

Invarianten - was ist das?  
Und wozu braucht man sie?

Peter Lesky (Universität Stuttgart)

Vortrag am Landesgymnasium für  
Hochbegabte

25. November 2010

## Chamäleons

Im Terrarium eines Tierparks tummeln sich

**13 rote, 15 grüne und 17 blaue**

Chamäleons. Treffen zwei verschiedenfarbige Chamäleons aufeinander, ändern beide ihre Farbe in die dritte. Kann es passieren, dass alle dieselbe Farbe annehmen?

## Was bleibt invariant?

- Anzahl der roten, grünen, blauen Chamäleons: *ändert sich*.
- Differenzen zwischen den Zahlen verschiedenfarbiger Chamäleons: *ändert sich*.
- Rest bei Division der Differenzen durch drei:
  - blaue minus rote: 1
  - blaue minus grüne: 2      *invariant!*
  - grüne minus rote: 2

Falls nur rote Chamäleons übrig:

$$b - r = -45 \hat{=} 0, \quad b - g = 0, \quad g - r - 45 \hat{=} 0$$

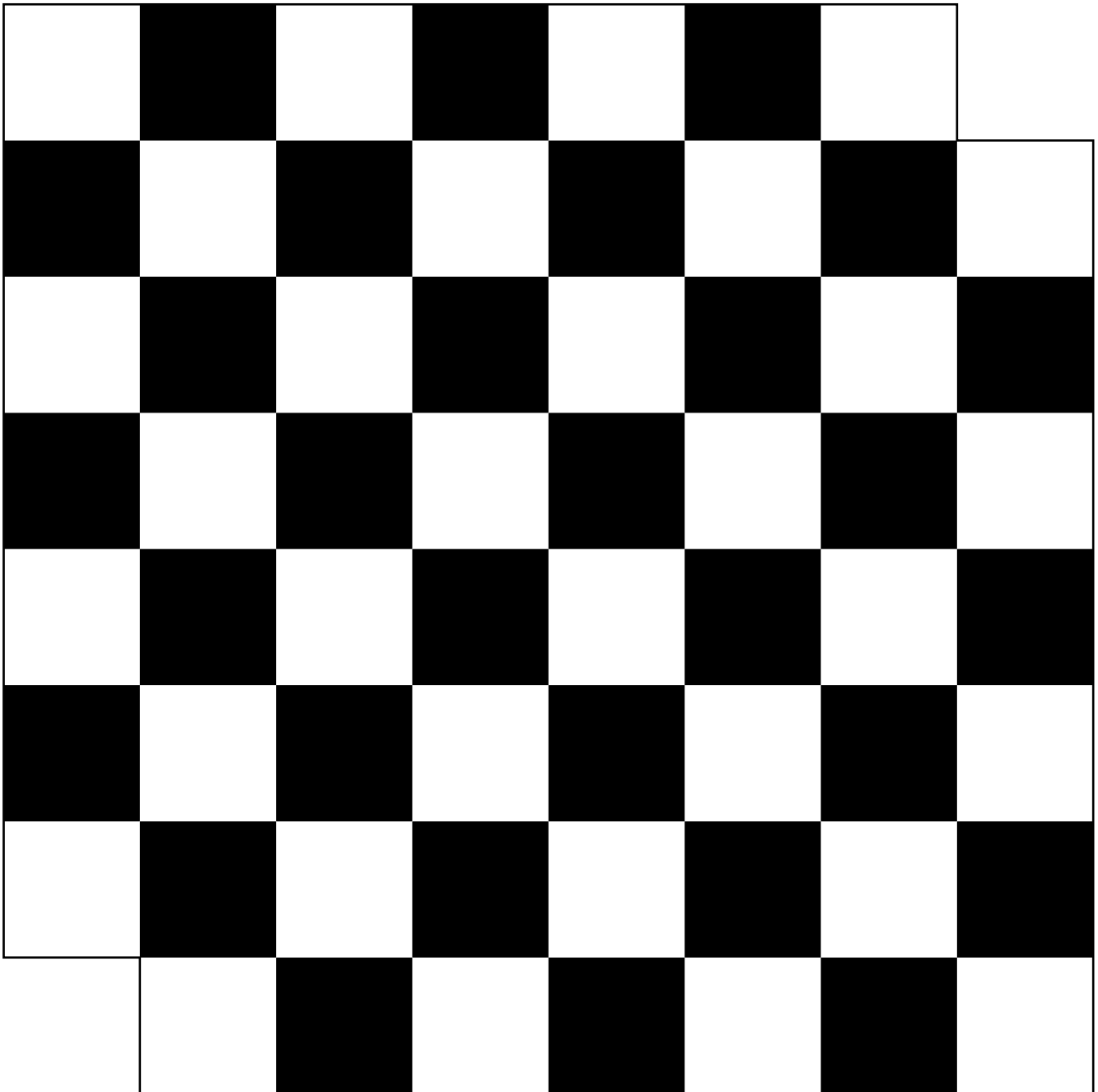
⇒ nicht möglich

## Das Invarianzprinzip

- Es existiert eine Menge verschiedener Zustände mit einem Startzustand  $Z_0$  (z.B.  $Z_0 = (13, 15, 17)$ ).
- Es existiert eine Anleitung, wie man von einem Zustand zu einem anderen kommt (Treffen der Chamäleons).
- Es existiert eine Eigenschaft  $E(Z)$  eines Zustandes  $Z$ , die sich bei einer Zustandsänderung nicht ändert (Rest bei Division der Differenzen durch 3).
- Dann kann ein gewünschter Endzustand  $Z_{\text{Ende}}$  nur eintreten, wenn  $E(Z_{\text{Ende}})$  denselben Wert hat wie  $E(Z_0)$

## Schachbrett und Domino

Ein Schachbrett, bei dem zwei gegenüberliegende Ecken weggeschnitten wurden, soll mit Dominosteinen lückenlos überdeckt werden:



# Quersummen

**Aufgabe:** Jede der Zahlen  $1, 2, \dots, 1\,000\,000$  wird durch ihre Quersumme ersetzt. Die Quersummenbildung wird solange durchgeführt, bis  $1000000$  einstellige Zahlen entstehen. Kommen darunter mehr Einsen oder mehr Zweier vor?

**Lösung 1:** Rechnen, rechnen, rechnen, ...

**Lösung 2:** Den Computer rechnen lassen

**Lösung 3:** Invarianzprinzip: Zustände

$$Z_0 = \{1, 2, \dots, 1\,000\,000\}$$

$$Z_1 = \{\text{Quersummen der Zahlen aus } Z_0\}$$

⋮

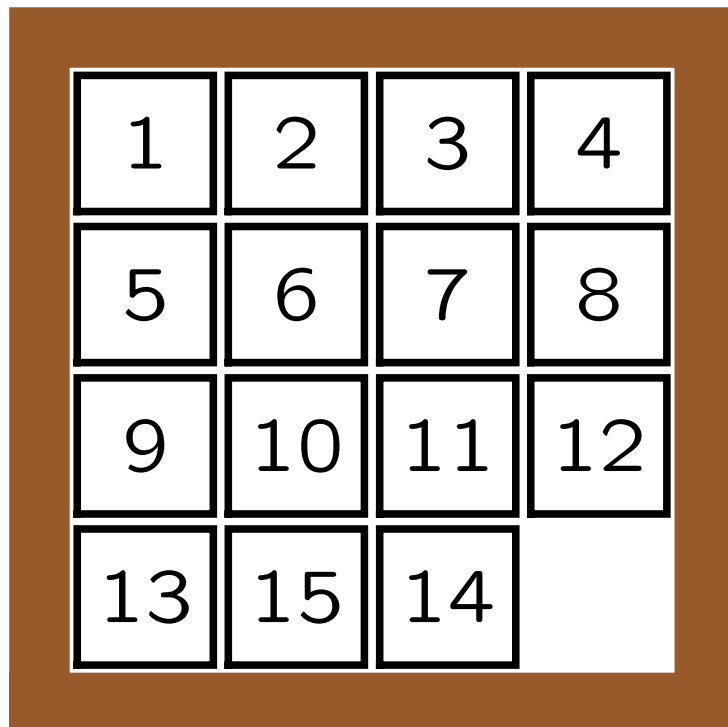
Anleitung zur Zustandsänderung: Quersumme bilden

*Gibt es eine invariante Eigenschaft?*

# Geld verdienen mit dem Invarianzprinzip



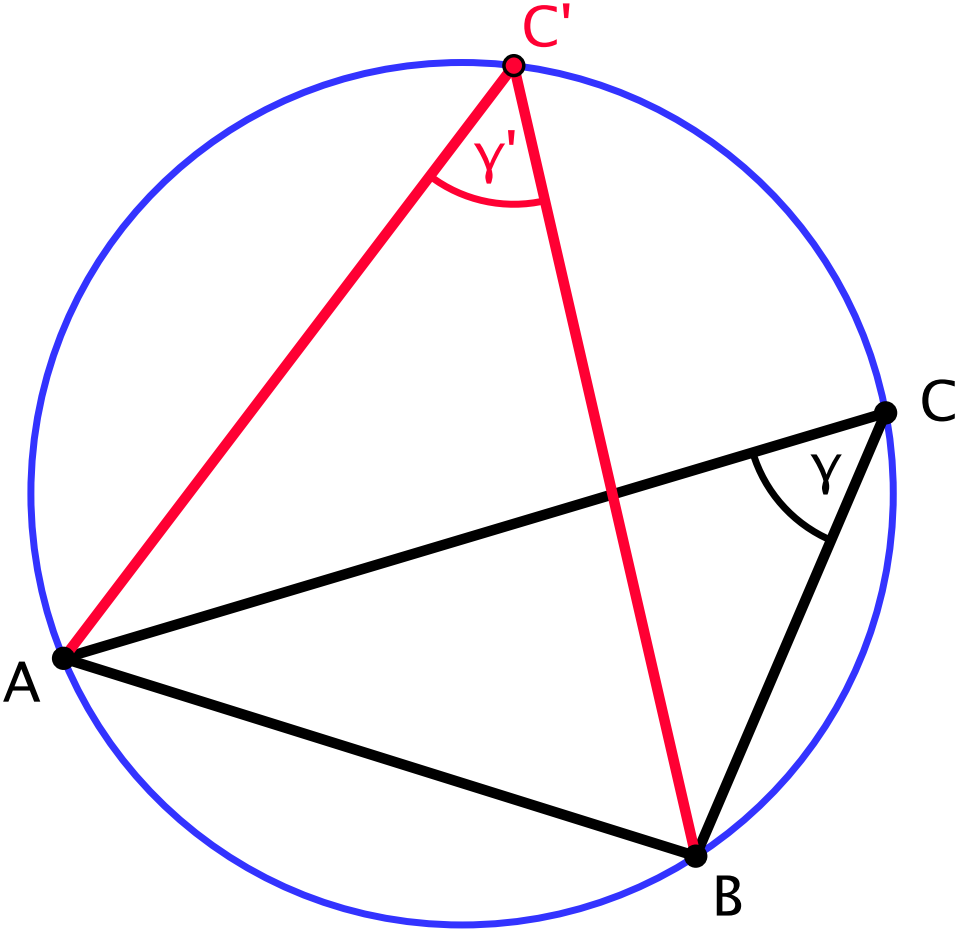
Samuel Loyd  
(1841 - 1911)  
(Bild: Wikipedia)



# Invarianten im Dreieck

1.

2.





## Größter gemeinsame Teiler

Die Menge der Teiler von  $n$ :

$$D(n) := \{k \in \mathbb{N} : k \text{ ist Teiler von } n\}$$

Der größte gemeinsame Teiler von  $n$  und  $m$ :

$$\text{ggT}(m, n) := \max(D(n) \cap D(m))$$

Teile  $m$  durch  $n$  mit Rest  $r$ :

$$m = q \cdot n + r$$

Invariante:

$$\text{ggT}(m, n) = \text{ggT}(n, r)$$