Spektrale Eigenschaften der linearen Elastizitätstheorie in Wellenleitern

Peter H. Lesky Universität Stuttgart

Dresden

19. September 2000

Lineare Wellengleichungen

$u : [0, \infty) \to \mathcal{H} := L_2(\Omega)$

$$u''(t) + A\,u(t) \;=\; f\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

$$u(0) = u'(0) = 0$$

A : selbstadjungiert, positiv in $\mathcal{H}$,

$\omega \geq 0,\; f \in \mathcal{H}$.

Lösung

$\{P_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$: Spektralschar

$$u(t) \;=\; \int_0^\infty \psi(t,\lambda)\, d_\lambda(P_\lambda f)$$

$$|\psi(t,\lambda)| \;\le\; \frac{c}{\delta} \qquad \text{für } t \ge 0,$$

$$\text{falls } |\lambda-\omega^2| \ge \delta,\; |\lambda| \ge \delta$$

$$\psi(t,\omega^2) \;=\; \frac{\mathrm{i}}{2\omega}\left(t\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} - \frac{1}{\omega}\sin\omega t\right)$$

Verhalten für $t \to \infty$

Voraussetzung: $P_\mu f = \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{dP_\lambda f}{d\lambda}\, d\lambda$ mit $\mu_0 > 0$

1) $\frac{dP_\lambda f}{d\lambda} - \frac{dP_\lambda f}{d\lambda}\Big|_{\lambda=\omega^2} \sim \left|\lambda - \omega^2\right|^\alpha, \quad \alpha > 0$

$\Rightarrow u(t) \sim \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\, u_\omega$

2) $\frac{dP_\lambda f}{d\lambda} \sim \frac{1}{\left|\lambda - \omega^2\right|^\alpha}, \qquad \alpha \in (0,1)$

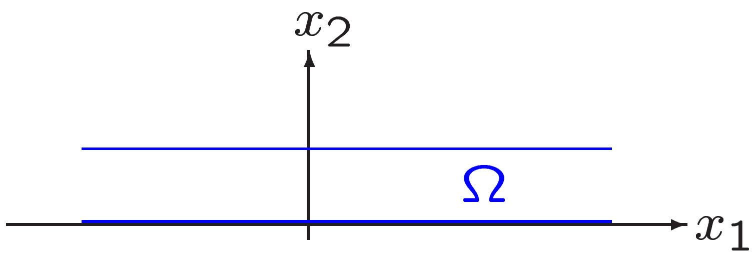
$\Rightarrow u(t) \sim \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\, t^\alpha\, u_\omega$

3) $\frac{dP_\lambda f}{d\lambda}$ hat endlichen Sprung bei $\lambda = \omega^2$

$\Rightarrow u(t) \sim \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \ln t \cdot u_\omega$

Streifengebiete

$\Omega = \mathbb{R} \times (0,1)$



$A =$ selbstadjungierter Diff.operator in $L_2(\Omega)$.

Fouriertransformation bzgl. x_1

$\curvearrowright$ $\widehat{A}(\xi)$ Schar selbstadj. Operat. in $L_2(0,1)$

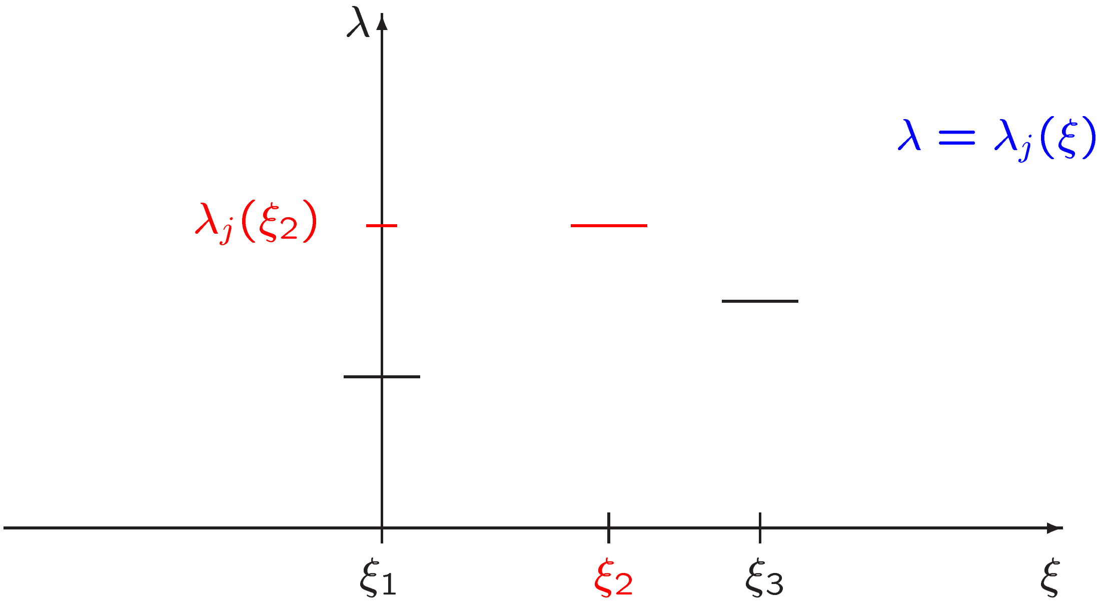
$\lambda_j(\xi)$ Eigenwerte,

$v_j(\xi)$ vollst. System von Eigenfunktionen

λ_j, v_j analytisch in ξ,

$\lambda_j(\xi) \to \infty$ für $\xi \to \pm\infty$

Kritische Punkte



$$\lambda_j(\xi) \;=\; \lambda_j(\xi_2) + c(\xi-\xi_2)^k + O(|\xi-\xi_2|^{k+1})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dP_\lambda f}{d\lambda} \sim \frac{1}{|\lambda - \lambda_j(\xi_2)|^{1-1/k}}$$

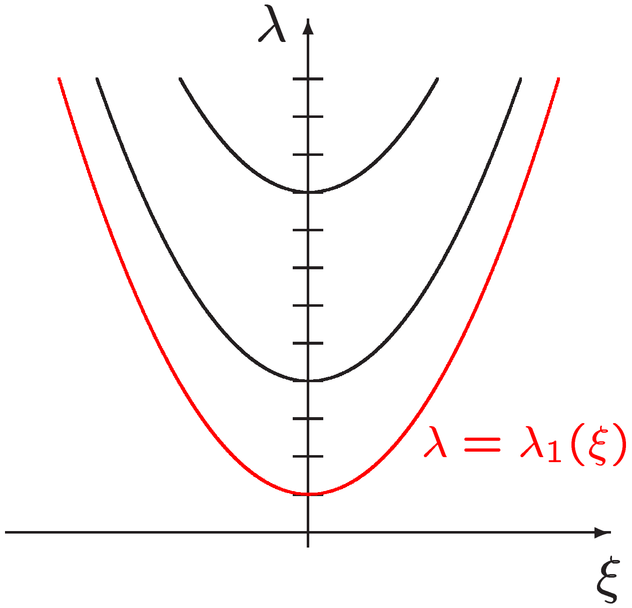
Laplaceoperator

$A = -\Delta = -\partial_1^2 - \partial_2^2$, Dirichlet-Randbedingung

selbstadjungiert in $L_2(\mathbb{R} \times (0,1))$

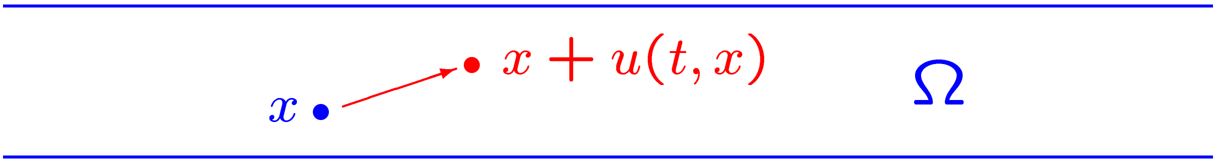
$\widehat{A}(\xi) = \xi^2 - \partial_2^2$

$\lambda_j(\xi) = j^2\pi^2 + \xi^2$



$\sigma(A) = [\pi^2, \infty)$, $\qquad \dfrac{dP_\lambda f}{d\lambda} \sim \dfrac{1}{|\lambda - j^2\pi^2|^{1-1/2}}$

Elastizitätstheorie



$u(t,x)$: Verschiebungsvektor

$f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$: zeitperiodische Kraft

$$
\begin{aligned}
\partial_t^2 u(t,x) - (\Delta + c_0\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div})u(t,x) & \\
&= f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} && \text{in } \Omega \\
u(t,x) &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \\
u(0,x) = \partial_t u(0,x) &= 0 && \text{in } \Omega
\end{aligned}
$$

$c_0 = 1 + \frac{\lambda}{\mu}$, λ, μ: Lamé-Konstanten

Dispersionsrelation

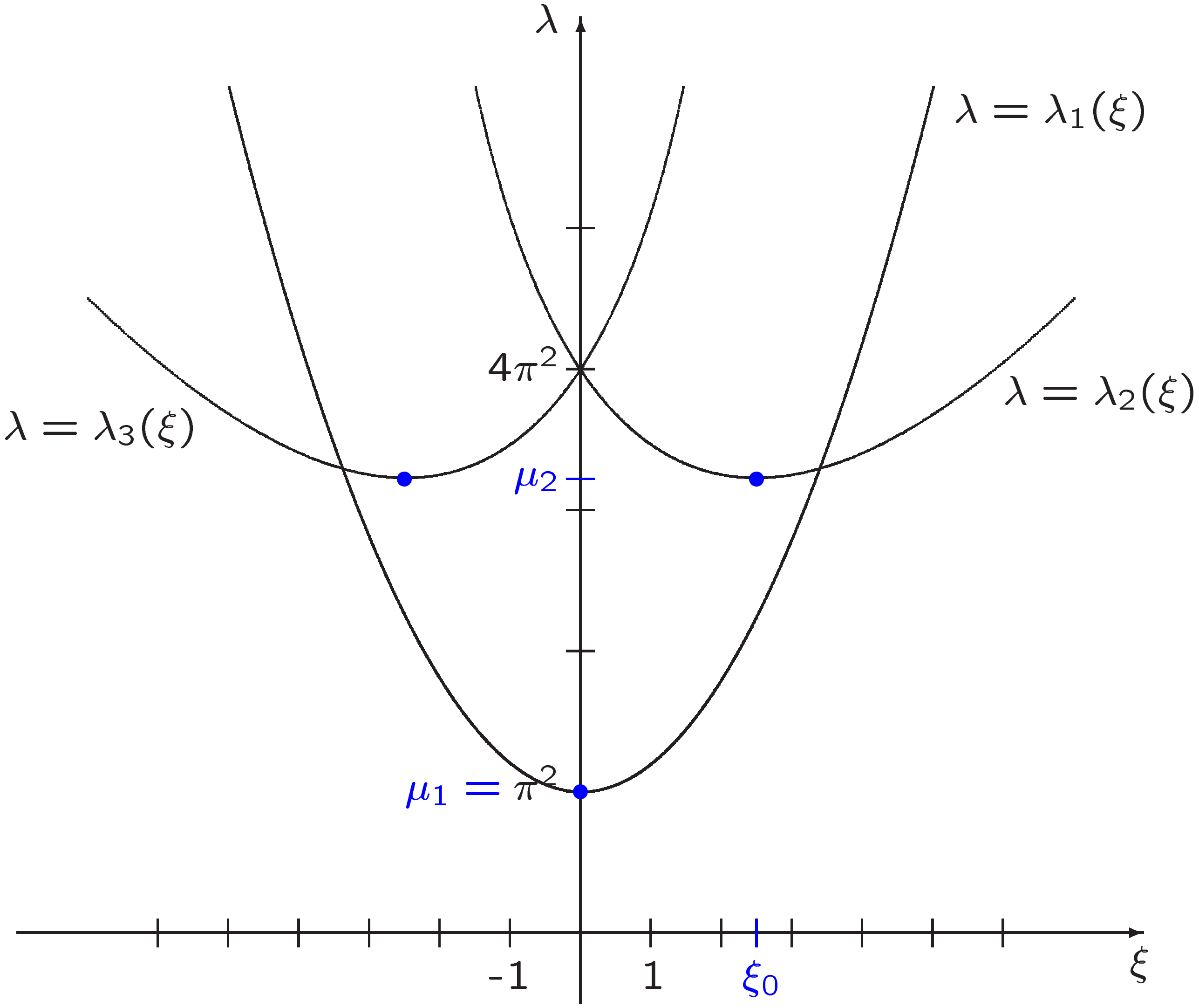
$\lambda \in \mathbb{R}$ ist Eigenwert von $A(\xi)$ $\quad\Leftrightarrow$

$$0 \;=\; 2\xi^2 \left(1 - \cos\sqrt{\lambda - \xi^2} \cdot \cos\sqrt{\frac{\lambda}{1 + c_0} - \xi^2}\right)$$

$$+ \left(\xi^4 + (\xi^2 - \lambda)\left(\xi^2 - \frac{\lambda}{1 + c_0}\right)\right)$$

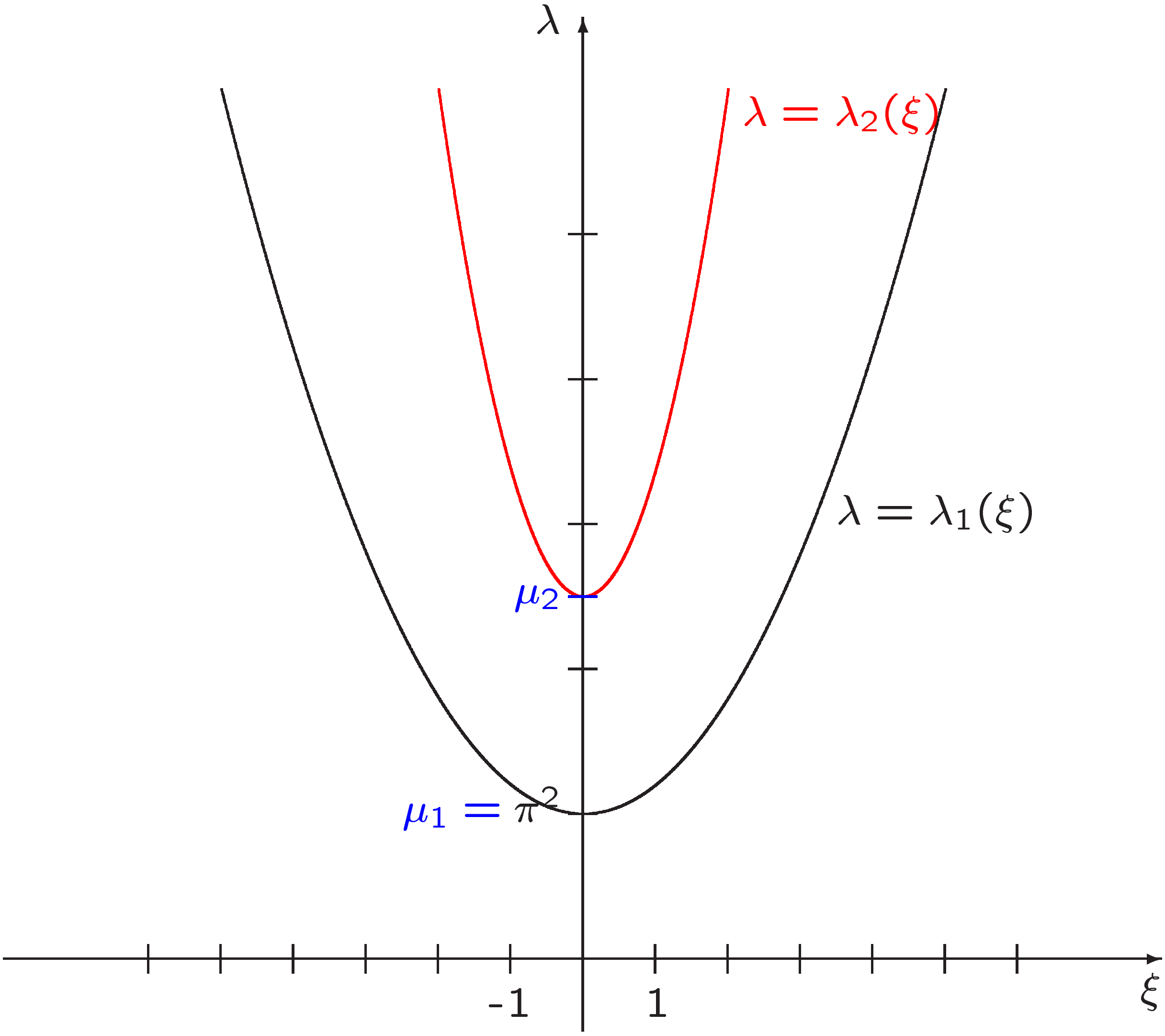
$$\cdot \frac{\sin\sqrt{\lambda - \xi^2} \cdot \sin\sqrt{\frac{\lambda}{1+c_0} - \xi^2}}{\sqrt{\lambda - \xi^2}\,\sqrt{\frac{\lambda}{1+c_0} - \xi^2}}$$

Der Fall $c_0 = 3$



$$\sigma(A) = [\pi^2, \infty), \qquad \frac{dP_\lambda f}{d\lambda} \sim \frac{1}{|\lambda - \mu_j|^{1-1/2}}$$

Der Fall $c_0 = 1,450...$



$$\sigma(A) = [\pi^2, \infty), \qquad \frac{dP_\lambda f}{d\lambda} \sim \frac{1}{|\lambda - \mu_2|^{1-1/4}}$$

Offene Fragen

1. Treten andersgeartete kritische Punkte auf? Genaue Aussagen für höhere Werte von λ

2. Genaue Aussagen im Fall $\Omega = \mathbb{R} \times D$ mit beschränktem $D \subseteq \mathbb{R}^2$

3. Anwendungen auf andere Probleme