrass besagt also insbesondere, dass abgeschlossene und beschränkte Intervalle in $\mathbb{R}$ kompakt sind. In obigen Beweisen haben wir nur benötigt, dass die stetigen Funktionen auf kompakten Mengen definiert sind. Es gilt also viel allgemeiner (und mit gleichem Beweis):

✂ **Satz.** *Sei $K \subset M$ kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes (M,d) und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existieren ein $x_\bullet \in K$ und ein $x^\bullet \in K$*

$$f(x_\bullet) = \min_{x\in K} f(x) \qquad \textit{und} \qquad f(x^\bullet) = \max_{x\in K} f(x). \tag{3.2.2-E}$$

Kompaktheitskriterien, also Existenzsätze für konvergente Teilfolgen, sind extrem wichtige mathematische Aussagen.

Für die folgenden Sätze verknüpfen wir Stetigkeit mit der Ordnungsstruktur der reellen Zahlen.

☞ **3.2.3 Lemma** (Nullstellensatz von Bolzano). *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) < 0 < f(b)$. Dann existiert ein $x \in (a, b)$ mit $f(\xi) = 0$.*

Beweis. Wir betrachten die Menge

$$U = \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq 0\} \tag{3.2.3-A}$$

Nach Voraussetzung gilt $a \in U$ und $b \notin U$. Da damit U nicht leer und beschränkt ist, existiert das Supremum

$$\xi = \sup U \leq b \tag{3.2.3-B}$$

und somit auch eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen aus U mit $x_n \longrightarrow \xi$. Da f stetig ist, gilt damit wegen $f(x_n) \leq 0$

$$f(\xi) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \leq 0 \tag{3.2.3-C}$$

und ebenso existiert eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oberer Schranken von U mit $y_n \longrightarrow \xi$. Also folgt wegen $f(y_n) > 0$

$$f(\xi) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) \geq 0 \tag{3.2.3-D}$$

und damit die Behauptung. □

☞ **3.2.4 Satz** (Bolzano-Cauchy, Zwischenwertsatz). *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt*

$$f([a, b]) = [f(x_\bullet), f(x^\bullet)] \tag{3.2.4-A}$$

mit $x_\bullet$ und $x^\bullet$ aus (3.2.2-A).

Beweis. Dass die beiden Funktionswerte

$$\min_{x\in[a,b]} f(x) = f(x_\bullet) \qquad \text{und} \qquad \max_{x\in[a,b]} f(x) = f(x^\bullet) \tag{3.2.4-B}$$

angenommen werden, haben wir schon gesehen. Ebenso ist klar, dass es keine größeren oder kleineren Funktionswerte geben kann.

Gilt $f(x_\bullet) = f(x^\bullet)$, so ist f konstant und die Aussage wahr. Sei also $f(x_\bullet) < f(x^\bullet)$ und $z \in (f(x_\bullet), f(x^\bullet))$ beliebig. Ist $x_\bullet < x^\bullet$, dann gilt für die Hilfsfunktion

$$h(x) = f(x) - z \tag{3.2.4-C}$$

sowohl $h(x_\bullet) = f(x_\bullet) - z < 0$ als auch $h(x^\bullet) - z > 0$ und die Funktion h erfüllt auf $[x_\bullet, x^\bullet]$ die Voraussetzungen des Nullstellensatzes von Bolzano. Damit existiert aber ein $\xi \in (x_\bullet, x^\bullet) \subset [a, b]$ mit $h(\xi) = f(\xi) - z = 0$, also mit $f(\xi) = z$. Ist andererseits $x_\bullet > x^\bullet$, so betrachten wir stattdessen $h(x) = z - f(x)$ und wenden wiederum den Nullstellensatz an. □

✂ **Ergänzung.** Sowohl der Nullstellensatz als auch der Zwischenwertsatz sind nützlich, um die Existenz von interessanten Zahlen zu garantieren. Ein besonders prominentes Beispiel ist die Zahl π. Während wir bei der Definition der Winkelfunktionen 2π als Bezeichnung für den Vollwinkel eingeführt haben, könnte

man mit einer besseren (und vielleicht auch einfacher berechenbaren) Definition der Winkelfunktionen die Zahl π einführen. Definiert man sich $\cos(x)$ durch die Reihe

$$\cos(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{3.2.4-D}$$

die auf Grund des Quotientenkriteriums auch für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert und als Realteil der schon als stetig erkannten Funktion $x \mapsto \exp(\mathrm{i}x)$

$$\cos(x) = \operatorname{Re}\exp(\mathrm{i}x) = \operatorname{Re}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\mathrm{i}x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \tag{3.2.4-E}$$

selbst stetig ist, so kann man auch $\frac{\pi}{2}$ als erste nichtnegative Nullstelle dieser Funktion definieren. Es bleibt zu zeigen, dass es diese gibt.

Offensichtlich ist $\cos(0) = 1$. Für $x \in [0,2]$ und $k \geq 1$ ist ebenso $x^2 \leq 4 < 12 \leq (2k+1)(2k+2)$ und aus

$$x^2 < (2k+1)(2k+2) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!} < \frac{x^{2k}}{(2k)!} \tag{3.2.4-F}$$

folgt die Monotonie der Beträge der Glieder der Reihe für $x \in [0,2]$. Die Reihe ist also mit dem Leibniz-Kriterium abschätzbar und wir erhalten

$$1 - \frac{1}{2}x^2 \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4, \qquad 0 \leq x \leq 2. \tag{3.2.4-G}$$

Also gilt $\cos(2) < 1 - 2 + \frac{16}{24} = -\frac{1}{3}$ und die durch die Reihe (3.2.**4-D**) definierte Funktion besitzt auf $[0,2]$ mindestens eine Nullstelle.

Wir werden später in Kapitel 4 zeigen, dass die von uns genutzte geometrische Definition der Cosinusfunktion dieselbe Funktion liefert wie obige Reihe. Dazu fehlen uns noch die notwendigen Hilfsmittel.

3.3 Gleichmäßige Stetigkeit

Eine Funktion soll als gleichmäßig stetig bezeichnet werden, wenn sie in jedem Punkt x stetig ist und δ unabhängig von x gewählt werden kann. Genauer:

✍ **3.3.1 Definition.** *Seien (M_1, d_1) und (M_2, d_2) metrische Räume. Wir bezeichnen eine Funktion $f : M_1 \to M_2$ als* gleichmäßig stetig *auf M_1, falls*

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x,y\in M_1} \qquad d_1(x,y) < \delta \quad \Longrightarrow \quad d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon \tag{3.3.1-A}$$

gilt.

⚒ **3.3.2 Beispiel.** Ohne Gleichmäßigkeit liest sich die Bedingung für Stetigkeit in jedem $x \in M_1$ als

$$\forall_{x\in M_1}\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{y\in M_1} \qquad d_1(x,y) < \delta \quad \Longrightarrow \quad d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon. \tag{3.3.2-A}$$

Das ist ein entscheidender Unterschied. Dazu ein Beispiel:

Die Funktion $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ ist als Funktion $f : (0,\pi] \to [-1,1]$ in jedem Punkt stetig. Allerdings gilt dies nicht gleichmäßig. Setzt man

$$x_n = \frac{2}{(2n+1)\pi} \qquad \text{und} \qquad y_n = \frac{1}{n\pi}, \tag{3.3.2-B}$$

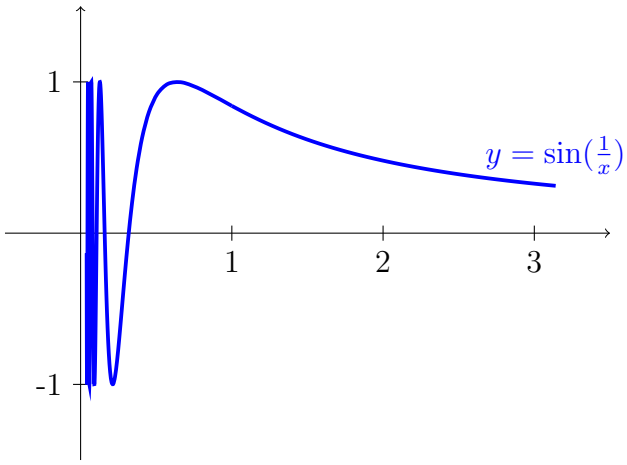
so gilt

$$f(x_n) = \sin((2n+1)\frac{\pi}{2}) = \pm 1 \quad \text{und} \quad f(y_n) = 0. \tag{3.3.2-C}$$

Also müsste für gleichmäßige Stetigkeit für $|f(x_n) - f(y_n)| = 1 = \varepsilon$ das zu wählende δ

$$0 < \delta < |x_n - y_n| = \frac{1}{n(2n+1)\pi} \longrightarrow 0, \qquad n \to \infty, \tag{3.3.2-D}$$

erfüllen. Ein solches δ gibt es nicht.



☞ **3.3.3 Satz** (Cantor). *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f auf $[a,b]$ gleichmäßig stetig.*

Beweis. Wir zeigen dies indirekt. Angenommen, es gibt zu einem $\varepsilon > 0$ kein $\delta > 0$ mit

$$\forall_{x,y\in[a,b]} \qquad |x-y| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{3.3.3-A}$$

Dann gäbe es zu jedem $\delta > 0$ in $[a,b]$ zwei Punkte x und y mit $|x-y| < \delta$ und $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$. Wählen wir nun eine gegen Null strebende Folge positiver Zahlen δ_n, dann gäbe es zu jedem n Punkte x_n und y_n mit $|x_n - y_n| < \delta_n$ und $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Mit Bolzano–Weierstraß folgt die Existenz einer Teilfolge $x_{n_k} \longrightarrow x_*$ und wegen $|x_n - y_n| < \delta_n \longrightarrow 0$ folgt ebenso $y_{n_k} \longrightarrow x_*$. Allerdings folgt damit auf Grund der Stetigkeit von f

$$0 = |f(x_*) - f(x_*)| = \lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon. \tag{3.3.3-B}$$

Widerspruch. □

✂ **Ergänzung.** Der Satz gilt wiederum allgemeiner als er formuliert ist. Wir haben nie wirklich genutzt, dass die Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall definiert war. Was wir wirklich genutzt haben, ist die Existenz einer konvergenten Teilfolge. Statt Bolzano–Weierstraß zu verwenden, können wir auch einfach die Kompaktheit des Definitionsbereiches fordern. Es gilt also

✂ **Satz.** *Sei $K \subset M_1$ kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes (M_1, d_1) und $f : K \to M_2$ stetig. Dann ist f auf K gleichmäßig stetig.*

In dieser Fassung werden wir den Satz später auch benötigen, aber vorerst genügen uns abgeschlossene Intervalle.

3.4 Grenzwerte von Funktionen

Im Folgenden wollen wir Stetigkeit noch einmal anders formulieren und definieren dazu zuerst einen weiteren Grenzwertbegriff. Statt Grenzwerten von Folgen betrachten wir Grenzwerte von Funktionen in ausgewählten Punkten.

✍ **3.4.1 Definition.** *Sei (M, d) ein metrischer Raum und $A \subset M$ eine Menge. Ein Punkt $x_* \in M$ heißt* Häufungspunkt *der Menge A, falls*

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{y \in A \setminus \{x_*\}} \quad d(y, x_*) < \varepsilon. \tag{3.4.1-A}$$

☞ **3.4.2 Lemma.** *Ein Punkt x_* ist Häufungspunkt einer Menge A genau dann, wenn es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus A mit $x_n \neq x_*$ und $x_n \longrightarrow x_*$ gibt.*

Beweis. Wählen $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ und zu jedem ε_n ein nach Definition des Häufungspunktes existierendes $x_n \in A \setminus \{x_*\}$ mit $d(x_n, x) < \varepsilon_n = \frac{1}{n}$. Damit erhalten wir eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit der gewünschten Eigenschaft. □

⚒ **3.4.3 Beispiel.** Ein offenes Intervall (a, b) mit $a < b$ hat das zugehörige abgeschlossene Intervall $[a, b]$ als Menge seiner Häufungspunkte. Eine endliche Menge reeller Zahlen besitzt keine Häufungspunkte und die Menge der Häufungspunkte von $\mathbb{Q}$ ist ganz $\mathbb{R}$.

✂ **Ergänzung.** Wenn wir uns immer nur Intervalle anschauen, dann ist der Begriff des Häufungspunktes nicht besonders nützlich. Aber für allgemeinere Teilmengen von $\mathbb{R}$ oder von $\mathbb{C}$ ist das anders. Ein Beispiel ist der Cantorstaub

$$\mathfrak{C} = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k 3^{-k} \mid \beta_k \in \{0, 2\} \right\} \subset [0, 1] \tag{3.4.3-A}$$

bestehend aus allen Zahlen des Intervalls $[0, 1]$ ohne Ziffer 1 in der Ternärdarstellung.

Jedes Element von $\mathfrak{C}$ ist Häufungspunkt. Die Menge $\mathfrak{C}$ kann man sich am besten als Schnitt von den hier dargestellten Mengen oder durch schrittweises Entfernen mittlerer Drittel vorstellen. Es gilt also

$$\mathfrak{C} = [0, 1] \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{\ell=1}^{3^{k-1}-1} \left(\frac{3\ell + 1}{3^k}, \frac{3\ell + 2}{3^k} \right). \tag{3.4.3-B}$$

Für das Komplement $A = [0, 1] \setminus \mathfrak{C}$ sind alle Punkte des Intervalls $[0, 1]$ Häufungspunkte.

✍ **3.4.4 Definition.** *Seien (M_1, d_1) und (M_2, d_2) metrische Räume, $A \subset M_1$ und $f : A \to M_2$ eine Funktion. Ist x_* Häufungspunkt von A, so sagen wir $f(x) \longrightarrow c$ in x_* falls*

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x \in A \setminus \{x^*\}} \qquad d_1(x, x_*) < \delta \implies d_2(f(x), c) < \varepsilon \tag{3.4.4-A}$$

gilt und schreiben dafür

$$\lim_{x \to x_*} f(x) = c. \tag{3.4.4-B}$$

☞ **3.4.5 Lemma.** *Sei $f : A \to M_2$ eine Funktion und x_* Häufungspunkt von A. Dann gilt*

$$\lim_{x \to x_*} f(x) = c \tag{3.4.5-A}$$

genau dann, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \neq x$ und $x_n \longrightarrow x_*$

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = c \tag{3.4.5-B}$$

gilt.

Beweisidee. Analog zum Beweis zu Satz 3.1.6. Wir überlassen dies als Übung. □

Damit kann man Stetigkeit (in Häufungspunkten) neu formulieren. Ist $f : A \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_* \in A$ Häufungspunkt von A. Dann ist f in x_* genau dann stetig, wenn

$$\lim_{x \to x_*} f(x) = f(x_*) \tag{3.4.5-C}$$

gilt. Stetige Funktionen nehmen also in Häufungspunkten die zum Definitionsbereich gehören genau die Funktionswerte an, die durch die Funktionswerte in einer Umgebung aufgezwungen werden. Diese Vorstellung hilft uns insbesondere auch, Stetigkeit nachzuweisen (oder Funktionen in nicht zum Definitionsbereich gehörende Punkte stetig fortzusetzen).

⚒ **3.4.6 Beispiel.** Wir betrachten die modifizierte Dirichletfunktion $f : \mathbb{R} \subset \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{q}, \qquad \text{für } x = \frac{p}{q},\ \mathrm{ggT}(p,q) = 1,\ q \in \mathbb{N}. \tag{3.4.6-A}$$

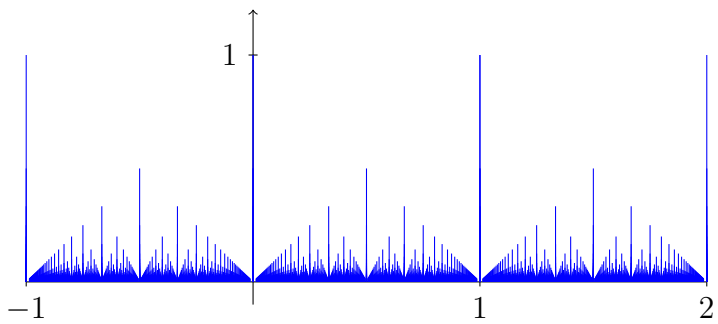
Diese eher wild aussehende Funktion besitzt eine interessante Eigenschaft. Für jede irrationale Zahl $x_* \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gilt

$$\lim_{x \to x_*} f(x) = 0. \tag{3.4.6-B}$$

Für alle rationalen $x^* \in \mathbb{Q}$ existiert dieser Grenzwert nicht. Bildet man also die durch Fallunterscheidung definierte Funktion

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q},\ \mathrm{ggT}(p,q) = 1, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases} \tag{3.4.6-C}$$

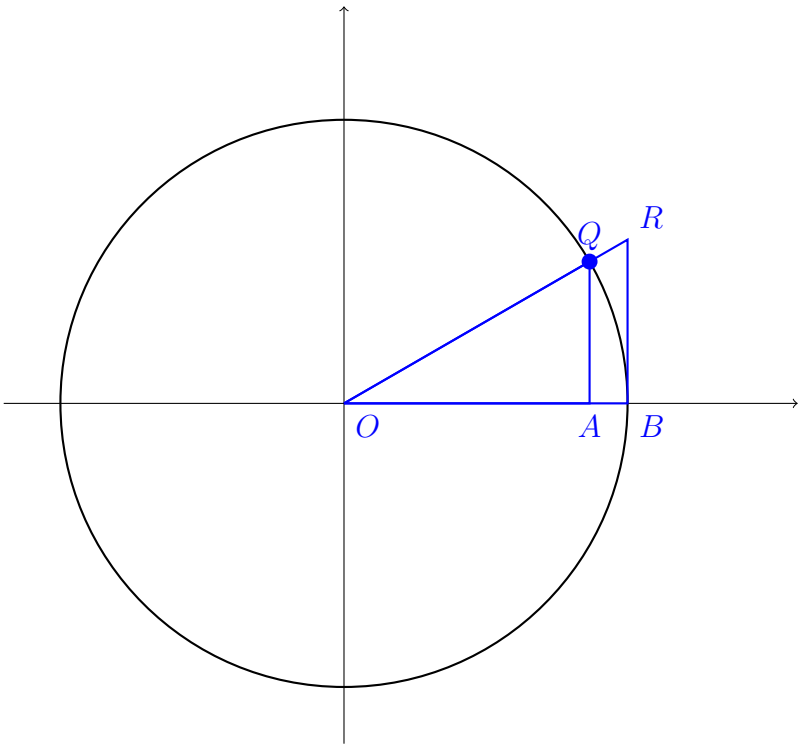
so ist diese in allen rationalen Punkten $x \in \mathbb{Q}$ unstetig, in allen irrationalen Punkten $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ jedoch stetig. Weisen Sie dies nach!



3.4.7 Beispiel. Funktionsgrenzwerte kann man nutzen, um Funktionen in Definitionslücken fortzusetzen. Das bekannteste Beispiel dafür ist der Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \tag{3.4.7-A}$$

den wir nachfolgend beweisen wollen. Wir nutzen die geometrische Definition der Winkelfunktionen.



Für gegebenen Winkel ϕ und den Punkt Q mit den Koordinaten $(\cos\phi, \sin\phi)$ und die Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle OAQ$ und $\triangle OBR$ und des Tortenstücks OBQ offenbar geordnet. Es gilt

$$\mathrm{A}_{\triangle OAQ} < \mathrm{A}_{\text{Tortenstück}} < \mathrm{A}_{\triangle OBR} \tag{3.4.7-B}$$

und durch Einsetzen der bekannten Flächenformeln

$$\frac{1}{2}\cos\phi\sin\phi < \frac{1}{2}\phi < \frac{1}{2}\tan\phi = \frac{1}{2}\frac{\sin\phi}{\cos\phi}, \qquad 0 < \phi < \frac{\pi}{2}. \tag{3.4.7-C}$$

Damit folgt aber

$$\cos\phi < \frac{\sin\phi}{\phi} < \frac{1}{\cos\phi}, \qquad 0 < |\phi| < \frac{\pi}{2}, \tag{3.4.7-D}$$

und wegen $\cos\phi \longrightarrow 1$ für $\phi \to 0$ folgt die Behauptung.

Aus dem Grenzwert (3.4.7-A) folgt durch Quadrieren

$$1 = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2} \tag{3.4.7-E}$$

und da offenbar $1 + \cos x \longrightarrow 2$ für $x \to 0$ gilt, erhalten wir

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \tag{3.4.7-F}$$

und den (trivialeren aber nicht weniger wichtigen) Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0. \tag{3.4.7-G}$$

Insbesondere für offene Intervalle in $\mathbb{R}$ liefern Funktionsgrenzwerte oft eine Fortsetzung der Funktion in die Randpunkte. In diesen Fällen spricht man von einseitigen Grenzwerten der Funktion. Hier hilft die Ordnungsstruktur, wenn man das Folgenkriterium verwenden möchte. Es gilt

☞ **3.4.8 Lemma.** *Sei $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Konvergiert für jede monoton wachsende Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert b die Folge $f(x_n)$ in $\mathbb{R}$, so stimmen die sich ergebenden Grenzwerte überein und $\lim_{x\to b} f(x)$ existiert.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass sich immer derselbe Grenzwert ergibt. Dazu hilft ein einfacher Trick. Sind $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(y_l)_{l\in\mathbb{N}}$ zwei monoton wachsende Folgen aus $[a, b)$ mit Grenzwert b, so kann man eine neue Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv durch $z_1 = \min\{x_1, y_1\}$ und

$$z_{n+1} = \min\{x_k, y_l \mid x_k > z_n,\ y_l > z_n,\ k, l \in \mathbb{N}\} \tag{3.4.8-A}$$

konstruieren. Die Folge enthält alle Folgenglieder der Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(y_l)_{l\in\mathbb{N}}$ und ist streng monoton wachsend. Da $f(z_n)$ nach Voraussetzung konvergent ist, konvergieren auch alle Teilfolgen und gegen denselben Grenzwert. Also konvergieren $f(x_k)$ und $f(y_l)$ gegen denselben Grenzwert. □

Für diesen Grenzwert schreibt man auch oft

$$\lim_{x\nearrow b} f(x) \quad \text{oder} \quad \lim_{x\to b_{-0}} f(x) \tag{3.4.8-B}$$

um die Einseitigkeit der Grenzwerte zu betonen, analog für rechtsseitige Grenzwerte dann als $x \searrow a$ beziehungsweise $x \to a_{+0}$. Gilt für ein $c \in (a, b)$ und eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$

$$\lim_{x\nearrow c} f(x) = \lim_{x\searrow c} f(x), \tag{3.4.8-C}$$

existieren also beide einseitigen Grenzwerte in c und stimmen diese überein, so existiert auch der Grenzwert

$$\lim_{x\to c} f(x) \tag{3.4.8-D}$$

mit gleichem Wert.

3.5 Monotonie und Umkehrfunktionen

Funktionen heißen monoton, wenn sie Ordnungsbeziehungen zwischen Elementen erhalten (oder alle umkehren). Für reelle Funktionen schreiben wir dies noch einmal genau auf:

✍ **3.5.1 Definition.** *Sei $M \subseteq \mathbb{R}$.*

(i) *Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt* monoton wachsend, *falls*

$$\forall_{x,y\in M} \qquad x < y \implies f(x) \leq f(y) \tag{3.5.1-A}$$

gilt. Sie heißt streng monoton wachsend, *falls sogar*

$$\forall_{x,y\in M} \qquad x < y \implies f(x) < f(y) \tag{3.5.1-B}$$

gilt.

(ii) *Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt* monoton fallend, *falls*

$$\forall_{x,y\in M} \qquad x < y \implies f(x) \geq f(y) \tag{3.5.1-C}$$

gilt. Sie heißt streng monoton fallend, *falls sogar*

$$\forall_{x,y\in M} \qquad x < y \implies f(x) > f(y) \tag{3.5.1-D}$$

gilt.

✂ **Ergänzung.** Monotonie von Funktionen hilft also insbesondere beim Rechnen mit Ungleichungen und sollte daher allen vertraut sein. Monotone Funktionen kann man auf allen geordneten Mengen betrachten und diese sind gerade die ordnungserhaltenden (oder ordnungsumkehrenden) Funktionen.

Für das Rechnen mit Ungleichungen kennen wir das insbesondere vom Multiplizieren beider Seiten einer Ungleichung mit einer Zahl. Die Erhaltung bzw. Umkehrung des Relationszeichens ist dabei gerade die Aussage, dass $f(x) = ax$ für $a > 0$ auf $\mathbb{R}$ streng monoton wächst und für $a < 0$ streng monoton fällt. Die Quadratfunktion $f(x) = x^2$ ist dagegen auf $(-\infty, 0]$ streng monoton fallend und auf $[0, \infty)$ streng monoton wachsend. Die Funktion $f(x) = x^3$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend.[1]

☞ **3.5.2 Lemma.** *Angenommen, $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ ist monoton wachsend und beschränkt. Dann existiert*

$$\lim_{x\to b} f(x). \tag{3.5.2-A}$$

Beweis. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge aus $[a, b)$ mit $x_n \longrightarrow b$. Dann ist $f(x_n)$ ebenso monoton wachsend und beschränkt und somit in $\mathbb{R}$ konvergent. Damit folgt aber aus Lemma 3.4.8 die Behauptung. □

☞ **3.5.3 Satz** (Umkehrsatz)**.** *Angenommen, $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ist stetig und streng monoton wachsend (fallend). Dann ist f bijektiv zwischen (a, b) und $U = \operatorname{im} f := \{f(x) \mid x \in (a, b)\}$ und die Umkehrfunktion $f^{-1} : U \to (a, b)$ ist ebenso stetig und streng monoton wachsend (fallend).*

[1] Man beachte, dass Monotonie auf Mengen definiert ist. Eine Funktion kann nie in einem Punkt monoton oder streng monoton sein. Sollten Sie etwas anderes in der Schule gelernt oder in einem Schulbuch gelesen haben, so war das einfach falsch!

Beweis. Da f streng monoton ist, ist f insbesondere injektiv und damit bijektiv als Abbildung $(a,b) \to U$. Also existiert die Umkehrabbildung $g := f^{-1} : U \to (a,b)$ und es genügt Monotonie und Stetigkeit nachzuweisen. Wir beschränken uns auf den Fall wachsender Funktionen. Wegen

$$g(y_1) = x_1 < x_2 = g(y_2) \quad \Longleftrightarrow \quad y_1 = f(x_1) < f(x_2) = y_2 \tag{3.5.3-A}$$

ist Monotonie von g klar. Für die Stetigkeit betrachten wir eine monotone und konvergente Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in U mit Grenzwert y. Die Folge der zugehörigen Urbilder $x_n = g(y_n) = f^{-1}(y_n)$ ist damit ebenso monoton und beschränkt,

$$\begin{cases} y_n \geq y_{n+1} \geq y & \Longleftrightarrow \quad x_n = g(y_n) \geq x_{n+1} = g(y_{n+1}) \geq g(y), \\ y_n \leq y_{n+1} \leq y & \Longleftrightarrow \quad x_n = g(y_n) \leq x_{n+1} = g(y_{n+1}) \leq g(y), \end{cases} \tag{3.5.3-B}$$

also konvergent. Damit gilt aber für ihren Grenzwert x auf Grund der Stetigkeit von f

$$f(x) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} y_n = y \tag{3.5.3-C}$$

und somit

$$g(\lim_{n\to\infty} y_n) = x = g(y). \tag{3.5.3-D}$$

Die gewünschte Stetigkeit folgt. □

3.5.4 Beispiel. Die Potenzfunktionen $f_n(x) = x^n$ für $n \in \mathbb{N}$ sind stetig und streng monoton wachsend auf $[0,+\infty)$. Stetigkeit haben wir schon gezeigt, die Monotonie ist ebenso eine direkte Folge aus der geometrischen Summenformel (1.6.8-B)

$$f_n(x) - f_n(y) = x^n - y^n = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k} > 0, \qquad x > y \geq 0. \tag{3.5.4-A}$$

Weiter gilt $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$ im Sinne eines uneigentlichen Grenzwertes und aus dem Zwischenwertsatz wissen wir damit, dass

$$\operatorname{im} f = [0,+\infty) \tag{3.5.4-B}$$

gelten muss. Also ist die Umkehrfunktion $g := f^{-1} : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ ebenso streng monoton und stetig. Diese wird, wie schon genutzt, als $g(x) = \sqrt[n]{x}$ bezeichnet.

Wir hätten hier den Umkehrsatz nicht benötigt. Die geometrische Summenformel liefert nach einer Substitution auch direkt die für Monotonie und Stetigkeit genutzten Abschätzungen.

3.5.5 Beispiel. Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend und stetig. Wegen

$$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty \tag{3.5.5-A}$$

gilt damit unter Nutzung des Zwischenwertsatzes $\operatorname{im}\exp = (0,+\infty)$. Die reelle Exponentialfunktion besitzt damit eine stetige und streng monoton wachsende Umkehrfunktion $\exp^{-1} : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$. Diese wird als *Logarithmusfunktion* oder *natürlicher Logarithmus*

$$y = \ln x \iff x = \exp(y) \tag{3.5.5-B}$$

bezeichnet.

Während man $\exp(x)$ elegant und einfach als Reihe definieren kann, ist dies beim $\ln(x)$ nicht so einfach. Wir werden eine Reihendefinition später sehen, vorerst muss uns der Umkehrsatz genügen.

✂ **Ergänzung.** Rechenregeln für Exponential- und Logarithmusfunktionen hängen eng zusammen. Bisher bewiesen haben wir

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y). \tag{3.5.5-C}$$

Dies liefert uns für die Umkehrfunktion direkt

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y \tag{3.5.5-D}$$

und damit eine Reihe interessanter Rechenregeln. So gilt damit

$$\ln x^n = n \ln x \tag{3.5.5-E}$$

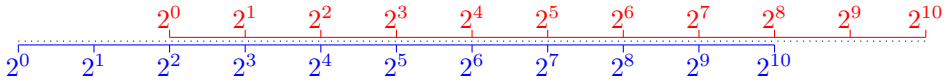
und entsprechend (indem man x^n als y bezeichnet) $\ln \sqrt[n]{y} = \frac{1}{n} \ln y$. Zusammen mit der obigen Gleichung liefert dies aber für alle rationalen Exponenten

$$\ln x^{\frac{p}{q}} = \frac{p}{q} \ln x. \tag{3.5.5-F}$$

Da die Logarithmusfunktion stetig ist, kann man dies nutzen um reelle Exponenten durch stetiges Fortsetzen zu definieren. Dann gilt

$$\ln x^y = y \ln x, \qquad x > 0,\ y \in \mathbb{R}. \tag{3.5.5-G}$$

Die Logarithmusfunktion macht also aus komplizierten Rechenoperationen einfachere. Aus Potenzieren wird eine Multiplikation, aus Multiplizieren wird eine Addition. Genau dies hat man früher genutzt, um mit Hilfe von Rechenschiebern oder Logarithmentafeln (und ohne Taschenrechner / Computer) komplexere Rechnungen effektiv durchführen zu können.



Auch wenn das eventuell nur historisch interessant klingen mag, sollte man dies nicht unterschätzen. Auch heute ist die Verwendung logarithmischer Skalen zum Darstellen von Messwerten nützlich um polynomiale oder exponentielle Zusammenhänge zu erkennen und zu visualisieren.

4 Differentialrechnung in einer Variablen

Die Differentialrechnung untersucht Änderungsraten von Funktionen. Sie hat ihren Ursprung in der Formalisierung der Mechanik durch Newton[1] und den Arbeiten von Leibniz, wichtige Ideen aus der Differentialrechnung wurden aber auch schon vorher genutzt.

Wir beschränken uns in diesem Kapitel auf reellwertige und auf einem reellen Intervall definierte Funktionen, für auf Teilmengen von $\mathbb{C}$ definierte Funktionen verweisen wir auf die Funktionentheorie und für von mehreren Variablen abhängenden Funktionen auf das nächste Semester.

4.1 Differenzierbarkeit

✍ **4.1.1 Definition.** *Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ für $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $a < b$.*

(i) *Wir sagen die Funktion f ist im Punkt $x \in (a, b)$* differenzierbar*, falls der Grenzwert*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{4.1.1-A}$$

existiert. In diesem Fall wird der Grenzwert als Ableitung *der Funktion f* im Punkt *x bezeichnet.*

(ii) *Ist die Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ in jedem Punkt $x \in (a, b)$ differenzierbar, so sagen wir f ist* auf dem Intervall (a, b) differenzierbar*. In diesem wird die Funktion*

$$f' : (a, b) \to \mathbb{R} \tag{4.1.1-B}$$

definiert durch

$$f'(x) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{4.1.1-C}$$

als Ableitung *von f bezeichnet.*

✂ **Ergänzung.** Für die Ableitung $f'(x)$ wird oft auch

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \tag{4.1.1-D}$$

geschrieben. Diese auf Leibniz zurückgehende Notation hilft beim Aufschreiben von Rechnungen, ist aber auch etwas irreführend. Es handelt sich nicht um einen Quotienten von zwei Zahlen. Formal richtiger wäre die Notation

$$\mathrm{d}f(x) = f'(x)\,\mathrm{d}x \tag{4.1.1-E}$$

[1] Isaac Newton, 1643–1727

als Kurzschreibweise für die lineare Näherung

$$\underbrace{f(x+h)-f(x)}_{\Delta f(x)}+\mathbf{o}(h) = \mathrm{d}f(x)[h] = f'(x)\,\mathrm{d}x[h] = f'(x)\,\underbrace{((x+h)-x)}_{\Delta x} \tag{4.1.1-F}$$

mit einem Fehlerterm $\mathbf{o}(h)$, der $\lim_{h\to 0}\frac{\mathbf{o}(h)}{h}=0$ erfüllt. Dabei sind jetzt für jedes gewählte $x\in(a,b)$

$$\mathrm{d}f(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R} \qquad \text{und} \qquad \mathrm{d}x:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \tag{4.1.1-G}$$

lineare Abbildungen. Das mag im Eindimensionalen übermäßig kompliziert aussehen, aber im Höherdimensionalen wird dieser Formalismus als *Differential* einer Funktion f eine wichtige Rolle spielen.

Da (4.1.**1-D**) eine Ableitung beschreibt, spricht man dies als '$\mathrm{d}f$ nach $\mathrm{d}x$' aus.

4.1.2 Beispiel. Potenzfunktionen sind differenzierbar. Für gegebenes $n\in\mathbb{N}$ gilt für $f(x)=x^n$ auf Grund des binomischen Lehrsatzes

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}x^k h^{n-k} = \lim_{h\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}x^k h^{n-k-1} = nx^{n-1}, \tag{4.1.2-A}$$

da alle weiteren Summanden einen Faktor h enthalten und mit $h\to 0$ gegen Null streben. Also gilt $f'(x)=nx^{n-1}$.

4.1.3 Beispiel. Die Exponentialfunktion $\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ist differenzierbar. Dazu nutzen wir die Rechenregeln der Exponentialfunktion zusammen mit Abschätzung (2.8.**4-B**) in der Form

$$\lim_{h\to 0}\frac{\exp(h)-1}{h}=1. \tag{4.1.3-A}$$

Damit folgt

$$\lim_{h\to 0}\frac{\exp(x+h)-\exp(x)}{h} = \exp(x)\lim_{h\to 0}\frac{\exp(h)-1}{h} = \exp(x) \tag{4.1.3-B}$$

und somit $\exp'=\exp$.

4.1.4 Beispiel. *Winkelfunktionen* sind differenzierbar. Dazu nutzen wir die Additionstheoreme der Winkelfunktionen zusammen mit den bereits gezeigten Grenzwerten (3.4.**7-A**) und (3.4.**7-G**) und erhalten für den *Sinus*

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\sin h+\sin x\cos h-\sin x}{h}\\ &= \cos x\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}+\sin x\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h} = \cos x\end{aligned} \tag{4.1.4-A}$$

und entsprechend für den *Cosinus*

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x}{h}\\ &= \cos x\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}-\sin x\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = -\sin x.\end{aligned} \tag{4.1.4-B}$$

Also haben wir $\sin'=\cos$ und $\cos'=-\sin$ gezeigt.

⚒ **4.1.5 Beispiel.** Es gibt Funktionen, die nur in einzelnen Stellen differenzierbar sind. Ein Beispiel dafür ist die nur im Punkt $x = 0$ differenzierbare Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases} \tag{4.1.5-A}$$

Für $x \neq 0$ ist diese Funktion weder stetig noch differenzierbar.

☞ **4.1.6 Lemma.** *Wenn $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ in $x \in (a, b)$ differenzierbar ist, so ist f auch in x stetig.*

Beweis. Es gilt für dieses x und kleine h

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + r(h)h \tag{4.1.6-A}$$

mit $\lim_{h\to 0} r(h) = 0$. Daraus folgt aber $\lim_{h\to 0} f(x + h) = f(x)$ und f in x stetig. □

✂ **Ergänzung.** Die gerade genutzte Formulierung

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + \mathbf{o}(h), \qquad h \to 0, \tag{4.1.6-B}$$

mit einer Funktion $\mathbf{o}(h)$ mit $\lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{o}(h)}{h} = 0$ wird später im Höherdimensionalen der Ausgangspunkt der Differentialrechnung werden. Das hier verwendete Symbol $\mathbf{o}(h)$ für eine Größe die nach Division durch h gegen Null strebt geht auf Edmund Landau[2] zurück.

Die Notation ist praktisch, wir werden sie später häufig benutzen. Neben klein-$\mathbf{o}$ gibt es noch groß-$\mathbf{O}$ mit der schwächeren Bedeutung $\limsup_{h\to 0} \frac{|\mathbf{O}(h)|}{h} < \infty$.

Mit differenzierbaren Funktionen kann man rechnen. Dazu folgern wir aus der Definition der Ableitung wichtige Differentiationsregeln. Differenzieren ist algorithmisch: wenn Funktionen aus bekannten differenzierbaren Funktionen zusammengesetzt sind, kann man Ableitungen einfach ausrechnen.

☞ **4.1.7 Satz** (Differentiationsregeln). **(i)** *Sind f und g im Punkt x differenzierbar, so auch die Summe $f + g$ und es gilt*

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x). \tag{4.1.7-A}$$

(ii) *Sind f und g im Punkt x differenzierbar, so auch das Produkt fg und es gilt*

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \tag{4.1.7-B}$$

(iii) *Ist f in x differnzierbar und g in $f(x)$, so auch die Verkettung $g \circ f(x) := g(f(x))$ und es gilt*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x). \tag{4.1.7-C}$$

[2] Edmund Landau, 1877–1938

Beweis. Die Rechenregeln folgen direkt aus der Definition der Ableitung. Es gilt

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\ &= f'(x)+g'(x)\end{aligned} \tag{4.1.7-D}$$

und ebenso

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{(fg)(x+h)-(fg)(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)}{h}\\ &\qquad+\lim_{h\to 0}\frac{f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\lim_{h\to 0}g(x+h)\\ &\qquad+f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\ &= f'(x)g(x)+f(x)g'(x).\end{aligned} \tag{4.1.7-E}$$

Hierbei wurde die Stetigkeit von g im Punkt x genutzt, die aus der Differenzierbarkeit von g in x folgt.

Für die letzte Aussage unterscheiden wir zwei Fälle. Ist $f(x)$ konstant, so ist $g(f(x))$ konstant und die Ableitung Null. Andernfalls betrachten wir nur h mit $f(x+h)\neq f(x)$ (sonst ist der Differenzenquotient stets Null) und erhalten

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{f(x+h)-f(x)}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{f(x+h)-f(x)}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\ &= g'(f(x))f'(x)\end{aligned} \tag{4.1.7-F}$$

unter Ausnutzung der Stetigkeit von f in x. Gibt es eine Nullfolge h_j mit $f(x+h_j)=f(x)$, so folgt $f'(x)=0$. □

☞ **4.1.8 Satz** (Ableitung der Umkehrfunktion). *Angenommen, $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ ist streng monoton, differenzierbar und erfüllt $f'\neq 0$. Dann ist die Umkehrfunktion $g=f^{-1}$ auf dem Wertebereich von f ebenso differenzierbar und es gilt*

$$g'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}. \tag{4.1.8-A}$$

Beweis. Die Umkehrfunktion g ist nach dem Umkehrsatz 3.5.3 wohldefiniert und stetig, zu zeigen ist nur die Differenzierbarkeit. Für diese nutzen wir die Definition. Für $y_*=f(x_*)$ und $y=f(x)$ ergibt sich falls $y\neq y_*$

$$\lim_{y\to y_*}\frac{g(y)-g(y_*)}{y-y_*}=\lim_{x\to x_*}\frac{x-x_*}{f(x)-f(x_*)}=\frac{1}{f'(x_*)} \tag{4.1.8-B}$$

da auf Grund des Umkehrsatzes $y\longrightarrow y_*$ genau dann gilt, wenn $x\longrightarrow x_*$. □

✂ **Ergänzung.** Wenn die Differenzierbarkeit von g nicht zu zeigen wäre, hätten wir auch einfach die Kettenregel nutzen können. Da $(g \circ f)(x) = x$ gilt, folgt durch Differenzieren

$$g'(f(x))f'(x) = 1 \tag{4.1.8-C}$$

und damit die Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion. Auch wenn das hier zum Beweis nicht reicht, so sollte man sich dies durchaus merken.

4.2 Elementare Funktionen

4.2.1 (Polynomfunktionen)**.** Polynomfunktionen

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \qquad a_k \in \mathbb{R}, \tag{4.2.1-A}$$

sind differenzierbar mit

$$p'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}. \tag{4.2.1-B}$$

Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ ist genau dann eine mehrfache Nullstelle einer Polynomfunktion $p(x)$ wenn $p(\lambda) = p'(\lambda) = 0$ gilt.

4.2.2 (Wurzelfunktionen)**.** Wurzelfunktionen $f(x) = \sqrt[n]{x}$ sind auf $\mathbb{R}_{>0} = (0, \infty)$ differenzierbar und ihre Ableitung kann durch Anwendung der Kettenregel auf

$$x = (f(x))^n \tag{4.2.2-A}$$

bestimmt werden. Damit gilt

$$1 = n f(x)^{n-1} f'(x) \tag{4.2.2-B}$$

und somit

$$f'(x) = \frac{1}{n(f(x))^{n-1}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{nx}. \tag{4.2.2-C}$$

4.2.3 (Logarithmusfunktion)**.** Die Logarithmusfunktion $\ln : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar und wegen

$$y = \ln(\exp y) \tag{4.2.3-A}$$

gilt auf Grund der Kettenregel

$$1 = \ln'(\exp y) \exp y, \qquad \ln'(\exp(y)) = \frac{1}{\exp y} \tag{4.2.3-B}$$

und damit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln(x) = \ln'(x) = \frac{1}{x}. \tag{4.2.3-C}$$

4.2.4 (Exponentialfunktionen)**.** Die allgemeinen Exponentialfunktionen $f(x) = a^x$ zur Basis $a > 0$, $a \neq 1$, sind über die Exponentialfunktion durch

$$a^x := \exp(x \ln a) \tag{4.2.4-A}$$

definiert. Dies passt zu den Potenzgesetzen, für $n \in \mathbb{N}$ stimmt die so definierte Funktion mit den Potenzen a^n überein. Damit ist f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt

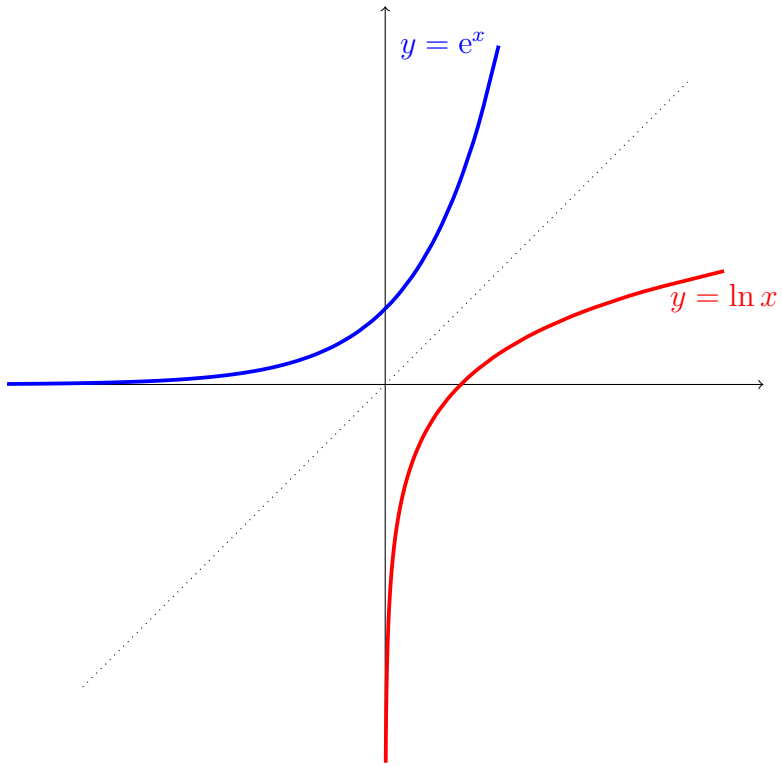
$$f'(x) = a^x \ln a. \tag{4.2.4-B}$$

Die zugehörigen Umkehrfunktionen $\log_a : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ sind ebenso differenzierbar und es gilt

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \tag{4.2.4-C}$$

und damit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \log_a x = \log_a' x = \frac{1}{x \ln a}. \tag{4.2.4-D}$$



4.2.5 (Winkelfunktionen)**.** Die Winkelfunktionen *Sinus* und *Cosinus* haben wir schon betrachtet und fassen dies kurz zusammen. Es gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin x = \sin' x = \cos x, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cos x = \cos' x = -\sin x. \tag{4.2.5-A}$$

Damit folgt weiterhin für den *Tangens*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \tan x = \tan' x = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x. \tag{4.2.5-B}$$

4.2.6 (Arcusfunktionen)**.** Die Winkelfunktionen Sinus und Cosinus sind eingeschränkt auf passende Intervalle streng monoton und besitzen dort somit differenzierbare Umkehrfunktionen. Auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist sin streng monoton wachsend und besitzt die Umkehrfunktion *Arcus sinus*

$$\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]. \tag{4.2.6-A}$$

Diese ist auf $(-1,1)$ differenzierbar und erfüllt

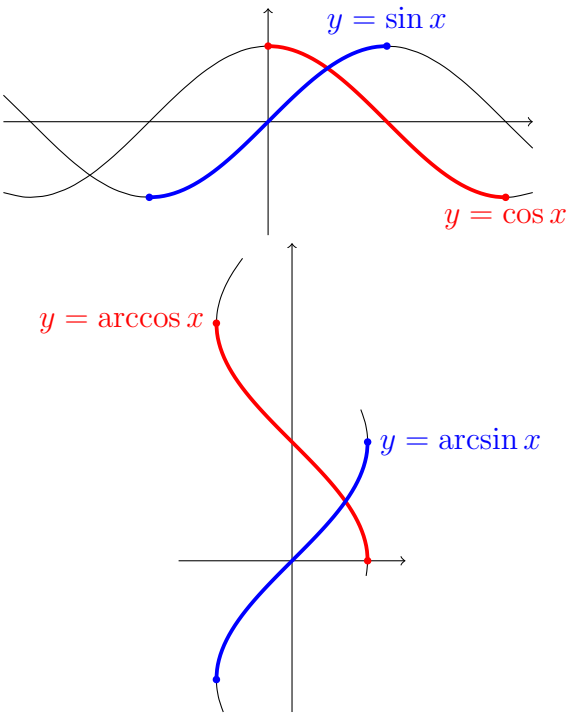
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arcsin x = \arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{4.2.6-B}$$

Die Funktion Cosinus ist auf $(0,\pi)$ streng monoton fallend und besitzt die Umkehrfunktion *Arcus cosinus*

$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]. \tag{4.2.6-C}$$

Diese ist ebenso auf $(-1,1)$ differenzierbar und erfüllt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arccos x = \arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{4.2.6-D}$$

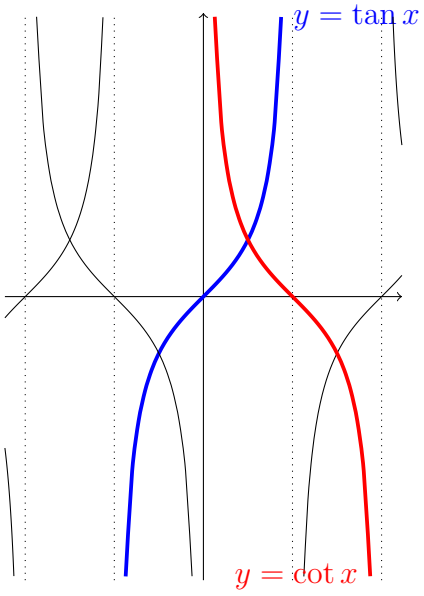


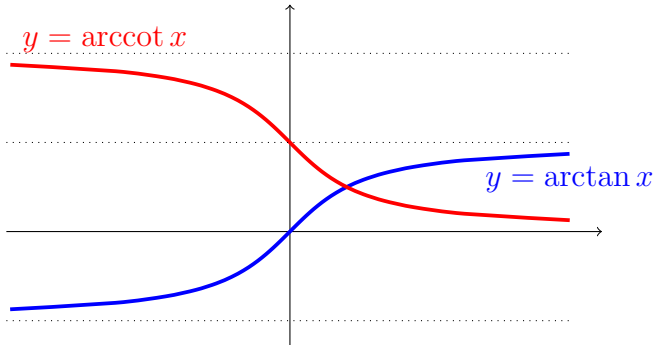
Die Tangensfunktion ist auf $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ streng monoton wachsend und besitzt die Umkehrfunktion *Arcus tangens*

$$\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}). \tag{4.2.6-E}$$

Diese ist differenzierbar mit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan x = \arctan' x = \frac{1}{1+x^2}. \tag{4.2.6-F}$$





4.2.7 (Hyperbelfunktionen)**.** *Hyperbelfunktionen* sind über die Exponentialfunktion definiert. Es gilt für den *Cosinus hyperbolicus* und den *Sinus hyperbolicus*

$$\cosh x := \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}, \qquad \sinh x := \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}. \tag{4.2.7-A}$$

Durch Anwenden der Differentiationsregeln folgt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cosh x = \cosh'(x) = \sinh(x), \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sinh x = \sinh'(x) = \cosh(x). \tag{4.2.7-B}$$

Wir werden später sehen, dass die Analogie zu Winkelfunktionen deutlich weitergeht, die Funktionen sind eng miteinander verwandt. Nach Definition gilt

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1. \tag{4.2.7-C}$$

4.2.8 (Areafunktionen)**.** Die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen werden als *Areafunktionen* bezeichnet. Die Funktion $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend und damit umkehrbar. Ihre Umkehrfunktion *Area sinus hyperbolicus* $\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfüllt wegen

$$x = \operatorname{arsinh}(\sinh x) \tag{4.2.8-A}$$

auf Grund der Kettenregel

$$1 = \operatorname{arsinh}'(\sinh x) \cosh x, \qquad \operatorname{arsinh}'(\sinh x) = \frac{1}{\cosh x} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2 x}} \tag{4.2.8-B}$$

und damit

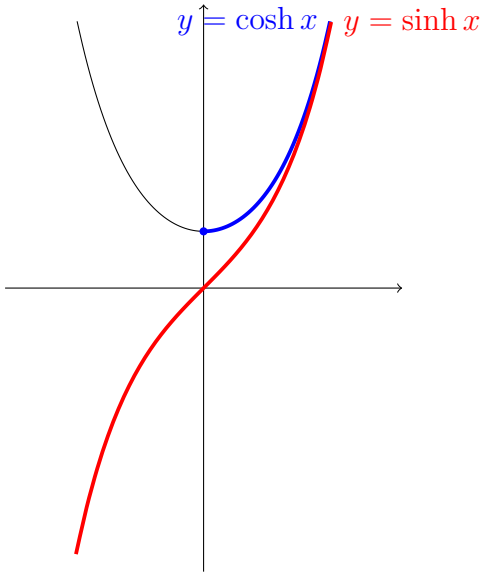
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{arsinh} x = \operatorname{arsinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}. \tag{4.2.8-C}$$

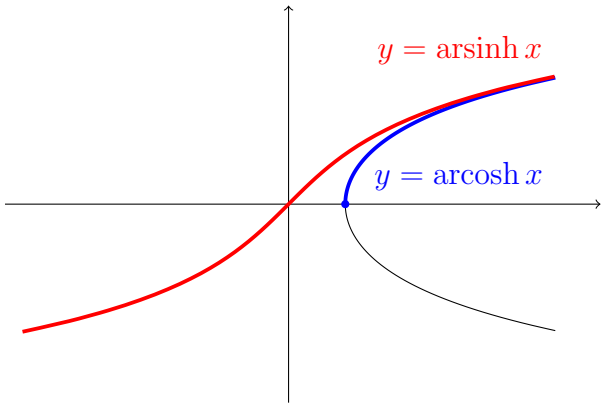
Die Einschränkung $\cosh : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend und damit ebenso umkehrbar. Die analoge Rechnung liefert für die Umkehrfunktion *Area cosinus hyperbolicus* $\operatorname{arcosh} : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ die Identität

$$1 = \operatorname{arcosh}'(\cosh x) \sinh x, \qquad \operatorname{arcosh}'(\cosh x) = \frac{1}{\sinh x} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 x - 1}} \tag{4.2.8-D}$$

und damit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{arcosh} x = \operatorname{arcosh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}. \tag{4.2.8-E}$$





4.3 Hauptsätze über differenzierbare Funktionen

In den folgenden Sätzen sei $[a, b]$ stets ein echtes kompaktes Intervall, $-\infty < a < b < \infty$. Wir formulieren Hauptsätze über auf dem Intervall (a, b) differenzierbare Funktionen.

☞ **4.3.1 Satz** (Fermat[3]). *Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und sei $\xi \in (a, b)$ eine* Extremstelle, *es gelte also*

$$\textbf{(Minimumstelle)} \qquad \forall_{x \in (a,b)} \quad f(x) \geq f(\xi) \tag{4.3.1-A}$$

oder

$$\textbf{(Maximumstelle)} \qquad \forall_{x \in (a,b)} \quad f(x) \leq f(\xi). \tag{4.3.1-B}$$

Dann gilt $f'(\xi) = 0$.

Beweis. Wir beschränken uns auf die Minimumstelle, der Beweis für eine Maximumstelle ist analog. Da $\xi \in (a, b)$ ein innerer Punkt des Intervalls ist, können wir die Ableitung

[3] Pierre de Fermat, 1607–1665

$f'(\xi)$ sowohl als linksseitigen als auch als rechtsseitigen Grenzwert berechnen. Es gilt also

$$f'(\xi) = \lim_{x \nearrow \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \leq 0 \tag{4.3.1-C}$$

da $x - \xi < 0$ und nach Voraussetzung $f(x) - f(\xi) \geq 0$ gilt. Entsprechend gilt

$$f'(\xi) = \lim_{x \searrow \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \geq 0 \tag{4.3.1-D}$$

da diesmal $x - \xi > 0$ gilt. Da beide Grenzwerte übereinstimmen müssen folgt die Behauptung $f'(\xi) = 0$. □

4.3.2 Beispiel. Das gerade Gezeigte kann genutzt werden, um Extremstellen differenzierbarer Funktionen zu finden. Wir betrachten ein Beispiel und wollen das Maximum der Funktion

$$f(x) = \mathrm{e}^{\cos x} \sin x \tag{4.3.2-A}$$

auf dem Intervall $[0, \pi]$ bestimmen. Wegen $f(0) = f(\pi) = 0$ und $f(x) > 0$ auf $(0, \pi)$ liegt ein solches Maximum im Inneren. Dieses muss nach dem Satz von Fermat

$$0 = f'(x) = -\mathrm{e}^{\cos x} \sin^2 x + \mathrm{e}^{\cos x} \cos x = \mathrm{e}^{\cos x} \left(\cos x - \sin^2 x\right) \tag{4.3.2-B}$$

erfüllen. Nutzt man $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ und die Tatsache, dass die Exponentialfunktion keine Nullstellen hat, so folgt daraus

$$\cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \tag{4.3.2-C}$$

und damit $\cos x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$. Da die Cosinusfunktion nur Werte aus $[-1, 1]$ annehmen kann, folgt damit $\cos x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ und damit $x = \arccos \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Da die Funktion als stetige nicht konstante Funktion auf einem kompakten Intervall ein Extremum annehmen muss, handelt es sich bei der einzig möglichen Stelle auch um die gesuchte Extremstelle. Der zugehörige Funktionswert ist

$$f(x) = \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \mathrm{e}^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} \tag{4.3.2-D}$$

(unter Ausnutzung der gerade gelösten Gleichung $\sin^2 x = \cos x$.)

4.3.3 Satz (Rolle[4]). *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, auf dem offenen Intervall (a, b) differenzierbar und gelte $f(a) = f(b)$. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.*

Beweis. Ist die Funktion f konstant, so ist nichts zu zeigen. Wir nehmen deshalb an f, sei nicht konstant. Dann nimmt f auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ sowohl Maximum als auch Minimum an. Dabei können nicht sowohl der maximale als auch der minimale Funktionswert auf dem Rand angenommen werden. Für Extremstellen im Inneren gilt aber $f'(\xi) = 0$. □

[4] Michel Rolle, 1652–1719

☞ **4.3.4 Satz** (1. Mittelwertsatz, Lagrange[5]). *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf dem offenen Intervall (a, b) differenzierbar. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{4.3.4-A}$$

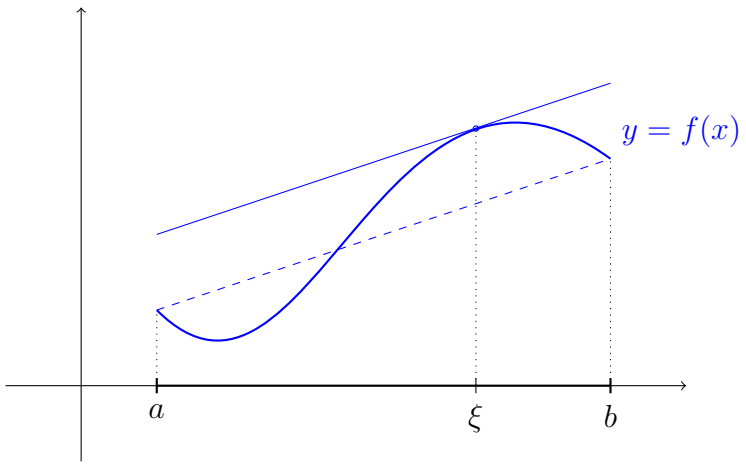
Beweis. Anwenden des Satzes von Rolle auf die Hilfsfunktion

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x \tag{4.3.4-B}$$

mit $g(b) - g(a) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b - a) = 0$ liefert die Existenz eines $\xi \in (a, b)$ mit

$$0 = g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{4.3.4-C}$$

und damit die Behauptung. □



☞ **4.3.5 Satz** (2. Mittelwertsatz, Cauchy). *Seien $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, auf dem offenen Intervall (a, b) differenzierbar und gelte $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit*

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \tag{4.3.5-A}$$

Beweis. Es gilt $g(b) \neq g(a)$, da sonst nach dem Satz von Rolle ein ξ mit $g'(\xi) = 0$ existieren würde. Damit ist die Hilfsfunktion

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(x) \tag{4.3.5-B}$$

definierbar und es gilt nach Konstruktion

$$h(b) - h(a) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(b) - g(a)) = 0. \tag{4.3.5-C}$$

[5] Joseph-Louis Lagrange, 1736–1813

Der Satz von Rolle liefert damit die Existenz eines $\xi \in (a,b)$ mit

$$0 = h'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(\xi) \tag{4.3.5-D}$$

und nach Division durch $g'(\xi) \neq 0$ folgt die Behauptung. □

Ableitungen differenzierbarer Funktionen $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ müssen selbst nicht stetig sein, sie können aber auch nicht beliebige Unstetigkeitsstellen besitzen. Für Ableitungen gilt stets eine Version des Zwischenwertsatzes, wir formulieren ihn zuerst als Nullstellensatz:

☞ **4.3.6 Satz.** *Angenommen $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar. Gibt es dann $x_1, x_2 \in (a,b)$ mit $f'(x_1) > 0$ und $f'(x_2) < 0$. Dann existiert ein ξ zwischen x_1 und x_2 mit $f'(\xi) = 0$.*

Beweis. Wir nehmen zuerst an, dass $x_1 < x_2$ gilt. Da f auf (a,b) differenzierbar ist, ist f insbesondere stetig auf $[x_1, x_2]$ stetig. Damit besitzt f nach dem Satz 3.2.2 von Weierstrass auf $[x_1, x_2]$ ein Maximum an, es gibt also ein $\xi \in [x_1, x_2]$ mit $f(\xi) = \max_{x \in [x_1,x_2]} f(x)$.

Dabei kann ξ keiner der Randpunkte sein. Wäre $\xi = x_1$, so impliziert $f(x) \leq f(x_1)$ schon $f'(x_1) \leq 0$ im Widerspruch zu $f'(x_1) > 0$. Entsprechend impliziert $\xi = x_2$ und damit $f(x) < f(x_2)$ direkt $f'(x_2) \geq 0$ im Widerspruch zu $f'(x_2) < 0$. Also gilt $\xi \in (x_1, x_2)$. Damit folgt nach dem Satz 4.3.1 von Fermat $f'(\xi) = 0$.

Für $x_1 > x_2$ betrachtet man stattdessen das Intervall $[x_2, x_1]$ und ein Minimum . Alles Weitere verläuft analog. □

Dabei ist 0 nicht besonders, was der Satz wirklich besagt, ist dass Ableitungen keine Sprünge haben können. Dazu betrachte man für $f'(x_1) > \lambda > f'(x_2)$ einfach $f(x) - \lambda x$ und wende obigen Satz an.

Sprungstellen einer Funktion bezeichnet man als *Unstetigkeitsstellen erster Art*; alle anderen Unstetigkeitsstellen heißen von zweiter Art. Es gilt also

☞ **4.3.7 Korollar** (Darboux[6]). *Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann besitzt f' keine Unstetigkeiten erster Art.*

4.4 Die Regel von l'Hôpital

Differentialrechnung hilft bei der Bestimmung von Grenzwerten. Das bekannteste Beispiel dafür ist nachfolgender Satz, einige Umformulierungen und Erweiterungen werden wir im Anschluss diskutieren.

☞ **4.4.1 Satz** (l'Hôpital, 0/0-Version). *Angenommen, f und g sind auf (a, x_*) differenzierbar und $f(x) \longrightarrow 0$ sowie $g(x) \longrightarrow 0$ für $x \to x_*$. Gilt dann $g'(x) \neq 0$ auf (a, x_*), so folgt*

$$\lim_{x \to x_*} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_*} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \tag{4.4.1-A}$$

[6] Jean-Gaston Darboux, 1842–1917

vorausgesetzt der Grenzwert auf der rechten Seite existiert oder divergiert bestimmt.

Beweis. Wir können f und g in x_* durch 0 stetig fortsetzen. Mit dem 2. Mittelwertsatz der Differentialrechnung finden wir damit ein ξ_x zwischen x und x_* mit

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_*)}{g(x) - g(x_*)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} \tag{4.4.1-B}$$

und für $x \to x_*$ gilt $\xi_x \to x_*$ und die Behauptung folgt. □

Die gerade gezeigte Aussage kann man mehrfach anwenden, es gilt also

$$\lim_{x\to x_*} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_*} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to x_*} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \cdots = \lim_{x\to x_*} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}, \tag{4.4.1-C}$$

falls die Funktion n-fach differenzierbar ist, Funktion und die ersten $n-1$ Ableitungen $f^{(k)}(x) \longrightarrow 0$ und $g^{(k)}(x) \longrightarrow 0$ für $x \to x_*$ erfüllen, keine der auftretenden Ableitungen weitere Nullstellen in der Nähe von x_* hat und der letzte Grenzwert existiert.

Der Satz gilt natürlich analog für rechtsseitige Grenzwerte.

⚒ **4.4.2 Beispiele.** **(i)** Es gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\ln(\mathrm{e} - x) + x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{1 - \frac{1}{\mathrm{e}-x}} = \frac{2}{1 - \mathrm{e}^{-1}} = \frac{2\mathrm{e}}{\mathrm{e} - 1}. \tag{4.4.2-A}$$

(ii) Es gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\cos x} = 2 \tag{4.4.2-B}$$

Der gerade gezeigte Satz gilt auch, wenn x_* durch $\pm\infty$ ersetzt wird. Dazu substituieren wir einfach $y = x^{-1}$ und erhalten

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y\to 0_+} \frac{f(y^{-1})}{g(y^{-1})} = \lim_{y\to 0_+} \frac{-y^{-2} f'(y^{-1})}{-y^{-2} g'(y^{-1})} = \lim_{x\to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{4.4.2-C}$$

unter der Annahme, dass es ein $R > 0$ mit $g'(x) \neq 0$ für $x > R$ gibt und der letzte Grenzwert existiert oder bestimmt divergiert.

⚒ **4.4.3 Beispiel.** Auch ein Beispiel dazu: Es gilt $\ln(x+1) - \ln x = \ln(1 + x^{-1}) \longrightarrow 0$ für $x \to +\infty$ und damit

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x+1) - \ln x}{x^{-1}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}}{-x^{-2}} = \lim_{x\to\infty} x^2 \frac{x + 1 - x}{x(x+1)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x+1} = 1. \tag{4.4.3-A}$$

☞ **4.4.4 Satz** (l'Hôpital, ∞/∞-Version). *Angenommen, f und g sind auf (a, x_*) differenzierbar und $f(x) \longrightarrow +\infty$ sowie $g(x) \longrightarrow +\infty$ für $x \to x_*$. Gilt dann $g'(x) \neq 0$ auf (a, x_*), so folgt*

$$\lim_{x\to x_*} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_*} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \tag{4.4.4-A}$$

vorausgesetzt der Grenzwert auf der rechten Seite existiert oder divergiert bestimmt.

Beweis. Da g' keine Nullstelle besitzt, ist g monoton wachsend und wir können annehmen, dass $g(x) > 0$ gilt. Wir nehmen zuerst an, dass der Grenzwert

$$K = \lim_{x \to x_*} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \tag{4.4.4-B}$$

existiert. Aufgrund der Konvergenz existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$\forall_{x \in [x_* - \delta, x_*)} \qquad \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - K \right| < \varepsilon. \tag{4.4.4-C}$$

Wir schreiben $x_0 = x_* - \delta$ und wenden auf dem Intervall $[x_0, x]$ den zweiten Mittelwertsatz an. Damit finden wir $x_0 < \xi_x < x < x_*$ mit

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}. \tag{4.4.4-D}$$

Es gilt also

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - K \right| < \varepsilon \tag{4.4.4-E}$$

und damit

$$\frac{f(x)}{g(x)} - K = \frac{f(x_0) - Kg(x_0)}{g(x)} + \underbrace{\left(1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}\right)}_{<1} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - K \right). \tag{4.4.4-F}$$

Der Betrag des zweiten Summanden ist kleiner ε, der erste Summand strebt mit $x \to x_*$ gegen Null da $g(x) \longrightarrow +\infty$ gilt. Die Behauptung folgt.

Angenommen, in (4.4.4-B) liegt bestimmte Divergenz vor. Dann existiert zu jedem $R > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$\forall_{x \in [x_* - \delta, x_*)} \qquad \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} \right| > R. \tag{4.4.4-G}$$

Wir bezeichnen wiederum $x_0 = x_* - \delta$ und wenden den zweiten Mittelwertsatz auf $[x_0, x]$ an. Damit folgt

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \right| > R \tag{4.4.4-H}$$

und wiederum

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \underbrace{\frac{f(x_0)}{g(x)}}_{\longrightarrow 0} + \underbrace{\left(1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}\right)}_{\longrightarrow 1} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}}_{> R}. \tag{4.4.4-I}$$

für $x \to x_*$. Die Behauptung folgt. □

4.4.5 Beispiel. Das Beispiel

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} &= \lim_{x \to \infty} \frac{1}{(x^2 - 1)^{-1/2} x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \\ &= \lim_{x \to \infty} \frac{(x^2 - 1)^{-1/2} x}{1} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \end{aligned} \tag{4.4.5-A}$$

zeigt, dass die Existenz des Grenzwertes nicht reicht, um ihn auch mit der Regel von l'Hôpital berechnen zu können.

⚒ **4.4.6 Beispiel.** Die Voraussetzung, dass $g'(x) \neq 0$ gilt ist wesentlich. Ein passendes Gegenbeispiel geht auf Stolz[7] zurück und betrachtet wiederum Grenzwerte im Unendlichen. Sei dazu

$$f(x) = x + \sin x \cos x \tag{4.4.6-A}$$

und

$$g(x) = f(x)\mathrm{e}^{\sin x}. \tag{4.4.6-B}$$

Dann gilt sowohl $g(x) \longrightarrow +\infty$ als auch $f(x) \longrightarrow +\infty$ für $x \to +\infty$. Weiterhin ist

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \mathrm{e}^{-\sin x} \tag{4.4.6-C}$$

für $x \to +\infty$ divergent. Allerdings liefert die Anwendung der Regel von l'Hôpital (unter Missachtung der nicht geltenden Voraussetzung $g' \neq 0$) wegen

$$f'(x) = 1 + \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x \tag{4.4.6-D}$$

und

$$g'(x) = \mathrm{e}^{\sin x}\left(2\cos^2 x + x\cos x + \sin x \cos^2 x\right) \tag{4.4.6-E}$$

den falschen Grenzwert

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{2\cos^2 x}{\mathrm{e}^{\sin x}\left(2\cos^2 x + x\cos x + \sin x\cos^2 x\right)} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{2\mathrm{e}^{-\sin x}\cos x}{x + 2\cos x + \sin x \cos x} = 0. \end{aligned} \tag{4.4.6-F}$$

Es ist also Vorsicht geboten!

⚒ **4.4.7 Beispiel.** Ebenso macht es einen Unterschied ob man einen Ausdruck als $0/0$ oder als ∞/∞ interpretiert. Ebenso dazu ein Beispiel, wir betrachten den Grenzwert

$$\lim_{x\searrow 0} \frac{e^{-1/x}}{x}. \tag{4.4.7-A}$$

Dieser ist unbestimmt von der Form $0/0$ und wir versuchen l'Hôpital anzuwenden. Dies führt auf die zunehmend komplizierter werdenden Grenzwerte

$$\begin{aligned} \lim_{x\searrow 0} \frac{e^{-1/x}}{x} &\overset{?}{=} \lim_{x\searrow 0} \frac{e^{-1/x}\frac{1}{x}^2}{1} = \lim_{x\searrow 0} \frac{e^{-1/x}}{x^2} \\ &\overset{?}{=} \lim_{x\searrow 0} \frac{e^{-1/x}\frac{1}{x}^2}{2x} = \lim_{x\searrow 0} \frac{e^{-1/x}}{2x^3} \\ &\overset{?}{=} \lim_{x\searrow 0} \frac{e^{-1/x}\frac{1}{x}^2}{6x^2} = \lim_{x\searrow 0} \frac{e^{-1/x}}{6x^4} \\ &\overset{?}{=} \cdots \overset{?}{=} \lim_{x\searrow 0} \frac{e^{-1/x}}{(n+1)!x^n} \overset{?}{=} \cdots \end{aligned} \tag{4.4.7-B}$$

[7] Otto Stolz, 1842–1905

die nicht zielführend zur Bestimmung des Grenzwertes sind. Jedoch gilt

$$\lim_{x\searrow 0}\frac{e^{-1/x}}{x}=\lim_{x\searrow 0}\frac{1/x}{e^{1/x}}=\lim_{x\searrow 0}\frac{-\frac{1}{x^2}}{-e^{1/x}\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\searrow 0}\frac{1}{\mathrm{e}^{1/x}}=0. \tag{4.4.7-C}$$

Entsprechend gilt

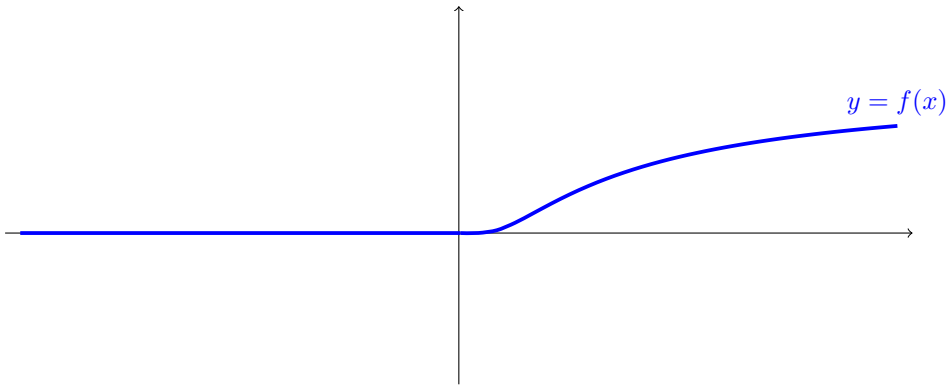
$$\begin{aligned}\lim_{x\searrow 0}\frac{e^{-1/x}}{x^n}&=\lim_{x\searrow 0}\frac{1/x^n}{e^{1/x}}=\lim_{x\searrow 0}\frac{-\frac{n}{x^{n+1}}}{-e^{1/x}\frac{1}{x^2}}=n\lim_{x\searrow 0}\frac{e^{-1/x}}{x^{n-1}}=\cdots\\&=n!\lim_{x\searrow 0}\frac{e^{-1/x}}{x}=0.\end{aligned} \tag{4.4.7-D}$$

Die oben mit $\overset{?}{=}$ verbundenen Grenzwerte existieren also alle und sind gleich.

✂ **Ergänzung.** Das letzte Beispiel hat insbesondere gezeigt, dass die Funktion

$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-1/x}, & x>0,\\ 0 & x\le 0\end{cases} \tag{4.4.7-E}$$

in $x=0$ differenzierbar ist. Das Beispiel sollte man sich merken, auch jede der sich ergebenden Ableitungen ist in $x=0$ differenzierbar und diesse Funktion kann beliebig oft abgeleitet werden.



⚒ **4.4.8 Beispiele.** Die Regeln von l'Hôpital sind allgemeiner als formuliert. Neben den angegebenen unbestimmten Ausdrücken der Form $0/0$ und ∞/∞ können auch unbestimmte Ausdrücke der Form $0\cdot\infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0 und $\infty-\infty$ auf die gerade behandelten Formen gebracht und damit berechnet werden.

In einem Punkt ist Vorsicht geboten, die Regeln von l'Hôpital setzen unbestimmte Ausdrücke und die Existenz des letzten Grenzwertes voraus.

(i) Für unbestimmte Ausdrücke der Form $0\cdot\infty$, also für Grenzwerte der Form $\lim_{x\to x_*}f(x)g(x)$ mit $\lim_{x\to x_*}f(x)=0$ und $\lim_{x\to x_*}g(x)=+\infty$, nutzt man eine der Umschreibungen $f(x)g(x)=\frac{f(x)}{1/g(x)}=\frac{g(x)}{1/f(x)}$. Ein elementares Beispiel dazu ist

$$\lim_{x\to 0}x^\mu\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x^{-\mu}}=\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-\mu x^{-\mu-1}}=-\lim_{x\to 0}\frac{x^\mu}{-\mu}=0 \tag{4.4.8-A}$$

für $\mu>0$.

(ii) Für unbestimmte Ausdrücke der Form $\infty - \infty$, also für Grenzwerte der Form $\lim_{x\to x_*}(f(x)-g(x))$ mit $\lim_{x\to x_*} f(x) = +\infty$ und $\lim_{x\to x_*} g(x) = +\infty$, kann man die Umschreibung

$$f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\frac{1}{g(x)}} \tag{4.4.8-B}$$

nutzen. Mitunter geht das aber auch einfacher. Wir geben wiederum ein Beispiel und nutzen die Funktion $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$. Es gilt

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\cot^2 x - \frac{1}{x^2}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos^2 x - \sin^2 x}{x^2\sin^2 x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x + \sin x}{x}\cdot\frac{x\cos x - \sin x}{x\sin^2 x}.\end{aligned} \tag{4.4.8-C}$$

und während sich für den ersten Faktor elementar der Grenzwert 2 ergibt, folgt für den zweiten mit der Regel von l'Hôpital

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{\sin^2 x + 2x\sin x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{-1}{\frac{\sin x}{x} + 2\cos x} = -\frac{1}{3}. \tag{4.4.8-D}$$

Also folgt für den Ausgangsgrenzwert

$$\lim_{x\to 0}\left(\cot^2 x - \frac{1}{x^2}\right) = -\frac{2}{3}. \tag{4.4.8-E}$$

(iii) Für unbestimmte Ausdrücke der Form 1^∞, 0^0 oder ∞^0 bietet es sich, die Ausdrücke vorher zu logarithmieren. Statt also den Grenzwert von $(f(x))^{g(x)}$ zu berechnen, bestimmt man den von $\ln(f(x))^{g(x)} = g(x)\cdot\ln f(x)$. Dies führt auf unbestimmte Ausdrücke der schon behandelten Formen $\infty\cdot 0$ oder $0\cdot\infty$. Berechnung und Einsetzen in die Exponentialfunktion führt dann zum gesuchten Grenzwert.

Ebenso einfache Beispiele dafür. Es gilt

$$\lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{x\ln x} = \exp\left(\lim_{x\to 0} x\ln x\right) = 1 \tag{4.4.8-F}$$

und ebenso

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} x^{1/x} &= \lim_{x\to+\infty}\exp\left(\frac{\ln x}{x}\right) = \exp\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\right)\\ &= \exp\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{1}\right) = \mathrm{e}^0 = 1.\end{aligned} \tag{4.4.8-G}$$

Eine Anwendung der Regel von l'Hôpital ist der Beweis des folgenden Satzes

☞ **4.4.9 Satz.** *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Angenommen, der Grenzwert der Ableitung $\lim_{x\to b} f'(x)$ am rechten Rand existiert. Dann existiert im rechten Randpunkt auch die linksseitige Ableitung und stimmt mit diesem Grenzwert überein,*

$$\lim_{x\to b}\frac{f(x)-f(b)}{x-b} = \lim_{x\to b} f'(x). \tag{4.4.9-A}$$

Beweis. Anwendung der Regel von l'Hôpital. Da $\lim_{x\to b} f(x) = f(b)$ gilt, handelt es sich um einen unbestimmten Ausdruck der Form $0/0$ und aus der Existenz des Grenzwertes der Ableitungen folgt damit

$$\lim_{x\to b} \frac{f(x)-f(b)}{x-b} = \lim_{x\to b} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x\to b} f'(x). \tag{4.4.9-B}$$

□

Damit kann man stetige stückweise definierte Funktionen auf Differenzierbarkeit überprüfen. Dazu ein Beispiel

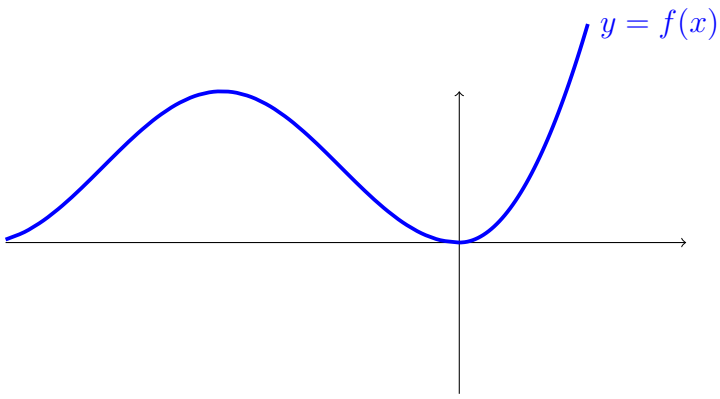
4.4.10 Beispiel. Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ 1-\cos x, & x < 0, \end{cases} \tag{4.4.10-A}$$

ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar. Auf dem Intervall $(0,+\infty)$ erhalten wir dabei als Ableitung $f'(x) = 2x$ und auf $(-\infty, 0)$ entsprechend $f'(x) = \sin x$. Die Funktion ist stetig und es gilt

$$\lim_{x\nearrow 0} f'(x) = \lim_{x\nearrow 0} \sin x = 0 = \lim_{x\searrow 0} 2x = \lim_{x\searrow 0} f'(x) \tag{4.4.10-B}$$

und die Differenzierbarkeit in $x = 0$ folgt.



Man beachte, dass hier der Nachweis der Stetigkeit der Funktion wesentlich ist.

4.5 Die Taylorsche Formel

4.5.1 (Taylorpolynome)**.** Differenzierbarkeit einer Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $x \in (a,b)$ entspricht der Existenz einer linearen Näherung

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \mathbf{o}(h), \qquad h \to 0 \tag{4.5.1-A}$$

an die Funktion f in der Nähe der Stelle x. Differenzierbarkeit zu höherer Ordnung liefert polynomielle Näherungen. Dazu definieren wir uns zuerst zu einer n-fach differenzierbaren Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ und zu gegebenem Punkt $x \in (a, b)$ das *Taylorpolynom*[8] n-ter Ordnung

$$T_{n,x}[f](h) = f(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k \tag{4.5.1-B}$$

in der Variablen h. In dieser Notation entspricht $T_{1,x}[f](h) = f(x) + f'(x)h$ dem ersten Teil der rechten Seite von (4.5.1-A). Existieren weitere Ableitungen von f in x, so gilt als Verallgemeinerung der Formel (4.5.1-A).

☞ **4.5.2 Satz** (Taylorsche Formel mit Peano-Restglied). *Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine $(n-1)$-fach differenzierbare Funktion. Existiert in x die n-te Ableitung, so gilt*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - T_{n,x}[f](h)}{h^n} = 0 \tag{4.5.2-A}$$

mit $T_{n,x}[f]$ aus (4.5.1-B).

Beweis. Die Aussage folgt mit der Regel von l'Hôpital. Es gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h} T_{n,x}[f](h) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!} h^{k-1} = T_{n-1,x}[f'](h) \tag{4.5.2-B}$$

und damit

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - T_{n,x}[f](h)}{h^n} &= \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - T_{n-1,x}[f'](h)}{nh^{n-1}} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x+h) - T_{1,x}[f^{(n-1)}](h)}{n!h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x+h) - f^{(n-1)}(x) - f^{(n)}(x)h}{n!h} = 0, \end{aligned} \tag{4.5.2-C}$$

im letzten Schritt unter Ausnutzung der n-fachen Differenzierbarkeit im Punkt x. □

4.5.3 (Restgliedformeln). Die gerade gezeigte Grenzwertbeziehung kann äquivalent umgeschrieben werden zu

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \mathbf{o}(|x - x_0|^n). \tag{4.5.3-A}$$

Wir können also $f(x)$ in der Nähe eines Punktes x_0 durch eine polynomiale Näherung beschreiben. Um besser beschreiben zu können, wie gut diese Näherung ist, suchen wir nach alternativen Formeln für das *Restglied*

$$R_n(x, x_0) = f(x) - T_{n,x_0}[f](x - x_0) = f(x) - f(x_0) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k. \tag{4.5.3-B}$$

[8] Brook Taylor, 1685–1731

Die gerade gezeigte Taylorsche Formel mit *Peano-Restglied* besagt in dieser Notation also

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x,x_0)}{(x-x_0)^n} = 0. \tag{4.5.3-C}$$

Für praktische Anwendungen sind andere Darstellungen des Restgliedes von Bedeutung. Die nachfolgend angegebenen verallgemeinern den Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

☞ **4.5.4 Satz** (Schlömilch[9]). *Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-fach differenzierbare Funktion und gelte $x_0 \in (a,b)$. Dann gibt es zu jedem $p \geq 1$ und jedem $x \in (a,b)$ ein ξ zwischen x_0 und x mit*

$$R_n(x,x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{pn!}(x-\xi)^{n-p+1}(x-x_0)^p. \tag{4.5.4-A}$$

Beweis. Wir definieren zwei Hilfsfunktionen. Sei dazu $x, x_0 \in (a,b)$ und

$$g(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k, \qquad h(t) = (x-t)^p \tag{4.5.4-B}$$

für t zwischen x und x_0. Beide Funktionen sind differenzierbar und es gilt

$$g'(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \tag{4.5.4-C}$$

sowie

$$h'(t) = -p(x-t)^{p-1}. \tag{4.5.4-D}$$

Damit existiert nach dem zweiten Mittelwertsatz der Differentialrechnung 4.3.5 ein ξ zwischen x und x_0 mit

$$\frac{g(x)-g(x_0)}{h(x)-h(x_0)} = \frac{g'(\xi)}{h'(\xi)} = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{pn!}(x-\xi)^{n-p+1}. \tag{4.5.4-E}$$

Mit $h(x) - h(x_0) = -(x-x_0)^p$ und

$$g(x) - g(x_0) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x) - T_{n,x_0}[f](x) = R_n(x,x_0) \tag{4.5.4-F}$$

folgt die Behauptung. □

Man beachte, dass die Wahl von ξ hier sowohl von x und x_0 als auch vom Parameter p abhängt. Zwei Spezialfälle sind hier von Bedeutung. Diese ergeben sich für die Wahlen $p = n+1$ und $p = 1$.

☞ **4.5.5 Korollar** (Lagrange-Restglied). *Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-fach differenzierbare Funktion und gelte $x_0 \in (a,b)$. Dann gibt es zu jedem $x \in (a,b)$ ein ξ zwischen x_0 und x mit*

$$R_n(x,x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \tag{4.5.5-A}$$

[9] Oskar Schlömilch, 1823–1901

☞ **4.5.6 Korollar** (Cauchy-Restglied). *Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-fach differenzierbare Funktion und gelte $x_0 \in (a, b)$. Dann gibt es zu jedem $x \in (a, b)$ ein ξ zwischen x_0 und x mit*

$$R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x - \xi)^n (x - x_0). \tag{4.5.6-A}$$

✂ **Ergänzung.** Reihenentwicklungen im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ werden oft als Maclaurin-Reihen[10] bezeichet. Es gibt eigentlich keinen Grund, diese besonders hervorzuheben. Formeln werden jedoch manchmal einfacher und viele klassische Funktionen der Analysis sind in Form solcher Reihen definiert. Die nachfolgenden Reihendarstellungen

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{4.5.6-B}$$

$$\ln(1 - x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}, \qquad |x| < 1, \tag{4.5.6-C}$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{4.5.6-D}$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{4.5.6-E}$$

ergeben sich aus dem Taylorschen Satz und können als Definition für die angegebenen Funktionen genutzt werden. Für den Cosinus rechnen wir dies kurz nach. Wegen $\cos' = -\sin$ und $\sin' = \cos$ sind alle Ableitungen der Funktion $f(x) = \cos(x)$ auf ganz $\mathbb{R}$ beschränkt und erfüllen

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} (-1)^k, & n = 2k, \\ 0, & n = 2k+1. \end{cases} \tag{4.5.6-F}$$

Damit folgt

$$f(x) = \sum_{n=0}^{2N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \frac{f^{(2N+1)}(\xi_{2N})}{(2N+1)!} x^{2N+1} = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + \frac{f^{(2N+1)}(\xi_{2N})}{(2N+1)!} x^{2N+1} \tag{4.5.6-G}$$

mit einem ξ_{2N} zwischen 0 und x. Für $N \to \infty$ gilt damit aber

$$\left| \frac{f^{(2N+1)}(\xi_{2N})}{(2N+1)!} x^{2N+1} \right| \le \frac{|x|^{2N+1}}{(2N+1)!} \longrightarrow 0 \tag{4.5.6-H}$$

und die angegebene Reihe stellt wirklich für alle x die Cosinusfunktion dar. Zusammen mit der Darstellung für den Sinus ergibt sich damit die Beziehung

$$\cos x + \mathrm{i} \sin x = \exp(\mathrm{i}x), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{4.5.6-I}$$

zwischen Winkelfunktionen und komplexer Exponentialfunktion und damit die eigentliche Begründung, warum die Polardarstellung komplexer Zahlen oft kurz als

$$r(\cos \phi + \mathrm{i} \sin \phi) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} \tag{4.5.6-J}$$

geschrieben wird. Insbesondere folgt damit auch die bemerkenswerte *Eulersche Identität*

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0. \tag{4.5.6-K}$$

[10] Colin Maclaurin, 1698–1746

4.6 Kurvendiskussionen

Eine klassische Anwendung der Differentialrechnung in einer Dimension sind Kurvendiskussionen. Dabei werden charakteristische Eigenschaften von Funktionen $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ berechnet, die es erlauben den Graphen der Funktion in seinen wesentlichen Zügen zu skizzieren. Wir diskutieren die wichtigsten charakteristischen Punkte und Intervalle, Eigenschaften und Hilfslinien.

Dazu sei im Weiteren $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ hinreichend oft differenzierbar auf einem Intervall (a, b) mit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

4.6.1 (Monotonieintervalle). Wenn $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ monoton wachsend ist, so folgt

$$f'(x) = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0. \tag{4.6.1-A}$$

Es ist also notwendig, dass dann f' auf dem *Monotonieintervall* nichtnegativ ist. Andererseits gilt

Satz. *Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Gilt dann $f'(x) > 0$ (beziehungsweise $f'(x) < 0$) auf (a, b), so ist f streng monoton wachsend (beziehungsweise fallend).*

Beweis. Dies folgt direkt aus dem Mittelwertsatz 4.3.4. Wir beschränken uns auf die erste Aussage. Für $x < y$ existiert stets ein $\xi \in (x, y)$ mit

$$f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x) \tag{4.6.1-B}$$

und damit impliziert $y > x$ stets $f(y) - f(x) > 0$. □

4.6.2 (Extrema). Lokale *Extremstellen* sind über den Satz 4.3.1 von Fermat charakterisierbar. Ist $x_* \in (a, b)$ eine lokale Extremstelle von f, so muss $f'(x_*) = 0$ gelten. Neben diesem notwendigen Kriterium gibt es auch hinreichende Kriterien zum bestimmen lokaler Maxima und Minima. Das bekannteste dazu ist

Satz. *Sei f zweimal stetig differenzierbar. Angenommen, es gilt $f'(x_*) = 0$ und $f''(x_*) < 0$ (beziehungsweise $f''(x_*) > 0$). Dann liegt in x_* eine lokale Maximumstelle (beziehungsweise Minimumstelle) vor.*

Beweis. Wir beschränken uns auf die erste Aussage. Da $f''(x_*) < 0$ und f'' stetig ist, gibt es eine Umgebung $(x_* - \delta, x_* + \delta)$ auf der f'' negativ ist. Da $f'(x_*) = 0$ gilt, folgt aus dem Mittelwertsatz für $|x - x_*| < \delta$

$$f'(x) = f'(x) - f'(x_*) = f''(\eta)(x - x_*) \tag{4.6.2-A}$$

für ein η zwischen x und x_*. Damit gilt $f'(x) > 0$ für $x < x_*$ und $f'(x) < 0$ für $x > x_*$. Also folgt wiederum aus dem Mittelwertsatz

$$f(x) - f(x_*) = f'(\xi)(x - x_*) < 0 \tag{4.6.2-B}$$

für ein ξ zwischen x und x_*. Also gilt $f(x) < f(x_*)$ für $x < x_*$ und ebenso für $x > x_*$. □

Etwas allgemeiner und direkt aus der zweiten Beweishälfte folgt sogar

Satz. *Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $x_* \in (a, b)$. Angenommen, es gilt $f'(x_*) = 0$ und die Ableitung $f' : (a, b) \to \mathbb{R}$ wechselt in x_* das Vorzeichen von positiv zu negativ (beziehungsweise von negativ zu positiv). Dann liegt in x_* eine lokale Maximumstelle (beziehungsweise Minimumstelle) vor.*

Das notwendige Kriterium $f'(x_*)$ allein ist nicht hinreichend für eine lokale Extremstelle. Punkte $(x_*, f(x_*))$ mit $f'(x_*) = 0$, die keine lokalen Extrema sind, werden als *Sattelpunkte* bezeichnet. Typisches Beispiel dafür ist der Ursprung für die Funktion $f(x) = x^3$ mit $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$.

4.6.3 (Schmiegeparabeln)**.** In Extremstellen kann man nach einer guten Approximation für die Form des Extremums fragen. Diese ist (unter der Annahme dass die zweite Ableitung ungleich Null ist) durch das Taylorpolynom zweiter Ordnung

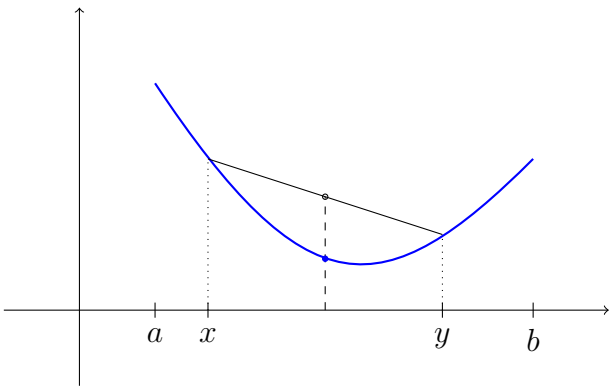
$$x \mapsto f(x_*) + \frac{f''(x_*)}{2}(x - x_*)^2 \tag{4.6.3-A}$$

gegeben. Dieses wird deshalb als *Schmiegeparabel* am Extremum bezeichnet. Extremstellen x_* mit $f''(x_*) = 0$ lassen sich an der Extremstelle nicht durch eine Parabel approximieren, hier benötigt man Polynome höherer Ordnung zur Approximation.

4.6.4 (Konvexitätsintervalle und Wendepunkte)**.** Die Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ heißt auf dem Intervall (a, b) *strikt konvex*, wenn für alle $a \le x < y \le b$ und alle $\theta \in (0, 1)$

$$f(\theta x + (1 - \theta)y) < \theta f(x) + (1 - \theta)f(y) \tag{4.6.4-A}$$

gilt, ihr Graph also stets unterhalb jeder Sekante liegt.



Satz. *Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Angenommen, $f''(x) > 0$ auf (a, b). Dann ist f strikt konvex auf (a, b).*

Beweis. Da $f'' > 0$ gilt, ist die Ableitung f' streng monoton wachsend. Die Hilfsfunktion

$$h(\theta) = f(\theta x + (1 - \theta)y) - \theta f(x) - (1 - \theta)f(y) \tag{4.6.4-B}$$

erfüllt $h(0) = h(1) = 0$ und es gibt somit nach dem Satz 4.3.3 von Rolle ein $\eta \in (0,1)$ mit

$$h'(\eta) = f'(\eta x + (1-\eta)y)(x-y) - f(x) + f(y) = 0. \tag{4.6.4-C}$$

Für dieses gilt $h''(\eta) = f''(\eta x + (1-\eta)y)(x-y)^2 > 0$, es handelt sich also um ein lokales Minimum. Darüberhinaus ist $h'(\eta)$ streng monoton wachsend, es kann also keine weiteren lokalen Extrema von h in $(0,1)$ geben und in η liegt ein globales Minimum vor, $h(\eta) < 0$.

Angenommen, für ein $\theta_* \in (0,1)$ gilt $h(\theta_*) = 0$. Dann gäbe es aber in beiden Intervallen $(0,\theta_*)$ und $(\theta_*,1)$ nach dem Satz von Rolle jeweils lokale Extrema. Widerspruch. Also gilt $h(\theta) < 0$ auf $(0,1)$ und damit die Behauptung. □

Im Eindimensionalen heißt eine Funktion f strikt konkav, wenn $-f$ strikt konvex ist. Punkte, an denen sich das Konvexitätsverhalten ändert, werden als *Wendepunkte* bezeichnet. Wendepunkte sind also insbesondere Nullstellen der zweiten Ableitung f'', an denen die zweite Ableitung das Vorzeichen wechselt.

✂ **Ergänzung.** Konvexität einer Funktion liefert Ungleichungen. Die zur Definition genutzte Ungleichung (4.6.**4-A**) wird oft als *Jensensche Ungleichung*[11] bezeichnet. Diese kann man nutzen, um weitere Ungleichungen zu beweisen. Die Funktion $f(x) = -\ln x$ ist konvex, es gilt also für $x, y > 0$ und $\theta \in (0,1)$

$$\ln(\theta x + (1-\theta)y) \geq \theta \ln x + (1-\theta)\ln y. \tag{4.6.4-D}$$

Dies kann man (per Induktion über n) verwenden, um Mittelwerte abzuschätzen. Es gilt für $x_1, \ldots, x_n > 0$

$$\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \geq \frac{1}{n}\ln x_1 + \frac{n-1}{n}\ln\left(\frac{1}{n-1}\sum_{k=2}^{n} x_k\right) \geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln x_k = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \tag{4.6.4-E}$$

und damit die *Ungleichung vom geometrisch-arithmetischen Mittel*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \geq \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{4.6.4-F}$$

Gleichheit gilt dabei genau dann, wenn alle Zahlen gleich sind, also $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ gilt.

Entsprechend folgt aus der Konvexität von $f(x) = x^p$ für $p > 1$ und $x > 0$

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^p \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^p \tag{4.6.4-G}$$

und damit eine Ungleichung zwischen den p-ten Potenzmitteln und dem arithmetischen Mittel

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{4.6.4-H}$$

Diese kann man einfach verallgemeinern. Mit $y_k = x_k^p$ und $q = \alpha p > p$ für $\alpha > 1$ folgt

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^p = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^q\right)^{\frac{p}{q}} \tag{4.6.4-I}$$

[11] Johan Jensen, 1859–1925

und damit die allgemeine *Potenzmittelungleichung*

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^q\right)^{\frac{1}{q}}, \qquad q > p \geq 1, \tag{4.6.4-J}$$

für $x_k > 0$ und wiederum mit Gleichheit genau für $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

4.6.5 (Wendetangenten)**.** Zum Skizzieren eines Funktionsgraphen ist es von Interesse an Wendepunkten den Anstieg des Graphen zu kennen. Tangenten in Wendepunkten werden als *Wendetangenten* bezeichnet.

4.6.6 (Asymptoten)**.** Um das Verhalten der Funktion am Rand eines offenen Definitionsbereichs zu beschreiben, interessiert man sich oft für Asymptoten. Wir unterscheiden zwei Fälle.

(i) Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ kann es sein, dass der Grenzwert $\lim_{x \nearrow b} f(x)$ existiert oder bestimmt divergiert. Existiert der Grenzwert, so kann f zu einer stetigen Funktion $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ fortgesetzt werden. Bei bestimmter Divergenz spricht man oft von einer *vertikalen Asymptote* oder einem *Pol*. Interessanter ist dann aber mitunter die Ordnung, also der eventuell existierende Exponent $\rho > 0$, für den der Grenzwert

$$\lim_{x \nearrow b} f(x)(b - x)^{\rho} \tag{4.6.6-A}$$

endlich und von Null verschieden ist.

(ii) Für $b = +\infty$ kann es sein, dass der Grenzwert $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ existiert oder divergiert. Existiert der Grenzwert, so spricht man mitunter von einer *horizontalen Asymptote*, die zugehörige horizontale Linie hilft beim skizzieren des Graphen. Liegt Divergenz vor, so kann man wiederum nach einer einfacheren, das Verhalten des Graphen beschreibenden, Funktion suchen. Ein Beispiel dafür könnte eine Polynomfunktion $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ mit

$$\lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - p(x)\big) = 0 \tag{4.6.6-B}$$

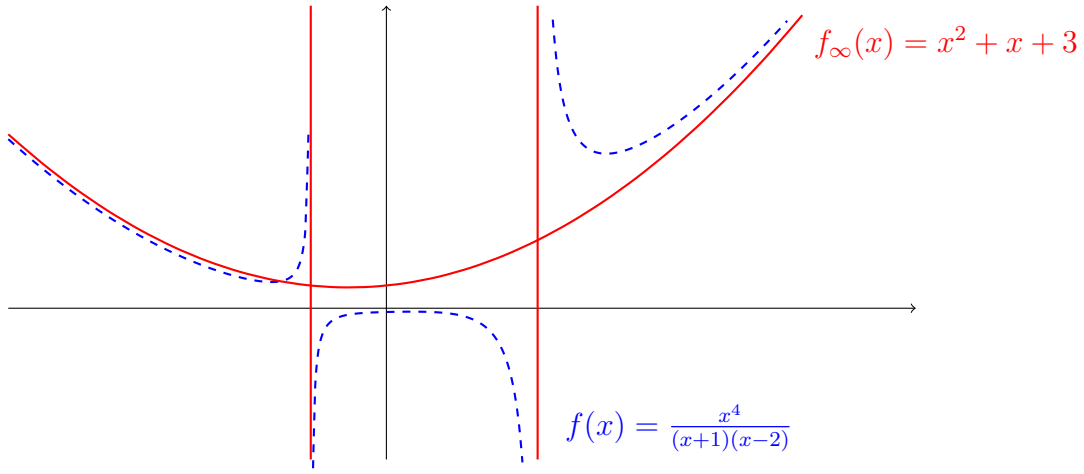
sein. Von Interesse ist hier oft nur der Fall $n = 1$ und man spricht dann einfach von einer *Asymptote* des Graphen.

Oft ist hier aber auch nur der führende Koeffizient von Bedeutung. Für diesen reicht dann natürlich der Grenzwert

$$a_n = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^n} \neq 0 \tag{4.6.6-C}$$

in Analogie zur Ordnung (4.6.**6-A**).

Entsprechend kann man für linke Randpunkte vorgehen. Als illustrierendes Beispiel kann man sich folgende Funktion anschauen:



4.6.7 Beispiel. Die Sinusfunktion $f(x) = \sin x$ ist strikt konvex auf $((2k-1)\pi, 2k\pi)$ und strikt konkav auf $(2k\pi, (2k+1)\pi)$ für $k \in \mathbb{Z}$. Alle Vielfachen von π sind Wendepunkte mit Wendetangenten

$$x \mapsto (-1)^k (x - k\pi). \tag{4.6.7-A}$$

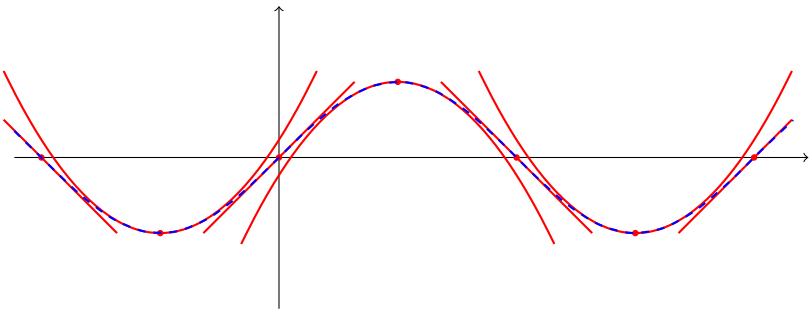
Maximalstellen sind in $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ und Minimalstellen in $2k\pi - \frac{\pi}{2}$, dabei sind die Schmiegeparabeln durch

$$x \mapsto 1 - \frac{1}{2}(x - 2k\pi - \frac{\pi}{2})^2 \qquad \text{in} \quad x_* = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \tag{4.6.7-B}$$

und

$$x \mapsto -1 + \frac{1}{2}(x - 2k\pi + \frac{\pi}{2})^2 \qquad \text{in} \quad x_* = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \tag{4.6.7-C}$$

gegeben. Nachfolgend skizziert sind Wendetangenten und Schmiegeparabeln zusammen mit dem gestrichelten Graphen der Funktion.



4.6.8 Beispiel. Die Funktion $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ erfüllt

$$f'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2}, \qquad f''(x) = \mathrm{e}^{-x^2}\left(4x^2 - 2\right) \tag{4.6.8-A}$$

und besitzt damit eine Maximumstelle in $x_* = 0$ mit $f''(x_*) = -2 < 0$ und Wendepunkte in $x_\pm = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Als Schmiegeparabel in der Maximumstelle erhalten wir

$$x \mapsto 1 - x^2 \tag{4.6.8-B}$$

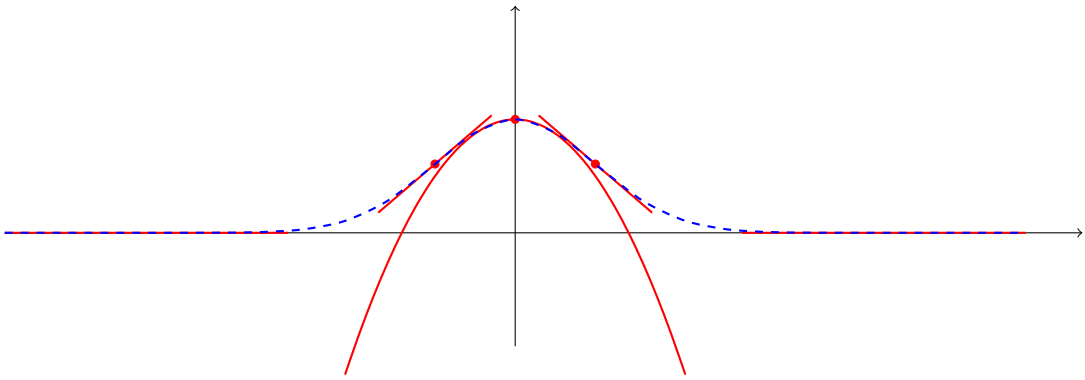
und als Wendetangenten in den Stellen $x_\pm$

$$x \mapsto \mathrm{e}^{-1/2} \mp \sqrt{2}\mathrm{e}^{-1/2}\left(x \mp \frac{\sqrt{2}}{2}\right). \tag{4.6.8-C}$$

Darüberhinaus gilt

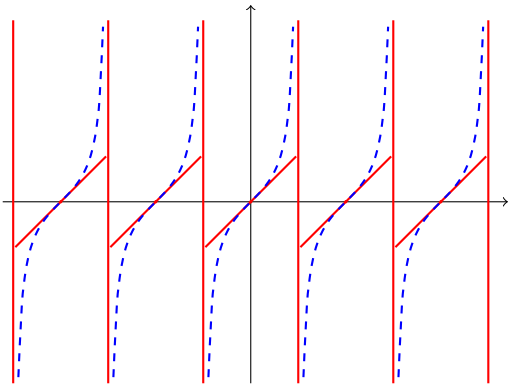
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0. \tag{4.6.8-D}$$

Nachfolgend skizziert sind wiederum die Extrem- und Wendepunkte zusammen mit Schmiegeparabel und Wendetangenten zusammen mit dem gestrichelten Graphen der Funktion.

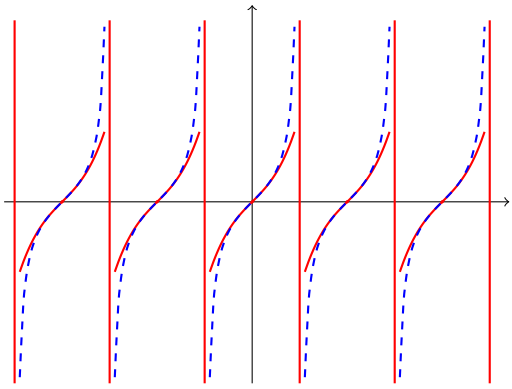


4.6.9 Beispiel. Die Funktion $f(x) = \tan x$ besitzt Pole erster Ordnung in den Nullstellen der Cosinusfunktion, also in $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Weiter gilt $f'(x) = 1 + \tan^2 x \geq 1$ und die Funktion ist auf jedem Teilintervall $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, streng monoton wachsend. Wegen $f''(x) = 2\tan x(1 + \tan^2 x)$ sind die Nullstellen $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ebenso Wendepunkte und in den linken Intervallhälften der Monotonieintervalle ist f konkav während die Funktion in den rechten Hälften konvex ist.

Eine gute Skizze der Funktionen klann man sich aus Asymptoten und Wendetangenten zusammenbauen.



Hätte man statt der Wendetangenten in den Wendepunkten Taylorpolynome dritter Ordnung genutzt, wird der Verlauf der Funktion noch deutlich besser approximiert.



4.7 Stammfunktionen

✍ **4.7.1 Definition.** *Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Eine Funktion $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ heißt* Stammfunktion *von f, falls F auf (a, b) differenzierbar ist und $F' = f$ gilt.*

Das Finden von Stammfunktionen ist also invers zum Differenzieren. Bevor wir genauer diskutieren, wie man Stammfunktionen finden kann, klären wir die Eindeutigkeit. Es gilt

☞ **4.7.2 Lemma.** **(i)** *Angenommen, für eine differenzierbare Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ gilt $f' = 0$. Dann ist f konstant.*

(ii) *Angenommen, $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ besitzt eine Stammfunktion $F : (a, b) \to \mathbb{R}$. Dann ist die Menge aller Stammfunktionen von f durch*

$$\{F + c \mid c \in \mathbb{R}\} \tag{4.7.2-A}$$

gegeben.

Beweis. **(i)** Angenommen für alle $\xi \in (a, b)$ gilt $f'(\xi) = 0$. Dann folgt aus dem Mittelwertsatz 4.3.4 für $x, y \in (a, b)$ und mit einem ξ zwischen x und y

$$f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y) = 0 \tag{4.7.2-B}$$

und f ist konstant.

(ii) Angenommen $F_1 : (a, b) \to \mathbb{R}$ und $F_2 : (a, b) \to \mathbb{R}$ sind Stammfunktionen von f. Dann gilt $F_1' - F_2' = 0$ und die beiden Stammfunktionen unterscheiden sich um eine Konstante.

□

4.7.3 (Notation)**.** Wenn $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion besitzt, so bezeichnet man die Menge aller Stammfunktionen als *unbestimmtes Integral* von f und schreibt dafür

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + \mathrm{C}. \tag{4.7.3-A}$$

Dabei ist $\int$ ein stilisiertes Summenzeichen; mit der Notation $\mathrm{d}F(x) = f(x)\,\mathrm{d}x$ für das Differential einer Funktion kann das uneigentliche Integral auch als Summation über Differenzen von F aufgefasst werden. Es gilt also

$$\int \mathrm{d}F(x) = F(x) + C. \tag{4.7.3-B}$$

Alle bisher berechneten Ableitungen spezieller Funktionen liefern damit im Umkehrschluss wichtige Grundintegrale, die für spätere Berechnungen essentiell sein werden. Wir führen diese als Beispiele auf.

4.7.4 Beispiel (Potenzfunktionen)**.** Es gilt für alle $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$

$$\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + \mathrm{C}. \tag{4.7.4-A}$$

Für den verbleibenden Fall $n = -1$ erhalten wir stattdessen aus (4.2.**3-C**)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln x + \mathrm{C}. \tag{4.7.4-B}$$

Dies kann als Definition der Logarithmusfunktion genutzt werden und erklärt, warum der natürliche Logarithmus wirklich natürlich ist.

4.7.5 Beispiel (Exponentialfunktionen)**.** Aus (4.2.**4-D**) erhalten wir

$$\int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a} a^x + \mathrm{C}. \tag{4.7.5-A}$$

4.7.6 Beispiel (Winkelfunktionen)**.** Für Winkelfunktionen ergibt (4.2.**5-A**)

$$\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + \mathrm{C} \qquad \text{und} \qquad \int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + \mathrm{C}. \tag{4.7.6-A}$$

Aus (4.2.**5-B**) erhalten wir

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \tan x + \mathrm{C} \tag{4.7.6-B}$$

was man sicher nicht mehr als Grundintegral bezeichnen kann. Stattdessen werden wir weitere Integrationsregeln benötigen um kompliziertere Integrale auf einfachere zurückführen zu können.

4.7.7 Beispiel (Arcus- und Areafunktionen als Stammfunktionen)**.** Wichtige Grundintegrale sind neben den bisher angesprochenen auf jeden Fall die Folgenden. Aus (4.2.**6-B**) ergibt sich

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + \mathrm{C}, \qquad |x| < 1, \tag{4.7.7-A}$$

wegen (4.2.**6-D**) kann letzteres auch als $\mathrm{C} - \arccos x$ (natürlich mit verschiedenen Konstanten) geschrieben werden. Weiterhin liefert (4.2.**8-E**) die erstaunlich ähnlich aussehende Formel

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcosh} x + \mathrm{C}, \qquad x > 1. \tag{4.7.7-B}$$

Aus (4.2.**8-C**) folgt

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arsinh} x + \mathrm{C} \tag{4.7.7-C}$$

und entsprechend aus (4.2.**6-F**)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \arctan x + \mathrm{C}. \tag{4.7.7-D}$$

4.7.8. Allen Differentiationsregeln entsprechen Integrationsregeln. Im Unterschied zu den Differentiationsregeln, die das Ableiten beliebiger Verkettungen differenzierbarer Funktionen erlauben, gibt es keinen einfachen Algorithmus zum Finden von Stammfunktionen. Es lassen sich sehr einfach Funktionen angeben, für die Stammfunktionen nicht elementar aufgeschrieben werden können. Ein Beispiel für letzteres ist die Funktion e^{x^2}. Keine Kombination der bisher aufgeführten speziellen Funktionen hat diese Funktion als Ableitung.

Beim Finden von Stammfunktionen ist also einerseits Kreativität gefragt, andererseits aber auch Vorsicht geboten. Es kann durchaus passieren, dass alle Anstrengung umsonst ist und eine Stammfunktion (obwohl existent) nicht in einfacher Form angegeben werden kann.

☞ **4.7.9 Korollar** (Integrationsregeln). **(i)** *Ist $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so gilt*

$$\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + \mathrm{C}. \tag{4.7.9-A}$$

(ii) (Linearität). *Das Bilden von Stammfunktionen ist linear. Besitzen $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ Stammfunktionen und ist $\alpha \in \mathbb{R}$, so folgt*

$$\int f(x) + \alpha g(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \alpha \int g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4.7.9-B}$$

(iii) (partielle Integration). *Angenommen, $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ sind differenzierbar. Dann gilt*

$$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4.7.9-C}$$

(iv) (Substitutionsregel). *Angenommen, $f : (a,b) \to (c,d)$ und $g : (c,d) \to \mathbb{R}$ sind differenzierbar. Dann gilt*

$$\int g'(f(x))f'(x)\,\mathrm{d}x = g(f(x)) + \mathrm{C}. \tag{4.7.9-D}$$

Beweis. **(i)** folgt direkt aus der Definition der Stammfunktion. **(ii)** folgt aus der Ableitungsregel für Summen. **(iii)** folgt aus der Produktregel. **(iv)** folgt aus der Kettenregel. □

⚒ **4.7.10 Beispiele.** **(i)** Mit partieller Integration ergibt sich

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x = \int 1 \cdot \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - \int x\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x\ln x - x + \mathrm{C} \tag{4.7.10-A}$$

(ii) Wiederum mit partieller Integration ergibt sich

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x \,\mathrm{d}x &= \int \cos x \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x \cos x + \int \sin^2 x \,\mathrm{d}x \\ &= \sin x \cos x + \int \mathrm{d}x - \int \cos^2 x \,\mathrm{d}x \\ &= \sin x \cos x + x - \int \cos^2 x \,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{4.7.10-B}$$

Dies kann nach der Stammfunktion von $\cos^2 x$ umgestellt werden. Es folgt

$$\int \cos^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{\sin x \cos x + x}{2} + \mathrm{C}. \tag{4.7.10-C}$$

(iii) Die Substitutionsregel kann in zwei Richtungen verwendet werden. Einerseits kann man damit Funktionen und Ableitungen in einem Ausdruck erkennen und diesen damit vereinfachen. So gilt

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{1+x^2} \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{y}\bigg|_{y=1+x^2} \\ &= \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \mathrm{C} = \ln \sqrt{1+x^2} + \mathrm{C}.\end{aligned} \tag{4.7.10-D}$$

Zusammen mit partieller Integration folgt daraus

$$\int \arctan x \,\mathrm{d}x = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = x \arctan x - \ln \sqrt{1+x^2} + \mathrm{C}. \tag{4.7.10-E}$$

(iv) Ein weiteres Beispiel zur Subsitutionsregel ist

$$\int \cot x \,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\sin x} \,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}y}{y}\bigg|_{y=\sin x} = \ln \sin x + \mathrm{C} \tag{4.7.10-F}$$

für $\sin x > 0$, also zum Beispiel $0 < x < \pi$.

(v) Andererseits kann die Subsitutionsregel genutzt werden, um neue Ausdrücke zu erzeugen. Dies benötigt mehr Kreativität, ein Beispiel dazu wäre

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2} \,\mathrm{d}x &= \int \sqrt{1-\sin^2 y} \cos y \,\mathrm{d}y\bigg|_{x=\sin y} = \int \cos^2 y \,\mathrm{d}y\bigg|_{x=\sin y} \\ &= \frac{\sin y \cos y + y}{2}\bigg|_{x=\sin y} + \mathrm{C} = \frac{x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x}{2} + \mathrm{C}\end{aligned} \tag{4.7.10-G}$$

auf dem Intervall $x \in (-1, 1)$ und damit mit $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

✂ **Ergänzung.** Wir haben bisher offen gelassen, welche Funktionen Stammfunktionen besitzen. Ein notwendiges Kriterium liefert der Satz von Darboux, Funktionen mit Sprungstellen können keine Stammfunktionen haben. Unstetigkeitsstellen zweiter Art können durchaus auftreten. So ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \tag{4.7.10-H}$$

auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar mit unstetiger Ableitung

$$g(x) = f'(x) = \begin{cases} 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \tag{4.7.10-I}$$

Die Funktion g besitzt also insbesondere eine Stammfunktion.

Im nächsten Kapitel werden wir beweisen, dass jede stetige Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion besitzt. Dies heißt nicht, dass man die Stammfunktionen auch elementar angeben kann.

Index

Axiome, 16
Beweis durch Kontraposition, 15
Beweise, 14
Definitionen, 14
direkter Beweis, 14
Fallunterscheidung, 14
Folgerungen (Korollare), 14
Gegenbeispiel, 14
Hilfsaussagen (Lemmata), 14
indirekter Beweis, 15
Induktionsbeweis, 16
Sätze (Theoreme), 14

Aussagenlogik
Aussageform, 9
Disjunktion, 8
Implikation, 9
Konjunktion, 8
Modus ponens, 15
Negation, 8
Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten, 9
Prinzip vom ausgeschlossenen Widerspruch, 9
Reductio ad absurdum, 15
Regel von de Morgan, 8
Satz von der doppelten Verneinung, 8
Schlussregeln, 15
Tautologie, 9
werteverlaufsgleich, 8
Äquivalenz, 9

Differential, 88

Eulersche Identität, 107
Eulersche Zahl, 66

Exponentialreihe, 66

Folge, 45
beschränkt, 46, 54
bestimmt divergent, 50
Cauchyfolge, 54
divergent, 46
Folgenglied, 45
Grenzwert, 46
konvergent, 46
limes inferior, 61
limes superior, 61
monoton fallend, 47
monoton wachsend, 47
Teilfolge, 48
uneigentliche Grenzwerte, 50
Funktion
Ableitung, 87
differenzierbar, 87
Extremstelle, 95
gleichmäßig stetig, 78
monoton fallend, 84
monoton wachsend, 84
Stammfunktion, 114
stetig, 73
stetig auf M_1, 73
streng monoton fallend, 84
streng monoton wachsend, 84
Unstetigkeitsstellen erster Art, 98

Induktionsaxiom, 16
Induktionsanfang, 21
Induktionsschritt, 21
Infimum, 32
Intervall
abgeschlossen, 33
halboffen, 33

offen, 33
Intervallschachtelungen, 33
irrationale Zahlen, 35

Kettenbruch, 36
komplexe Zahlen
Argument, 38
Betrag, 37
imaginäre Achse, 38
imaginäre Einheit, 37
Imaginärteil, 37
konjugiert komplexe Zahl, 37
Realteil, 37
reelle Achse, 38
Kurvendiskussion
Asymptote, 111
Extremstellen, 108
horizontalen Asymptote, 111
Monotonieintervall, 108
Pol, 111
Sattelpunkte, 109
Schmiegeparabel, 109
strikt konvex, 109
vertikalen Asymptote, 111
Wendepunkte, 110
Wendetangenten, 111
Körper, 26
geordneter Körper, 29
archimedisch, 30
Körper der komplexen Zahlen, 37
Körper der rationalen Zahlen, 27
Körper der reellen Zahlen, 32
Binärdarstellungen, 64
Dezimaldarstellungen, 63
Ternärdarstellungen, 64

Mengenlehre
Differenzmenge, 11
disjunkt, 11
Elemente, 10
Euler-Venn-Diagramme, 11
Funktion, 16
bijektiv, 17
Bild, 16
induzierte Abbildung, 25
injektiv, 16
inverse Funktion, 17
Kern, 25
surjektiv, 16
Umkehrfunktion, 17
Urbild, 16
geordnete Paar, 23
kartesische Produkt, 23
Komplement, 11
leere Menge, 10
Menge, 10
Schnitt, 10, 13
Teilmenge, 10
Vereinigung, 11, 13
metrischer Raum, 45
folgenkompakt, 76
französische Eisenbahnmetrik, 46
Häufungspunkt, 80
kompakt, 76
Metrik, 45
triviale Metrik, 45
vollständig, 55

Primzahlen, 28
Prädikatenlogik
Allquantor, 12
Existenzquantor, 12
Regel von de Morgan, 12

Reihe, 56
absolut konvergent, 60
bedingt konvergent, 67
divergent, 57
geometrische Reihe, 57
Glieder, 57
harmonische Reihe, 58
konvergent, 56
Wert der Reihe, 57
Majorante, 60
Partialsummen, 56
Teleskopreihe, 58
Relation, 23
Halbordnung, 27
größtes Element, 28
kleinstes Element, 28
maximales Element, 28
minimales Element, 28
nach oben beschränkt, 28
nach unten beschränkt, 28

Ordnungsrelation, 27
Intervalle, 33
Totalordnung, 27
Äquivalenzrelation, 24
Zerlegung, 24
Äquivalenzklasse, 24
Ring, 25

spezielle Funktion
Arcusfunktionen, 92
Arcus cosinus, 93
Arcus sinus, 92
Arcus tangens, 93
Areafunktionen, 94
Area cosinus hyperbolicus, 95
Area sinus hyperbolicus, 94
Exponentialfunktion, 69
Hyperbelfunktionen, 94
Cosinus hyperbolicus, 94
Sinus hyperbolicus, 94
Logarithmusfunktion, 85
natürlicher Logarithmus, 85
Winkelfunktionen, 38, 88
Additionstheoreme, 39
Cosinus, 38, 88, 92
Doppelwinkelformeln, 40
Halbwinkelformeln, 40
Sinus, 38, 88, 92
Tangens, 92
Wurzelfunktion
Hauptwert, 41
Supremum, 32

Taylorsche Formel
Restglied, 105
Restgliedformeln
Peano-Restglied, 106
Taylorpolynom, 105

unbestimmtes Integral, 114
Ungleichung
Bernoulli-Ungleichung, 37
geometrisch-arithmetisch, 110
Jensensche Ungleichung, 110
Mittelungleichung, 36
Potenzmittelungleichung, 111