Nullstellen von Polynomen

Peter Lesky

Mathematik-Tag

8. Oktober 2011

Tafelaufschrieb 1

Binomische Formeln

1. Bin. For. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2. Bin. For. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3. B.F. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Abbildungen

Zum Beispiel $f(x) = x^2$:

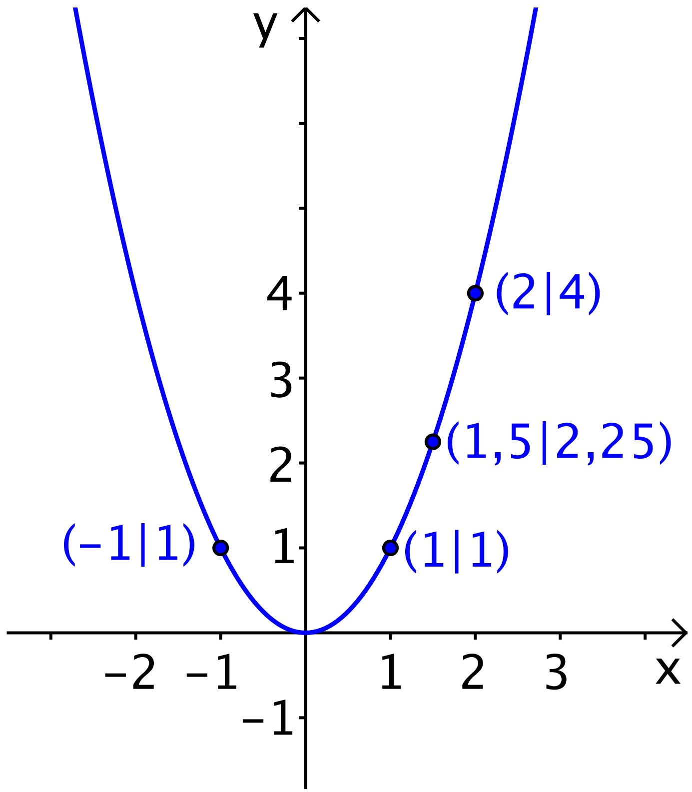
Abbildung als Rechenmaschine: Stecke x rein, bekomme x^2 raus:

$$\begin{array}{rcl} 1 & \longmapsto & 1 \\ 2 & \longmapsto & 4 \\ 1,5 & \longmapsto & 2,25 \\ -1 & \longmapsto & 1 \end{array}$$

Abbildung allgemein: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$

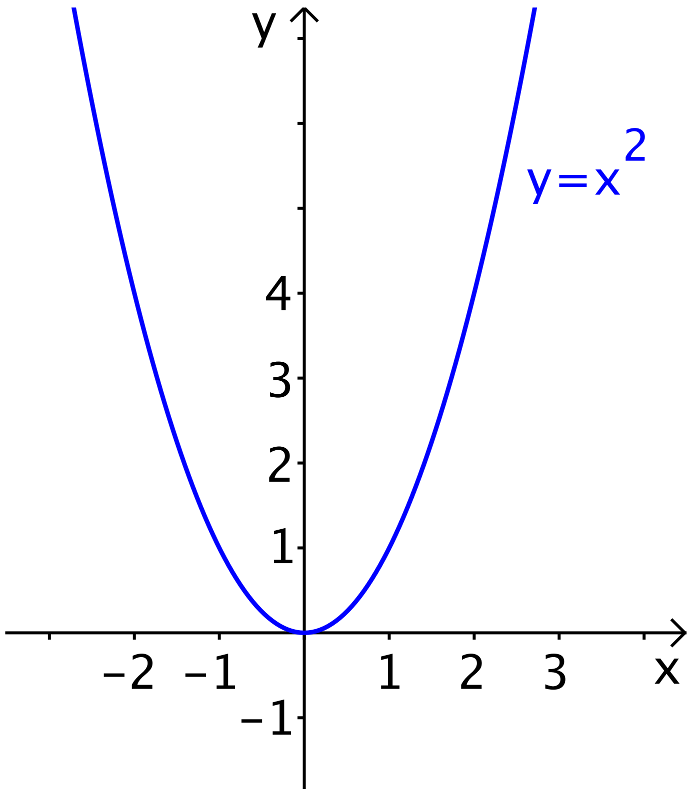
Veranschaulichung einer Abbildung

Unser Beispiel $f(x) = x^2$:
Zeichne (alle?) Paare (x, x^2)



Veranschaulichung einer Abbildung

Unser Beispiel $f(x) = x^2$:
Zeichne (alle?) Paare (x, x^2)



Der **Graph** einer Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$G \;=\; \Big\{(x, y) : x \in \mathbb{R} \;\wedge\; y = f(x)\Big\} \qquad \text{Kurz: } y = f(x)$$

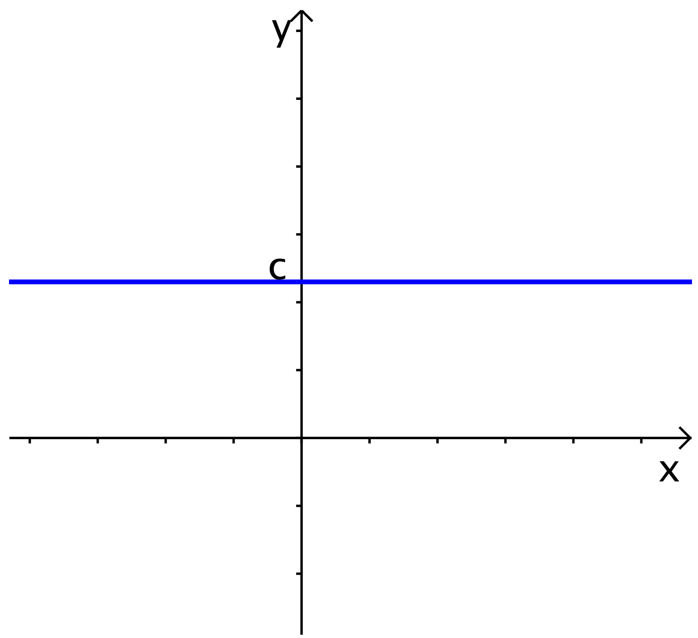
Was sind Polynome?

Ein **Polynom** ist eine Abbildung $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Form

$$P(x) \;=\; a + b\,x + c\,x^2 + \ldots + \ldots x^n \;=\; a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \ldots + a_n\,x^n$$

Falls $a_n \neq 0$ heißt n der **Grad** des Polynoms: $n \;=\; \text{Grad}(P)$

Grad$(P) = 0$: $\quad P(x) = c$



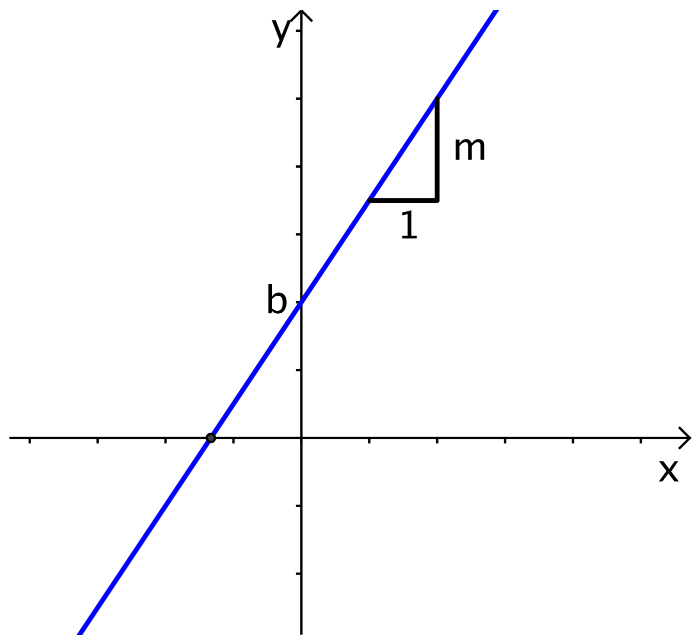
Was sind Polynome?

Ein **Polynom** ist eine Abbildung $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Form

$$P(x) \;=\; a + b\,x + c\,x^2 + \ldots + \ldots x^n \;=\; a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \ldots + a_n\,x^n$$

Falls $a_n \neq 0$ heißt n der **Grad** des Polynoms: $n \;=\;$ Grad(P)

Grad$(P) = 1$: $\quad P(x) = mx + b$



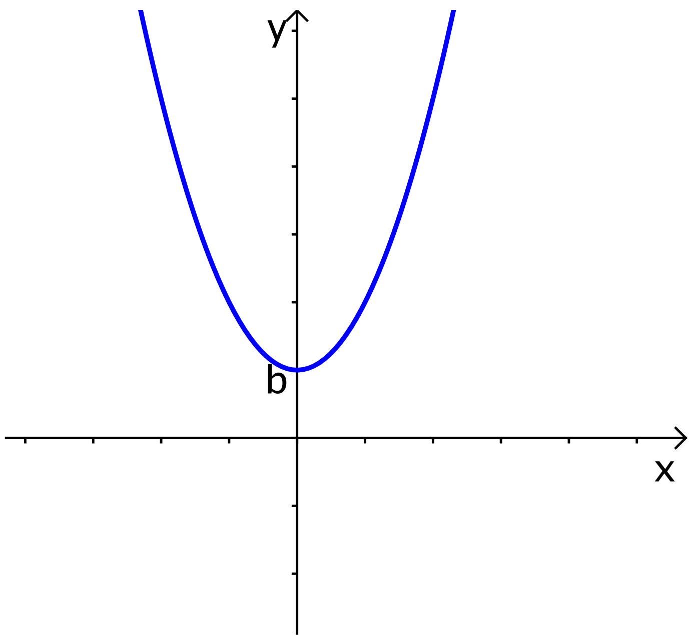
Was sind Polynome?

Ein **Polynom** ist eine Abbildung $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Form

$$P(x) \;=\; a + b\,x + c\,x^2 + \ldots + \ldots x^n \;=\; a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \ldots + a_n\,x^n$$

Falls $a_n \neq 0$ heißt n der **Grad** des Polynoms: $n \;=\;$ Grad(P)

Grad$(P) = 2$: $\quad P(x) = x^2 + b$



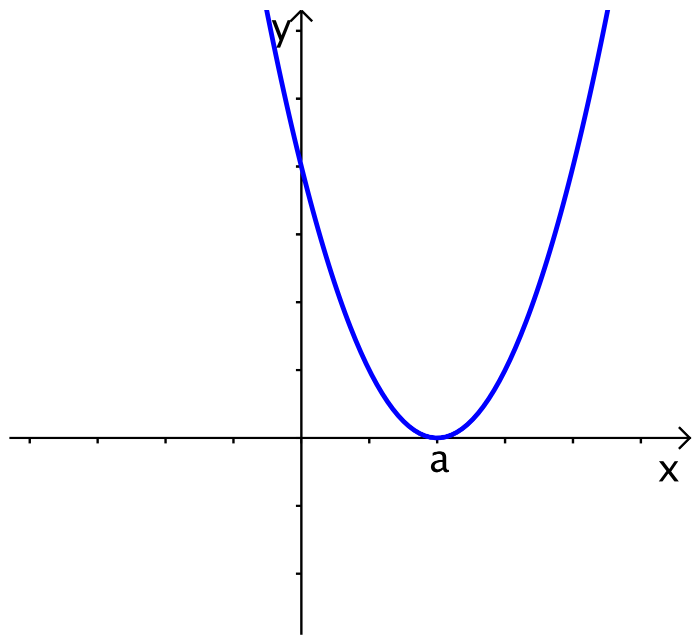
Was sind Polynome?

Ein **Polynom** ist eine Abbildung $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Form

$$P(x) \;=\; a + b\,x + c\,x^2 + \ldots + \ldots x^n \;=\; a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \ldots + a_n\,x^n$$

Falls $a_n \neq 0$ heißt n der **Grad** des Polynoms: $n \;=\;$ Grad(P)

Grad$(P) = 2$: $\quad P(x) = (x - a)^2$



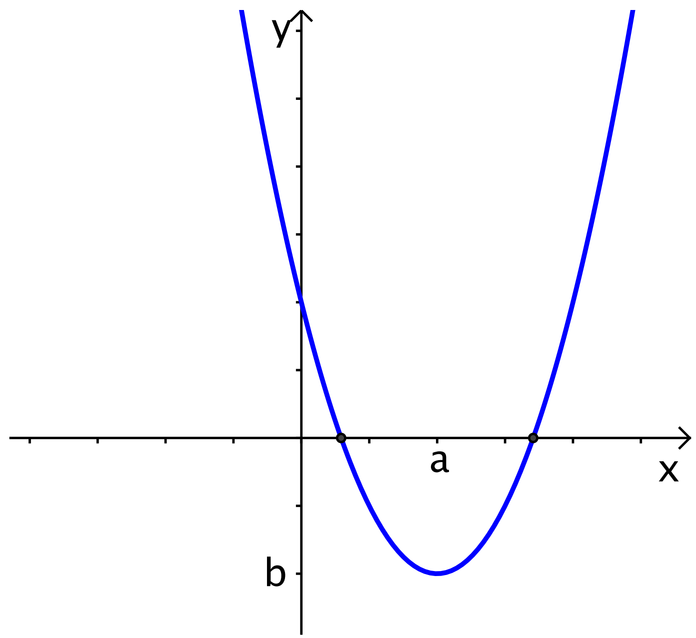
Was sind Polynome?

Ein **Polynom** ist eine Abbildung $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Form

$$P(x) \;=\; a + b\,x + c\,x^2 + \ldots + \ldots x^n \;=\; a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \ldots + a_n\,x^n$$

Falls $a_n \neq 0$ heißt n der **Grad** des Polynoms: $n \;=\;$ Grad(P)

Grad$(P) = 2$: $\quad P(x) = (x-a)^2 - b$



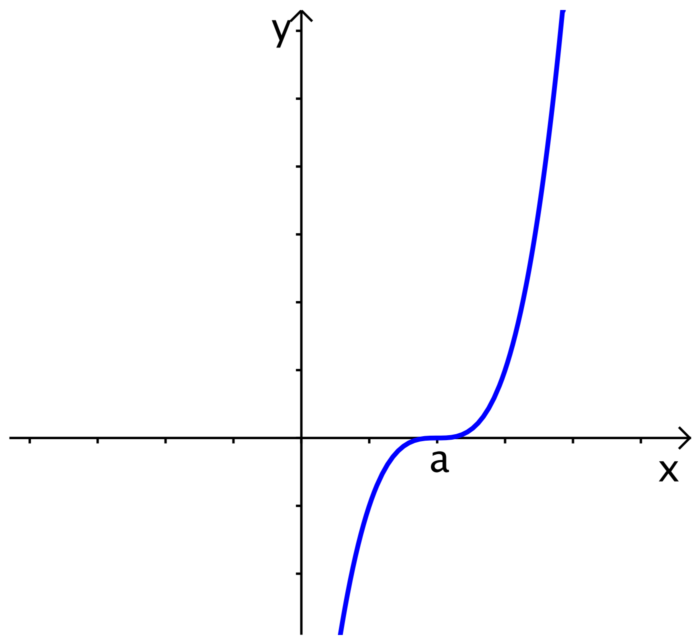
Was sind Polynome?

Ein **Polynom** ist eine Abbildung $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Form

$$P(x) \;=\; a + b\,x + c\,x^2 + \ldots + \ldots x^n \;=\; a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \ldots + a_n\,x^n$$

Falls $a_n \neq 0$ heißt n der **Grad** des Polynoms: $n \;=\; \text{Grad}(P)$

Grad$(P) = 3$: $\quad P(x) = (x - a)^3$



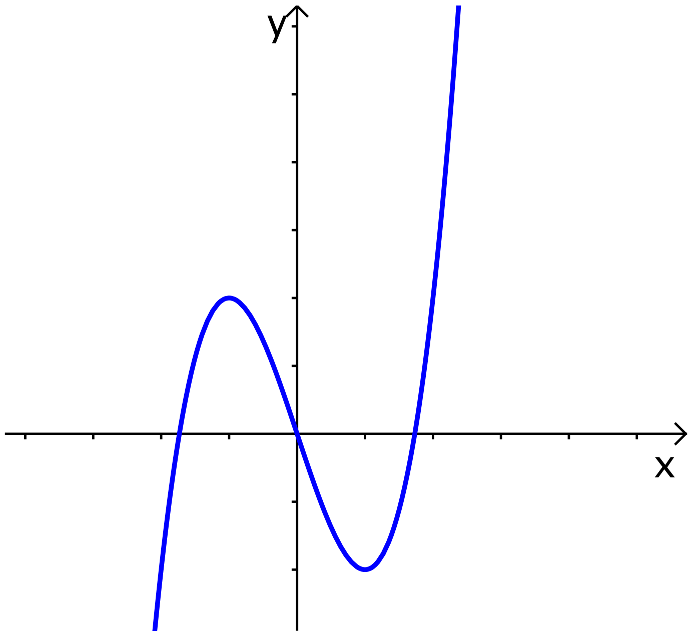
Was sind Polynome?

Ein **Polynom** ist eine Abbildung $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Form

$$P(x) \;=\; a + b\,x + c\,x^2 + \ldots + \ldots x^n \;=\; a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \ldots + a_n\,x^n$$

Falls $a_n \neq 0$ heißt n der **Grad** des Polynoms: $n \;=\;$ Grad(P)

Grad$(P) = 3$: $\quad P(x) = x(x^2 - 3)$



Was sind Polynome?

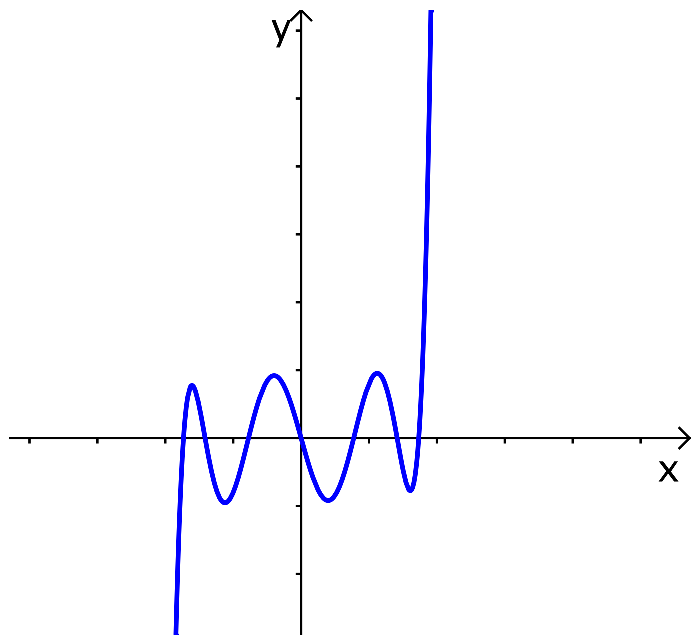
Ein **Polynom** ist eine Abbildung $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Form

$$P(x) \;=\; a + b\,x + c\,x^2 + \ldots + \ldots x^n \;=\; a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \ldots + a_n\,x^n$$

Falls $a_n \neq 0$ heißt n der **Grad** des Polynoms: $n \;=\; \mathrm{Grad}(P)$

Grad$(P) = 7$:

$P(x) = x(x^2 - 0,6)(x^2 - 2)(x^2 - 3)$

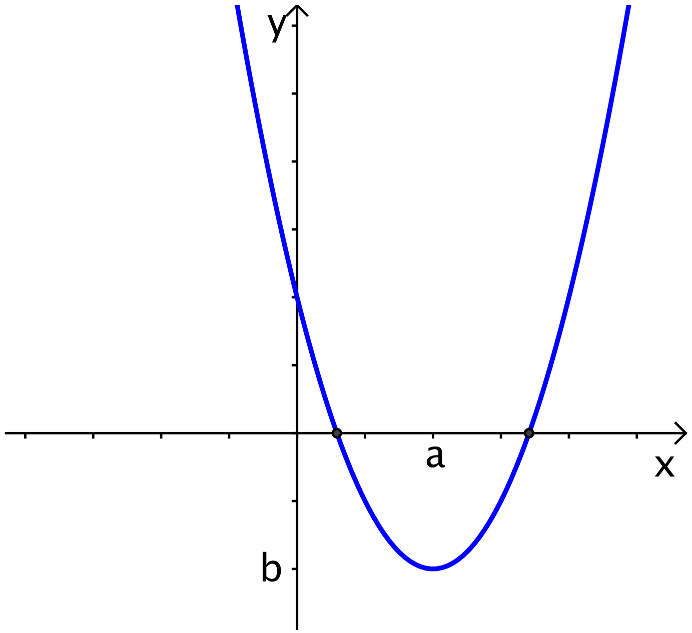


Nullstellen

Definition: Eine **Nullstelle** eines Polynoms P ist eine Zahl x, so dass $P(x) = 0$ gilt.

Nullstelle von $P(x) = (x-a)^2 - b$:

$$(x-a)^2 = b \;\Leftrightarrow\; x - a = \pm\sqrt{b}$$
$$\Leftrightarrow\; x = a \pm \sqrt{b}$$



Hinweis: $a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{a_0}{a_2} + \frac{a_1}{a_2}\,x + x^2 = 0$

Nullstellen

Definition: Eine **Nullstelle** eines Polynoms P ist eine Zahl x, so dass $P(x) = 0$ gilt.

Einfach ist es, ein Polynom aus den Nullstellen zu berechnen:

$$P(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 3)(x - 5)$$

hat genau die Nullstellen $x_1 = 1,\ x_2 = -2,\ x_3 = 3,\ x_4 = 5$

Oft schwierig: Welche Nullstellen hat das Poynom

$$P(x) = x^4 - 7x^3 + 5x^2 + 31x - 30$$

Nullstellen um 1500

Gesucht ist eine Zahl, die addiert zu ihrer Kubikwurzel 6 ergibt.

Heutige Schreibweise:

$$x + \sqrt[3]{x} = 6$$

$$\text{Setze } x = u^3: \quad u^3 + u = 6 \quad \Leftrightarrow \quad u^3 + u - 6 = 0$$

Um 1500: Typ A: $x^3 + x = 6 \quad \rightarrow$ Lösungsformel A
Typ B: $x^3 = x + 6 \quad \rightarrow$ Lösungsformel B

Heute: $x^3 + x - 6 = 0$
$x^3 - x - 6 = 0$

Der Wettstreit von Venedig

Scipione
del Ferro
1465 – 1526

Antonio Maria
Fior
1506 – ??

Nicolo Fontana
(Tartaglia)
1499 – 1557

Girolamo Cardano
1501 – 1576

Polynome vom Grad 2

Beispiel $P(x) = x^2 + 6\,x + 7 = x^2 + 2 \cdot 3\,x + 9 + 7 - 9 = (x+3)^2 - 2$

Nullstellen: $(x+3)^2 = 2 \;\Leftrightarrow\; x + 3 = \pm\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow\; x = -3 \pm \sqrt{2}$

Allgemein: $x^2 + px + q = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 + 2\,\frac{p}{2}\,x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = \left(\frac{p}{2}\right)^2$

$$\Leftrightarrow\; \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

$$\Leftrightarrow\; x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$\Leftrightarrow\; x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Polynome vom Grad 3

Gesucht sind die Lösungen von $x^3 = 15x + 30$

Anschaulich:

Umformen zu

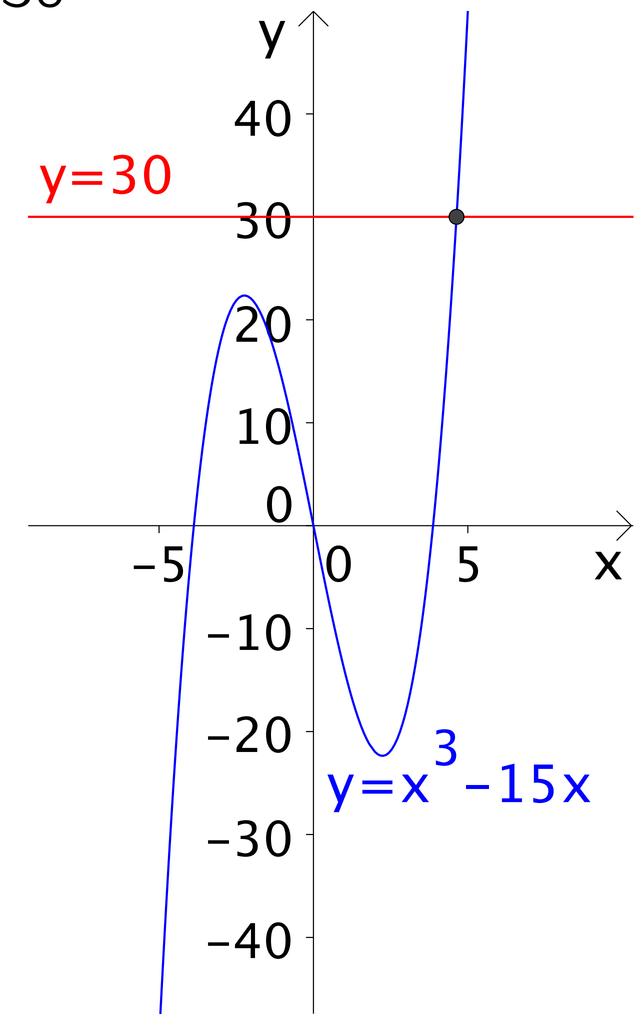
$$\underbrace{x^3 - 15x}_{P(x)} = 30$$

Skizziere das Polynom

$$P(x) = x(x^2 - 15)$$

Schneide mit der Geraden

$$y = 30$$



Tafelaufschrieb 2 (Lösung von $x^3 = 15x + 30$)

$x = u + v$

$x^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$

$\quad = u^3 + v^3 + 3uv(u+v)$

$\rightarrow \quad u^3 + v^3 + 3uv(u+v) = 15(u+v) + 30$

Ist erfüllt, falls $\left.\begin{aligned} u^3 + v^3 &= 30 \\ \cancel{3}uv &= \cancel{15} \end{aligned}\right\} \quad v = \dfrac{5}{u} \quad \Rightarrow u^3 + \dfrac{125}{u^3} = 30$

Tafelaufschrieb 3 (Fortsetzung $x^3 = 15x + 30$)

$$\Leftrightarrow (u^3)^2 + 125 = 30u^3$$

$$\Leftrightarrow (u^3)^2 - 30u^3 + 125 = 0$$

$$u^3 = t: \quad t^2 - 30t + 125 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 15 \pm \sqrt{225 - 125}$$

$$= 15 \pm 10$$

$$\Rightarrow t = 25 \quad \vee \quad t = 5$$

$$\Rightarrow u = \sqrt[3]{25} \quad \vee \quad u = \sqrt[3]{5}$$

$$v = \frac{5}{\sqrt[3]{25}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{25}} = \sqrt[3]{5} \qquad v = \frac{5}{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{25}$$

$$\Rightarrow x = u + v = \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{25}$$

Polynome vom Grad 3

Bombelli 1572: Gesucht sind die Lösungen von $x^3 = 15x + 4$

Anschaulich:

Umformen zu

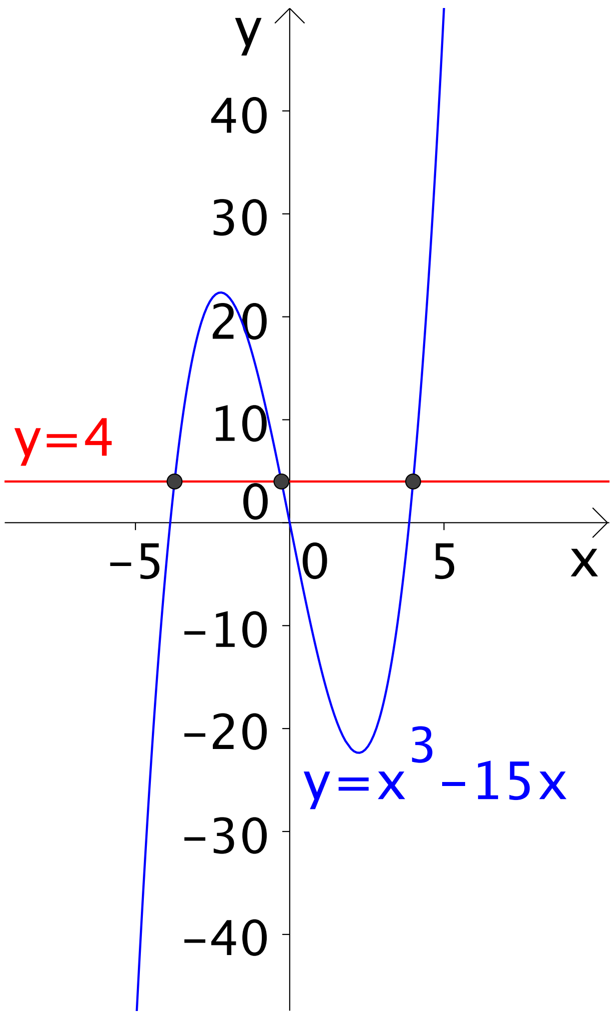
$$\underbrace{x^3 - 15x}_{P(x)} = 4$$

Skizziere das Polynom

$$P(x) = x(x^2 - 15)$$

Schneide mit der Geraden

$$y = 4$$



Polynome vom Grad 3

Bombelli 1572: Gesucht sind die Lösungen von $x^3 = 15x + 4$

Aus den Formeln:

$$x \;=\; \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} \;=\; \sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}}$$

Tafelaufschrieb 4

$$(2+\sqrt{-1})^3 = 2^3 + 3\cdot 2^2\sqrt{-1} + 3\cdot 2\cdot\underbrace{\sqrt{-1}^2}_{-1} + \underbrace{\sqrt{-1}^3}_{=\sqrt{-1}^2\cdot\sqrt{-1} = -\sqrt{-1}}$$

$$= 8 - 6 + 12\sqrt{-1} - \sqrt{-1}$$

$$= 2 + 11\sqrt{-1}$$

Polynome vom Grad 3

Bombelli 1572: Gesucht sind die Lösungen von $x^3 = 15x + 4$

Aus den Formeln:

$$x \;=\; \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} \;=\; \sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Also hoffentlich} & \sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}} = 2+\sqrt{-1} \\ \text{Genauso:} & \sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}} = 2-\sqrt{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow \;\; x = 4$$

$$\text{Zur Probe } x = 4 \text{ einsetzen:} \qquad \left.\begin{array}{rcl} 4^3 & = & 64 \\ 15 \cdot 4 + 4 & = & 64 \end{array}\right\} \quad \text{stimmt überein}$$

C.F. Gauß um 1800: Komplexe Zahlen sind Zahlenpaare

$$(a,b) = a + b\sqrt{-1} = a + b\mathrm{i}$$

Der Fundamentalsatz

Zu jedem Polynom $P(x) = x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_1\, x + a_0$ gibt es komplexe Zahlen $x_1, \ldots, x_n$, so dass

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

Offensichtlich sind $x_1, \ldots, x_n$ genau die Nullstellen von P.

Beispiele $n = 2$:
$$\begin{array}{lclcl}
P(x) & = & x^2 & = & (x-0)(x-0) \\
P(x) & = & x^2 - 4 & = & (x-2)(x+2) \\
P(x) & = & x^2 - 4x - 1 & = & \Big(x - (2+\sqrt{5})\Big)\Big(x - (2-\sqrt{5})\Big) \\
P(x) & = & x^2 + 4 & = & (x - 2\mathrm{i})(x + 2\mathrm{i}) \\
P(x) & = & x^2 + 2x + 5 & = & \Big(x - (-1+2\mathrm{i})\Big)\Big(x - (-1-2\mathrm{i})\Big)
\end{array}$$

Achtung:
Die letzten beiden Polynome haben in der Schule keine Nullstellen.

Lösungsformel $n = 2$

$x^2 + px + q = 0$:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Lösungsformel $n = 3$

$x^3 + ax + b = 0$:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^3}}$$

Lösungsformel $n = 4$

$x^4 + ax^2 + bx + c = 0$:

Bestimme die Lösungen z_1, z_2, z_3 der Resolventengleichung

$$z^3 + 2az^2 + (a^2 - 4c)z - b^2 \;=\; 0.$$

Die Lösungen erhält man dann durch

$$\begin{aligned}
x_1 &= \left(\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3} \right) \\
x_2 &= \left(\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3} \right) \\
x_3 &= \left(-\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3} \right) \\
x_4 &= \left(-\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3} \right)
\end{aligned}$$

Lösungsformel $n \geq 5$

E. Galois 1831:
Es gibt keine Lösungsformel, die auf jede Gleichung anwendbar ist