Resonanzen in Wellenleitern

P.H. Lesky, 6.7.99

1. Was sind Wellenleiter?

2. Warum unendlich lange Wellenleiter?

3. Was passiert in unendlich langen Wellenleitern?

Eigenfunktionen

$$\varphi_{jk}(x_1, x_2) \;=$$

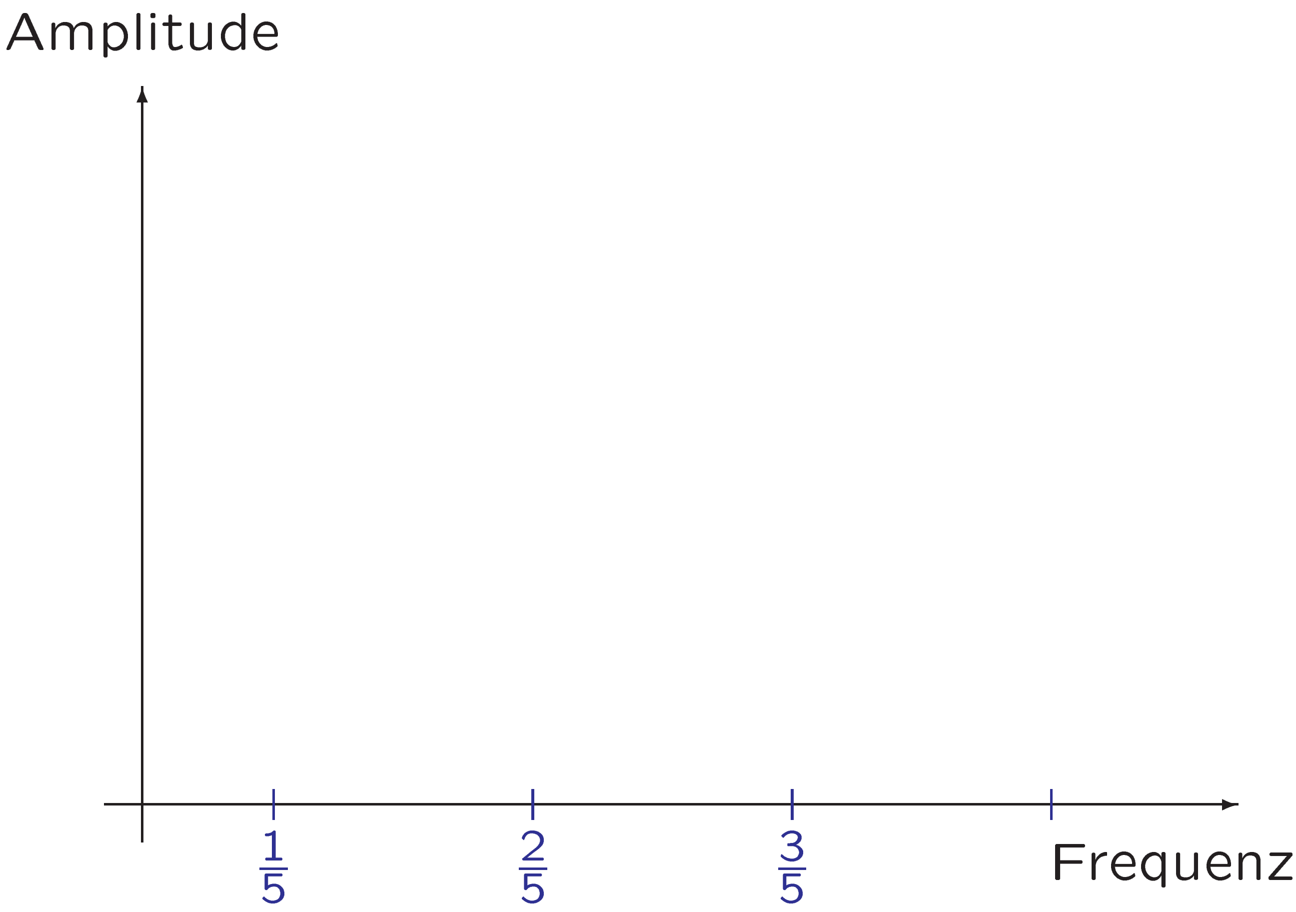
$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{l}} \cos \dfrac{j}{2l} x_1 \, \cos k x_2, & j = 0, 2, 4, \ldots ; \\ & k = 0, 1, 2, \ldots \\ \\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{l}} \sin \dfrac{j}{2l} x_1 \, \cos k x_2, & j = 1, 3, 5, \ldots ; \\ & k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

$$-\left(\partial_1^2 + \partial_2^2\right) \varphi_{jk} \;=\; \lambda_{jk}\, \varphi_{jk}$$

Eigenwerte: $\lambda_{jk} \;=\; \left(\left(\dfrac{j}{2l}\right)^2 + k^2\right)$

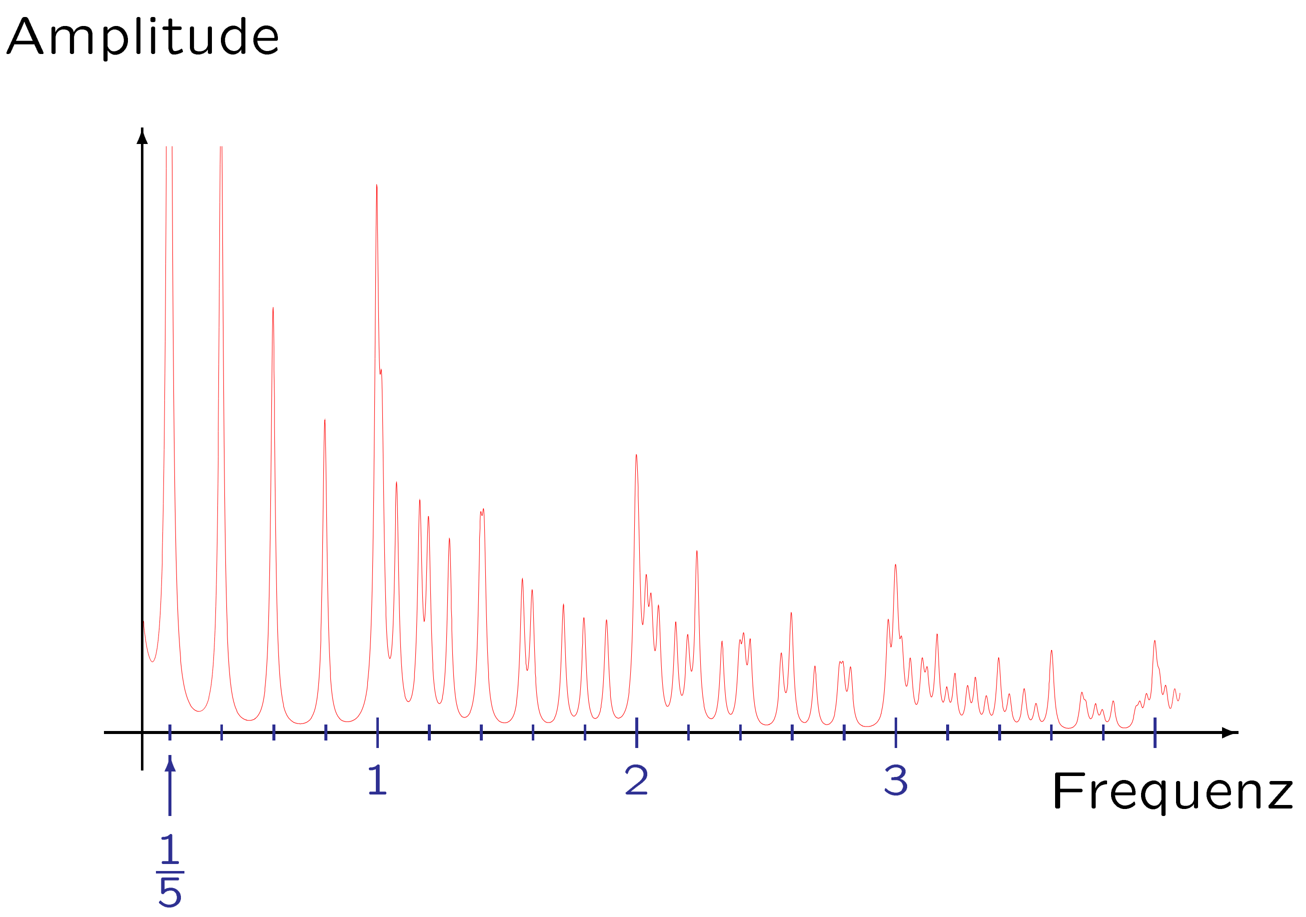
Frequenzgang

Länge 5π, Breite π



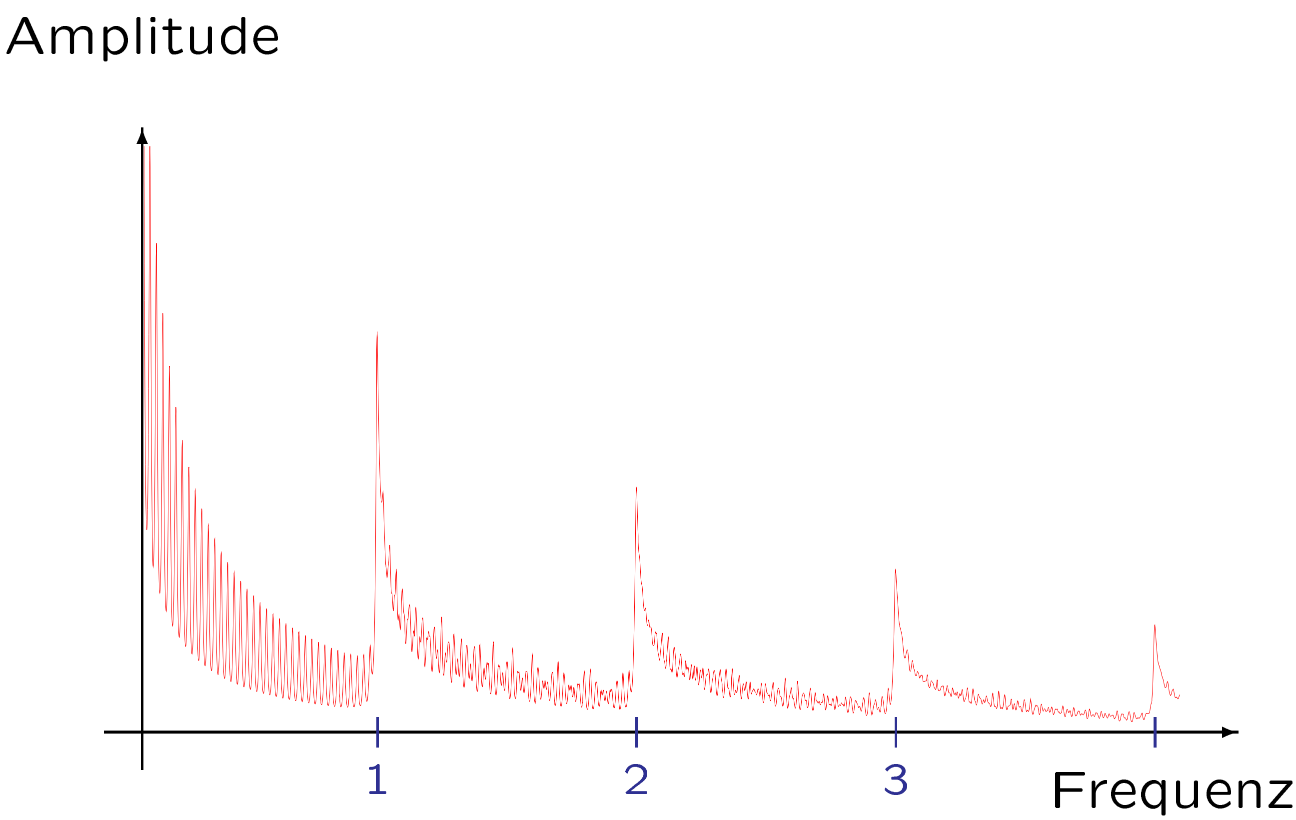
Frequenzgang

Länge 5π, Breite π



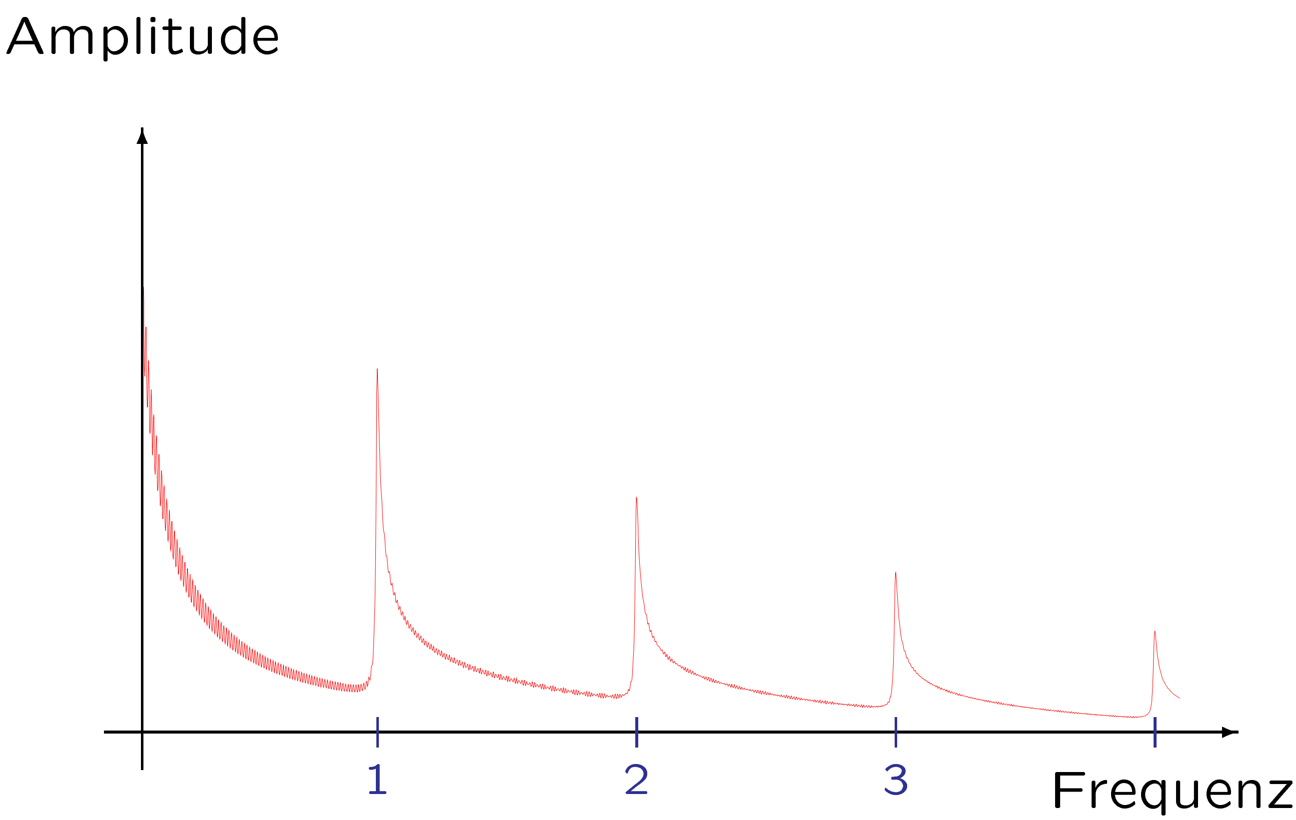
Frequenzgang

Länge 40π, Breite π



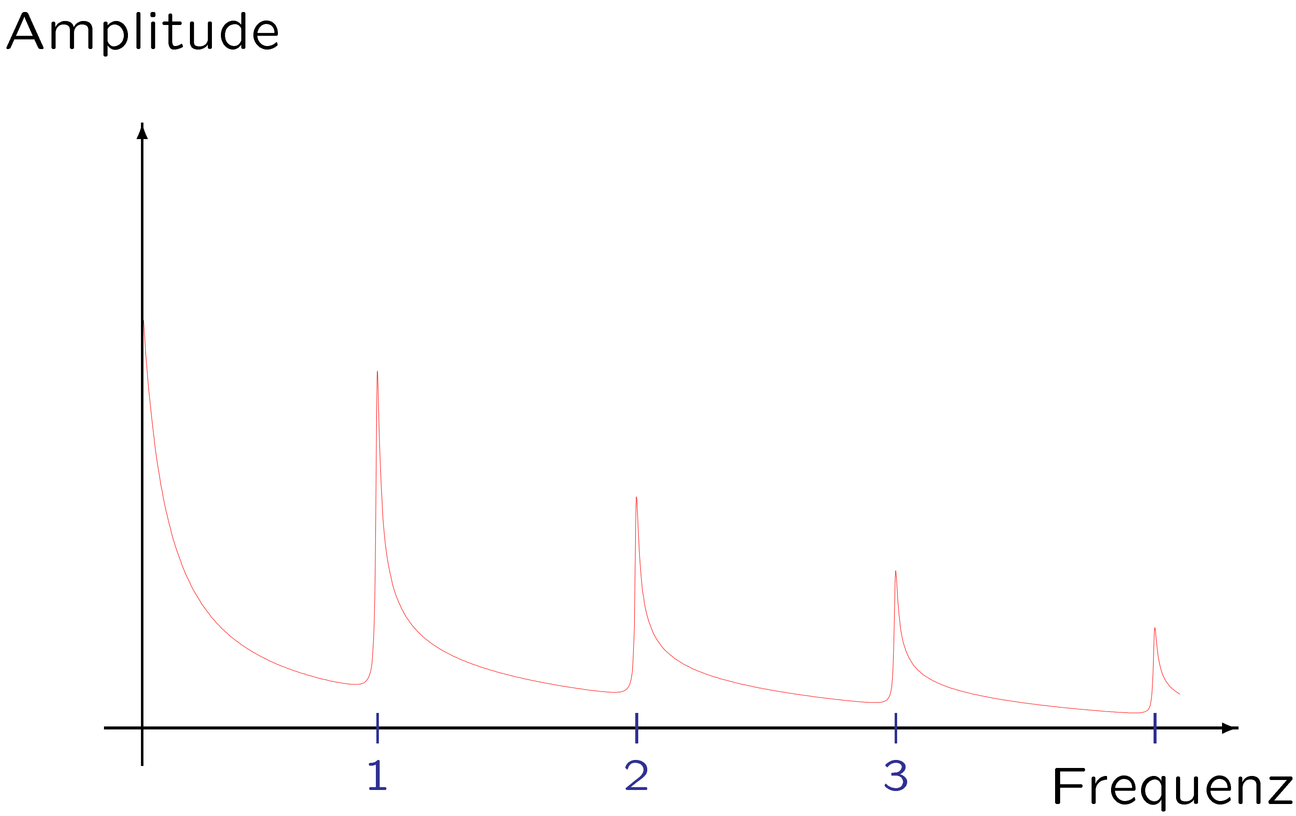
Frequenzgang

Länge 100π, Breite π



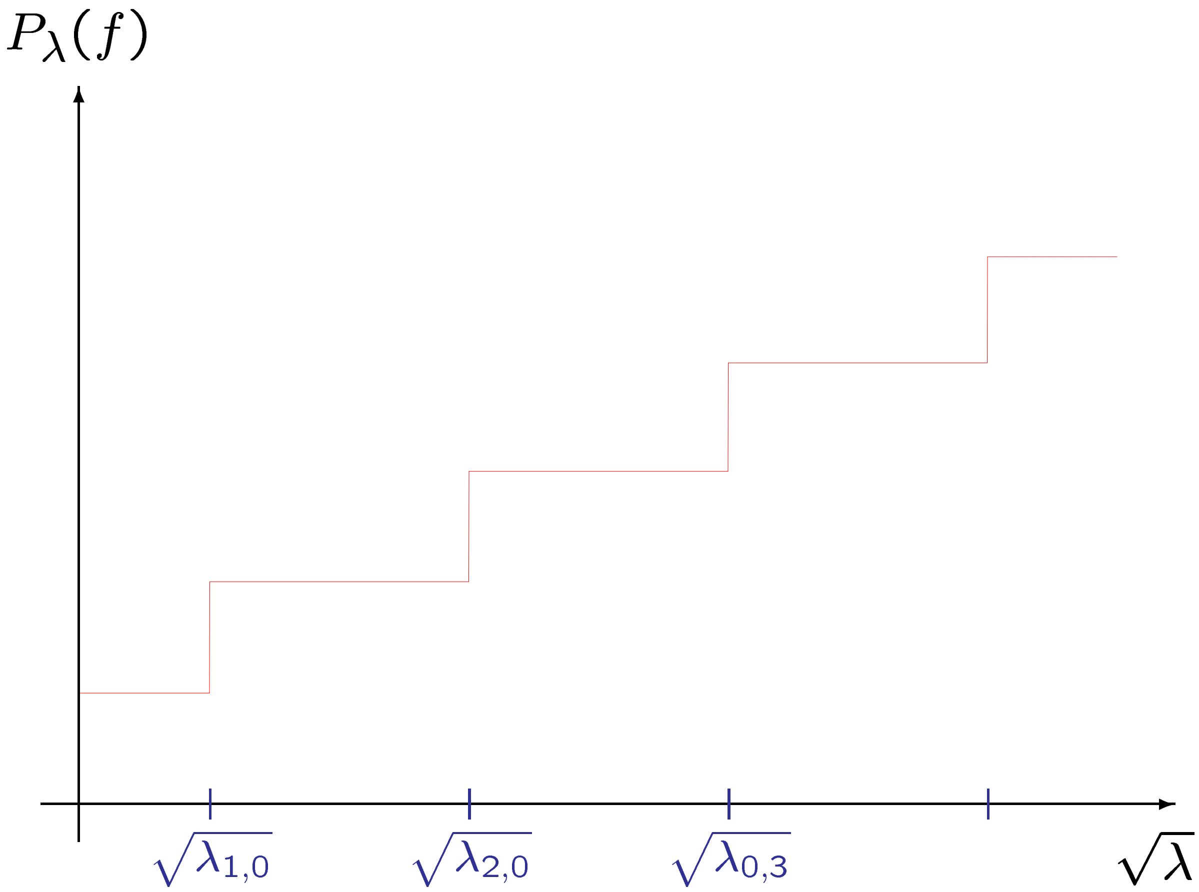
Frequenzgang

Länge 400π, Breite π



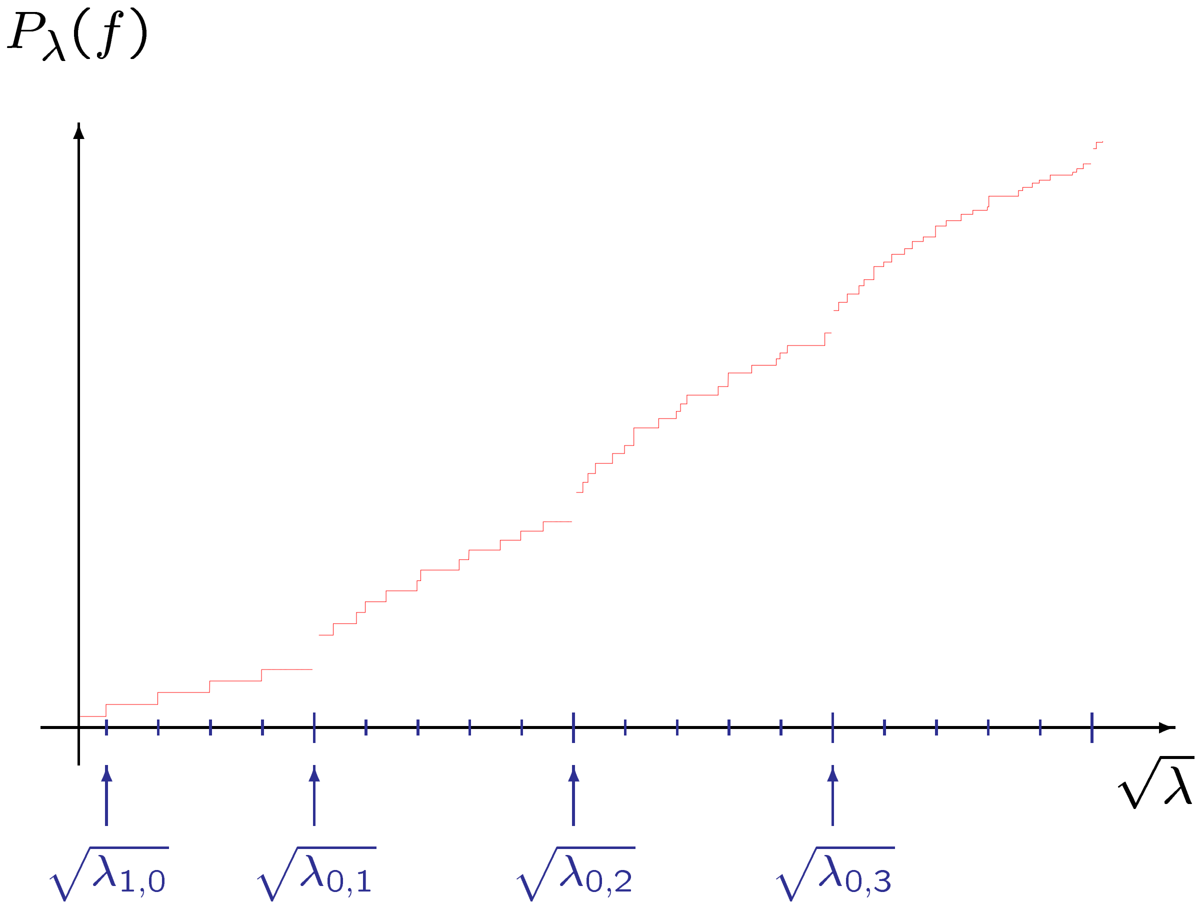
Spektralschar

Länge 5π, Breite π



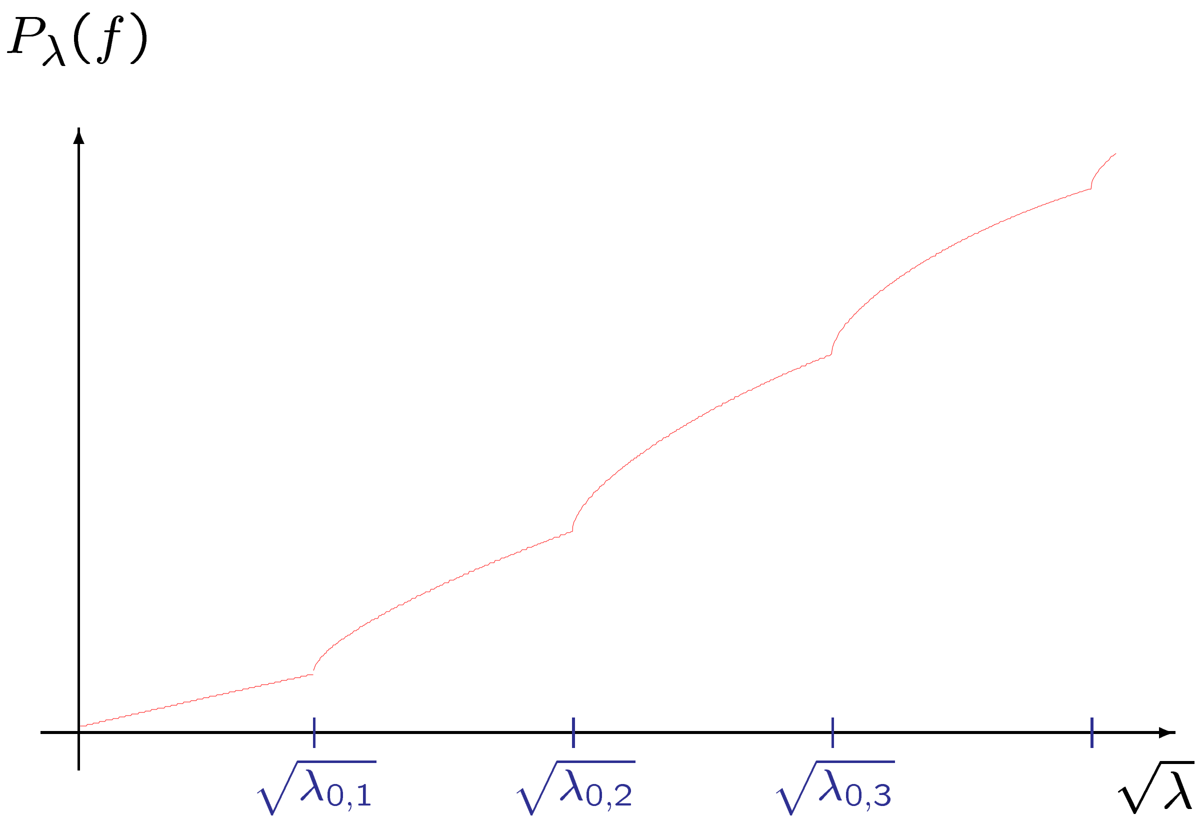
Spektralschar

Länge 5π, Breite π



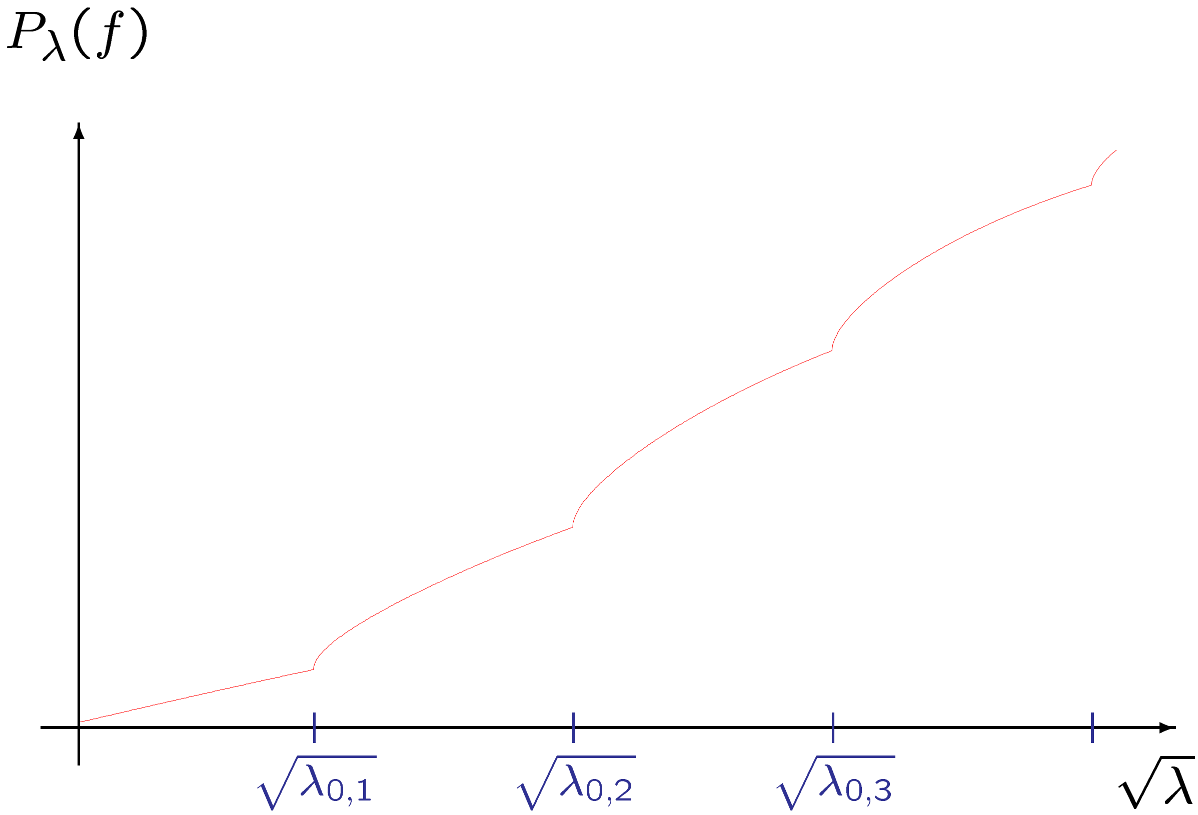
Spektralschar

Länge 40π, Breite π



Spektralschar

Länge 100π, Breite π



2.5 Zusammenfassung

Warum unendlich lange Wellenleiter?

- Die Grenzamplitude im Wellenleiter der Länge l konvergiert für $l \to \infty$ gegen die Grenzamplitude im unendlich langen Wellenleiter.

- Der unendlich lange Wellenleiter zeigt **genau die wesentlichen Resonanzeffekte** des sehr langen Wellenleiters.

Akustik

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u - \Delta u &= f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \qquad \text{in } \Omega\times]0,\infty[\\ u|_{\partial\Omega} = 0, &\qquad u(x,0) = \partial_t u(x,0) = 0 \end{aligned}$$

$\Omega = \mathbb{R}^k \times]0,\pi[\subset \mathbb{R}^{k+1}$ [Werner 84/85/87]:

$\boldsymbol{k=1}$: $u(x,t) =$

$$= \begin{cases} \sqrt{t}\,\varphi_\omega(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + u_\omega(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + o(1) \\ \text{(Resonanz der Ordnung } \sqrt{t} \text{ für } \omega = k) \\ \\ u_\omega(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + o(1) \\ \text{(Prinzip der Grenzamplitude für } \omega \notin \mathbb{N}) \end{cases}$$

$\boldsymbol{k=2}$: $\ln t$ statt $\sqrt{t}$.

$\boldsymbol{k \geq 3}$: Für alle Frequenzen Prinzip der Grenzamplitude.

Elastizitätstheorie

$s(x,t) \in \mathbb{R}^n$: Verschiebungsvektor

$$\sigma\,\partial_t^2 s - \mu\Delta s - (\lambda+\mu)\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\, s = \sigma\, f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

$$\text{in } \Omega\times]0,\infty[$$

$$s|_{\partial\Omega} = 0, \qquad s(x,0) = \partial_t s(x,0) = 0$$

σ: Massendichte,
λ, μ: Lamé-Konstanten, $1 + \frac{\lambda}{\mu} > -1$

$\Omega = \mathbb{R}^k \times]0,\pi[$