Spektralabschätzungen in der Mathematischen Physik

- Die schwingende Membran und das Weylsche Gesetz
- Die Hypothese von Pólya
- Riesz-Mittel für konvexe Funktionen nach Berezin und Li-Yau
- Der Satz von Kröger und der Satz von Friedlander-Filonov
- Das Weylsche Gesetz in der Quantenmechanik
- Die Ungleichungen von Bargmann
- Das Birman-Schwinger-Prinzip
- Die Ungleichung von Cwikel-Lieb-Rosenblum und die Lieb-Thirring-Ungleichung
- Lieb-Thirring-Konstanten und Spurformeln
- Die Lieb-Thirring-Hypothese

1. Die schwingende Membran und das Weylsche Gesetz

Energiespektrum einer schwingenden Membran $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ mit DRB bzw. NRB

$$-\Delta^{\Omega}_{D,N} u = \lambda u, \qquad u|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = 0$$

Ist das Gebiet Ω beschränkt und offen (und besitzt Ω im Fall von NRB einen genügend glatten Rand $\partial\Omega$), so ist das entsprechende Spektrum diskret

$$0 < \lambda_1^D(\Omega) \le \lambda_2^D(\Omega) \le \cdots \quad \text{bzw.} \quad 0 = \lambda_1^N(\Omega) \le \lambda_2^N(\Omega) \le \cdots$$

mit den Zählfunktionen

$$n_D^{\Omega}(\Lambda) := \#\left\{\lambda_n^D(\Omega) < \Lambda\right\} \quad \text{bzw.} \quad n_N^{\Omega}(\Lambda) := \#\left\{\lambda_n^N(\Omega) < \Lambda\right\}$$

1.1 Die Zählfunktion im Würfel der Kantenlänge L

Es sei $x \in \mathbb{R}^d$ und $\Omega_L = \{0 < x_k < L \mid k = 1, \dots, d\}$ ist ein Würfel. Dann sind

$$u_m(x) = \prod_{k=1}^{d} \sin\left(\frac{\pi}{L} m_k x_k\right), \qquad \lambda_m^D(\Omega_L) = \frac{\pi^2}{L^2} \sum_{k=1}^d m_k^2, \qquad m_k = 1, 2, \dots,$$

$$u_m(x) = \prod_{k=1}^{d} \cos\left(\frac{\pi}{L} m_k x_k\right), \qquad \lambda_m^N(\Omega_L) = \frac{\pi^2}{L^2} \sum_{k=1}^d m_k^2, \qquad m_k = 0, 1, \dots,$$

Eigenfunktionen und Eigenwerte des Dirichlet-Problems bzw. des Neumann-Problems.

Die Zählfunktion $n_D^{\Omega_L}(\Lambda)$ bzw. $n_N^{\Omega_L}(\Lambda)$ gleicht dann

$$n_{D,N}^{\Omega_L}(\Lambda) = \# \left\{ m \in \mathbb{Z}^d \;\middle|\; \|m\|^2 \le \frac{L^2}{\pi^2}\Lambda, \quad \begin{array}{ll} m_k \ge 1 & \text{DRB} \\ m_k \ge 0 & \text{NRB} \end{array} \right\}.$$

1.2 Das Weylsche Gesetz

Damit gleicht für $\Omega = \Omega_L$ die Zählfunktion $n^{\Omega}_{D,N}(\Lambda)$ asymptotisch dem Volumen des Kugelsegmentes vom Radius $\pi^{-1}L\sqrt{\Lambda}$ im ersten Quadranten

$$\begin{aligned} n^{\Omega}_{D,N}(\Lambda) &= \frac{\tau_d}{2^d}\left(\frac{L}{\pi}\Lambda^{\frac{1}{2}}\right)^d (1+o(1)) \\ &= \frac{\tau_d}{(2\pi)^d}\cdot\Lambda^{\frac{d}{2}}\cdot \mathrm{vol}(\Omega)\cdot(1+o(1)) \\ &= \int\int_{x\in\Omega,\|\xi\|^2\le\Lambda} \frac{dx\cdot d\xi}{(2\pi)^d} \quad \text{für} \quad \Lambda\to+\infty \end{aligned}$$

Hier bezeichnet τ_d das Volumen der Einheitskugel im $\mathbb{R}^d$.

Im Jahr 1912 beweist *Hermann Weyl* diese asymptotische Formel für *allgemeine* Gebiete $\Omega\subset\mathbb{R}^d$.

Motivation: u.a. Verteilung der Schwingungsmoden im Hohlraum - Schwarzkörperstrahlung

1.3 Elementare Grundprinzipien des Variationsprinzips

- Monotonie der Dirichlet-Eigenwerte bezüglich des Gebietes: Vergrößert man das Gebiet, so sinken die Eigenwerte; die Zählfunktionen steigen.

$$\Omega \subset \Omega_1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_n^D(\Omega) \geq \lambda_n^D(\Omega_1) \quad \Rightarrow \quad n_D^{\Omega}(\Lambda) \leq n_D^{\Omega_1}(\Lambda)$$

Dies gilt *nicht* für Neumann-Eigenwerte.

- Tauscht man auf einem Teil des Randes DRB gegen NRB aus, so sinken die Eigenwerte; die Zählfunktionen steigen.

- Tauscht man auf einem Teil des Randes NRB gegen DRB aus, so steigen die Eigenwerte; die Zählfunktionen fallen.

- Führt man ein zusätzliches Stück Rand mit DRB ein, so steigen die Eigenwerte; die Zählfunktionen fallen.

- Führt man ein zusätzliches Stück Rand mit NRB ein, so sinken die Eigenwerte; die Zählfunktionen steigen.

1.4 Der Beweis des Weylschen Gesetzes für DRB

Man lege kariertes Papier über das Gebiet Ω und bezeichne

- mit $\tilde{\omega}_\alpha$ alle Quadrate, welche ganz in Ω liegen
- mit $\hat{\omega}_\beta$ alle Quadrate, welche Ω berühren

und setze $\tilde{\Omega} = \mathrm{int}\left(\bigcup_{\alpha:\tilde{\omega}_\alpha\subset\Omega}\overline{\tilde{\omega}_\alpha}\right)$ sowie $\hat{\Omega} = \mathrm{int}\left(\bigcup_{\beta:\hat{\omega}_\beta\cap\Omega\neq\emptyset}\overline{\hat{\omega}_\beta}\right)$. Die Variationsrechnung ergibt dann

$$
\begin{aligned}
n_D^{\Omega}(\Lambda) &\le n_D^{\hat{\Omega}}(\Lambda) \le n_N^{\hat{\Omega}}(\Lambda) \le \sum_\beta n_N^{\hat{\omega_\beta}}(\Lambda) = \\
&= \#\{\hat{\omega}_\beta\}\cdot \mathrm{vol}(\hat{\omega}_\beta)\cdot\frac{\tau_d\Lambda^{\frac{d}{2}}}{(2\pi)^d}(1+o(1)) = \mathrm{vol}(\hat{\Omega})\cdot\frac{\tau_d\Lambda^{\frac{d}{2}}}{(2\pi)^d}(1+o(1)) \\
n_D^{\Omega}(\Lambda) &\ge n_D^{\tilde{\Omega}}(\Lambda) \ge \sum_\alpha n_N^{\tilde{\omega_\alpha}}(\Lambda) = \\
&= \#\{\tilde{\omega}_\alpha\}\cdot \mathrm{vol}(\tilde{\omega}_\alpha)\cdot\frac{\tau_d\Lambda^{\frac{d}{2}}}{(2\pi)^d}(1+o(1)) = \mathrm{vol}(\tilde{\Omega})\cdot\frac{\tau_d\Lambda^{\frac{d}{2}}}{(2\pi)^d}(1+o(1))
\end{aligned}
$$

2. Die Hypothese von Pólya

Das Weylsche Gesetz liefert eine *asymptotische* Aussage über $n^{\Omega}_{D,N}(\Lambda)$ für *große* Λ, also für $\lambda^{D,N}_n(\Omega)$ für *große* n.

Was kann man konkret für *endliche* Λ also *endliche* n aussagen?

- Beispiel: Isoperimetrische Ungleichungen. Unter allen Gebieten mit gleichem Volumen besitzt der Kreis (die Kugel) den kleinsten Dirichlet-Grundzustand

$$\lambda^D_1(\Omega) \geq (\mathrm{vol}(\Omega))^{-\frac{2}{d}}\,\lambda^D_1(B_1), \qquad B_1 = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| < 1\}$$

Man kann dieses Result von *Rayleigh-Faber-Krahn* auch auf den zweiten Eigenwert anwenden:

$$\lambda^D_2(\Omega) \geq (\mathrm{vol}(\Omega)/2)^{-\frac{2}{d}}\,\lambda^D_1(B_1) = 2^{\frac{2}{d}}\,(\mathrm{vol}(\Omega))^{-\frac{2}{d}}\,\lambda^D_1(B_1)$$

Für höhere Eigenwerte gilt dieses Prinzip nicht.

2.1 Die Pólyasche Ungleichung für Parkette

Angenommen, mit dem Gebiet Ω und dessen Kongruenten läßt sich $\mathbb{R}^d$ lückenlos überdecken. Pólya bewies 1960

$$n_D^\Omega(\Lambda) \leq \frac{\tau_d}{(2\pi)^d} \cdot \Lambda^{\frac{d}{2}} \cdot \mathrm{vol}(\Omega) = \int\int_{x\in\Omega, \|\xi\|^2 \leq \Lambda} \frac{dx \cdot d\xi}{(2\pi)^d}, \quad \Lambda \geq 0, \tag{1}$$

$$\lambda_n^D(\Omega) \geq 4\pi^2 \left(\frac{n}{\tau_d \mathrm{vol}(\Omega)}\right)^{\frac{2}{d}}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Damit liefert das klassische Phasenraumvolumen eine absolute Schranke an die Zählfunktion des Dirichlet-Problems, auch außerhalb des asymptotischen Regimes!

Vom Standpunkt der Einbettung $W_1^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ besitzen solche Gebiete Ω keine erkennbare Besonderheit. Daher vermutete Pólya

Pólyasche Hypothese: Die Ungleichungen (1) und (2) gelten für beliebige Gebiete Ω.

Diese Vermutung ist bis heute weder bewiesen noch widerlegt worden.

2.2 Der Beweis von Pólya

Wir betrachten ein aus Kopien von Ω bestehendes Parkett und skalieren mit dem Faktor $h > 0$.

Es seien Ω_β^h die Teilgebiete des skalierten Parketts (also Kopien von $h\Omega$), welche ganz in der Einheitskugel B_1 enthalten sind. Für $\tilde{\Omega}^h = \text{int}\left(\bigcup_{\beta:\Omega_\beta^h\subset B_1} \Omega_\beta^h\right) \subset B_1$ gibt das Variationsprinzip

$$\#\{\beta\ :\Omega_\beta^h \subset B_1\}\cdot n_D^{h\Omega}(\Lambda) = \sum_{\beta:\ \Omega_\beta^h\subset B_1} n_D^{\Omega_\beta^h}(\Lambda) \le n_D^{\tilde{\Omega}^h}(\Lambda) \le n_D^{B_1}(\Lambda), \quad \Lambda \ge 0$$

Bei der Skalierung gilt $n_D^{\Omega}(h^2\Lambda) = n_D^{h\Omega}(\Lambda)$. Es sei nun $\Lambda\cdot h^2 = \lambda$, $\Lambda\to\infty$, $h\to 0$.

$$\begin{array}{cccccc}
 & \#\{\beta\}h^d\cdot(h^2\Lambda)^{-\frac{d}{2}}\cdot n_D^{\Omega}(h^2\Lambda) & \le & \Lambda^{-\frac{d}{2}}\cdot n_D^{B_1}(\Lambda) & \\
(h\to 0, h^2\Lambda=\lambda) & \downarrow & & \downarrow & (\Lambda\to\infty) \\
 & \dfrac{\text{vol}(B_1)}{\text{vol}(\Omega)}\cdot\lambda^{-\frac{d}{2}}\cdot n_d^{\Omega}(\lambda) & \le & \dfrac{\tau_d}{(2\pi)^d}\cdot\text{vol}(B_1) &
\end{array}$$

3. Der Satz von Berezin und Li-Yau

F.A. Berezin und *P. Li, S.-T. Yau* bewiesen für beliebige Ω die Ungleichung

$$n_D^\Omega(\Lambda) \le C(d) \cdot \frac{\tau_d}{(2\pi)^d} \cdot \Lambda^{\frac{d}{2}} \cdot \mathrm{vol}(\Omega), \quad C(d) \le \left(\frac{d+2}{d}\right)^{\frac{d}{2}}$$

Es sei $\chi_\Lambda(x) = 1$ für $x < \Lambda$ und $\chi_\Lambda(x) = 0$ für $x \ge \Lambda$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} n_D^\Omega(\Lambda) &= \sum_{k:\lambda_k^D(\Omega)<\Lambda} 1 = \sum_k \chi_\Lambda(\lambda_k) = \mathrm{tr}\ \chi_\Lambda(-\Delta_\Omega^D) \\ \frac{\tau_d}{(2\pi)^d} \cdot \Lambda^{\frac{d}{2}} \cdot \mathrm{vol}(\Omega) &= \int\int_{x\in\Omega, \|\xi\|^2 \le \Lambda} \frac{dx \cdot d\xi}{(2\pi)^d} = \int\int_{x\in\Omega} \chi_\Lambda(\|\xi\|^2) \frac{dx \cdot d\xi}{(2\pi)^d} \end{aligned}$$

3.1 Zählfunktionen und Riesz-Mittel

Damit läßt sich die Berezin-Li-Yau-Ungleichung wie folgt umschreiben

$$\operatorname{tr}\, \chi_\Lambda(-\Delta_\Omega^D) \leq C(d) \int \int_{x\in\Omega} \chi_\Lambda(\|\xi\|^2) \frac{dx \cdot d\xi}{(2\pi)^d} \tag{3}$$

Die direkte Behandlung der nicht stetigen charakteristischen Funktion χ_Λ ist problematisch.

Deshalb betrachtet man zunächst konvexe Funktionen ϕ und zeigt die modifizierte Abschätzung

$$\sum_k \phi(\lambda_k^D) = \operatorname{tr}\, \phi(-\Delta_\Omega^D) \leq \int \int_{x\in\Omega} \phi(\|\xi\|^2) \frac{dx \cdot d\xi}{(2\pi)^d} \tag{4}$$

Hier kommt keine zusätzliche Konstante $C(d)$ vor. Die Ungleichung ist scharf und gilt für alle konvexen Funktionen ϕ und alle Gebiete Ω.

Die Abschätzung (3) folgt aus (4) für $\phi = \phi_\Lambda = (\Lambda - x)_+ = \max\{\Lambda - x, 0\}$ mit Hilfe der Legendre-Transformation.

3.2 Der Beweis von Berezin

Es seien $\{\psi_k\}$ die o.n. Eigenbasis von $-\Delta_\Omega^D$ zu $\{\lambda_k^D(\Omega)\}$. Da ψ_k am Rand von Ω verschwindet, kann man diese mit Null zu einer Sobolev-differenzierbaren Funktion auf $\mathbb{R}^d$ fortsetzen.

Dabei gilt $\lambda_k^D = \langle -\Delta_\Omega^D \psi_k, \psi_k\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \psi_k|^2 dx$ sowie $\|\psi_k\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_{\mathbb{R}^d} |\psi_k|^2 dx = 1$.

Es sei $\hat\psi_k$ die Fouriertransformation von ψ_k. Dann besitzt das Maß $d\mu_k(\xi) = |\hat\psi_k(\xi)|^2 d\xi$ die totale Masse 1 und die Jensensche Ungleichung impliziert für konvexes ϕ

$$\sum_k \phi(\lambda_k^D) = \sum_k \phi\left(\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\psi_k|^2 dx\right) = \sum_k \phi\left(\int_{\mathbb{R}^d} \|\xi\|^2 |\hat\psi_k|^2 d\xi\right)$$

$$= \sum_k \phi\left(\int_{\mathbb{R}^d} \|\xi\|^2 d\mu_k\right) \le \sum_k \int_{\mathbb{R}^d} \phi(\|\xi\|^2) d\mu_k$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \phi(\|\xi\|^2) \sum_k \underbrace{\left|\left\langle \psi_k, \frac{e^{i\xi\cdot}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\right\rangle_{L^2(\Omega)}\right|^2}_{|\hat\psi_k|^2} d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(\|\xi\|^2) \underbrace{\left\|\frac{e^{i\xi\cdot}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\right\|^2_{L^2(\Omega)}}_{(2\pi)^{-2}\mathrm{vol}(\Omega)} d\xi$$

4. Der Satz von Kröger und der Satz von Friedlander-Filonov

Welche äquivalente Aussagen gibt es zum Neumann-Problem?

- NRB erfordern eine gewisse Glattheit des Randes (sonst ist das Spektrum ggf nicht diskret)
- $\lambda_1^N(\Omega) = 0$ mit $\psi_1 =$ const
- Variationsprinzip: $\lambda_k^N(\Omega) \leq \lambda_k^D(\Omega)$ für alle $k \in \mathbb{N}$

Der Satz von *Friedlander-Filonov* (Payne, Pólya, Aviles, Levine-Weinberger) besagt, daß falls das Spektrum von $-\Delta_N^\Omega$ diskret ist, so gilt

$$\lambda_{k+1}^N(\Omega) < \lambda_k^D(\Omega), \quad k \in \mathbb{N}, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^d, \quad d \geq 2.$$

Weiter gilt nach *Kröger* unter gleichen Voraussetzungen für $\phi_\Lambda = (\Lambda - x)_+ = \max\{\Lambda - x, 0\}$ die "entgegengesetzte Berezin-Li-Yau-Ungleichung"

$$\sum_k \phi_\Lambda(\lambda_k^N) = \text{tr}\, \phi_\Lambda(-\Delta_\Omega^N) \geq \int \int_{x \in \Omega} \phi_\Lambda(\|\xi\|^2) \frac{dx \cdot d\xi}{(2\pi)^d}$$

5. Das Weylsche Gesetz in der Quantenmechanik

Wir betrachten den Einteilchen-Schrödingeroperator mit dem äußeren elektrischen Potential $-V$

$$H(V;\hbar) = -\hbar^2\Delta - V(x) \quad \text{auf} \quad L^2(\mathbb{R}^d)$$

Uns interessiert insbesondere der Fall eines attraktiven Potentialtopfes $-V(x) \leq 0$.

Bei gewisser lokaler Regularität sowie ausreichend schnellen Abfallen von V im Unendlichen besteht das Spektrum von $H(V;\hbar)$ aus zwei Bestandteilen:

- dem wesentlichen Spektrum $\sigma_{ess}(H(V;\hbar)) = [0, +\infty[$
- gegebenenfalls negativem diskreten Spektrum $\sigma_d \ni -\lambda_n(V;\hbar)$

$$\begin{aligned} S_{\sigma,d}(V;\hbar) &= \operatorname{tr} H_-^\sigma(V;\hbar) = \sum_n \lambda_n^\sigma(V;\hbar) \\ S^{\mathrm{cl}}_{\sigma,d}(V;\hbar) &= \int\int_{h<0} (-h(\xi,x))^\sigma \frac{dx\,d\xi}{(2\pi\hbar)^d}, \quad h = |\xi|^2 - V(x), \quad \sigma \geq 0. \end{aligned}$$

5.1 Der semiklassische Grenzwert

Quantisierung: Jeder gebundene Zustand nimmt ein Volumen von $(2\pi\hbar)^{-d}$ im Phasenraum mit negativer Energie ein.

Dies findet Ausdruck in folgender semiklassischen Formel, welche z.B. für alle kompakt getragenen Potentiale $V \in C^1$ gilt (z.B. *A. Martin*)

$$S_{\sigma,d}(V;\hbar) = S^{\mathrm{cl}}_{\sigma,d}(V;\hbar)(1+o(1)), \quad \hbar \to 0. \tag{5}$$

Der Beweis erfolgt ähnlich wie oben im Fall der schwingenden Membran. Siehe in diesem Zusammenhang auch *Ch. Feffermann* "Uncertainty principle".

- Gilt das Gesetz (5) für alle V mit endlichem $S^{\mathrm{cl}}_{\sigma,d}(V;\hbar)$?
- Liefern die klassischen Phasenraummittel allgemeine Schranken an die entsprechenden spektralen Größen, insbesondere auch im nichtasymptotischen Regime?
- Was kann man überhaupt über $S_{\sigma,d}(V;\hbar)$ für beliebige $\hbar$ und V sagen?
- Wie zählt man effektiv negative Eigenwerte?

6. Die Ungleichung von Bargmann

Es sei $d = 1$ und $\hbar = 1$. Wir betrachten bei $\sigma = 0$ die Zählfunktion

$$N(V) = S_{0,1}(V) = \#\{-\lambda_k(V; 1) < 0\},$$

also die Anzahl der negativen Eigenwerte.

Valentine Bargmann bewies die Abschätzung

$$N(V) = S_{0,1}(V) \leq 1 + \int_{\mathbb{R}} |x| V(x) dx, \quad d = 1.$$

- Der Summand 1 berücksichtigt den “virtuellen” Eigenwert: In den Dimensionen $d = 1, 2$ erzeugt jedes noch so kleine attraktive Potential mindestens einen gebundenen Zustand.
- V. Bargmann untersuchte spherisch symmetrische Potentiale im $\mathbb{R}^3$; nach der Separation der Variablen verbleibt ein effektives eindimensionales Problem.
- Fordert man eine DRB im Punkt $x = 0$, so gilt obige Ungleichung ohne den Summand 1.

- Schritt 1. Für eine Funktion u mit $u(a) = 0$ gilt

$$\frac{u^2(x)}{(x-a)} = (x-a)^{-1} \left(\int_a^x u'(\tau) \cdot 1 \cdot d\tau \right)^2 \leq \int_a^x (u'(\tau))^2 d\tau, \quad x > a.$$

- Schritt 2. Angenommen, es gilt $\int_a^b (x-a)V(x)dx \leq 1$. Dann folgt

$$\int_a^b V|u|^2 dx = \max_{a \leq x \leq b} \frac{u^2(x)}{(x-a)} \cdot \int_a^b (x-a)V(x)dx \leq \int_a^b (u')^2 dx$$

Damit besitzt $q_{a,b} = -\frac{d^2}{dx^2} - V(x)$ mit DRB in a und b keinen negativen Eigenwert.

- Schritt 3. Der Operator $q_{0,R}$ besitze N neg. Eigenwerte. Dann hat ψ_N genau $N+1$ Nullstellen $x_k \in [0, R]$ und ist Eigenfunktion mit neg. Energie für alle $q_{x_k, x_{k+1}}$, $k = 1, \ldots, N$.

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - x_k) V dx > 1 \quad \text{und} \quad \int_0^R xV dx \geq \sum_{k=1}^N \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - x_k) V dx > N.$$

7. Das Birman-Schwinger-Prinzip

Sei $\hbar = 1$, $\sigma = 0$. Wir betrachten die Anzahl $N(\alpha V) = S_{0,d}(\alpha V)$ der neg. Eigenwerte von

$$H(\alpha V) = -\Delta - \alpha V(x) \quad \text{auf} \quad L^2(\mathbb{R}^d), \qquad \alpha > 0.$$

Dazu formt man das Spektralproblem $H(\alpha V)u = -\lambda u$ unter Benutzung der Bezeichnungen $\Gamma_\lambda = (-\Delta + \lambda)^{-1}$ und $u = \Gamma_\lambda^{1/2} v$ wie folgt um

$$\begin{aligned} & -\Delta u - \alpha V u = -\lambda u && \Rightarrow && (-\Delta + \lambda)u = \alpha V u \\ \Rightarrow \quad & \Gamma_\lambda^{1/2}(-\Delta + \lambda)\Gamma_\lambda^{1/2} v = \alpha \Gamma_\lambda^{1/2} V \Gamma_\lambda^{1/2} v && \Rightarrow && \alpha^{-1} v = \Gamma_\lambda^{1/2} V \Gamma_\lambda^{1/2} v \end{aligned}$$

Also ist $-\lambda < 0$ ein Eigenwert von $H(\alpha V)$ genau dann wenn $\alpha^{-1} > 0$ ein Eigenwert von $\Gamma_\lambda^{1/2} V \Gamma_\lambda^{1/2}$ und damit auch von $V^{1/2}\Gamma_\lambda V^{1/2}$ ist. Damit gilt

$$N(\alpha V) = \# \left\{ \text{Eigenwerte von } \Gamma_\lambda^{1/2} V \Gamma_\lambda^{1/2} \text{ bzw. } V^{1/2}\Gamma_\lambda V^{1/2} \text{ über } \alpha^{-1} \right\}$$

7.1 Die Birman-Schwinger-Ungleichung für $d = 3$.

Es sei $d = 3$ und $\lambda = 0$. Der Birman-Schwinger-Operator nimmt dann mit $\Gamma_0 = (-\Delta)^{-1}$ folgende Form an

$$(Xu)(x) \left(V^{1/2}(-\Delta)^{-1} V^{1/2} u \right)(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{V^{1/2}(x) V^{1/2}(y) u(y) dy}{4\pi \|x - y\|} .$$

Mit $\mu_k > 0$ bezeichnen wir die Eigenwerte von X. Dann gilt bei $\alpha = 1$

$$N(V) = \# \{k : \mu_k > 1\} \leq \sum_k \mu_k^2 = \|X\|_{HS}^2 = \frac{1}{16\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{V(x) V(y) dx dy}{\|x - y\|^2}.$$

Diese Ungleichung wurde von *J. Schwinger* und *M. Sh. Birman* im Jahr 1961 bewiesen.

- Problem: Weder die Bargmannsche Ungleichung noch die Abschätzung von Birman und Schwinger reflektieren die semiklassische Asymptotik.

8. Die Ungleichung von Cwikel-Lieb-Rosenblum und die Lieb-Thirring-Ungleichung

Lieb-Thirring-Ungleichungen sind Abschätzungen vom Typ

$$S_{\sigma,d}(V;\hbar) \leq R(\sigma,d) S^{\mathsf{cl}}_{\sigma,d}(V;\hbar)$$

Berechnet man das Phasenraumvolumen durch Integration in ξ explizit, so ergibt sich

$$S^{\mathsf{cl}}_{\sigma,d}(V;\hbar) = \int\int_{h<0} (-h(\xi,x))^\sigma \frac{dx\,d\xi}{(2\pi\hbar)^d} = \underbrace{\frac{\Gamma(\sigma+1)}{2^d \pi^{d/2} \Gamma\left(\sigma + \frac{d}{2} + 1\right)}}_{L^{\mathsf{cl}}_{\sigma,d}} \hbar^{-d} \int V_+^{\sigma+\frac{d}{2}} dx.$$

Die Lieb-Thirring-Ungleichung geht dann in folgende Form über

$$\sum_n \lambda_n^\sigma(V;\hbar) \leq L_{\sigma,d} \hbar^{-d} \int V_+^{\sigma+\frac{d}{2}} dx, \qquad L_{\sigma,d} = R(\sigma,d) L^{\mathsf{cl}}_{\sigma,d}.$$

8.1 Problemstellung

$$S_{\sigma,d}(V;\hbar) \leq R(\sigma,d) S^{\mathrm{cl}}_{\sigma,d}(V;\hbar) \tag{6}$$

- Für welche Paare (σ, d), $\sigma \geq 0$, $d \in \mathbb{N}$ gilt Ungleichung (6) für *alle* $\hbar > 0$ und *alle* Potentiale V mit endlichem Phasenraumvolumen $S^{\mathrm{cl}}_{\sigma,d}(V;\hbar)$, also $V_+ \in L^{\sigma+\frac{d}{2}}(\mathbb{R}^d)$?

Mit Hilfe von (6) läßt sich dann für *alle* Potentiale $V \geq 0$ mit $V \in L^{\sigma+\frac{d}{2}}(\mathbb{R}^d)$ die semiklassische Asymptotik beweisen

$$S_{\sigma,d}(V;\hbar) = S^{\mathrm{cl}}_{\sigma,d}(V;\hbar)(1+o(1)), \quad \hbar \to 0. \tag{7}$$

- Welche Werte nehmen die Konstanten $R(\sigma, d)$ an und welche Bedeutung kommt diesen zu?

Aufgrund der semiklassischen Asymptotik (7) gilt offensichtlich

$$R(\sigma,d) \geq 1 \qquad \text{und} \qquad L_{\sigma,d} \geq L^{\mathrm{cl}}_{\sigma,d}.$$

- Für welche Paare (σ, d) gilt $R(\sigma, d) = 1$?

8.2 Lieb-Thirring-Ungleichungen in der Dimension $d = 1$.

$$H(\alpha V) = -\frac{d^2}{dx^2} - \alpha V \ ; \qquad \sum_n \lambda_n^\sigma(\alpha V) \le L_{\sigma,1} \int_{\mathbb{R}} (\alpha V)_+^{\sigma+\frac{1}{2}} dx \tag{8}$$

Für Potentiale $V \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $-V(x) \le 0$ besitzt $H(\alpha V)$ genau einen negativen Eigenwert für *beliebig* kleine $\alpha > 0$ mit der Asymptotik

$$\sqrt{\lambda_1(\alpha V)} = \frac{\alpha}{2} \int_{\mathbb{R}} V\,dx \cdot (1 + o(1)) \quad \text{für} \quad \alpha \to 0_+ \ .$$

- Im Grenzwert $\alpha \to 0$ sieht man, daß (8) für $0 \le \sigma < \frac{1}{2}$ *nicht* gilt.

- Für $\sigma > \frac{1}{2}$ gilt (8) nach *E. Lieb und W. Thirring* (1972) sowie für $\sigma = \frac{1}{2}$ nach W. 1996, Hundertmark-Lieb-Thomas 1999. Für $\sigma = \frac{1}{2}$ gilt sogar eine *zweiseitige* Abschätzung

$$\frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} \alpha V\,dx \le \sum_n \sqrt{\lambda_n(\alpha V)} \le \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \alpha V\,dx, \quad V \ge 0.$$

8.3 Lieb-Thirring-Ungleichungen in der Dimension $d = 2$ und $d \geq 3$.

$$H(\alpha V) = -\Delta - \alpha V \; ; \qquad \sum_n \lambda_n^\sigma(\alpha V) \leq L_{\sigma,d} \int_{\mathbb{R}} (\alpha V)_+^{\sigma+\frac{d}{2}} dx \tag{9}$$

- Es sei $d = 2$.

Dann gibt es Potentiale $V \in L^1(\mathbb{R}^2)$, für welche die Zählfunktion $N(\alpha V)$ für $\alpha \to +\infty$ *schneller* als $S_{0,2}^{\text{cl}}(\alpha V; 1) = O(\alpha)$ wächst.

Außerdem existiert für $V \geq 0$, $V \not\equiv 0$ für beliebig kleine $\alpha > 0$ (mindestens) ein negativer Eigenwert. Damit gilt (9) für $d = 2$ und $\sigma = 0$ *nicht*.

Für $d = 2$ und $\sigma > 0$ wurde (9) von Lieb und Thirring 1972 bewiesen.

- Es sei $d \geq 3$.

Dann gilt (9) für alle $\sigma \geq 0$. Für $\sigma > 0$ geht dies auf Lieb und Thirring 1972 zurück.

Für $\sigma = 0$ erhält man die *Cwikel-Lieb-Rosenblum*-Ungleichung

$$N(\alpha V) \leq L_{0,d} \int_{\mathbb{R}} (\alpha V)_+^{\frac{d}{2}} dx, \quad d \geq 3. \tag{10}$$

9. Lieb-Thirring-Konstanten und Spurformeln.

Die Zählfunktion

$$S_{\sigma,d}(V;\hbar) = \operatorname{tr} H_-^\sigma(V;\hbar) = \sum_n \lambda_n^\sigma(V;\hbar)$$

verhält sich mit wachsendem σ mehr und mehr regulär. Insbesondere sind die Lieb-Thirring-Konstanten $R(\sigma, d)$ aus

$$S_{\sigma,d}(V;\hbar) \leq R(\sigma, d) S^{\mathrm{cl}}_{\sigma,d}(V;\hbar)$$

nach Lieb-Aizenmann monoton fallend in σ, also

$$1 \leq R(\sigma, d) \leq R(\sigma', d) \quad \text{für} \quad \sigma \geq \sigma' \, .$$

9.1 Zu den Lieb-Thirring-Konstanten.

In der Dimension $d = 1$ ist folgendes zu den Konstanten $R(\sigma, 1)$ bekannt:

- $R(1/2, 1) = 2$.
- $R(\sigma, 1) \leq 2$ für $\frac{1}{2} < \sigma < \frac{3}{2}$ nach Monotonie.
- $R(3/2, 1) = 1$ und damit nach Monotonie $R(\sigma, 1) = 1$ für alle $\sigma \geq \frac{3}{2}$.

Insbesondere sind die genauen Werte von $R(\sigma, 1)$ für $\frac{1}{2} < \sigma < \frac{3}{2}$ unbekannt. Es wird vermutet, daß die Konstante auf Potentialen mit nur einem negativen Eigenwert angenommen wird.

Dies gilt im Fall $R(1/2, 1) = 2$. Hier maximiert das δ-Potential. Desweiteren entspricht diese Konstante auch der Eigenwertasymptotik für $\alpha \to 0_+$.

Die Konstante $R(3/2, 1) = 1$ wird auf allen reflektionsfreien Potentialen angenommen.

In der Dimension $d = 2$ gab es gewisse, nicht optimale Abschätzungen an $R(\sigma, 2)$, insbesondere $1 < R(\sigma, 2)$ für $0 < \sigma \leq 1$.

In den Dimensionen $d \geq 3$ gab es gewisse, nicht optimale Abschätzungen an $R(\sigma, d)$, insbesondere $1 < R(\sigma, d)$ für $0 < \sigma < 1$. Frage: Gilt $R(1, 3) = 1$?

9.2 Spurformeln I.

Für Potentiale $V \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ betrachten wir die Gleichung $-Y'' - VY = k^2 Y$, $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, sowie deren Lösungen Y_F und Y_G mit den asymptotischen Randbedingungen

$$Y_F(x,k) = e^{ikx} \quad \text{für} \quad x \longrightarrow +\infty, \qquad Y_G(x) = e^{-ikx} \quad \text{für} \quad x \longrightarrow -\infty.$$

Die Funktionenpaare $\{Y_F(x,k), Y_F(x,-k)\}$ als auch $\{Y_G(x,k), Y_G(x,-k)\}$ bilden ein Fundamentalsystem und die Beziehung

$$Y_F(x,k) = Y_G(x,k)B(k) + Y_G(x,-k)A(k)$$

definiert die Funktionen $A(k)$ and $B(k)$. Dabei gilt

$$|A(k)|^2 = 1 + |B(-k)|^2 \quad \text{und somit} \quad |A(k)| \geq 1 \quad \text{für} \quad k \in \mathbb{R}.$$

9.3 Spurformeln II.

Es sei $V \geq 0$. Die Spurformeln von *Buslaev-Faddeev-Zakharov* nehmen dann folgende Form an

$$S^{\mathrm{cl}}_{\frac{1}{2},1}(V) = -I_0 + S_{\frac{1}{2},1}(V), \qquad S^{\mathrm{cl}}_{\frac{3}{2},1}(V) = 3I_2 + S_{\frac{3}{2},1}(V)$$

Hier ist wegen $|A(k)| \geq 1$

$$I_j = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} k^j \ln |A(k)| dk \geq 0, \qquad j = 0, 2, 4, \ldots$$

Daraus folgt sofort

$$S_{3/2,1}(V) \leq S^{\mathrm{cl}}_{3/2,1}(V) \qquad \text{und} \qquad S^{\mathrm{cl}}_{\frac{1}{2},1}(V) \leq S_{\frac{1}{2},1}(V).$$

10. Die Lieb-Thirring-Vermutung

Lieb und Thirring formulierten folgende 1972 folgende Hypothese:

In jeder Dimension d existiert ein Schwellenwert $\sigma(d)$, so daß

$$S_{\sigma,d}(V) \leq S^{\mathrm{cl}}_{\sigma,d}(V) \quad \text{für alle} \quad \sigma \geq \sigma(d).$$

Wir beweisen diese Vermutung in A. Laptev, T. Weidl: "Sharp Lieb-Thirring Inequalities in High Dimensions", Acta Mathematica 184 (2000) 87-111

$$\sigma(d) \leq \frac{3}{2} \quad \text{für alle} \quad d \in \mathbb{N}.$$

Ob dabei $\sigma(3) = 1$ gilt, bleibt ungeklärt. Wir zeigen in D. Hundertmark, A. Laptev, T. Weidl: "New bounds on the Lieb-Thirring constants", Inventiones mathematicae 140 3 (2000) 693-704

$$S_{\sigma,d}(V) \leq 2S^{\mathrm{cl}}_{\sigma,d}(V) \quad \text{für} \quad 1 \leq \sigma < \frac{3}{2}, \quad d \in \mathbb{N}.$$