Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik I WS 2005/06

Aufgabe 1

(1P) Sei $M = [0,1]$ und sei d die Abstandfunktion auf M, welche durch

$$d(x,y) := \begin{cases} |x-y| & \text{falls} \quad x \neq 0 \wedge y \neq 0\,, \\ 1 & \text{falls} \quad \text{entweder } x = 0 \text{ oder } y = 0\,, \\ 0 & \text{falls} \quad x = y = 0\,, \end{cases}$$

definiert ist.

1. Zeigen Sie, dass $d(\cdot,\cdot)$ eine Metrik auf M definiert.
2. Entscheiden Sie, ob die Folge
$$x_n = \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$$
eine Cauchy-Folge in dem metrischen Raum (M,d) ist und ob sie in (M,d) konvergiert.
3. Ist der metrische Raum (M,d) vollständig?

Aufgabe 2

(2P) Bestimmen Sie die Grenzwerte für $n \to \infty$ der Folgen

$$a_n = (\sqrt{2+n} - \sqrt{n}\,)(\sqrt{1+2n} - \sqrt{n})\,,$$

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\,.$$

Aufgabe 3

(2P) Bestimmen Sie die Grenzwerte für $n \to \infty$ der Folgen

$$a_n = \sqrt{2+n} - \sqrt{n}\,,$$

$$b_n = \sqrt{4n^2+3n-1} - \sqrt{4n^2-6n+10}\,.$$

Aufgabe 4

(1P) Gegeben sei die Menge

$$M = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{1}{4^k}, \frac{3}{4^k} \right[\,.$$

Entscheiden Sie, ob diese Menge nach unten bzw. nach oben beschränkt ist und ob sie ein Minimum, ein Infimum, ein Maximum oder ein Supremum besitzt.