

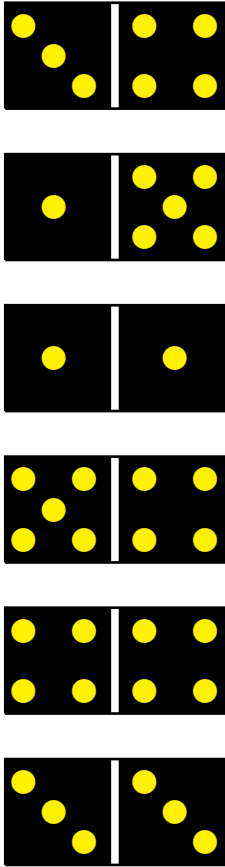
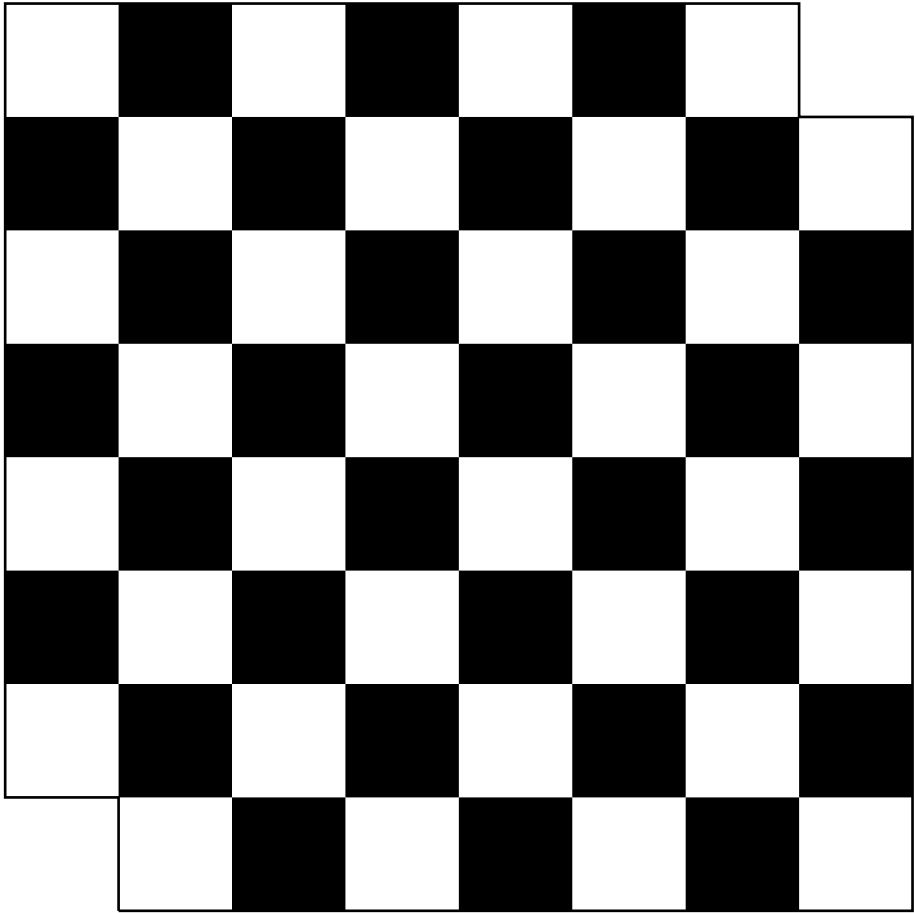
Invarianten - was ist das?
Und wozu braucht man sie?

Peter Lesky (Universität Stuttgart)

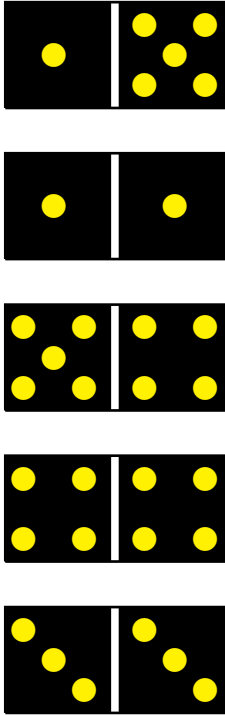
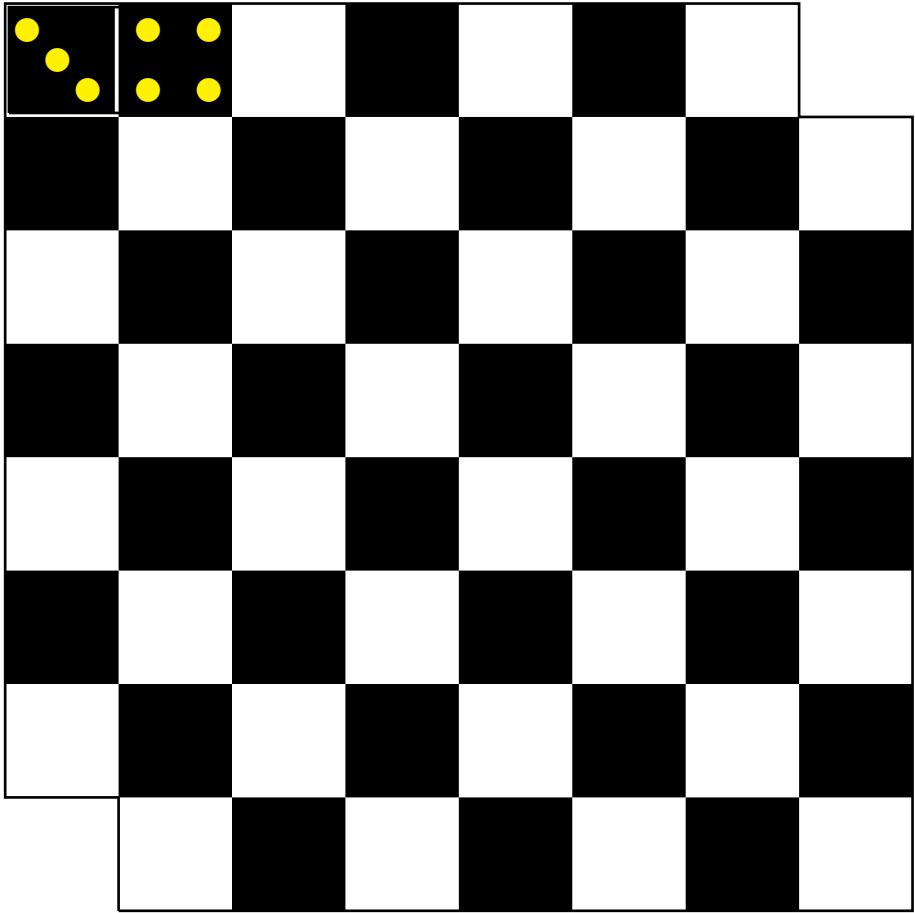
Vortrag am Mathematik-Tag

26. September 2009

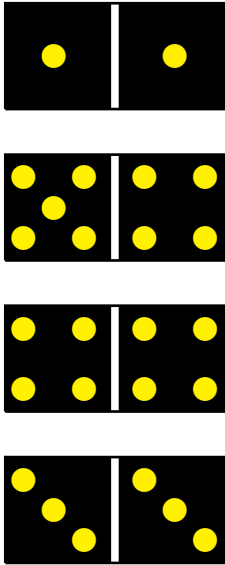
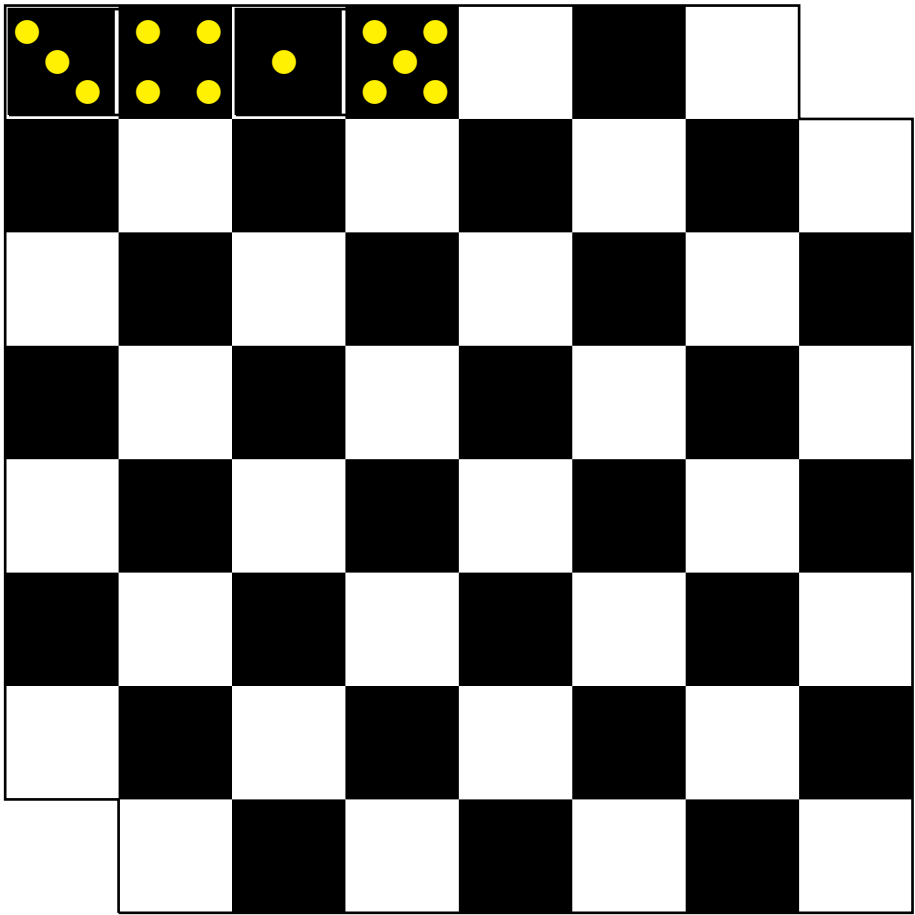
Schachbrettaufgabe



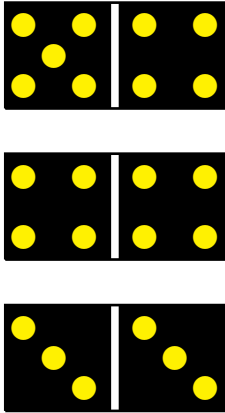
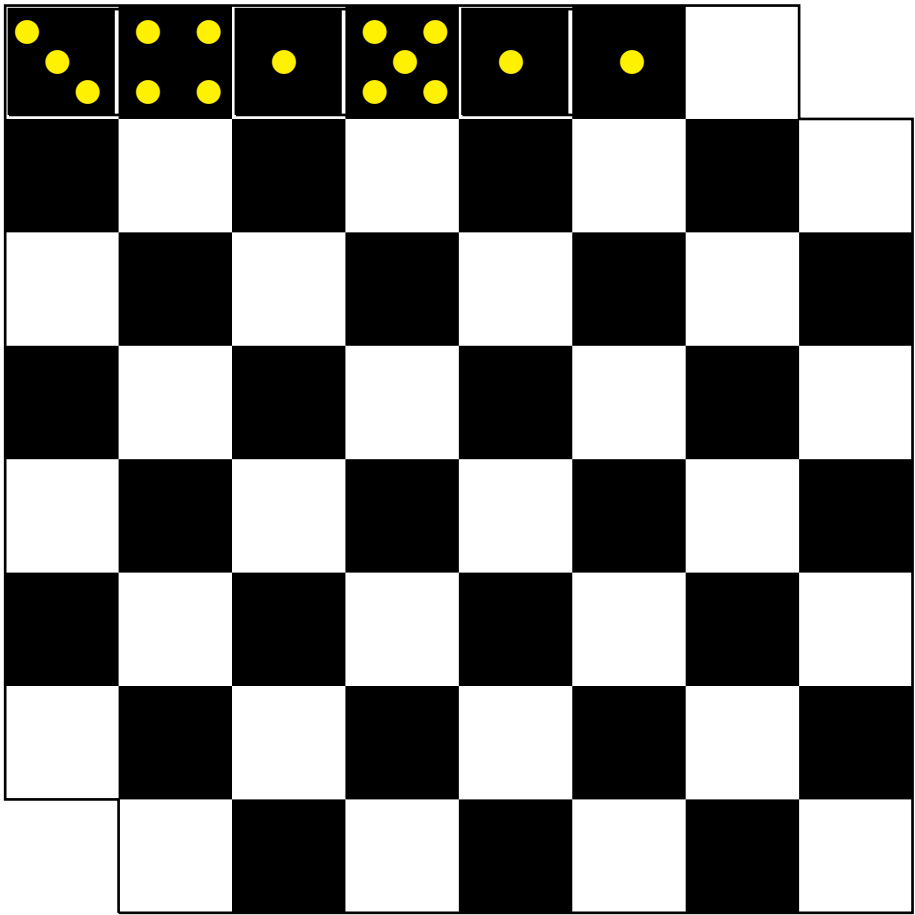
Schachbrettaufgabe



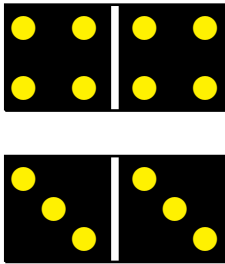
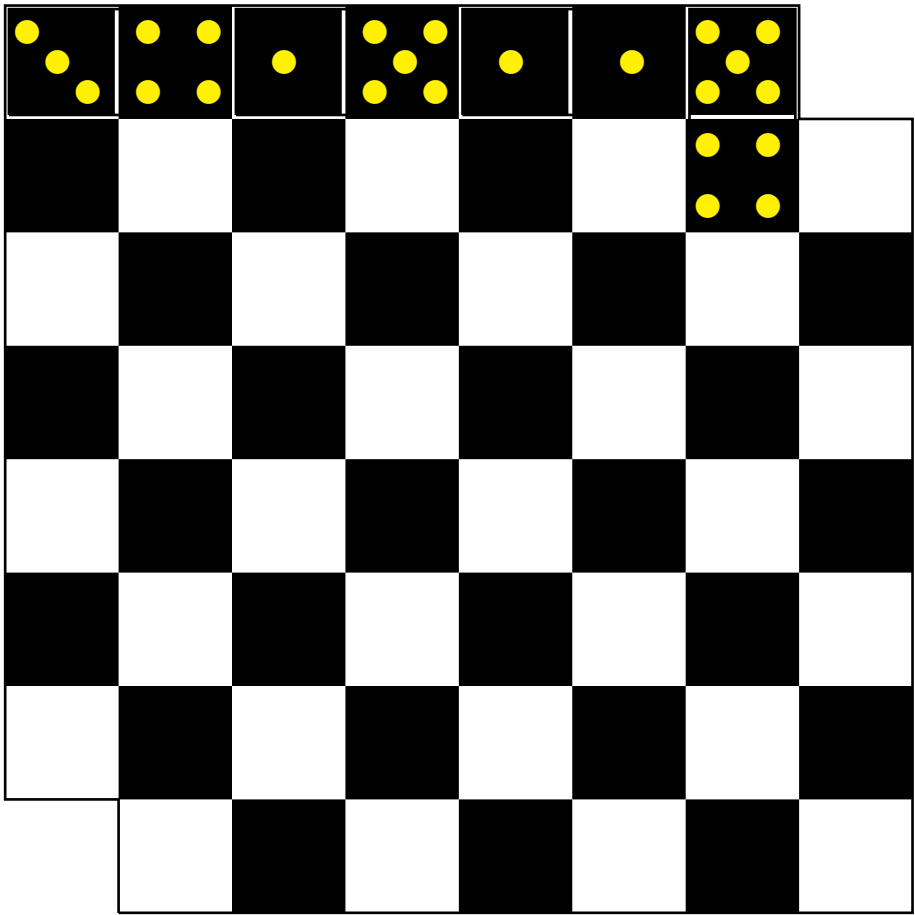
Schachbrettaufgabe



Schachbrettaufgabe



Schachbrettaufgabe



Chamäleons

Im Terrarium eines Tierparks tummeln sich **13 rote**, **15 grüne** und **17 blaue** Chamäleons. Treffen zwei verschiedenfarbige Chamäleons aufeinander, ändern sie ihre Farbe in die dritte. Kann es passieren, dass alle dieselbe Farbe annehmen?

r	13]	12]	11]	10]	9	11
g	15]	14]	16]	15]	14]	13
b	17	19]	18	20	22]	21

Chamäleons

Im Terrarium eines Tierparks tummeln sich **13 rote**, **15 grüne** und **17 blaue** Chamäleons. Treffen zwei verschiedenfarbige Chamäleons aufeinander, ändern sie ihre Farbe in die dritte. Kann es passieren, dass alle dieselbe Farbe annehmen?

r	13]	12]	11]	10]	9	11
g	15]	14]	16]	15]	14]	13
b	17	19]	18	20	22]	21
g-r	2	2	5	5	5	2
b-r	4	7	7	10	13	10
b-g	2	5	2	5	8	8

14-15-Zahlenpuzzle

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	



Samuel Loyd (1841 - 1911)

14-15-Zahlenpuzzle

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

14-15-Zahlenpuzzle

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

1000 \$

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

14-15-Zahlenpuzzle

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	
12	13	14	15




1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

14-15-Zahlenpuzzle

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	
12	13	14	15

~~1000 \$~~



1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

14-15-Zahlenpuzzle

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Unordnungszahl:

$U =$ 0

Keine Paare in falscher Reihenfolge

14-15-Zahlenpuzzle

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
	13	14	15

Unordnungszahl:

$U =$ 0 0

Keine Paare in falscher Reihenfolge

14-15-Zahlenpuzzle

1	2	3	4
5	6	7	8
	10	11	12
9	13	14	15

Unordnungszahl:

$$U = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 3 & 0 & 0 & & & & & & & & \\ \hline \end{array}$$

Paare in falscher Reihenfolge:

(10, 9), (11, 9), (12, 9)

14-15-Zahlenpuzzle

1	2	3	4
5	6	7	8
10	11	12	
9	13	14	15

Unordnungszahl:

$$U = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 0 & 0 & & & & & & & \\ \hline \end{array}$$

Paare in falscher Reihenfolge:

(10, 9), (11, 9), (12, 9)

14-15-Zahlenpuzzle

1	2	3	4
5	6	7	8
10	11	12	15
9	13	14	

Unordnungszahl:

$$U = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 6 & 3 & 3 & 0 & 0 & & & & & & \\ \hline \end{array}$$

Paare in falscher Reihenfolge:

(10, 9), (11, 9), (12, 9),
(15, 9), (15, 13), (15, 14)

14-15-Zahlenpuzzle

1	2	3	4
5	6	7	8
10	11	12	15
9	13		14

Unordnungszahl:

$$U = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 6 & 6 & 3 & 3 & 0 & 0 & & & & & \\ \hline \end{array}$$

Paare in falscher Reihenfolge:

(10, 9), (11, 9), (12, 9),
(15, 9), (15, 13), (15, 14)

14-15-Zahlenpuzzle

1	2	3	4
5	6	7	8
10	11		15
9	13	12	14

Unordnungszahl:

$$U = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 7 & 6 & 6 & 3 & 3 & 0 & 0 & & & & \\ \hline \end{array}$$

Paare in falscher Reihenfolge:

(10, 9), (11, 9), (15, 9), (15, 13)

(15, 12), (15, 14), (13, 12)

14-15-Zahlenpuzzle

1	2	3	4
5	6	7	8
	10	11	15
9	13	12	14

Unordnungszahl:

$$U = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 7 & 7 & 6 & 6 & 3 & 3 & 0 & 0 & & & \\ \hline \end{array}$$

Paare in falscher Reihenfolge:

(10, 9), (11, 9), (15, 9), (15, 13)

(15, 12), (15, 14), (13, 12)

14-15-Zahlenpuzzle

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	15
	13	12	14

Unordnungszahl:

$$U = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 4 & 7 & 7 & 6 & 6 & 3 & 3 & 0 & 0 & & \\ \hline \end{array}$$

Paare in falscher Reihenfolge:

(15, 13), (15, 12), (15, 14), (13, 12)

14-15-Zahlenpuzzle

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	15
13	12	14	

Unordnungszahl:

$$U = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 4 & 4 & 7 & 7 & 6 & 6 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Paare in falscher Reihenfolge:

(15, 13), (15, 12), (15, 14), (13, 12)

14-15-Zahlenpuzzle

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	
13	12	14	15

Unordnungszahl:

$$U = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 4 & 7 & 7 & 6 & 6 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Paare in falscher Reihenfolge:
(13, 12)

14-15-Zahlenpuzzle

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

U	0					
Z	4					
$U + Z$	4					

14-15-Zahlenpuzzle

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
	13	14	15

U	0					
Z	4					
$U + Z$	4					

14-15-Zahlenpuzzle

1	2	3	4
5	6	7	8
	10	11	12
9	13	14	15

U	3	0				
Z	3	4				
$U + Z$	6	4				

14-15-Zahlenpuzzle

1	2	3	4
5	6	7	8
10	11	12	
9	13	14	15

U	3	0				
Z	3	4				
$U + Z$	6	4				

14-15-Zahlenpuzzle

1	2	3	4
5	6	7	8
10	11	12	15
9	13	14	

U	6	3	0			
Z	4	3	4			
$U + Z$	10	6	4			

14-15-Zahlenpuzzle

1	2	3	4
5	6	7	8
10	11	12	15
9	13		14

U	6	3	0			
Z	4	3	4			
$U + Z$	10	6	4			

14-15-Zahlenpuzzle

1	2	3	4
5	6	7	8
10	11		15
9	13	12	14

U	7	6	3	0		
Z	3	4	3	4		
$U + Z$	10	10	6	4		

14-15-Zahlenpuzzle

1	2	3	4
5	6	7	8
	10	11	15
9	13	12	14

U	7	6	3	0		
Z	3	4	3	4		
$U + Z$	10	10	6	4		

14-15-Zahlenpuzzle

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	15
	13	12	14

U	4	7	6	3	0	
Z	4	3	4	3	4	
$U + Z$	8	10	10	6	4	

14-15-Zahlenpuzzle

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	15
13	12	14	

U	4	7	6	3	0	
Z	4	3	4	3	4	
$U + Z$	8	10	10	6	4	

14-15-Zahlenpuzzle

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	
13	12	14	15

U	1	4	7	6	3	0
Z	3	4	3	4	3	4
$U + Z$	6	8	10	10	6	4

14-15-Zahlenpuzzle

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

$$U + Z = 4, I = 0$$

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

$$U + Z = 5, I = 1$$

Teilen mit Rest

Teilen mit Rest

Satz: Sind m, n natürliche Zahlen mit $n \leq m$, so gibt es eindeutig bestimmte natürliche Zahlen q, r , so dass gilt:

$$m = q \cdot n + r \quad \text{mit } 0 \leq r < n$$

Teilen mit Rest

Satz: Sind m, n natürliche Zahlen mit $n \leq m$, so gibt es eindeutig bestimmte natürliche Zahlen q, r , so dass gilt:

$$m = q \cdot n + r \quad \text{mit } 0 \leq r < n$$

Satz: Seien m, n, q, r wie oben. Dann gilt:

$$\text{ggT}(m, n) = \text{ggT}(n, r)$$

Euklidischer Algorithmus

Gesucht: $\text{ggT}(a, b)$

Lösungsverfahren:

$$\begin{array}{rclcl} a & = & q_1 \cdot b & + & r_1 \\ b & = & q_2 \cdot r_1 & + & r_2 \\ r_1 & = & q_3 \cdot r_2 & + & r_3 \\ & & \vdots & & \\ r_{n-3} & = & q_{n-1} \cdot r_{n-2} & + & r_{n-1} \\ r_{n-2} & = & q_n \cdot r_{n-1} & + & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \text{ggT}(a, b) = r_{n-1}$$

Euklid von Alexandria: 325 – 265 v.C.

Polyeder

Polyeder

Definitionen:

Eine Menge M heißt **konvex**, wenn für je zwei beliebige Punkt aus M deren Verbindungsstrecke ganz in M liegt.

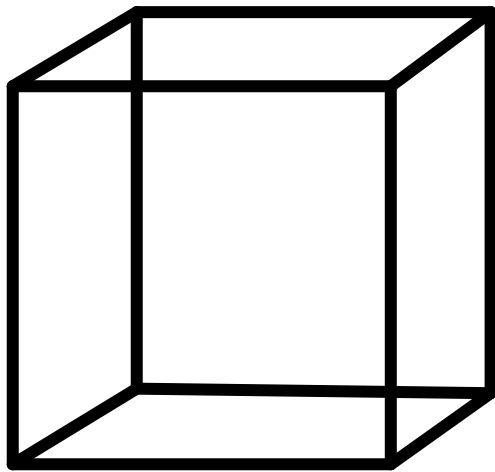
Polyeder

Definitionen:

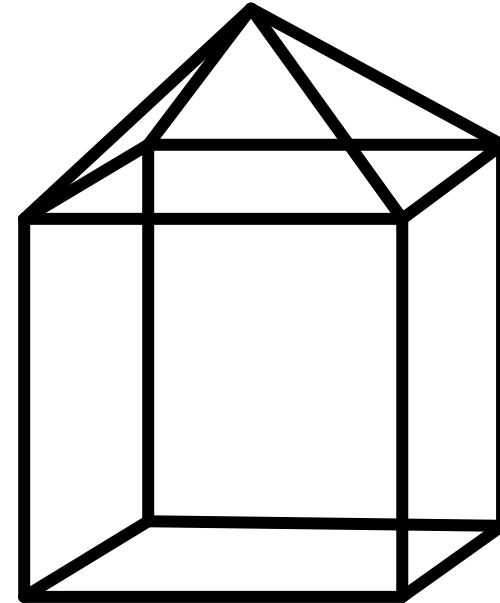
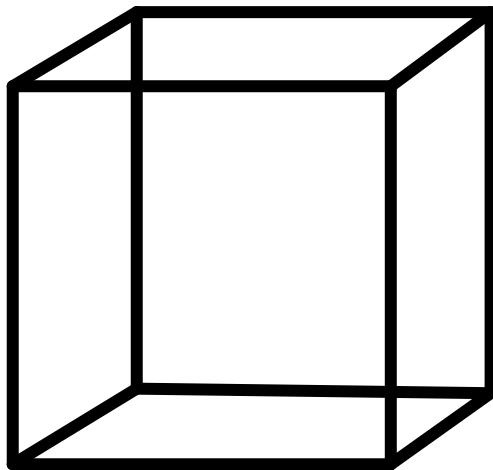
Eine Menge M heißt **konvex**, wenn für je zwei beliebige Punkt aus M deren Verbindungsstrecke ganz in M liegt.

Eine Menge heißt **beschränkt**, wenn eine Kugel (mit endlichem Radius) existiert, in der M ganz enthalten ist.

Polyeder

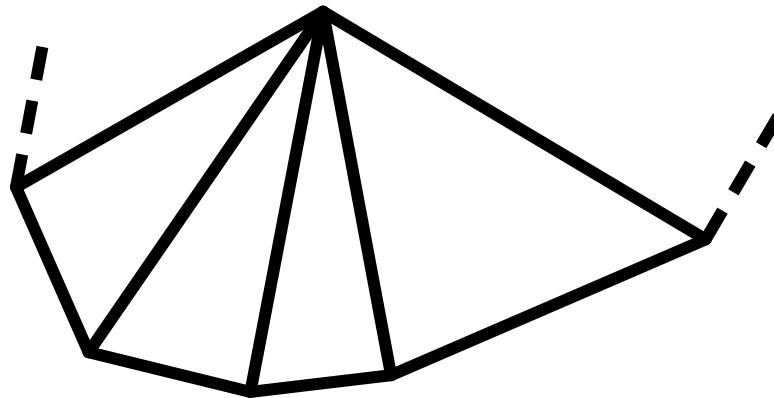


Polyeder



Anzahl Kanten: $K \longrightarrow K + 4$
Anzahl Ecken: $E \longrightarrow E + 1$
Anzahl Flächen: $F \longrightarrow F + 3$
Vermutung: $E + F - K = \text{invariant}$

Polyeder



Anzahl Kanten: $K \longrightarrow K + n$
Anzahl Ecken: $E \longrightarrow E + 1$
Anzahl Flächen: $F \longrightarrow F + n - 1$
Vermutung: $E + F - K = \text{invariant}$

Polyeder

Eulersche Polyederformel:

Für ein beschränktes konvexes Polyeder gilt $E + F - K = 2$.

gefunden 1640 von René Descartes,



Polyeder

Eulersche Polyederformel:

Für ein beschränktes konvexes Polyeder gilt $E + F - K = 2$.

gefunden 1640 von René Descartes,
wiederentdeckt 1752 von Leonhard Euler

