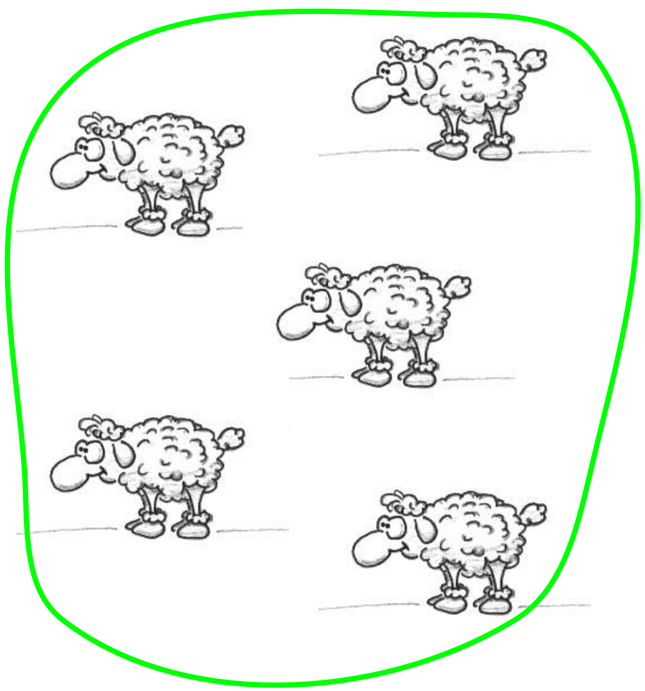
Mengen mit unendlich vielen Elementen - sind die immer gleich groß?

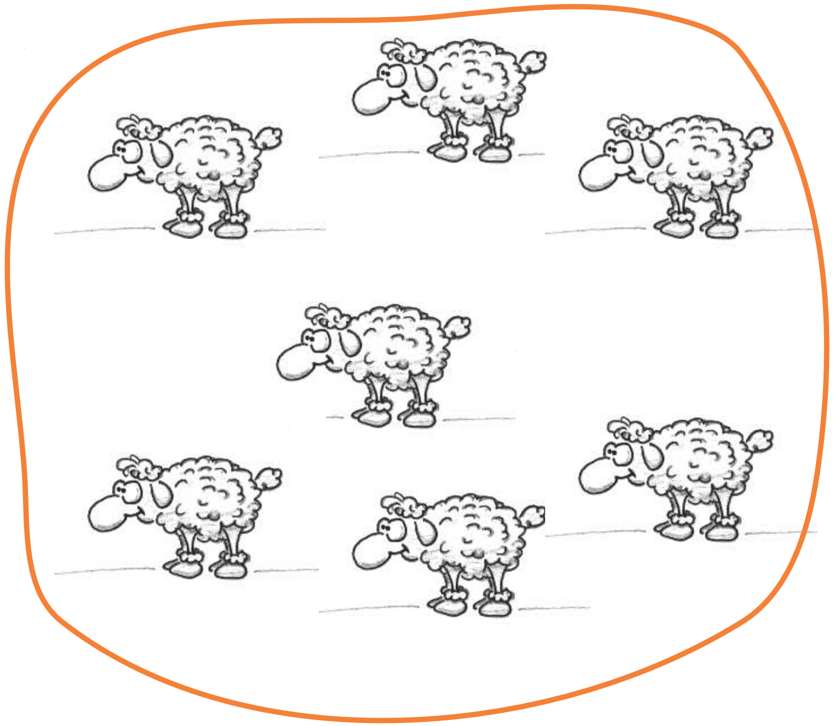
Peter Lesky (Universität Stuttgart)

Vortrag am ESG Kornwestheim

9. Oktober 2008

Mengen vergleichen



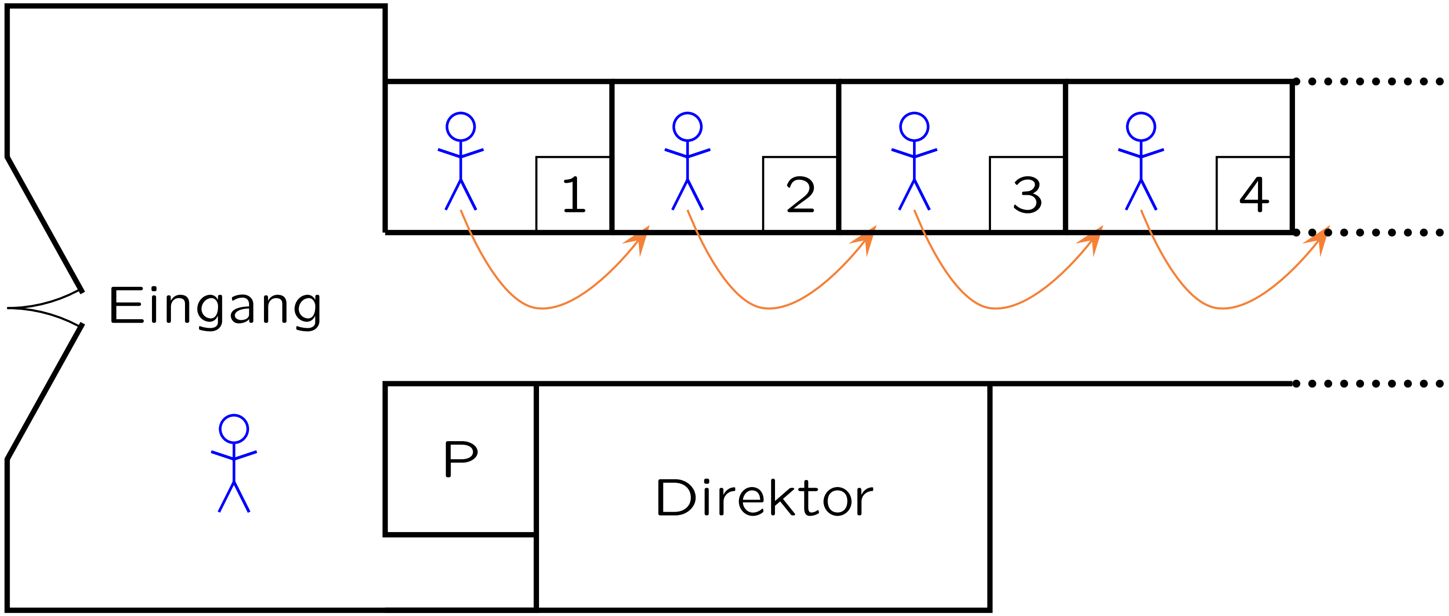


Mengen vergleichen

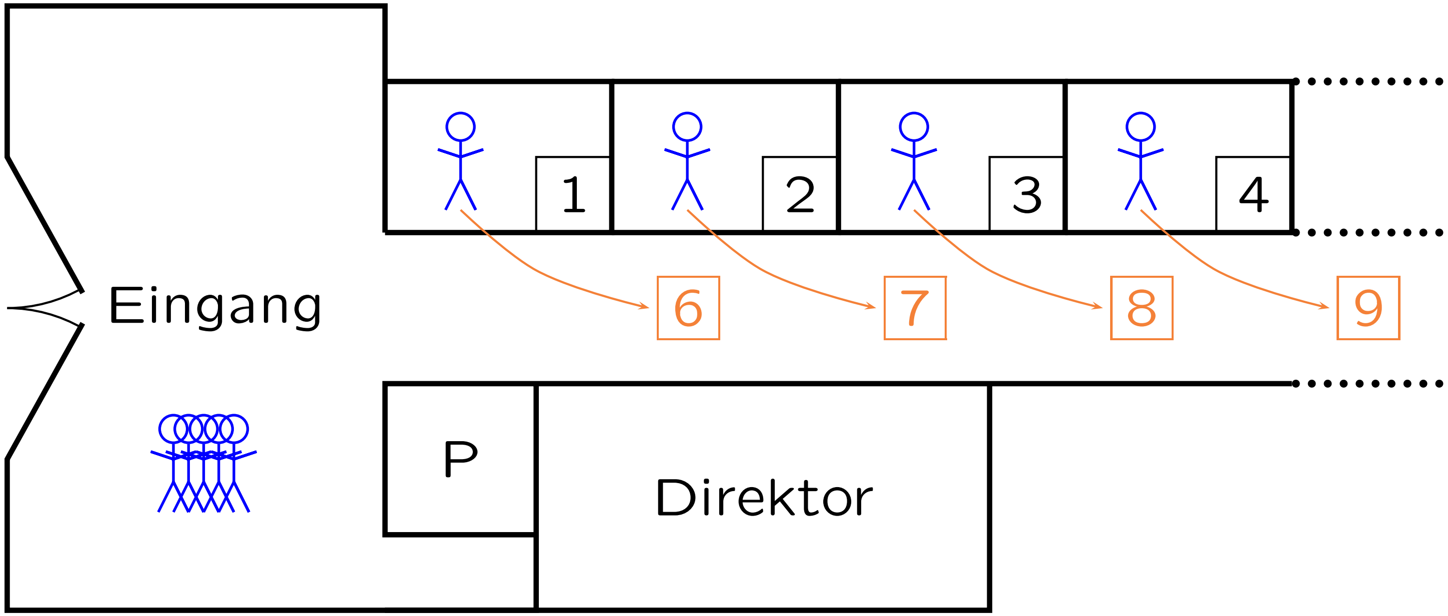
$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\} \qquad \leftrightarrow \qquad \mathbb{G} = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\} \qquad \leftrightarrow \qquad \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(n, m) : n, m \in \mathbb{N}\}$$

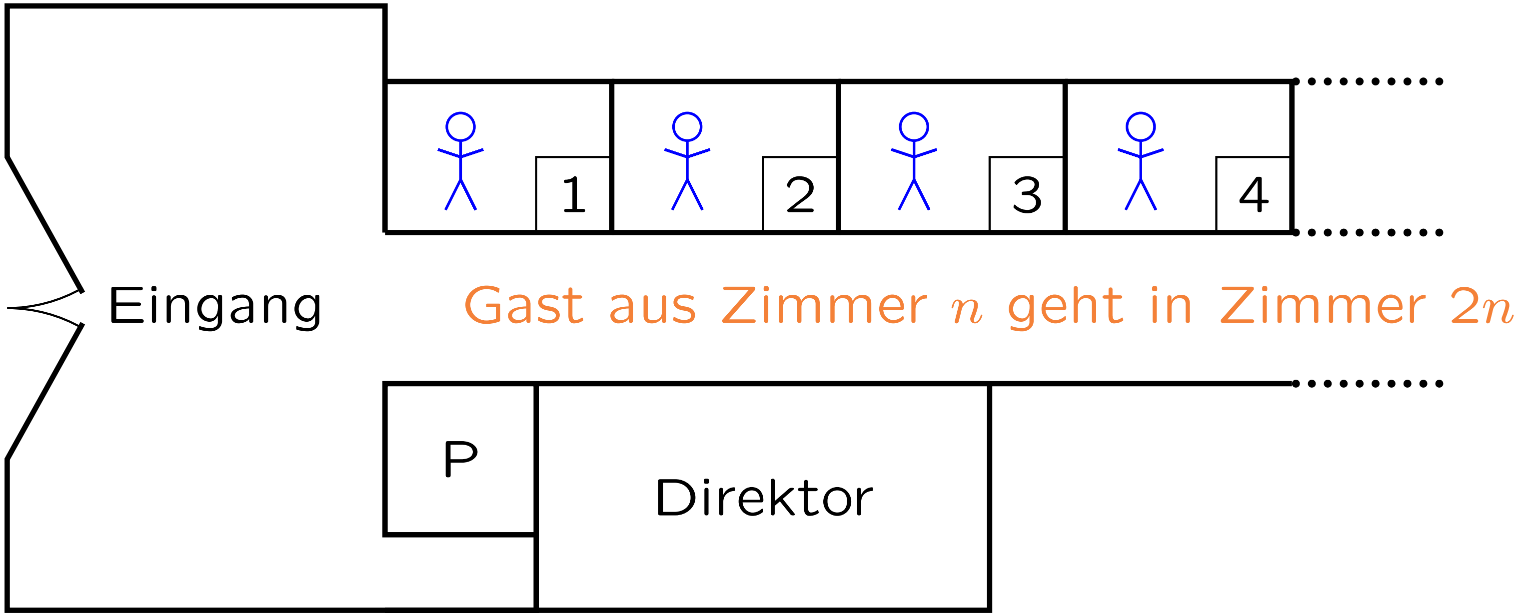
Das Hilbertsche Hotel



Das Hilbertsche Hotel



Das Hilbertsche Hotel



B

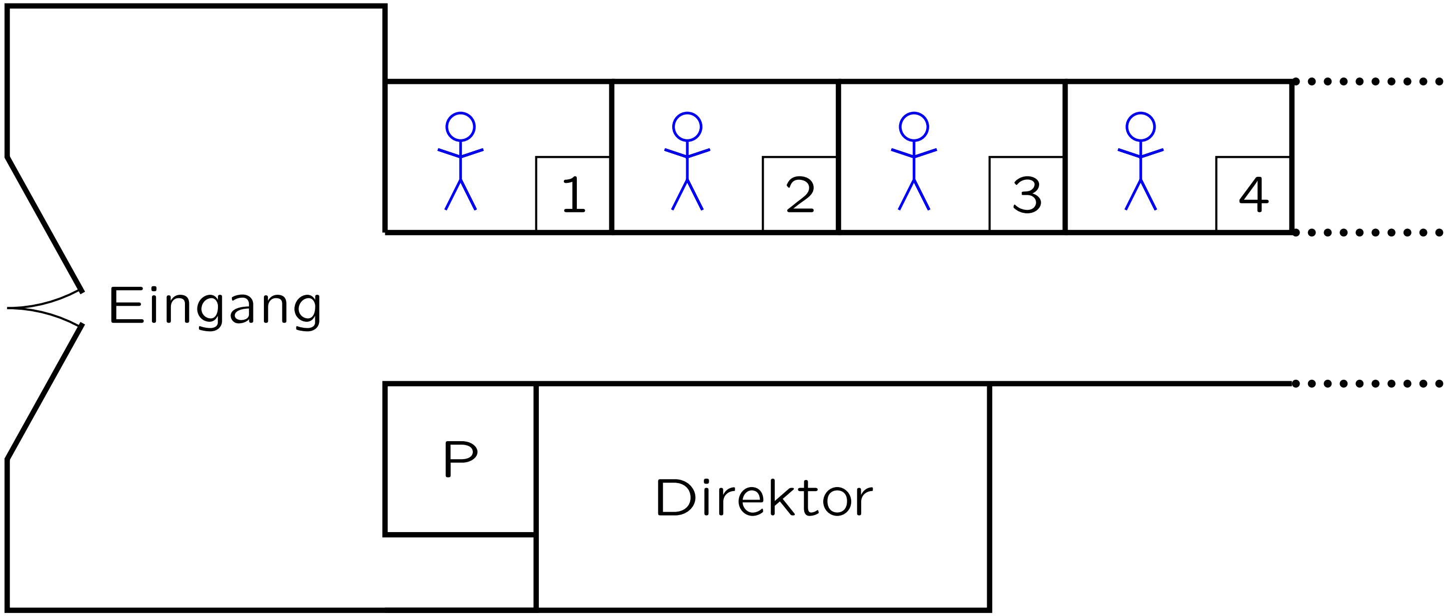
1

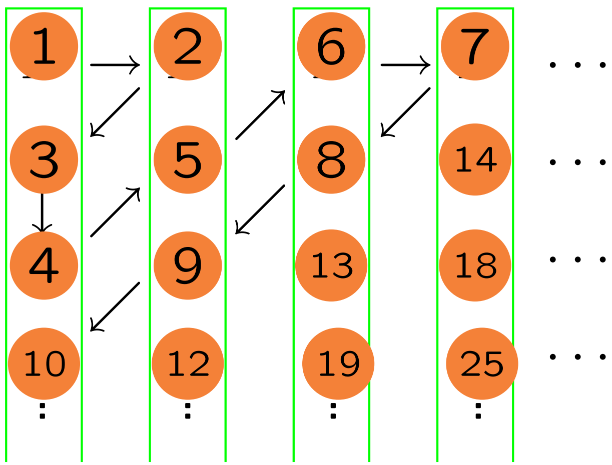
2

3

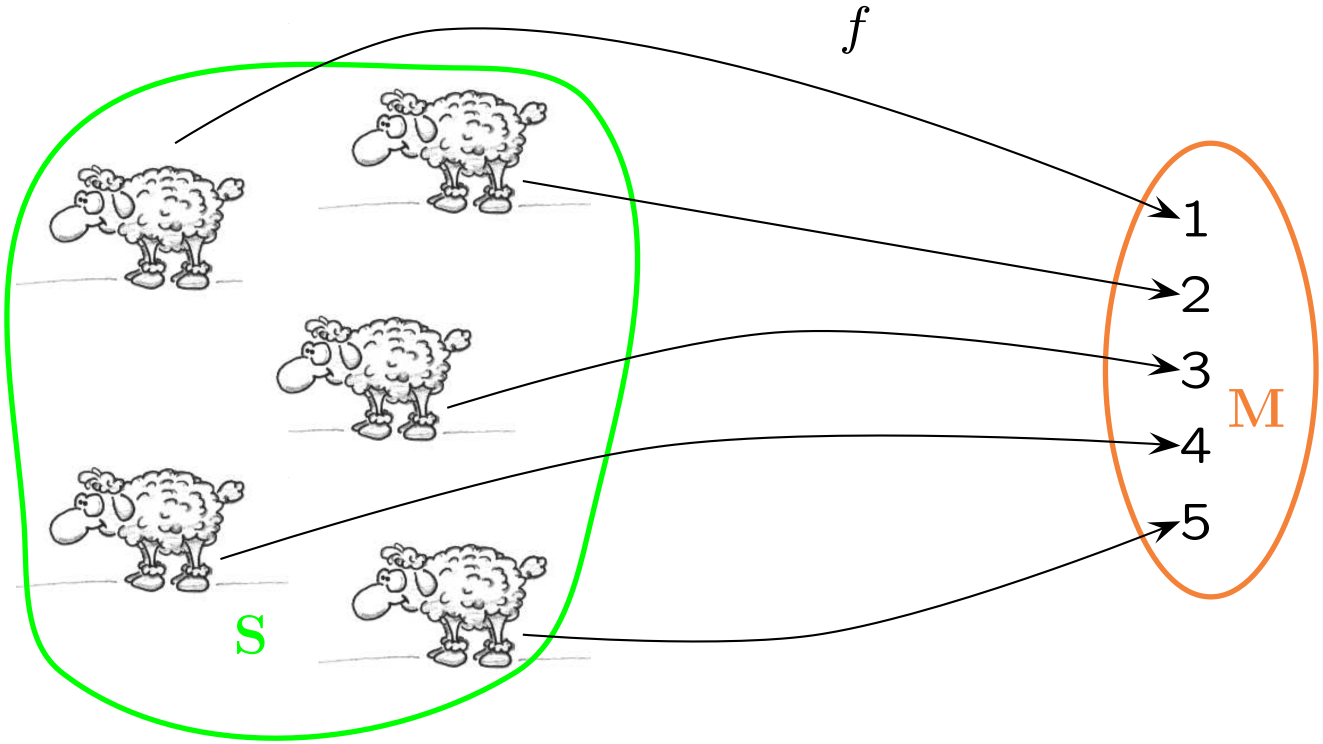
$\vdots$

Das Hilbertsche Hotel





Was bedeutet „zählen“?



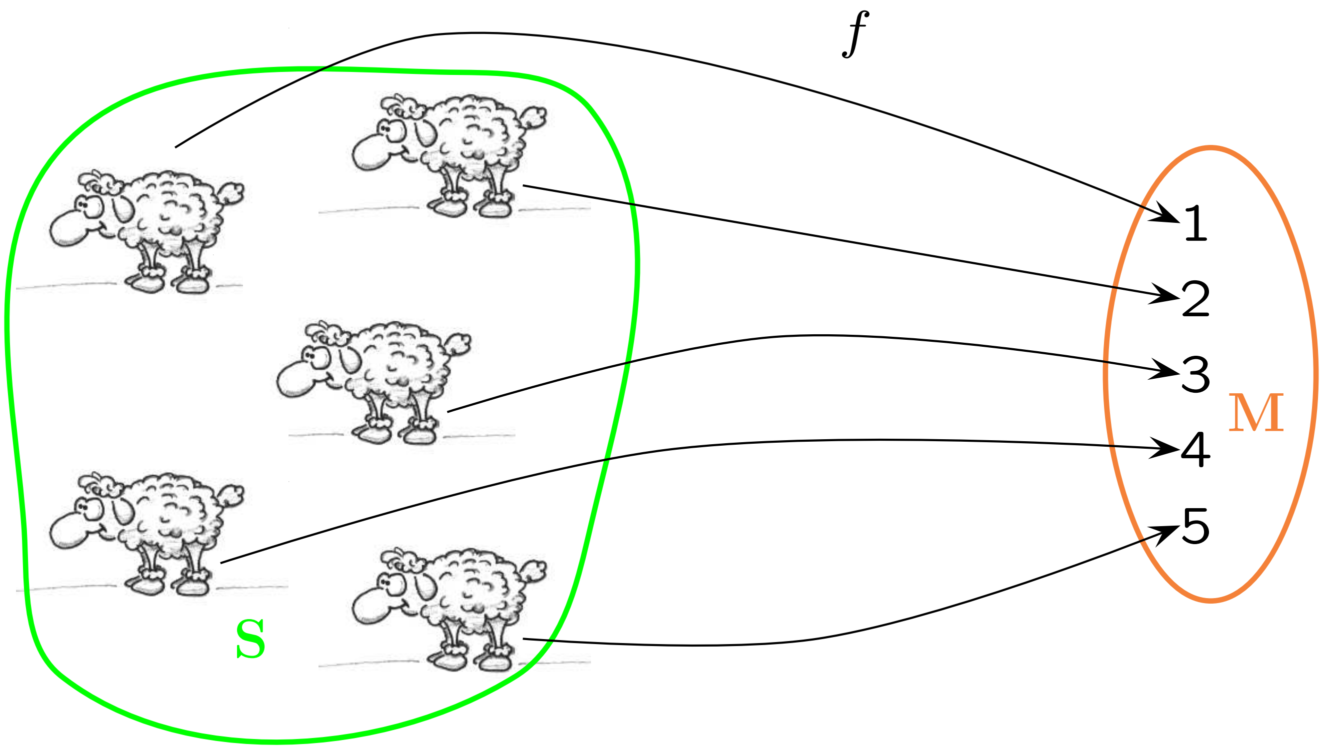
Die Abbildung $f : S \to M$ hat folgende Eigenschaften:

(i) Bei jedem Schaf geht genau ein Pfeil los.

(ii) Verschiedene Pfeile enden bei verschiedenen Zahlen.

(iii) Jede Zahl wird von (mindestens) einem Pfeil getroffen.

Was bedeutet „zählen“?



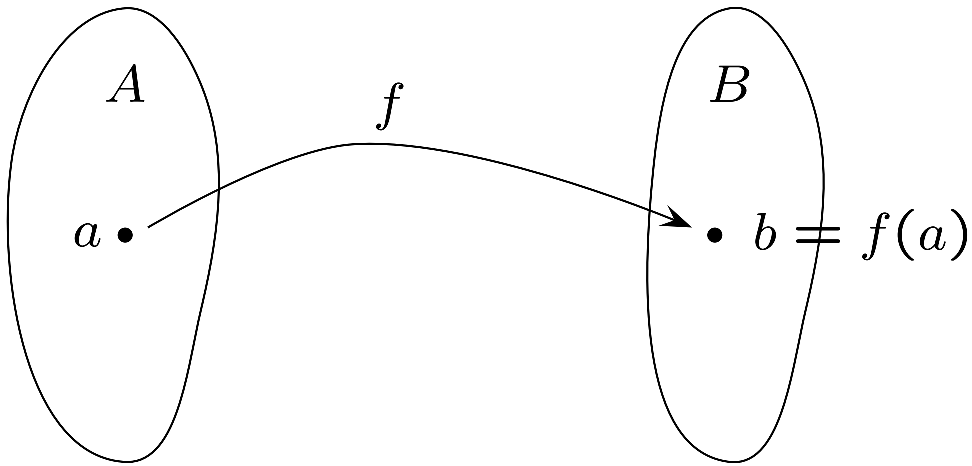
Die Abbildung $f : S \to M$ hat folgende Eigenschaften:

(i) Jedem $s \in S$ wird eine eindeutig gegebene Zahl $f(s) \in M$ zugeordnet.

(ii) Zu verschiedenen $s \in S$ gehören verschiedene $f(s) \in M$.

(iii) Zu jedem $m \in M$ gibt es (mindestens) ein $s \in S$, so dass $m = f(s)$.

Mächtigkeit



Zwei Mengen A und B heißen **gleich mächtig**, wenn es eine Abbildung $f : A \to B$ gibt mit den Eigenschaften:

(i) Zu jedem $a \in A$ gehört ein eindeutig gegebenes $f(a) \in B$.

(ii) Für $a, \tilde{a} \in A$ mit $a \neq \tilde{a}$ gilt $f(a) \neq f(\tilde{a})$.

(iii) Zu jedem $b \in B$ gibt es ein $a \in A$ mit $b = f(a)$.

Beispiel: Gleich mächtige Mengen

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{N} & = & \{1, 2, 3, 4, \ldots\} \\ & & \;\downarrow\;\downarrow\;\downarrow\;\downarrow \\ \mathbb{G} & = & \{2, 4, 6, 8, \ldots\} \end{array} \qquad f(n) = 2n$$

(i) Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gehört ein eindeutig gegebenes $f(n) \in \mathbb{G}$.

(ii) Für $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \neq m$ gilt $f(n) = 2n \neq 2m = f(m)$.

(iii) Zu jedem $g \in \mathbb{G}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $g = f(n)$: $n = \dfrac{g}{2}$

Also: $\mathbb{G}$ und $\mathbb{N}$ sind gleich mächtig.

Richard Dedekind (1831 – 1916): Eine Menge heißt unendlich, wenn sie zu einer echten Teilmenge von sich gleich mächtig ist.

Beispiel: $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$

Rationale Zahlen $\mathbb{Q} \; = \; \left\{ \frac{z}{n} : z \in \mathbb{Z}, \;\; n \in \mathbb{N} \right\}$

Georg Cantor
(1845 – 1918)

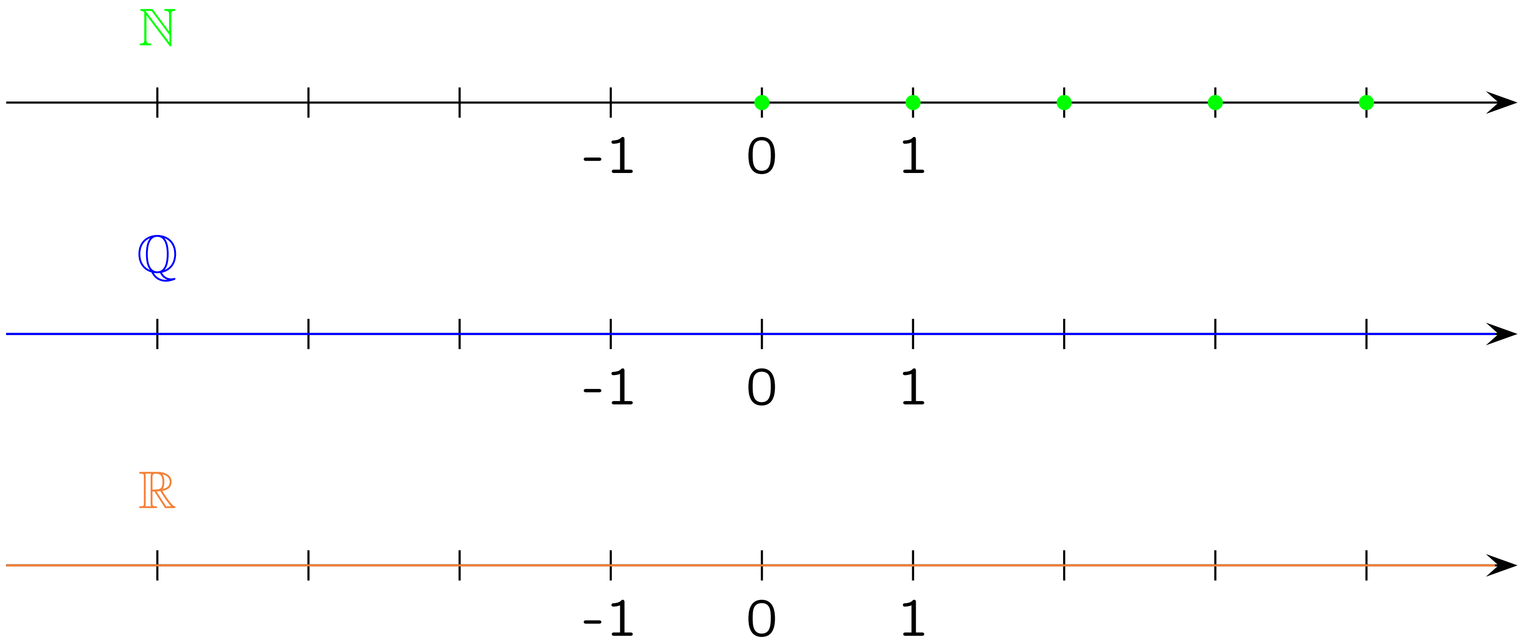
$\mathbb{Q}$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 \; 1 & \rightarrow & \frac{1}{1} \; 2 & \rightarrow & \frac{1}{2} \; 3 & & \frac{1}{3} \; 7 & \rightarrow & \frac{1}{4} \; 8 \quad \cdots \\
 & & -\frac{1}{1} \; 4 & & -\frac{1}{2} \; 6 & & -\frac{1}{3} \; 9 & & -\frac{1}{4} \; 13 \quad \cdots \\
 & & \frac{2}{1} \; 5 & & \cancel{\frac{2}{2}} & & \frac{2}{3} \; 12 & & \frac{2}{4} \quad \cdots \\
 & & -\frac{2}{1} \; 10 & & \cancel{-\frac{2}{2}} & & -\frac{2}{3} & & -\frac{2}{4} \quad \cdots \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}
$$

$\mathbb{Q}$ ist gleichmächtig wie $\mathbb{N}$

$\mathbb{Q}$ ist <u>abzählbar</u>

Beispiel: $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$



Typisches Beispiel für eine irrationale Zahl: $\sqrt{2} = 1,4142\ldots$

$$\mathbb{R} \;=\; \Big\{ m, a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, \ldots \;:\; m \in \mathbb{Z},\; a_j \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \Big\}$$

Satz: $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar, d.h. $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ sind nicht gleich mächtig.
Man sagt: $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

Beispiel: $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$

Annahme: $\mathbb{R}$ ist abzählbar, es gibt eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften:

(iii) Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x = f(n)$.

Definiere $x \in \mathbb{R}$ so:

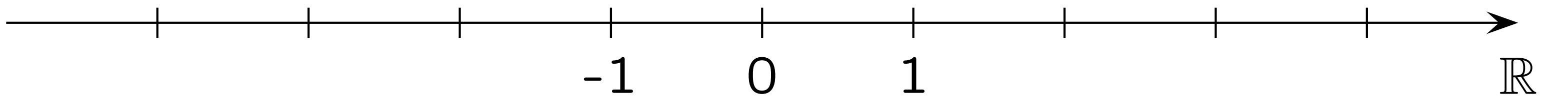
$$x = 0, a_1\, a_2\, a_3 \ \dots \quad \text{mit} \begin{cases} a_n = 0, & \text{falls } f(n) = b_0, b_1\, b_2 \ \dots \ \text{und } b_n \neq 0 \\ a_n = 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt für beliebiges $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} x &= 0, a_1\, a_2\, a_3 \dots a_n \dots \\ f(n) &= b_0, b_1\, b_2\, b_3 \dots b_n \dots \end{aligned}$$

also $x \neq f(n)$. Es gibt kein $n \in \mathbb{N}$ mit $f(n) = x$, Widerspruch.

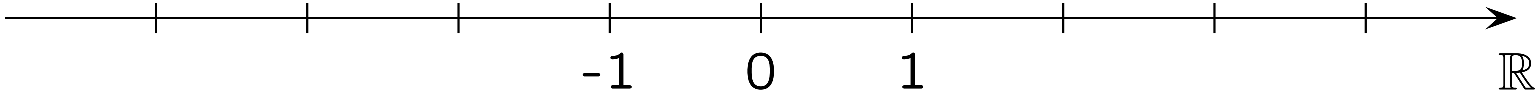
Gibt es noch mehr verschieden mächtige Mengen?



Kontinuumshypothese: Jede Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist endlich oder gleich mächtig wie $\mathbb{N}$ oder gleich mächtig wie das Kontinuum (d.h. wie $\mathbb{R}$).

1900: David Hilbert stellt auf dem zweiten Internationalen Mathematiker-Kongress eine Liste von 23 bis dahin ungelösten mathematischen Problemen vor. Problem 1: Beweis der Kontinuumshypothese.

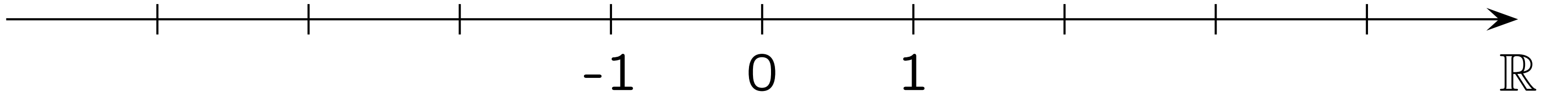
Gibt es noch mehr verschieden mächtige Mengen?



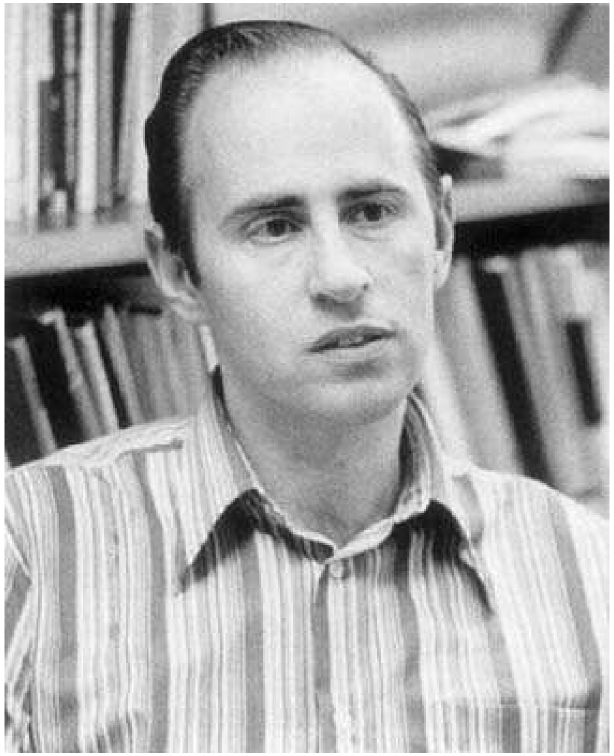
Kontinuumshypothese: Jede Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist endlich oder gleich mächtig wie $\mathbb{N}$ oder gleich mächtig wie das Kontinuum (d.h. wie $\mathbb{R}$).

1931: Kurt Gödel beweist, dass nicht alle mathematischen Aussagen beweisbar sind.

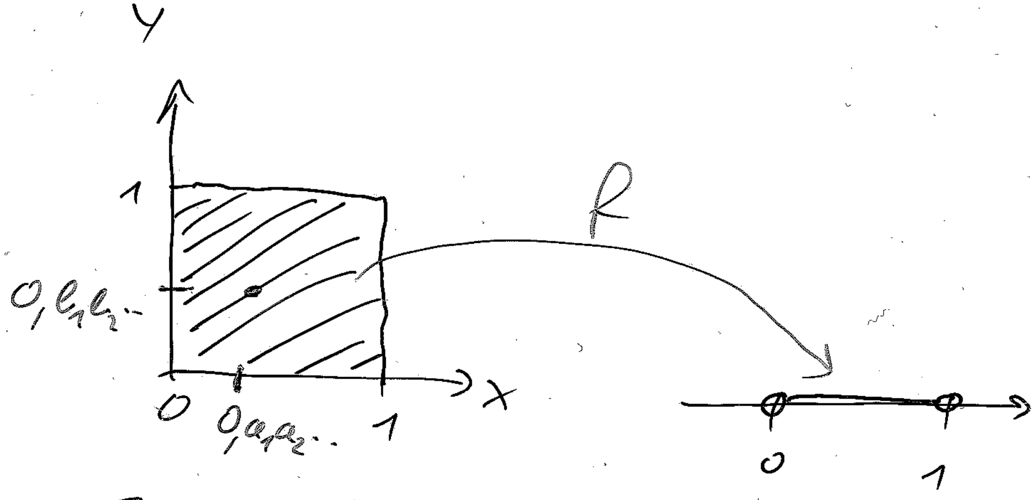
Gibt es noch mehr verschieden mächtige Mengen?



Kontinuumshypothese: Jede Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist endlich oder gleich mächtig wie $\mathbb{N}$ oder gleich mächtig wie das Kontinuum (d.h. wie $\mathbb{R}$).



1963: Paul Cohen beweist, dass im üblicherweise verwendeten Axiomensystem der Mathematik nicht entschieden werden kann, ob die Kontinuumshypothese wahr oder falsch ist.



$]0,1[\times]0,1[$ $\quad\quad\quad$ $]0,1[$

$]0,1[=\{x\in\mathbb{R}: 0<x<1\}$

$f(0{,}a_1a_2a_3\ldots \mid 0{,}b_1b_2b_3\ldots)$

$= 0{,}a_1b_1a_2b_2a_3b_3\ldots \in]0,1[$

$0{,}0\overline{9} = 0{,}1$

Die Potenzmenge

Für eine Menge M ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ die Menge, die als Elemente alle Teilmengen von M enthält.

Beispiel 1: $M = \{1\}$:

$$\mathcal{P}(M) = \Big\{\emptyset, \{1\}\Big\}$$

Beispiel 2: $M = \{1, 2\}$:

$$\mathcal{P}(M) = \Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\Big\}$$

Beispiel 3: $M = \{1, 2, 3\}$:

$$\mathcal{P}(M) = \Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\Big\}$$

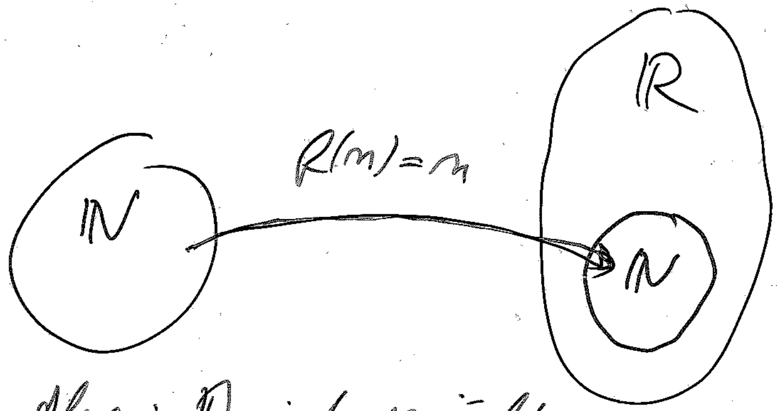
Anzahl der Elemente von $\mathcal{P}(M)$: $\sharp\mathcal{P}(M) = 2^{\sharp M}$.

Mehr verschieden mächtige Mengen

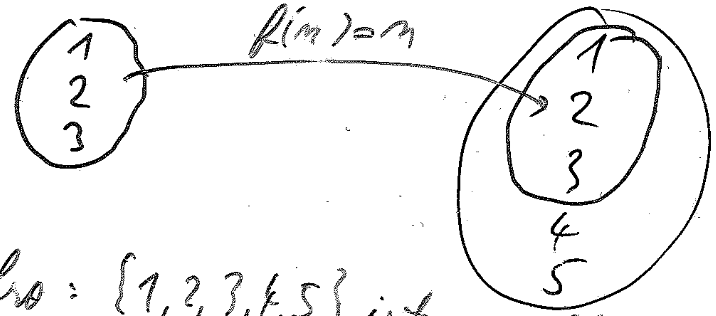
Satz: Ist M eine Menge, so ist $\mathcal{P}(M)$ echt mächtiger als M.

Sind M, N Mengen, so heißt

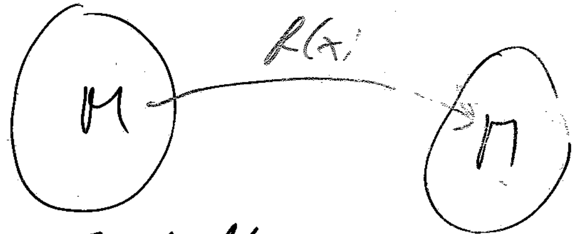
- M **mächtiger als** N, falls es eine Teilmenge von M gibt, die gleich mächtig wie N ist.



Also: $\mathbb{R}$ ist mächtiger als $\mathbb{N}$



Also: $\{1,2,3,4,5\}$ ist mächtiger als $\{1,2,3\}$



$M \subseteq M$

Also: Jede Menge ist mächtiger als sie selber

Mehr verschieden mächtige Mengen

Satz: Ist M eine Menge, so ist $\mathcal{P}(M)$ echt mächtiger als M.

Sind M, N Mengen, so heißt

- M **mächtiger als** N, falls es eine Teilmenge von M gibt, die gleich mächtig wie N ist.
- M **echt mächtiger als** N, falls M mächtiger als N und nicht gleich mächtig wie N ist.

Mehr verschieden mächtige Mengen

Satz: Ist M eine Menge, so ist $\mathcal{P}(M)$ echt mächtiger als M.

Anwendung:

$$\begin{array}{rl} \mathcal{P}(\mathbb{N}) & \text{ist echt mächtiger als } \mathbb{N} \\ & (\mathcal{P}(\mathbb{N}) \text{ ist gleich mächtig wie } \mathbb{R}). \\[2ex] \mathcal{P}(\mathbb{R}) & \text{ist echt mächtiger als } \mathbb{R} \\[2ex] \mathcal{P}\Big(\mathcal{P}(\mathbb{R})\Big) & \text{ist noch mächtiger} \\ & \vdots \end{array}$$

Verallgemeinerte Kontinuumshypothese: Ist M eine unendliche Menge, so gibt es zwischen der Mächtigkeit von M und von $\mathcal{P}(M)$ keine weitere.

Quellen

- Friedrich Wille: Humor in der Mathematik, 4. Auflage 1992
- The MacTutor History of Mathematics archive:
  `http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/`
- Wikipedia

Die Folien zu diesem Vortrag gibt's unter
`http://www.iadm.uni-stuttgart.de/LstAnaMPhy/Lesky/`

Lust auf mehr?

- Korrespondenzzirkel: Neue Gebiete aus der Mathematik kennenlernen, Aufgaben lösen und einschicken.

- Schülerseminar an der Uni Stuttgart: Jeden zweiten Mittwoch.
  Für Klassenstufe 8–10: 17.00 bis 18.30 Uhr,
  Für Klassenstufe 11–13: 18.00 bis 19.30 Uhr

Weitere Informationen unter
`http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/schuelerzirkel/`