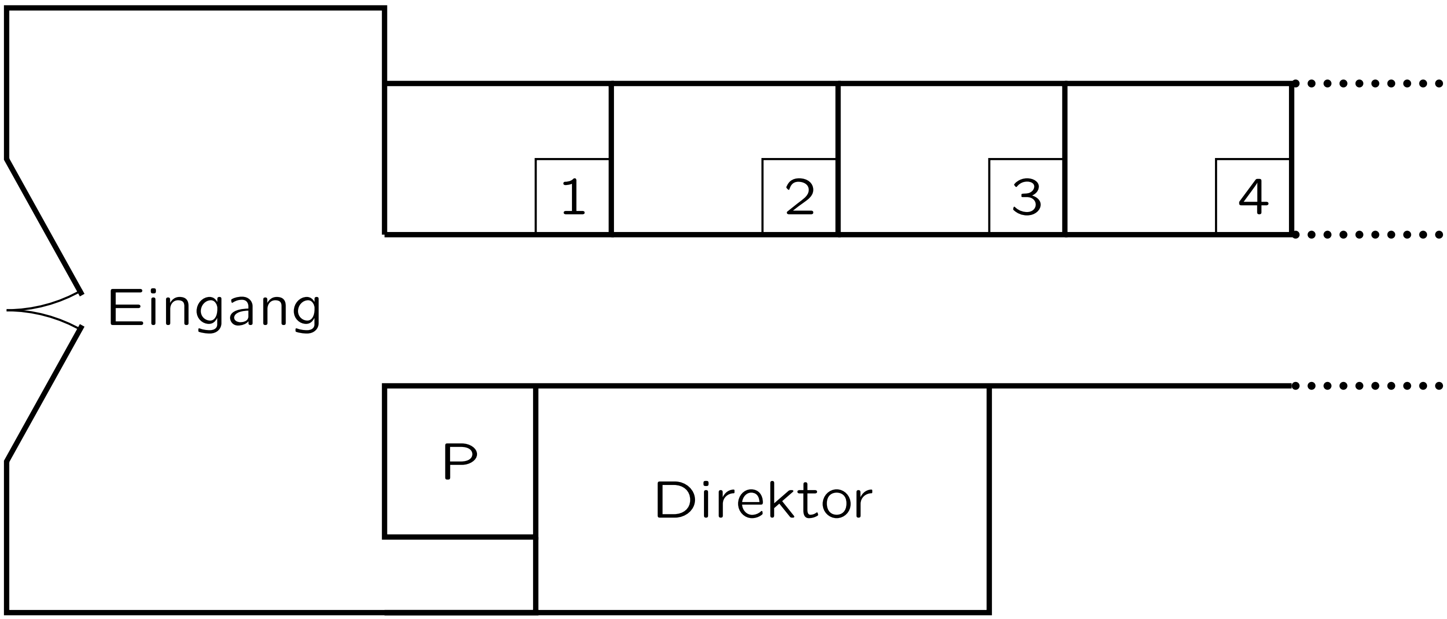
Mengen mit unendlich vielen Elementen - sind die immer gleich groß?

Peter Lesky (Universität Stuttgart)

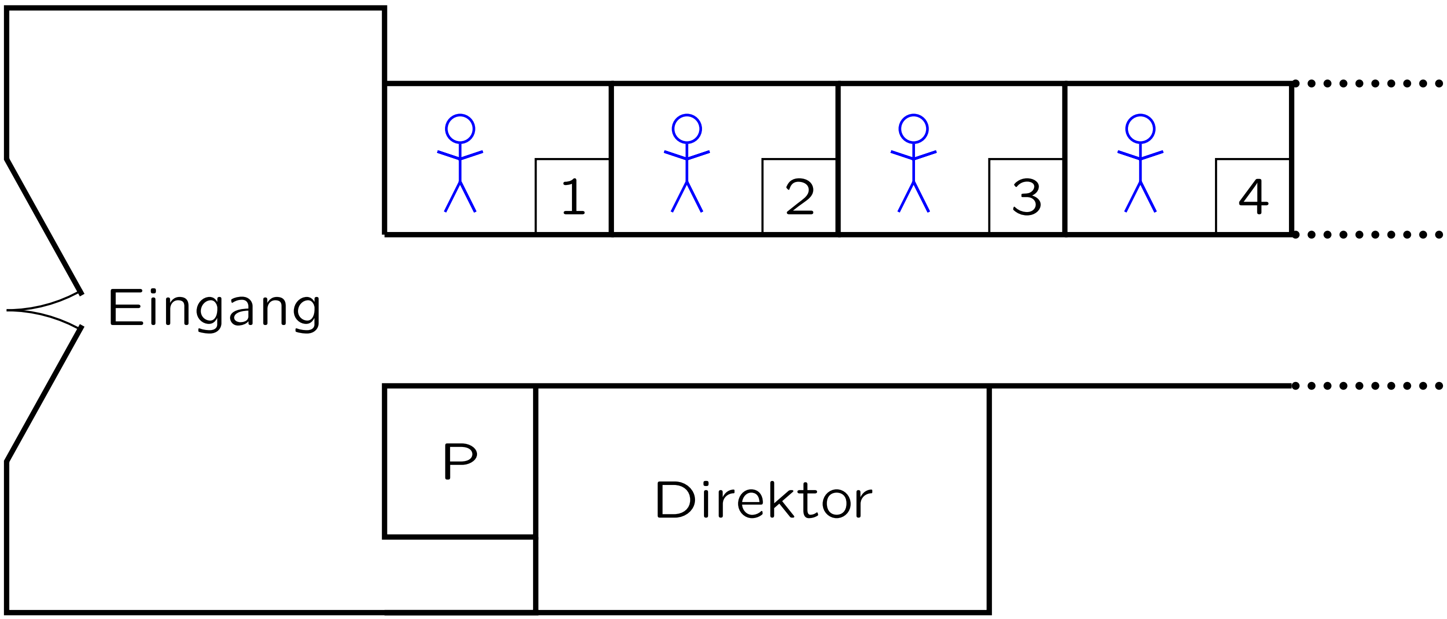
Vortrag am LGH

22. September 2005

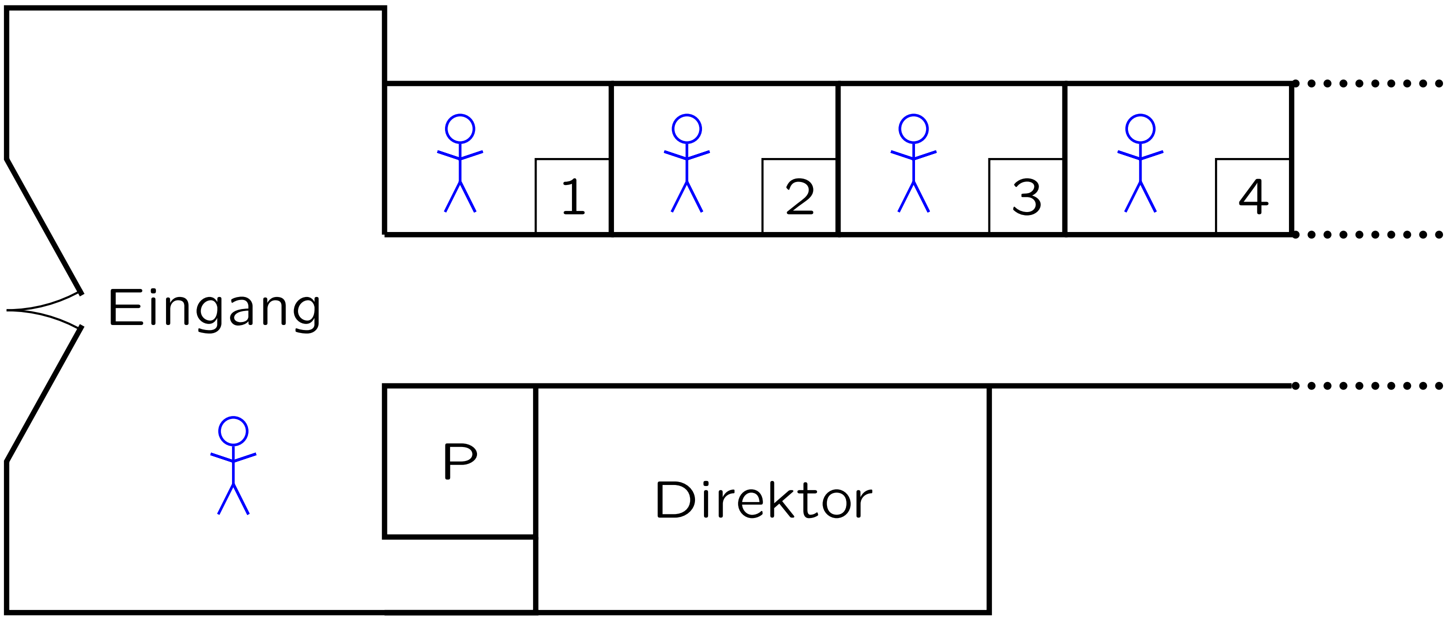
Das Hilbertsche Hotel



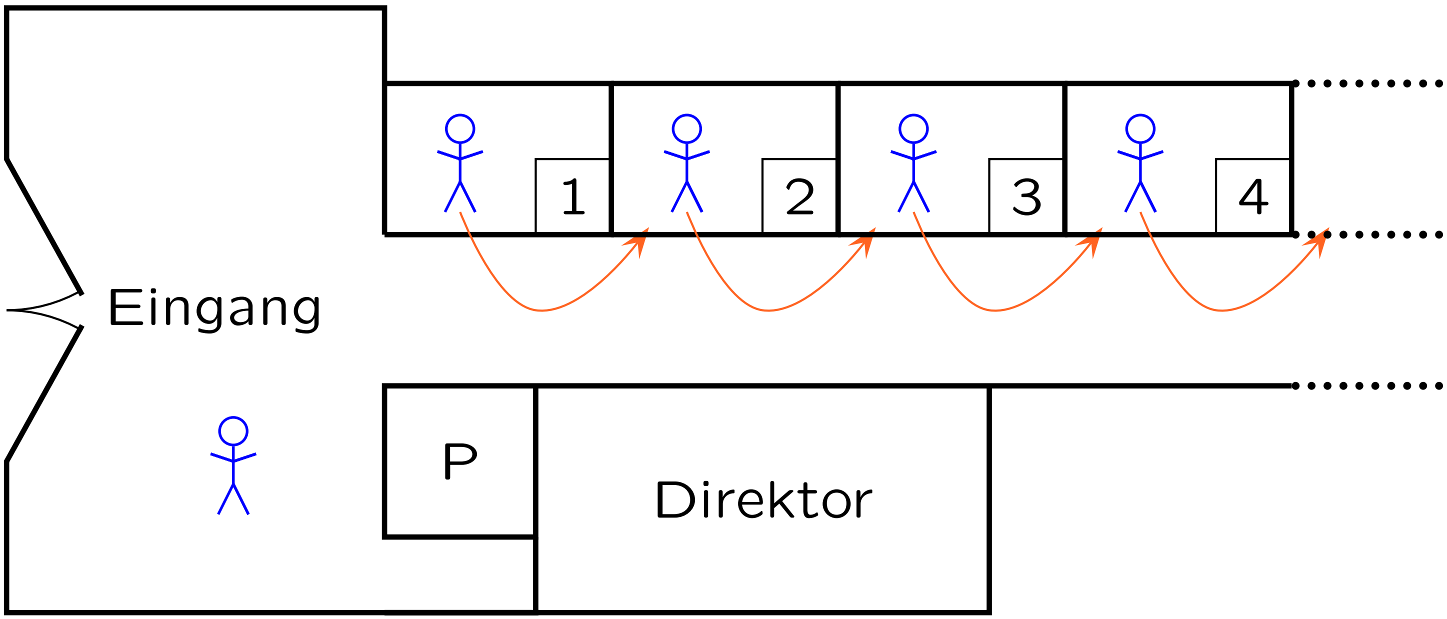
Das Hilbertsche Hotel



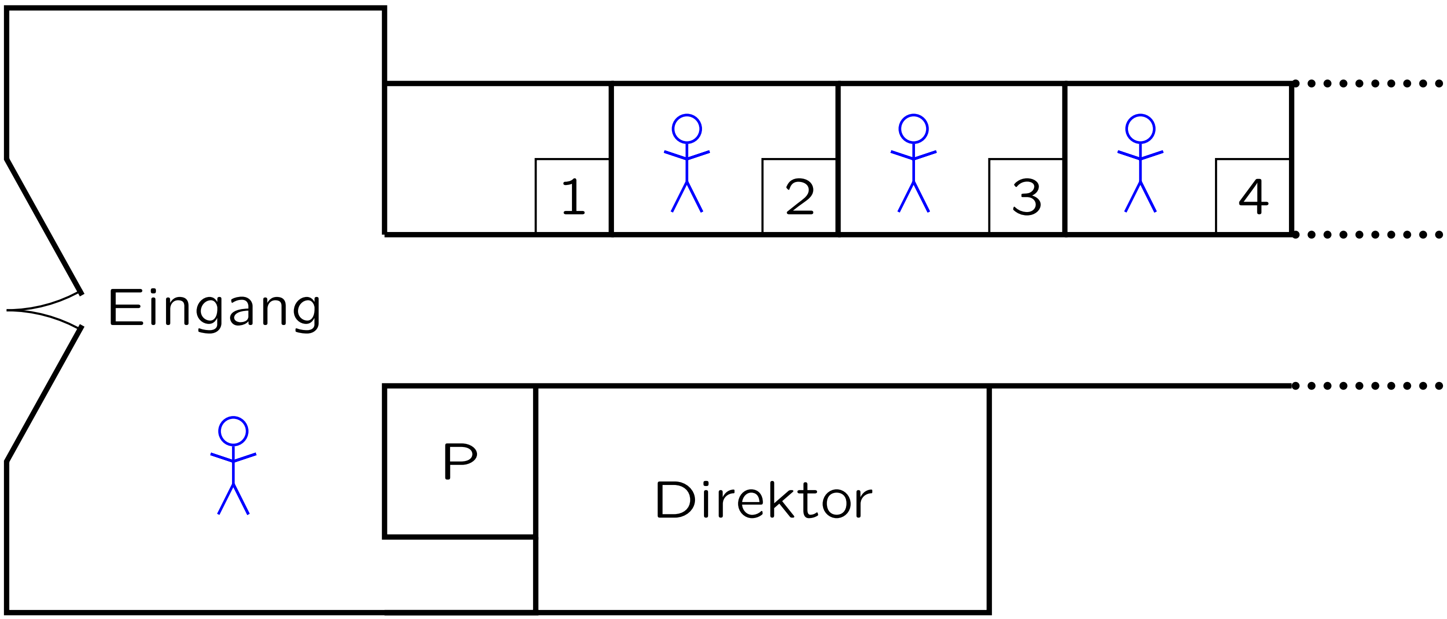
Das Hilbertsche Hotel



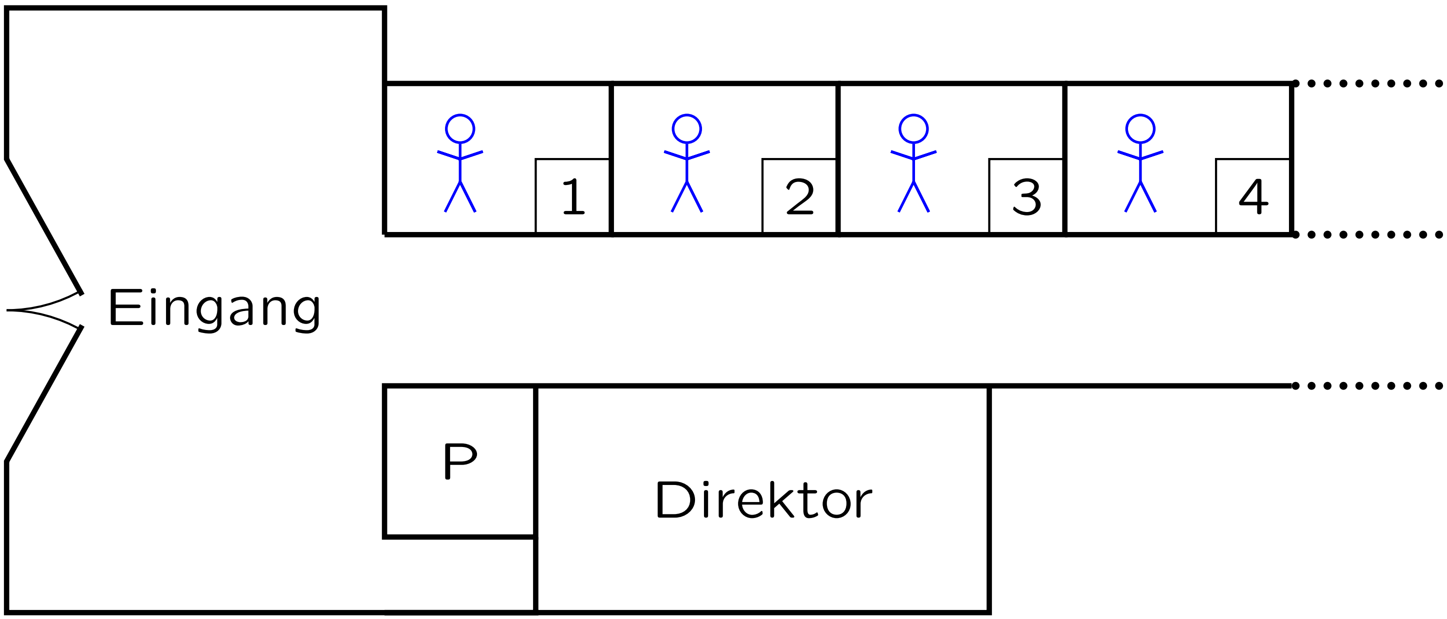
Das Hilbertsche Hotel



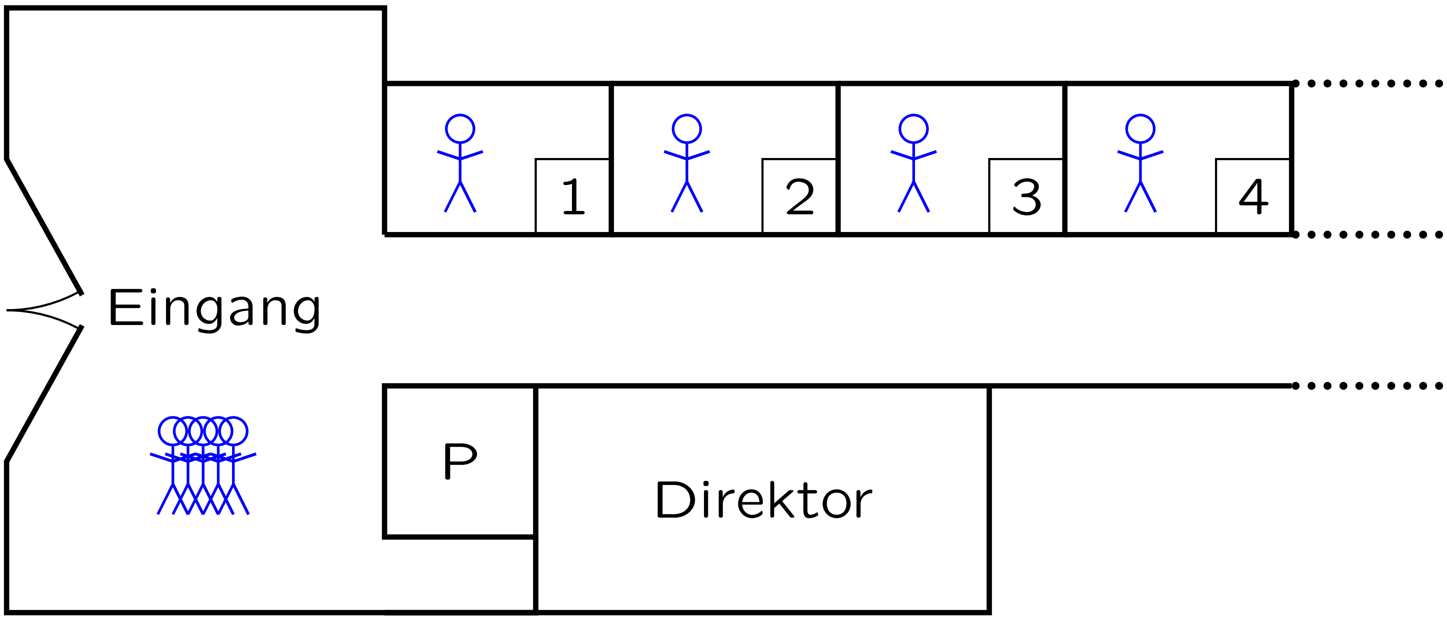
Das Hilbertsche Hotel



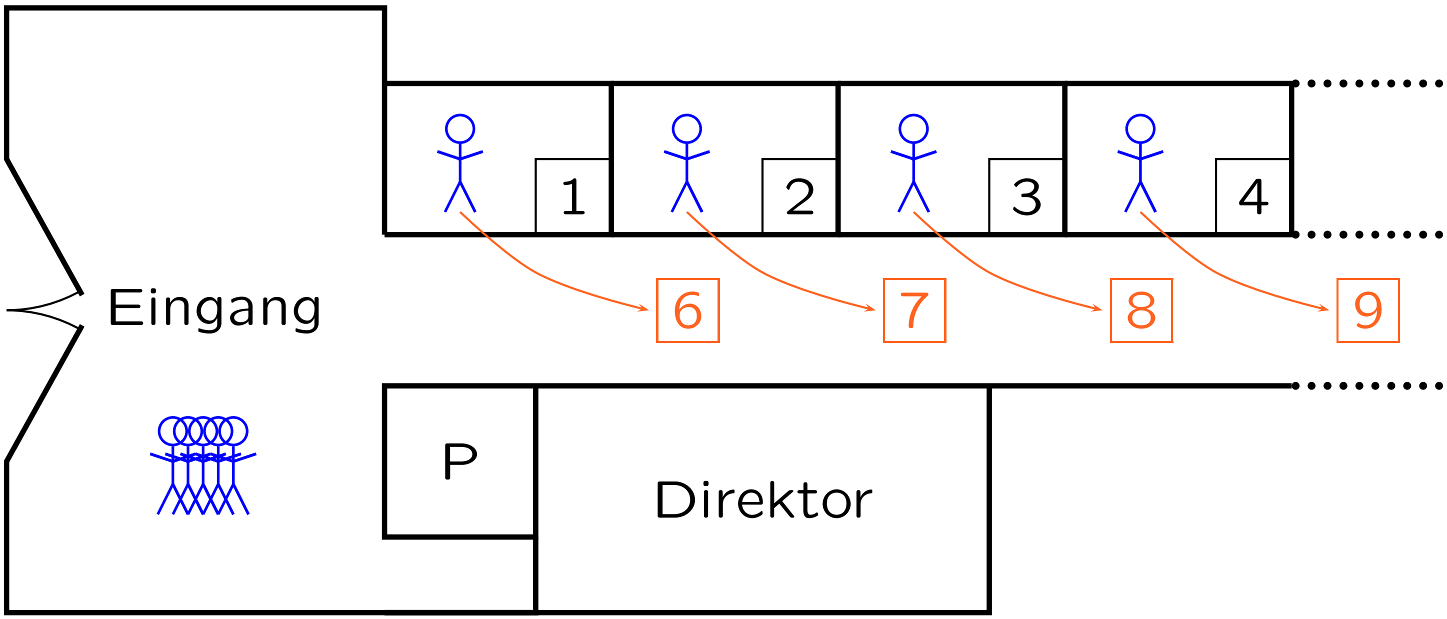
Das Hilbertsche Hotel



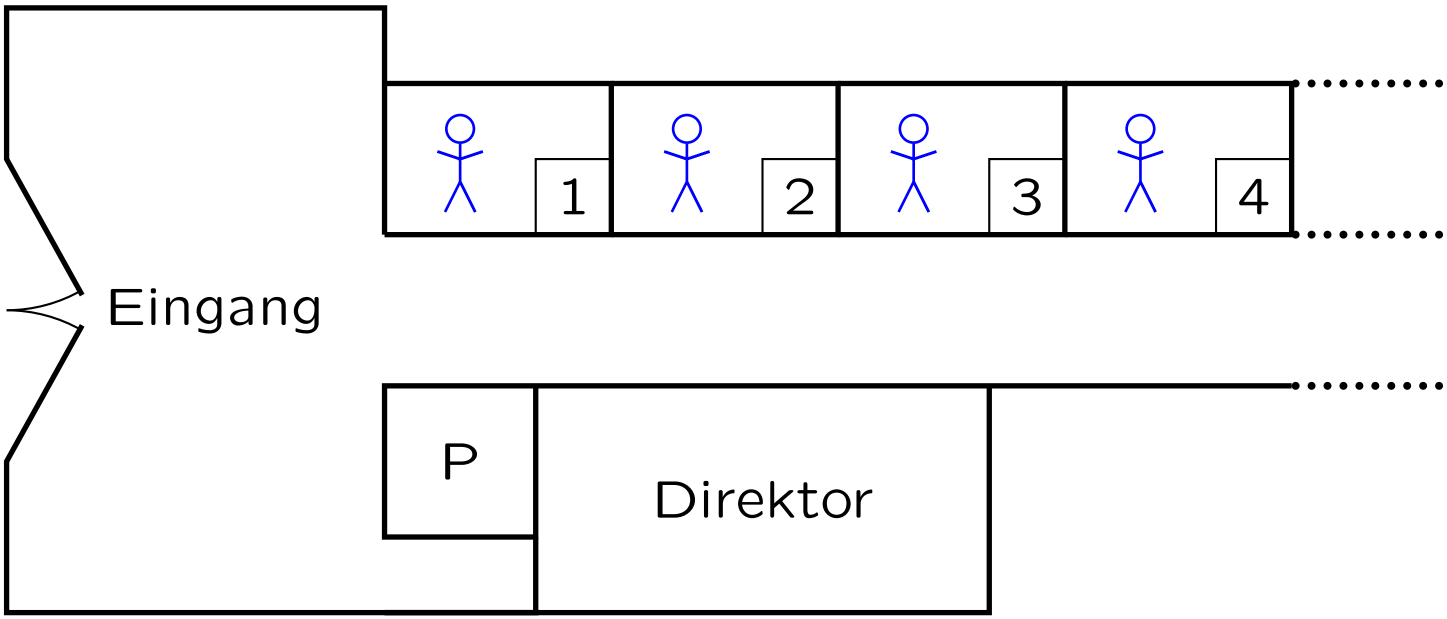
Das Hilbertsche Hotel



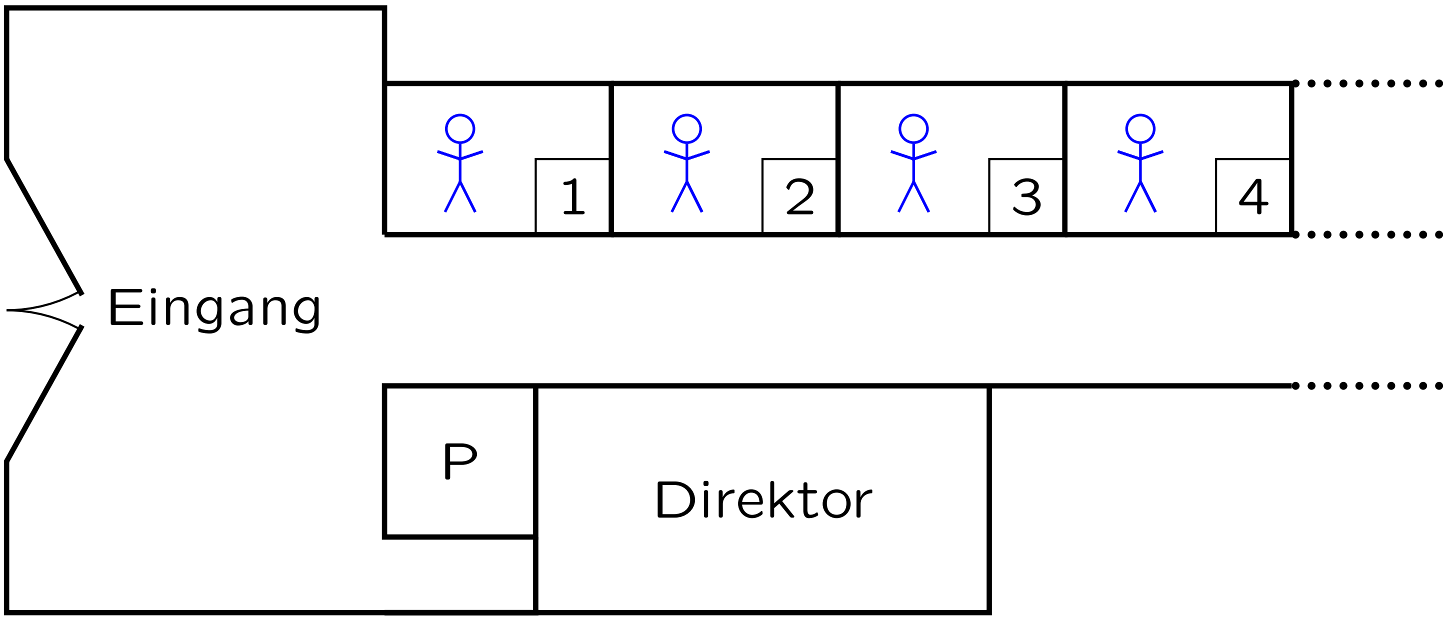
Das Hilbertsche Hotel



Das Hilbertsche Hotel

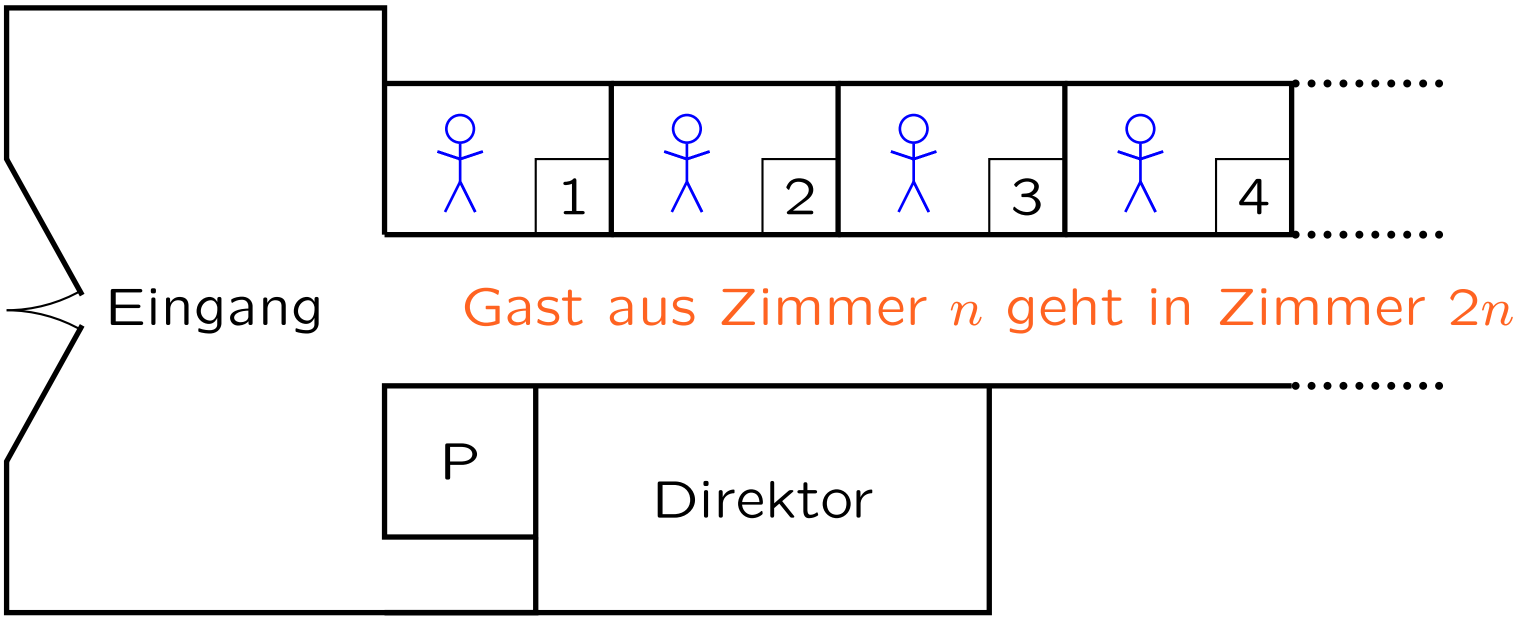


Das Hilbertsche Hotel



B
1
2
3
$\vdots$

Das Hilbertsche Hotel



B

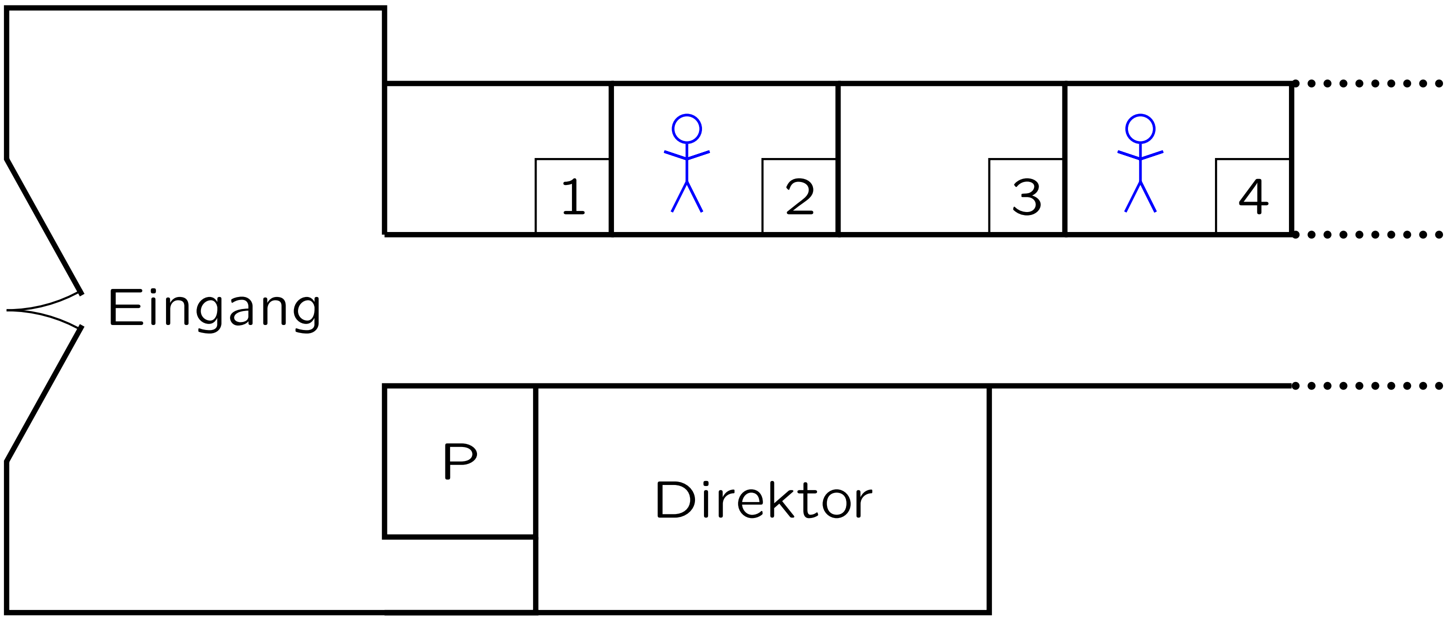
1

2

3

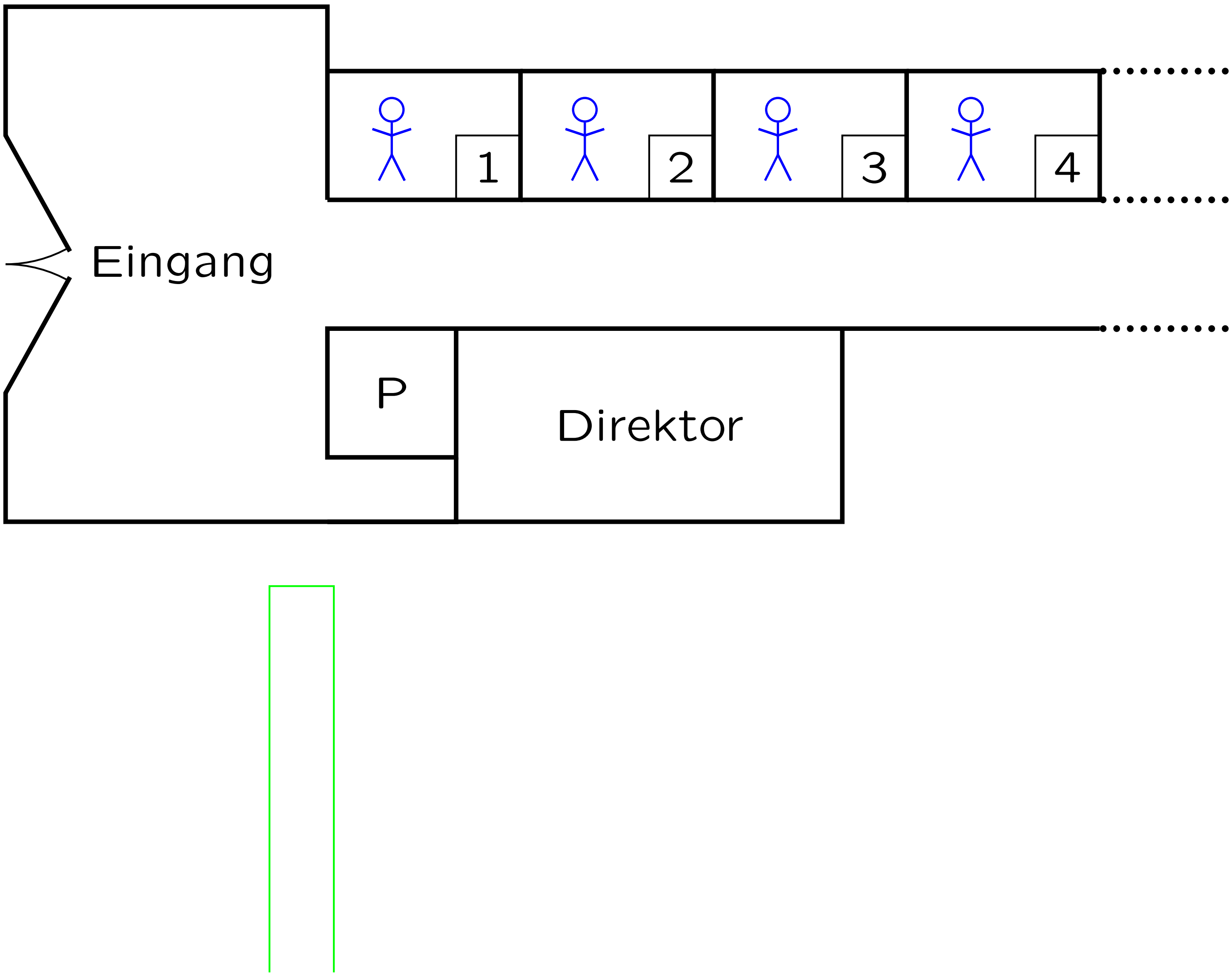
$\vdots$

Das Hilbertsche Hotel

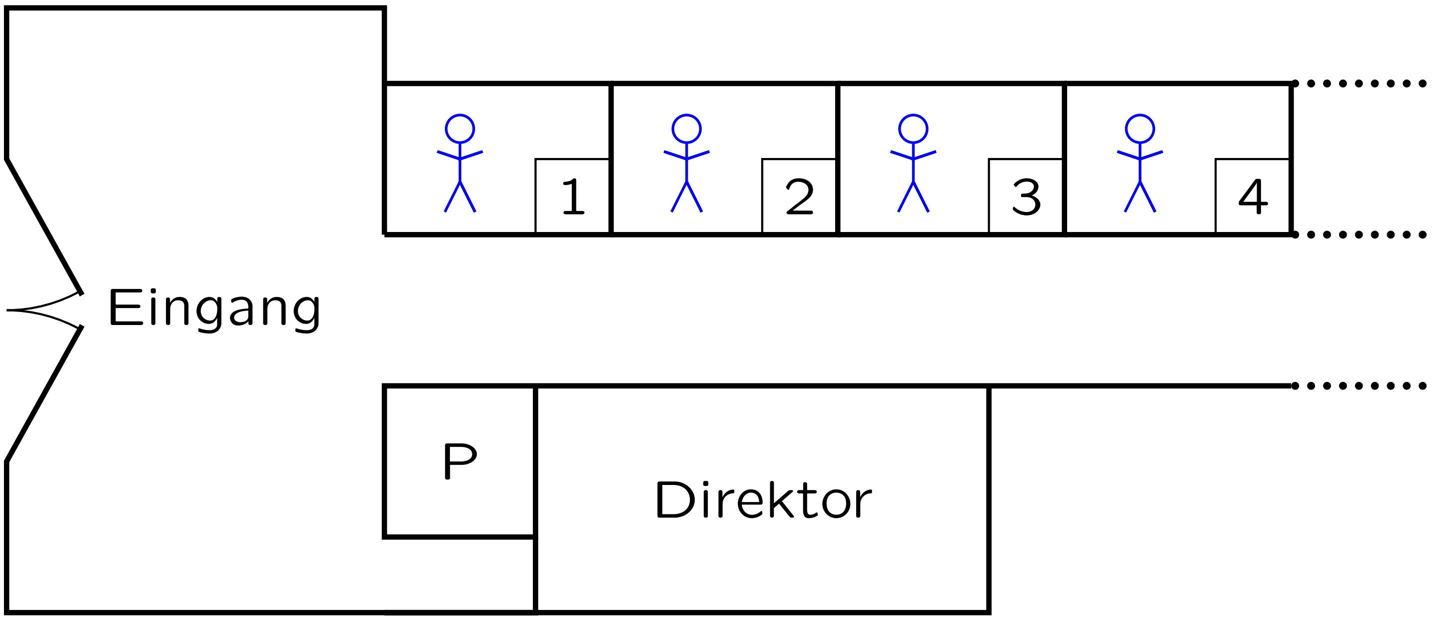


B
1
2
3
$\vdots$

Das Hilbertsche Hotel

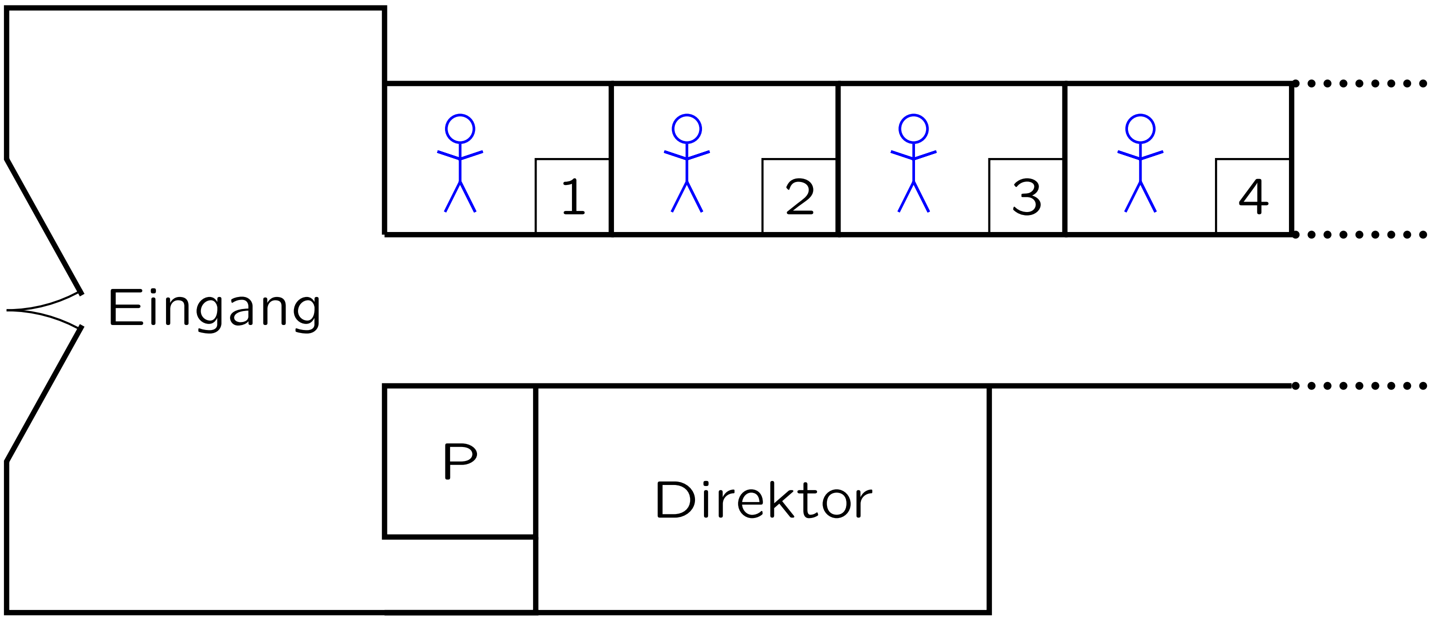


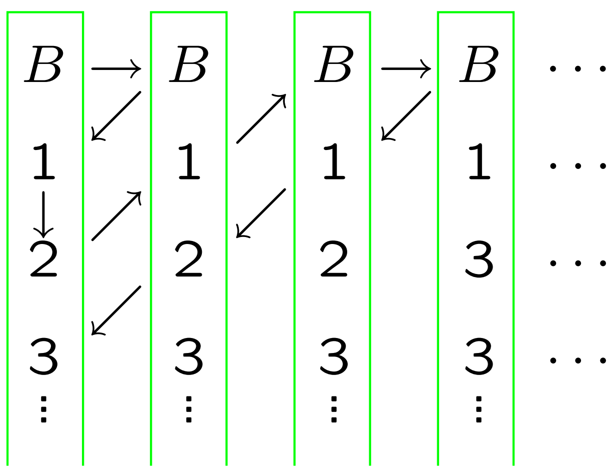
Das Hilbertsche Hotel



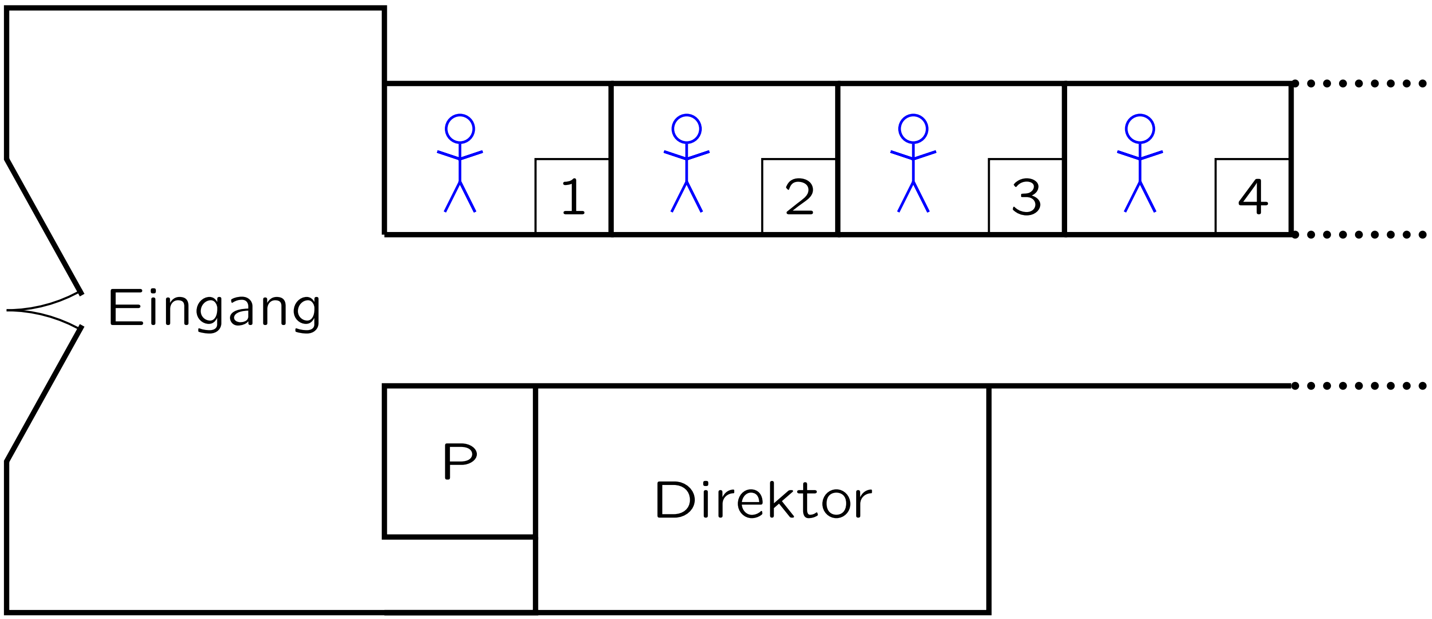
B	B	B	B	$\cdots$
1	1	1	1	$\cdots$
2	2	2	3	$\cdots$
3	3	3	3	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Das Hilbertsche Hotel



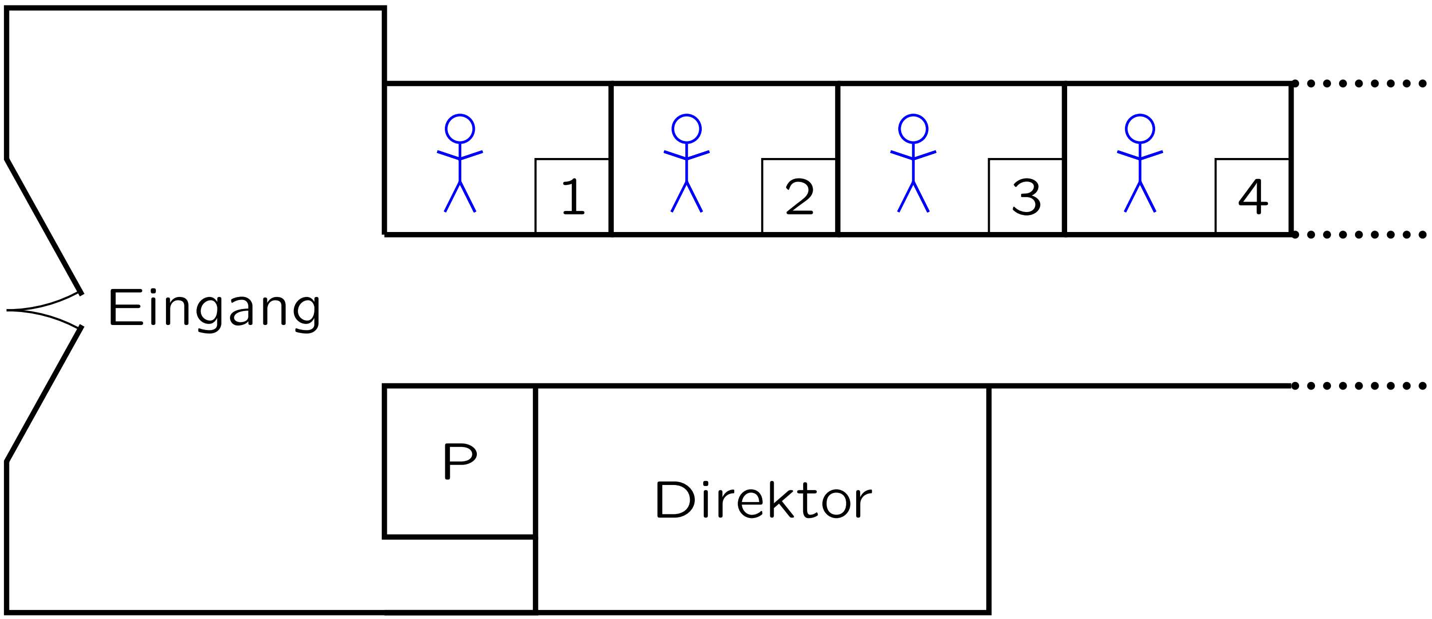


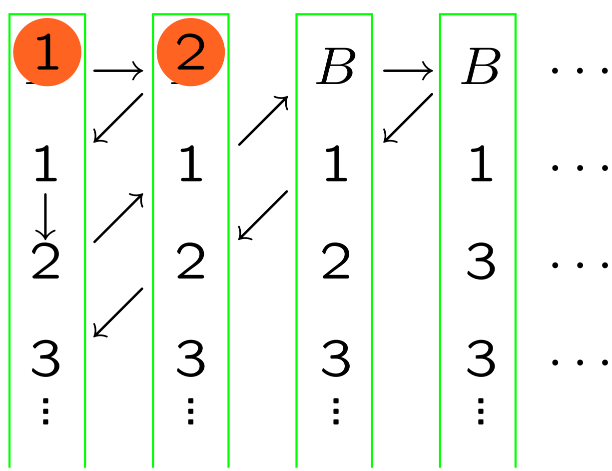
Das Hilbertsche Hotel



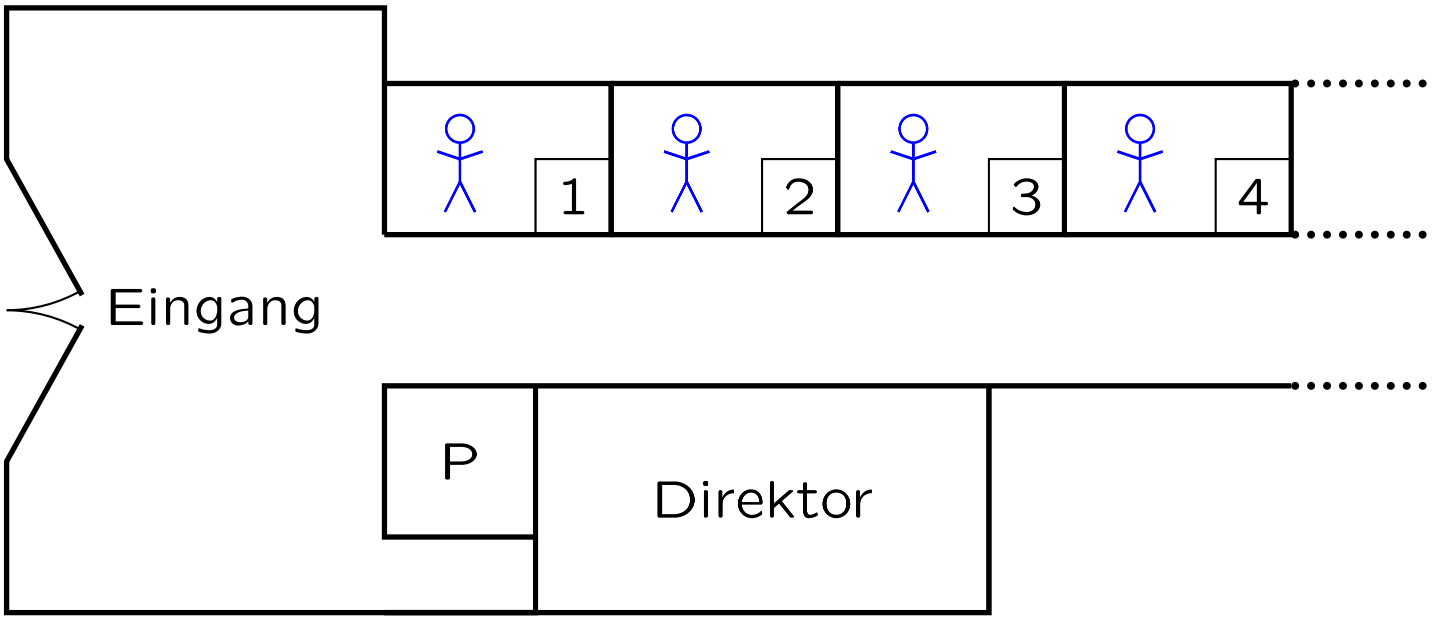
$$
\begin{array}{cccccccc}
1 & \longrightarrow & B & & B & \longrightarrow & B & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
1 & & 1 & & 1 & & 1 & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & \\
2 & & 2 & & 2 & & 3 & \cdots \\
 & \swarrow & & & & & & \\
3 & & 3 & & 3 & & 3 & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}
$$

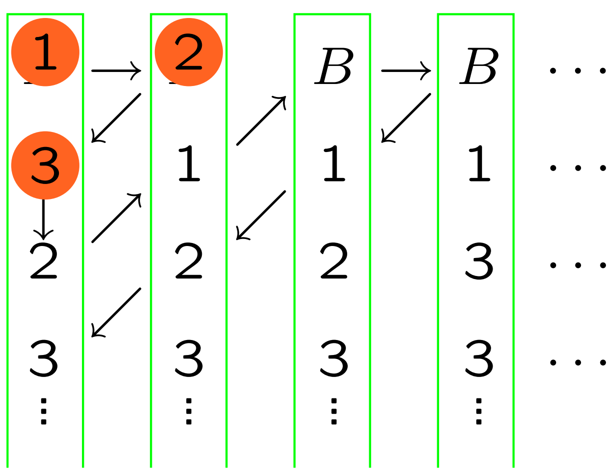
Das Hilbertsche Hotel



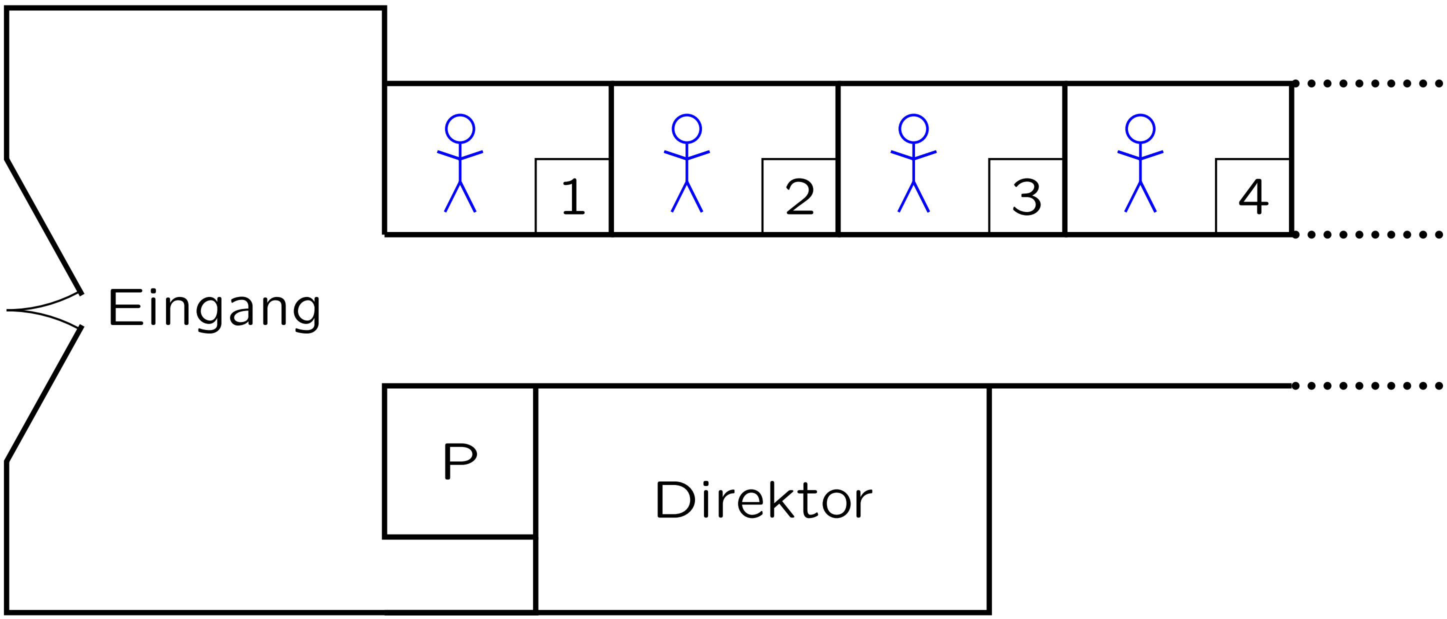


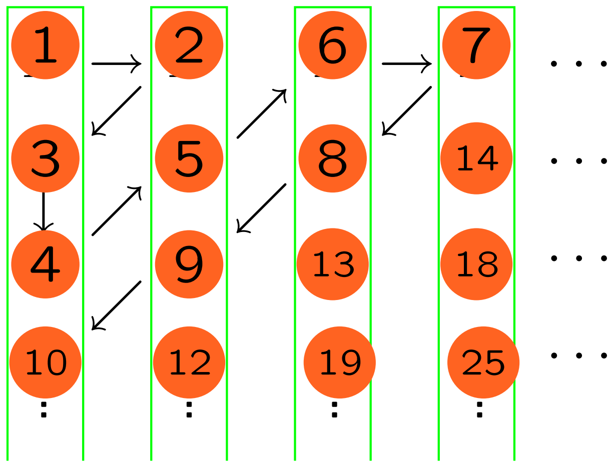
Das Hilbertsche Hotel



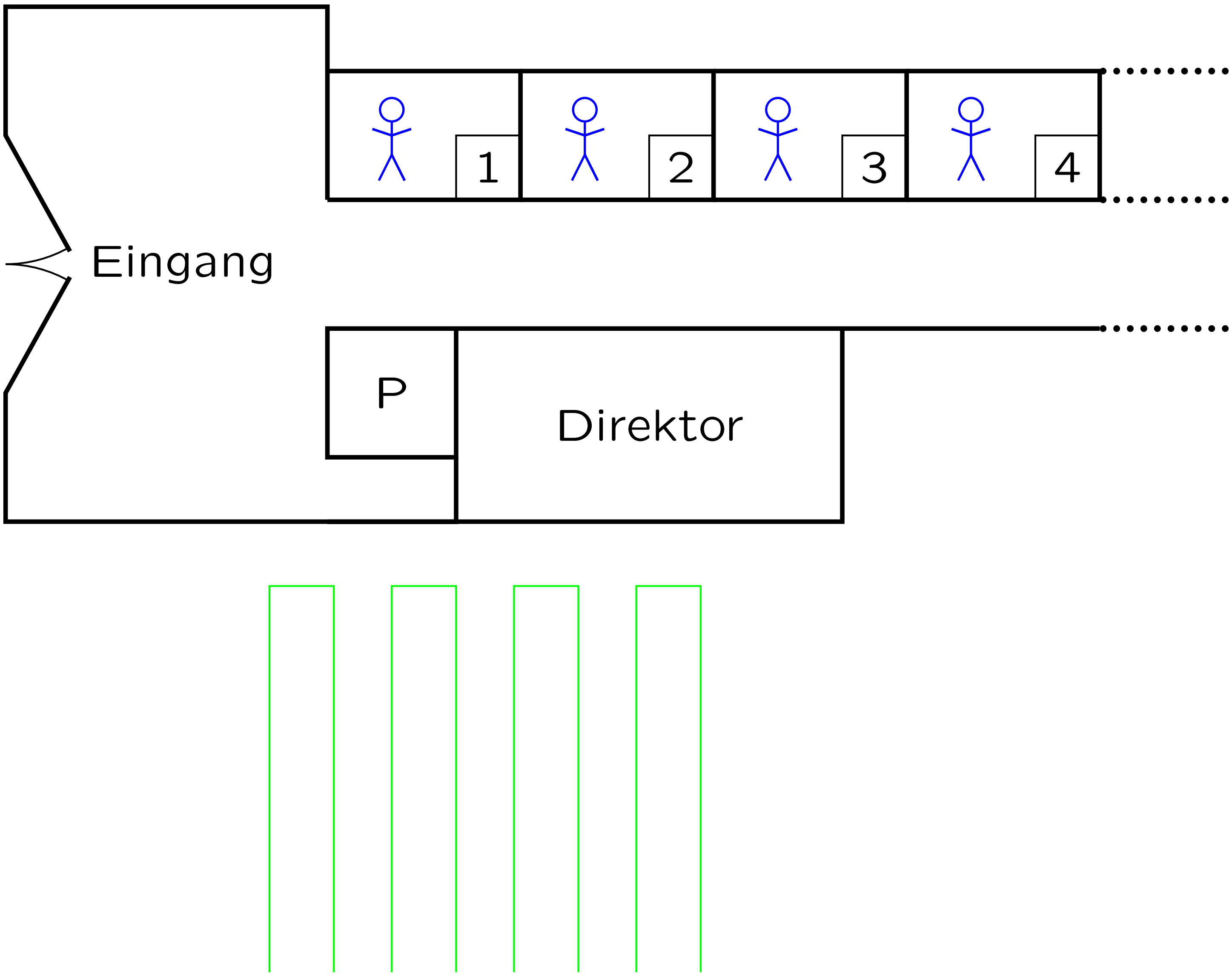


Das Hilbertsche Hotel

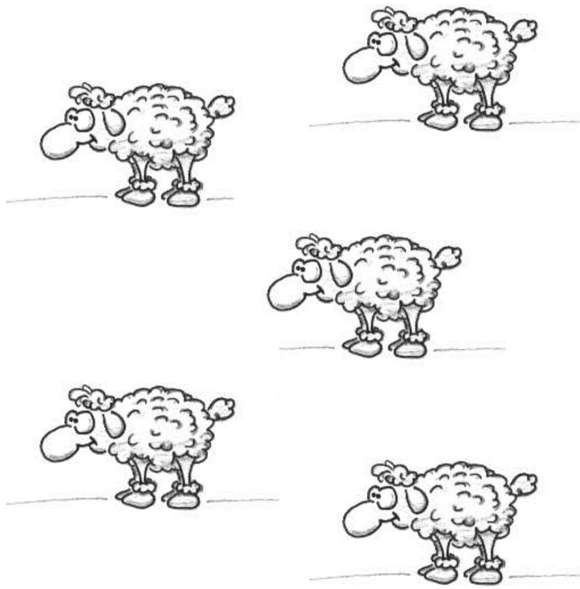




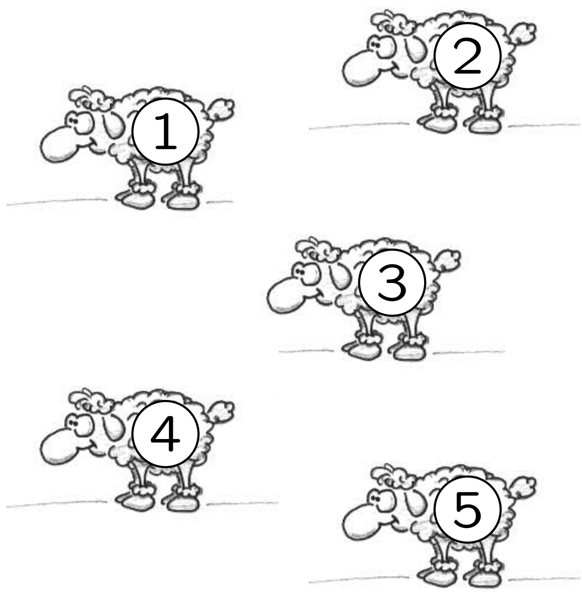
Das Hilbertsche Hotel



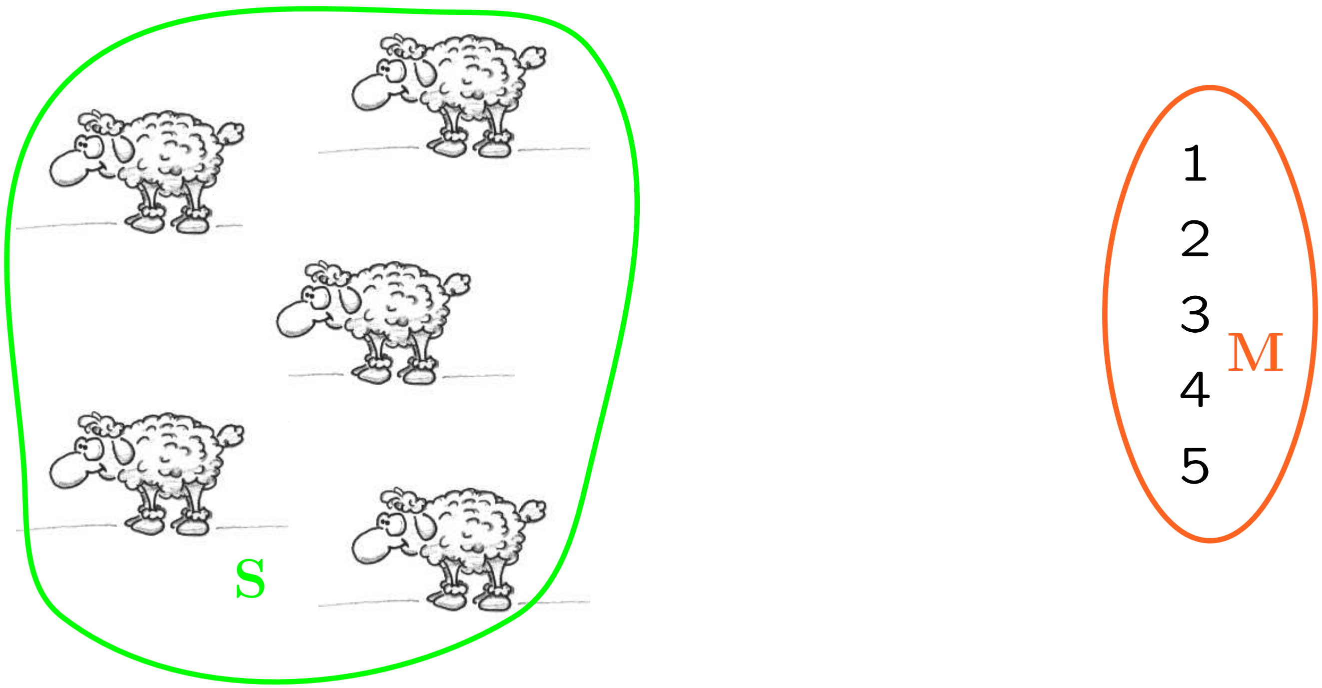
Was bedeutet „zählen“?



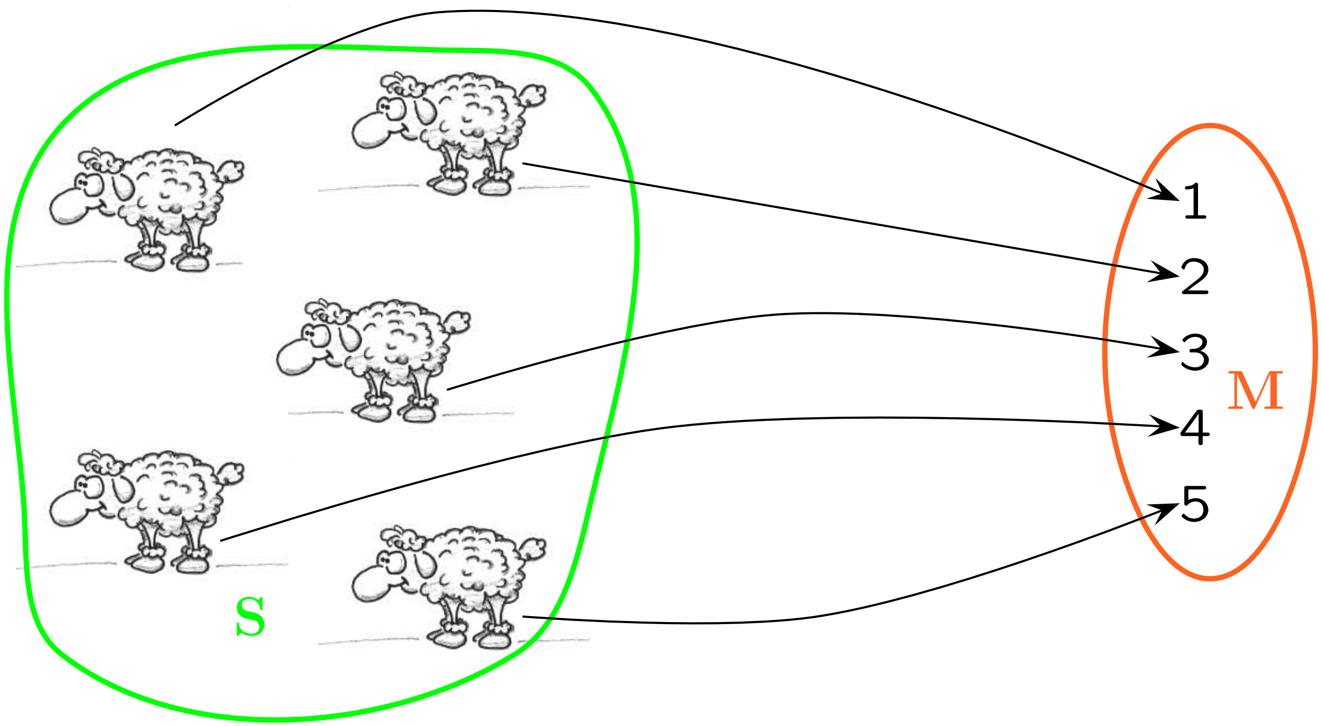
Was bedeutet „zählen“?



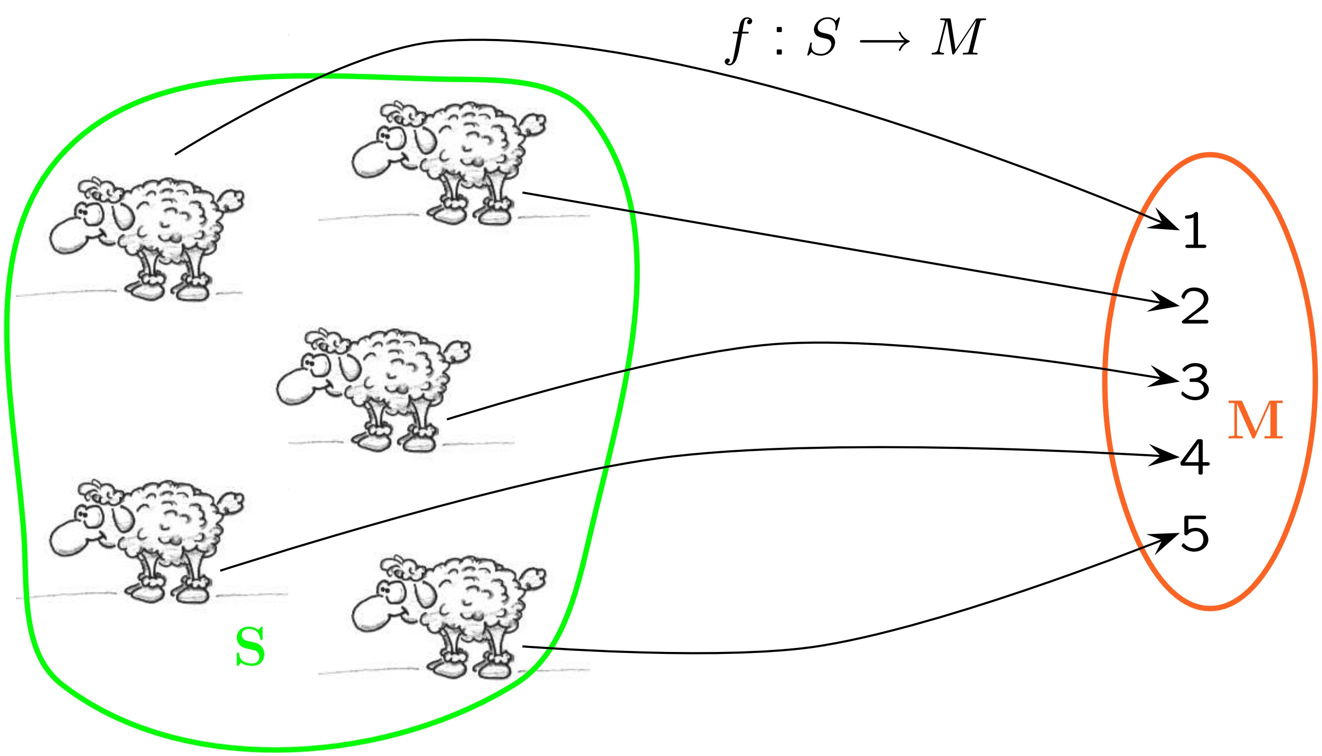
Was bedeutet „zählen“?



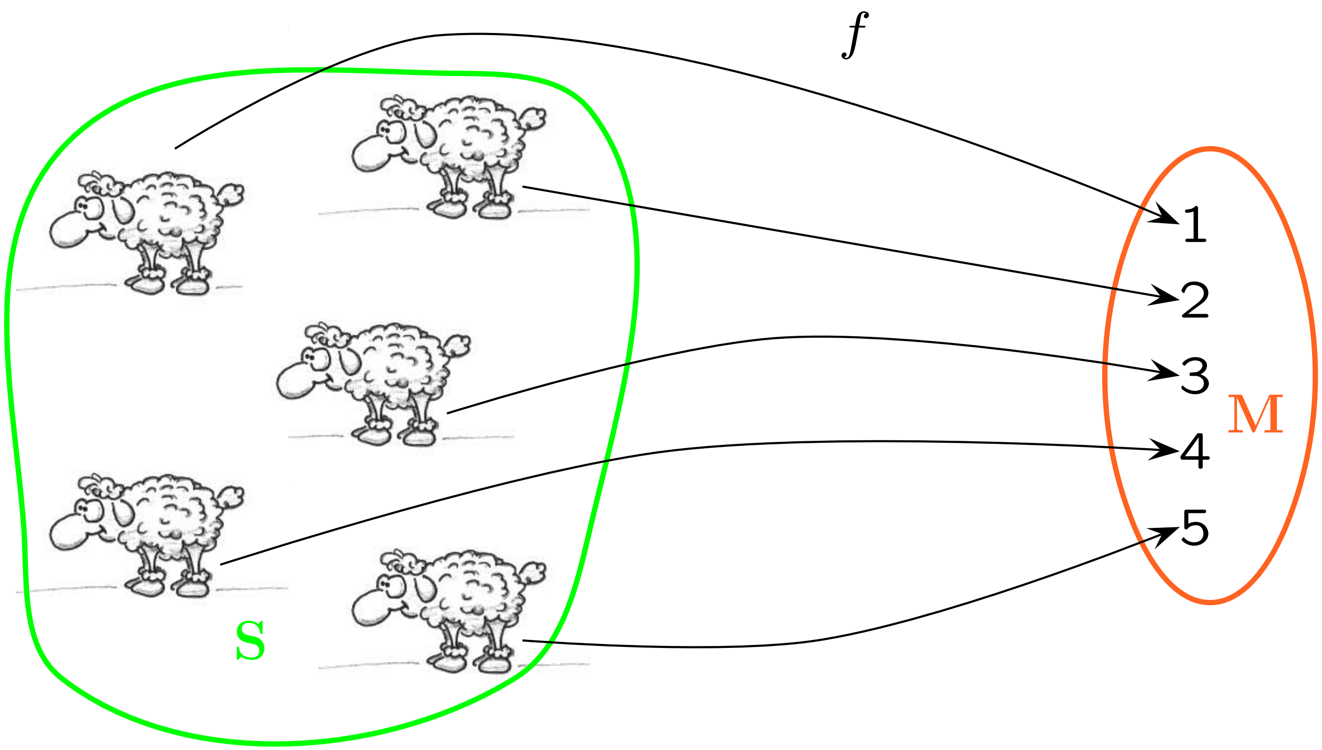
Was bedeutet „zählen“?



Was bedeutet „zählen“?



Was bedeutet „zählen“?



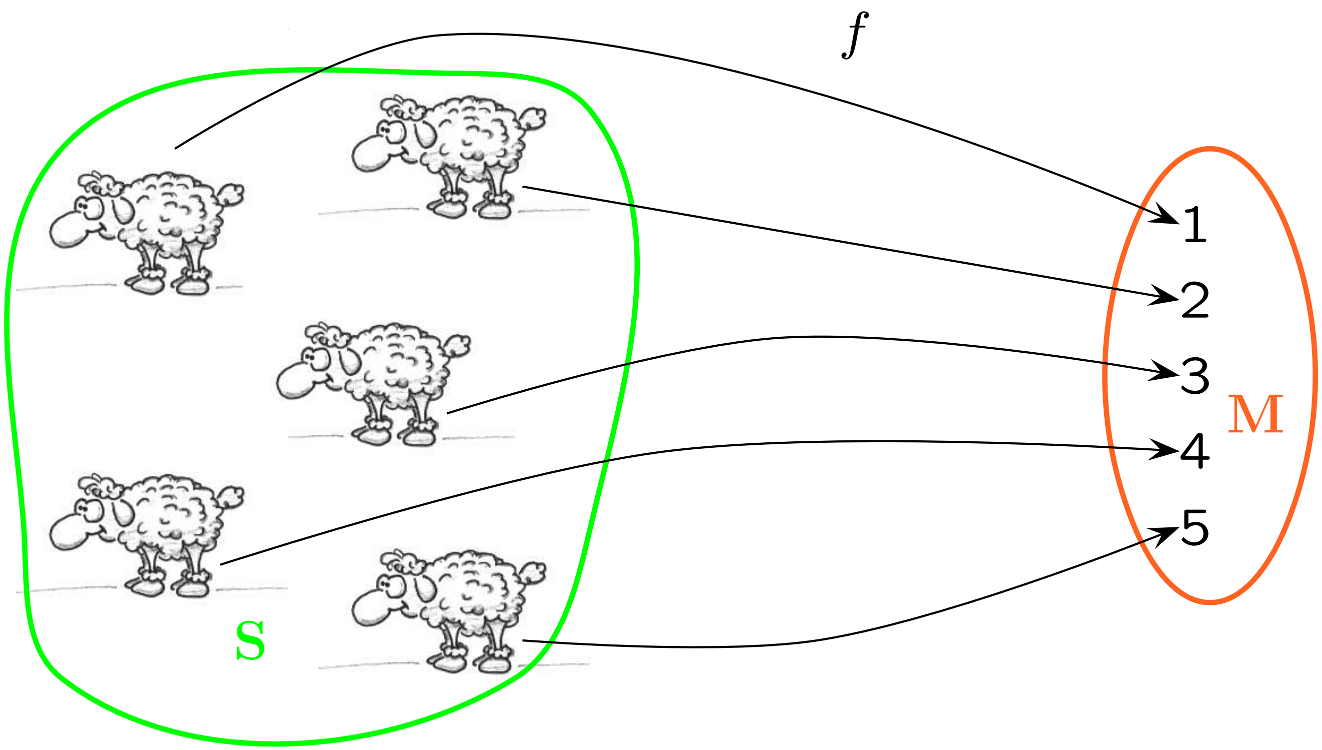
Die Abbildung $f : S \to M$ hat folgende Eigenschaften:

(i) Bei jedem Schaf geht genau ein Pfeil los.

(ii) Verschiedene Pfeile enden bei verschiedenen Zahlen.

(iii) Jede Zahl wird von (mindestens) einem Pfeil getroffen.

Was bedeutet „zählen“?



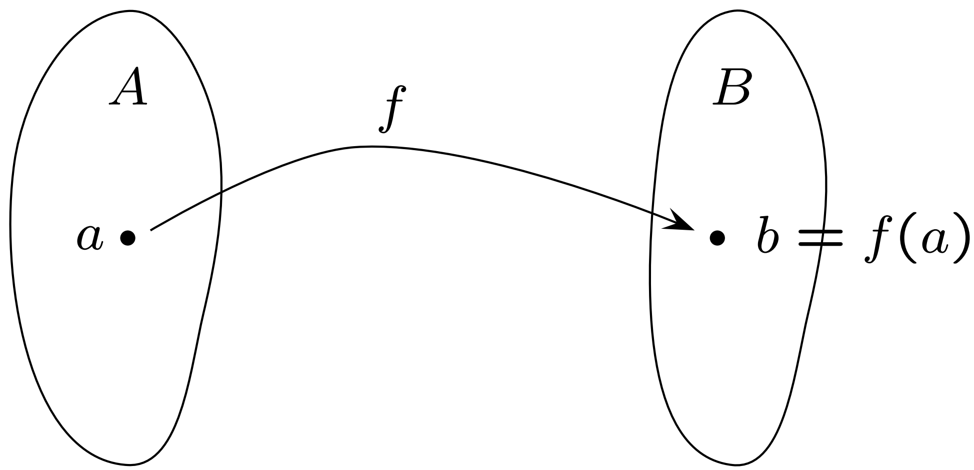
Die Abbildung $f : S \to M$ hat folgende Eigenschaften:

(i) Jedem $s \in S$ wird eine eindeutig gegebene Zahl $f(s) \in M$ zugeordnet.

(ii) Zu verschiedenen $s \in S$ gehören verschiedene $f(s) \in M$.

(iii) Zu jedem $m \in M$ gibt es (mindestens) ein $s \in S$, so dass $m = f(s)$.

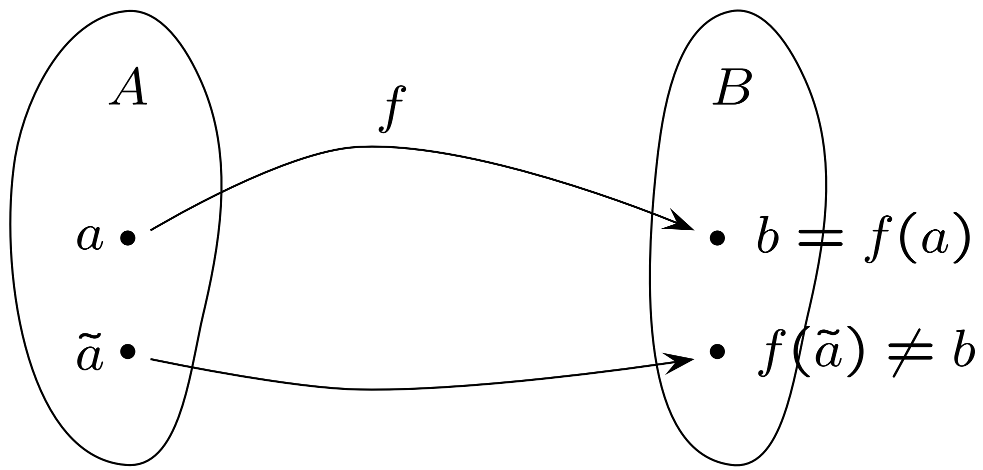
Mächtigkeit



Zwei Mengen A und B heißen **gleich mächtig**, wenn es eine Abbildung $f : A \to B$ gibt mit den Eigenschaften:

(i) Zu jedem $a \in A$ gehört ein eindeutig gegebenes $f(a) \in B$.

Mächtigkeit

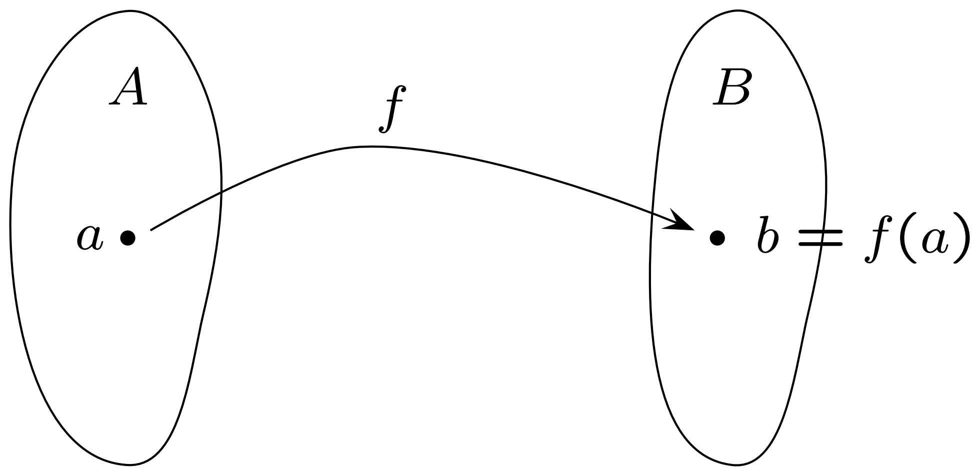


Zwei Mengen A und B heißen **gleich mächtig**, wenn es eine Abbildung $f : A \to B$ gibt mit den Eigenschaften:

(i) Zu jedem $a \in A$ gehört ein eindeutig gegebenes $f(a) \in B$.

(ii) Für $a, \tilde{a} \in A$ mit $a \neq \tilde{a}$ gilt $f(a) \neq f(\tilde{a})$.

Mächtigkeit



Zwei Mengen A und B heißen **gleich mächtig**, wenn es eine Abbildung $f : A \to B$ gibt mit den Eigenschaften:

(i) Zu jedem $a \in A$ gehört ein eindeutig gegebenes $f(a) \in B$.

(ii) Für $a, \tilde{a} \in A$ mit $a \neq \tilde{a}$ gilt $f(a) \neq f(\tilde{a})$.

(iii) Zu jedem $b \in B$ gibt es ein $a \in A$ mit $b = f(a)$.

Beispiel: Gleich mächtige Mengen

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

$$\mathbb{G} = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$$

Beispiel: Gleich mächtige Mengen

$$
\begin{array}{rcl}
\mathbb{N} & = & \{1, 2, 3, 4, \ldots\} \\
 & & \;\;\downarrow\;\;\downarrow\;\;\downarrow\;\;\downarrow \\
\mathbb{G} & = & \{2, 4, 6, 8, \ldots\}
\end{array}
\qquad f(n) = 2n
$$

Beispiel: Gleich mächtige Mengen

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{N} & = & \{1, 2, 3, 4, \ldots\} \\ & & \quad\downarrow\;\downarrow\;\downarrow\;\downarrow \\ \mathbb{G} & = & \{2, 4, 6, 8, \ldots\} \end{array} \qquad f(n) = 2n$$

(i) Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gehört ein eindeutig gegebenes $f(n) \in \mathbb{G}$.

Beispiel: Gleich mächtige Mengen

$$
\begin{array}{rcl}
\mathbb{N} & = & \{1, 2, 3, 4, \ldots\} \\
 & & \;\;\downarrow\;\downarrow\;\downarrow\;\downarrow \qquad\qquad f(n) = 2n \\
\mathbb{G} & = & \{2, 4, 6, 8, \ldots\}
\end{array}
$$

(i) Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gehört ein eindeutig gegebenes $f(n) \in \mathbb{G}$.

(ii) Für $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \neq m$ gilt $f(n) = 2n \neq 2m = f(m)$.

Beispiel: Gleich mächtige Mengen

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
\mathbb{N} = \{ & 1, \arrow[d] & 2, \arrow[d] & 3, \arrow[d] & 4, \arrow[d] & \ldots\} \\
\mathbb{G} = \{ & 2, & 4, & 6, & 8, & \ldots\}
\end{tikzcd}
\qquad f(n) = 2n
$$

(i) Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gehört ein eindeutig gegebenes $f(n) \in \mathbb{G}$.

(ii) Für $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \neq m$ gilt $f(n) = 2n \neq 2m = f(m)$.

(iii) Zu jedem $g \in \mathbb{G}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $g = f(n)$: $n = \dfrac{g}{2}$

Beispiel: Gleich mächtige Mengen

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{N} & = & \{1, 2, 3, 4, \ldots\} \\ & & \ \downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow \\ \mathbb{G} & = & \{2, 4, 6, 8, \ldots\} \end{array} \qquad f(n) = 2n$$

(i) Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gehört ein eindeutig gegebenes $f(n) \in \mathbb{G}$.

(ii) Für $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \neq m$ gilt $f(n) = 2n \neq 2m = f(m)$.

(iii) Zu jedem $g \in \mathbb{G}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $g = f(n)$: $n = \dfrac{g}{2}$

Also: $\mathbb{G}$ und $\mathbb{N}$ sind gleich mächtig.

Richard Dedekind (1831 – 1916): Eine Menge heißt unendlich, wenn sie zu einer echten Teilmenge von sich gleich mächtig ist.

Beispiel: $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$

Rationale Zahlen $\mathbb{Q} \; = \; \left\{ \frac{z}{n} : z \in \mathbb{Z},\; n \in \mathbb{N} \right\}$

Beispiel: $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$

Rationale Zahlen $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{z}{n} : z \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\}$

Georg Cantor
(1845 – 1918)

Beispiel: $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$

Cantorsches Diagonalverfahren:

$$
\begin{array}{ccccc}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots \\[2ex]
\frac{-1}{1} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{4} & \cdots \\[2ex]
\frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \cdots \\[2ex]
\frac{-2}{1} & \frac{-2}{2} & \frac{-2}{3} & \frac{-2}{4} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}
$$

Beispiel: $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$

Cantorsches Diagonalverfahren:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\frac{1}{1} & \longrightarrow & \frac{1}{2} & & \frac{1}{3} & \longrightarrow & \frac{1}{4} & & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & \\
\frac{-1}{1} & & \frac{-1}{2} & & \frac{-1}{3} & & \frac{-1}{4} & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & & \\
\frac{2}{1} & & \frac{2}{2} & & \frac{2}{3} & & \frac{2}{4} & & \cdots \\
 & \swarrow & & & & & & & \\
\frac{-2}{1} & & \frac{-2}{2} & & \frac{-2}{3} & & \frac{-2}{4} & & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}
$$

Beispiel: $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$

Cantorsches Diagonalverfahren:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\frac{1}{1}\ 1 & \longrightarrow & \frac{1}{2}\ 2 & & \frac{1}{3}\ 6 & \longrightarrow & \frac{1}{4}\ 7 & & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & \\
\frac{-1}{1}\ 3 & & \frac{-1}{2}\ 5 & & \frac{-1}{3}\ 8 & & \frac{-1}{4} & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & & \\
\frac{2}{1}\ 4 & & \frac{2}{2} & & \frac{2}{3} & & \frac{2}{4} & & \cdots \\
 & \swarrow & & & & & & & \\
\frac{-2}{1}\ 9 & & \frac{-2}{2} & & \frac{-2}{3} & & \frac{-2}{4} & & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}
$$

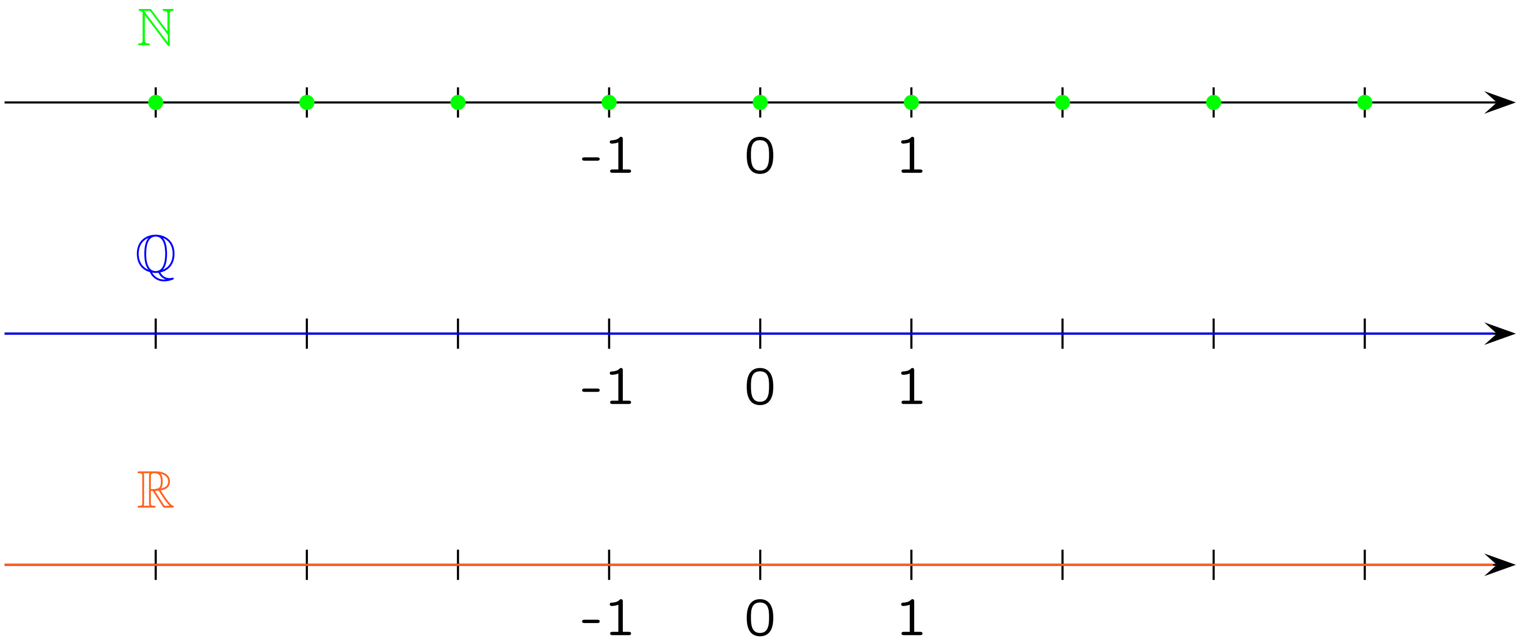
Beispiel: $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$

Cantorsches Diagonalverfahren:

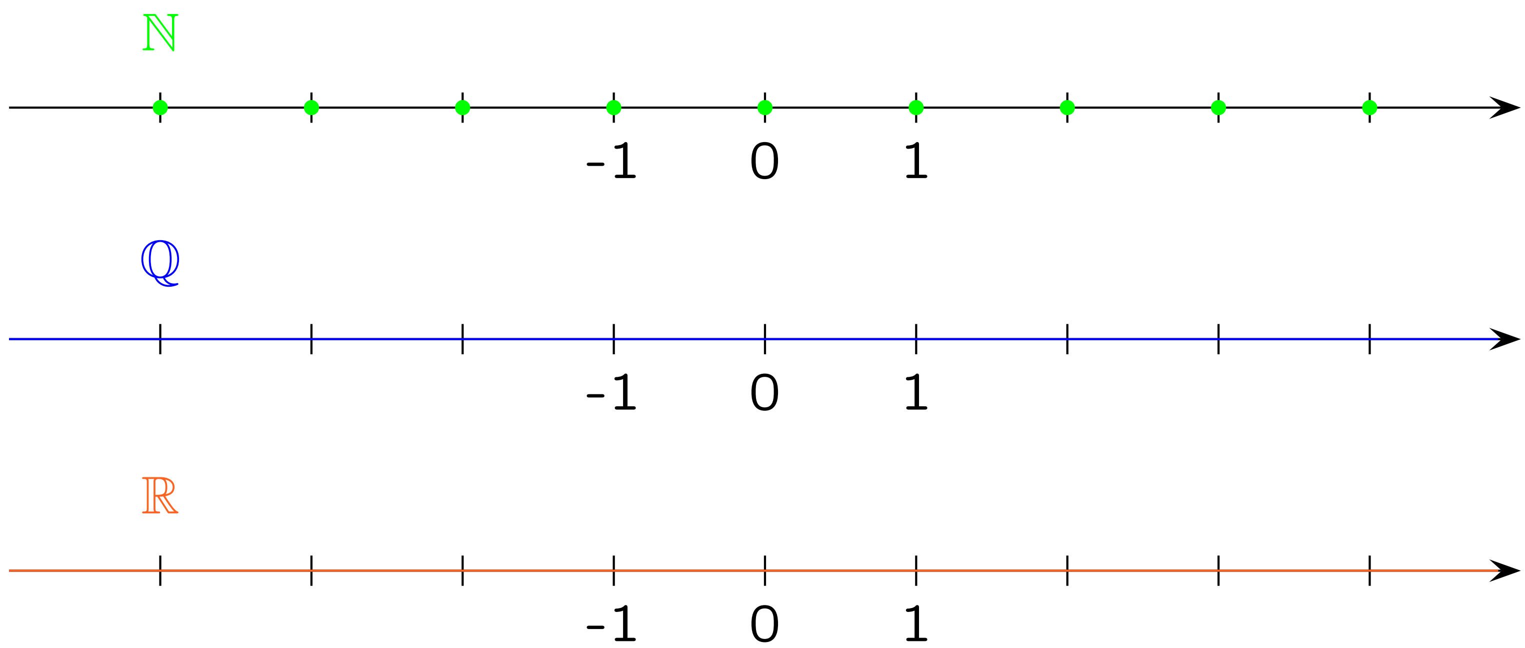
$$
\begin{array}{ccccccccc}
\frac{1}{1}\; 1 & \rightarrow & \frac{1}{2}\; 2 & & \frac{1}{3}\; 6 & \rightarrow & \frac{1}{4}\; 7 & & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & \\
\frac{-1}{1}\; 3 & & \frac{-1}{2}\; 5 & & \frac{-1}{3}\; 8 & & \frac{-1}{4} & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & & \\
\frac{2}{1}\; 4 & & \frac{2}{2} & & \frac{2}{3} & & \frac{2}{4} & & \cdots \\
 & \swarrow & & & & & & & \\
\frac{-2}{1}\; 9 & & \frac{-2}{2} & & \frac{-2}{3} & & \frac{-2}{4} & & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}
$$

Also: $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ sind gleich mächtig, $\mathbb{Q}$ ist abzählbar.

Beispiel: $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$



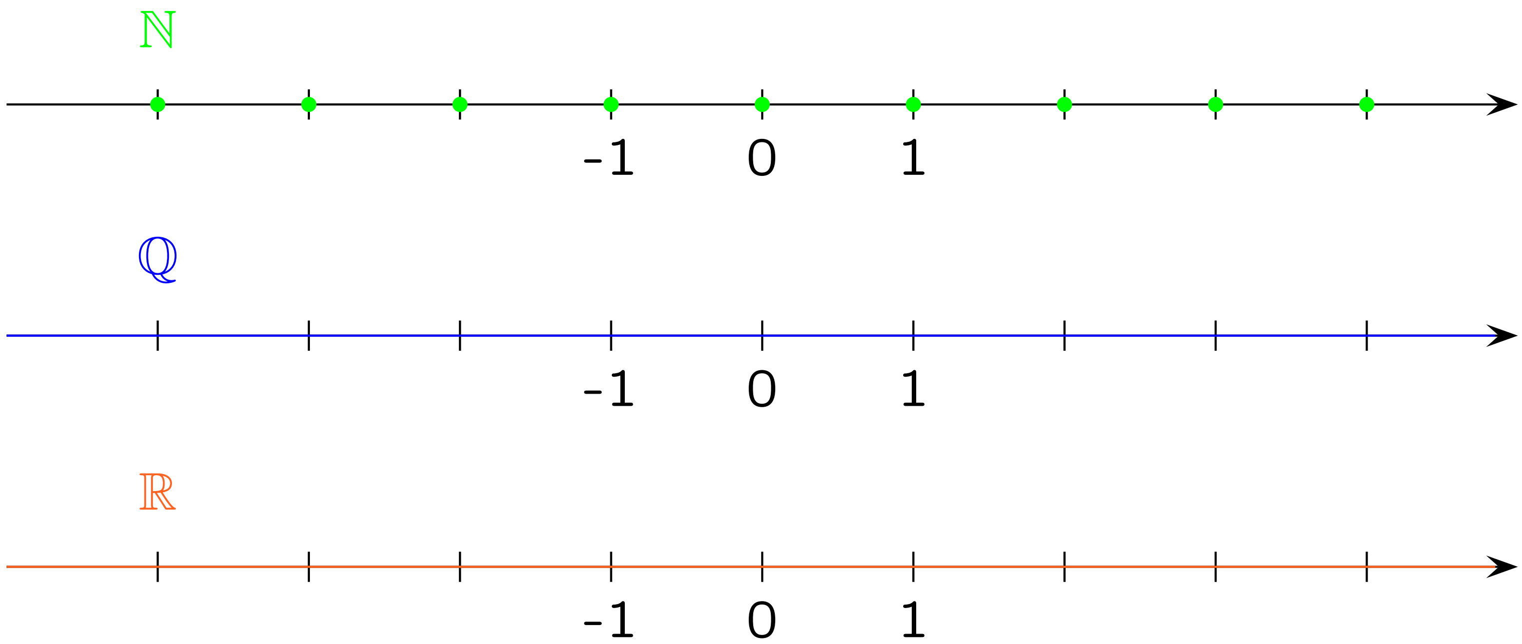
Beispiel: $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$



Typisches Beispiel für eine irrationale Zahl: $\sqrt{2} = 1,4142\ldots$

$$\mathbb{R} \;=\; \Big\{ m, a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, \ldots \;:\; m \in \mathbb{Z},\; a_j \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \Big\}$$

Beispiel: $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$



Typisches Beispiel für eine irrationale Zahl: $\sqrt{2} = 1,4142\ldots$

$$\mathbb{R} \;=\; \Big\{m, a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, \ldots \;:\; m \in \mathbb{Z},\;\; a_j \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}\Big\}$$

Satz: $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar, d.h. $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ sind nicht gleich mächtig.
Man sagt: $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

Beispiel: $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$

Annahme: $\mathbb{R}$ ist abzählbar, es gibt eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften:

(i) Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gehört ein eindeutig gegebenes $f(n) \in \mathbb{R}$.

(ii) Für $n, \tilde{n} \in \mathbb{N}$ mit $n \neq \tilde{n}$ gilt $f(n) \neq f(\tilde{n})$.

(iii) Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x = f(n)$.

Beispiel: $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$

Annahme: $\mathbb{R}$ ist abzählbar, es gibt eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften:

(iii) Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x = f(n)$.

Beispiel: $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$

Annahme: $\mathbb{R}$ ist abzählbar, es gibt eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften:

(iii) Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x = f(n)$.

Definiere $x \in \mathbb{R}$ so:

$$x \;=\; 0,a_1\,a_2\,a_3\,\ldots \quad \text{mit} \begin{cases} a_n = 0, & \text{falls } f(n) = b_0,b_1\,b_2\,\ldots \text{ und } b_n \neq 0 \\ a_n = 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel: $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$

Annahme: $\mathbb{R}$ ist abzählbar, es gibt eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften:

(iii) Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x = f(n)$.

Definiere $x \in \mathbb{R}$ so:

$$x = 0,a_1\,a_2\,a_3\,\ldots \quad \text{mit} \begin{cases} a_n = 0, & \text{falls } f(n) = b_0, b_1\,b_2\,\ldots \text{ und } b_n \neq 0 \\ a_n = 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt für beliebiges $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} x &= 0,a_1\,a_2\,a_3\,\ldots a_n\,\ldots \\ f(n) &= b_0,b_1\,b_2\,b_3\,\ldots b_n\,\ldots \end{aligned}$$

Beispiel: $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$

Annahme: $\mathbb{R}$ ist abzählbar, es gibt eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften:

(iii) Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x = f(n)$.

Definiere $x \in \mathbb{R}$ so:

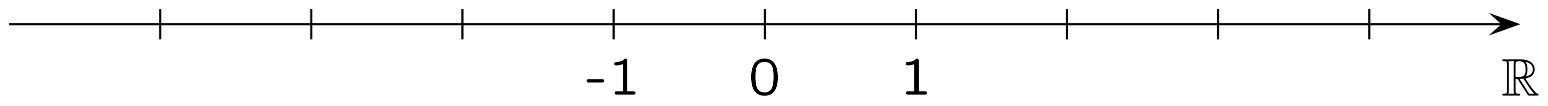
$$x \;=\; 0,a_1\,a_2\,a_3\,\ldots \quad \text{mit} \begin{cases} a_n = 0, & \text{falls } f(n) = b_0,b_1\,b_2\,\ldots \text{ und } b_n \neq 0 \\ a_n = 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt für beliebiges $n \in \mathbb{N}$:

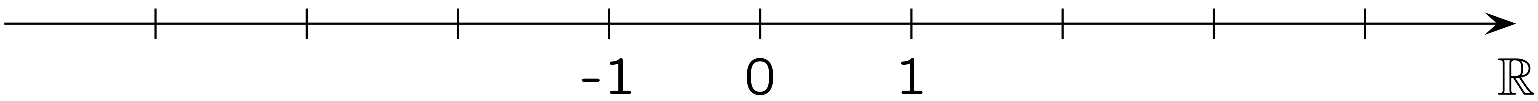
$$\begin{aligned} x &= 0,a_1\,a_2\,a_3\,\ldots a_n\,\ldots \\ f(n) &= b_0,b_1\,b_2\,b_3\,\ldots b_n\,\ldots \end{aligned}$$

also $x \neq f(n)$. Es gibt kein $n \in \mathbb{N}$ mit $f(n) = x$, Widerspruch.

Gibt es noch mehr verschieden mächtige Mengen?

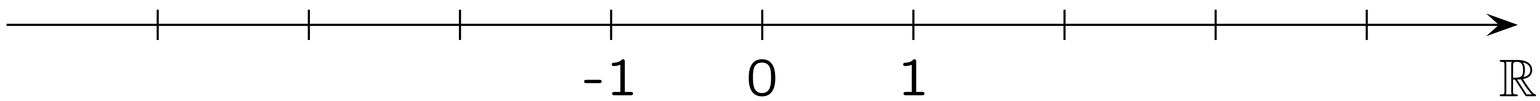


Gibt es noch mehr verschieden mächtige Mengen?



Kontinuumshypothese: Jede Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist entweder endlich oder gleich mächtig zu $\mathbb{N}$ oder gleich mächtig zum Kontinuum (d.h. zu $\mathbb{R}$).

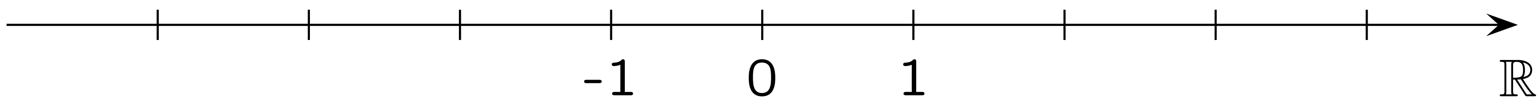
Gibt es noch mehr verschieden mächtige Mengen?



Kontinuumshypothese: Jede Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist entweder endlich oder gleich mächtig zu $\mathbb{N}$ oder gleich mächtig zum Kontinuum (d.h. zu $\mathbb{R}$).

1900: David Hilbert stellt auf dem zweiten Internationalen Mathematiker-Kongress eine Liste von 23 bis dahin ungelösten mathematischen Problemen vor. Problem 1: Beweis der Kontinuumshypothese.

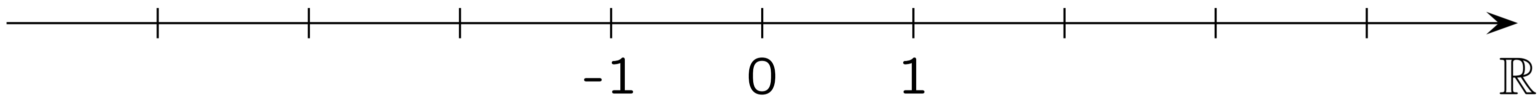
Gibt es noch mehr verschieden mächtige Mengen?



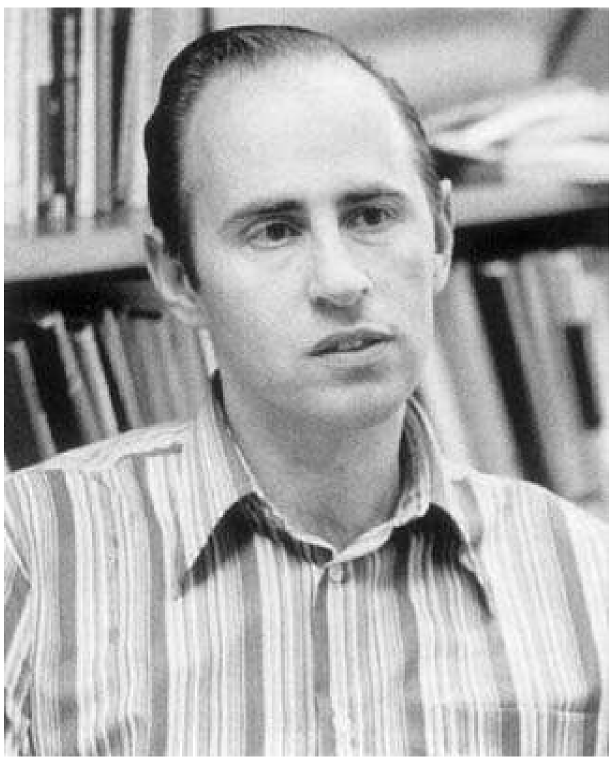
Kontinuumshypothese: Jede Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist entweder endlich oder gleich mächtig zu $\mathbb{N}$ oder gleich mächtig zum Kontinuum (d.h. zu $\mathbb{R}$).

1931: Kurt Gödel beweist, dass nicht alle mathematischen Aussagen beweisbar sind.

Gibt es noch mehr verschieden mächtige Mengen?



Kontinuumshypothese: Jede Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist entweder endlich oder gleich mächtig zu $\mathbb{N}$ oder gleich mächtig zum Kontinuum (d.h. zu $\mathbb{R}$).



1963: Paul Cohen beweist, dass im üblicherweise verwendeten Axiomensystem der Mathematik nicht entschieden werden kann, ob die Kontinuumshypothese wahr oder falsch ist.

Die Potenzmenge

Für eine Menge M ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ die Menge, die als Elemente alle Teilmengen von M enthält.

Die Potenzmenge

Für eine Menge M ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ die Menge, die als Elemente alle Teilmengen von M enthält.

Beispiel 1: $M = \{1\}$:

$$\mathcal{P}(M) = \Big\{\emptyset, \{1\}\Big\}$$

Die Potenzmenge

Für eine Menge M ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ die Menge, die als Elemente alle Teilmengen von M enthält.

Beispiel 1: $M = \{1\}$:

$$\mathcal{P}(M) = \left\{\emptyset, \{1\}\right\}$$

Beispiel 2: $M = \{1, 2\}$:

$$\mathcal{P}(M) = \left\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\right\}$$

Die Potenzmenge

Für eine Menge M ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ die Menge, die als Elemente alle Teilmengen von M enthält.

Beispiel 1: $M = \{1\}$:

$$\mathcal{P}(M) = \Big\{\emptyset, \{1\}\Big\}$$

Beispiel 2: $M = \{1, 2\}$:

$$\mathcal{P}(M) = \Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\Big\}$$

Beispiel 3: $M = \{1, 2, 3\}$:

$$\mathcal{P}(M) = \Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\Big\}$$

Die Potenzmenge

Für eine Menge M ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ die Menge, die als Elemente alle Teilmengen von M enthält.

Beispiel 1: $M = \{1\}$:

$$\mathcal{P}(M) = \Big\{\emptyset, \{1\}\Big\}$$

Beispiel 2: $M = \{1, 2\}$:

$$\mathcal{P}(M) = \Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\Big\}$$

Beispiel 3: $M = \{1, 2, 3\}$:

$$\mathcal{P}(M) = \Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\Big\}$$

Anzahl der Elemente von $\mathcal{P}(M)$: $\sharp\mathcal{P}(M) = 2^{\sharp M}$.

Mehr verschieden mächtige Mengen

Satz: Ist M eine Menge, so ist $\mathcal{P}(M)$ mächtiger als M.

Mehr verschieden mächtige Mengen

Satz: Ist M eine Menge, so ist $\mathcal{P}(M)$ mächtiger als M.

Anwendung: $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist mächtiger als $\mathbb{N}$ ($\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist gleich mächtig zu $\mathbb{R}$).

$\mathcal{P}(\mathbb{R})$ ist mächtiger als $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

$\mathcal{P}\Big(\mathcal{P}(\mathbb{R})\Big)$ ist noch mächtiger

$\vdots$

Mehr verschieden mächtige Mengen

Satz: Ist M eine Menge, so ist $\mathcal{P}(M)$ mächtiger als M.

Anwendung: $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist mächtiger als $\mathbb{N}$ ($\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist gleich mächtig zu $\mathbb{R}$).

$\mathcal{P}(\mathbb{R})$ ist mächtiger als $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

$\mathcal{P}\Big(\mathcal{P}(\mathbb{R})\Big)$ ist noch mächtiger

$\vdots$

Verallgemeinerte Kontinuumshypothese: Ist M eine unendliche Menge, so gibt es zwischen der Mächtigkeit von M und von $\mathcal{P}(M)$ keine weitere.