SoSe 2024

Universität Stuttgart
PD. Dr. P. H. Lesky

Funktionen

Inhaltsverzeichnis

1 Polynome

1.1 Definition: Ein **Polynom** ist eine Funktion

$$P : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

mit den **Koeffizienten** $a_k \in \mathbb{C}$. Falls $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, heißt das Polynom **reell**. Ist $a_n \neq 0$, so heißt n der **Grad** des Polynoms: $\deg(P) = n$. Für das Nullpolynom $\deg(0) := -\infty$. Man schreibt

$$\mathbb{C}[x] := \text{Menge der Polynome}, \quad \mathbb{R}[x] := \text{Menge der reellen Polnome.}$$

1.2 Satz: Zwei Polynome sind genau dann gleich, wenn ihre Koeffizienten übereinstimmen.

Beweis: Annahme $p = q$ und nicht alle Koeffizienten sind gleich, d.h. $P(x) - Q(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ mit $a_n \neq 0$. Dann folgt

$$0 \;=\; \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^n}\big(P(x) - Q(x)\big) \;=\; \lim_{x\to\infty}(a_n + \ldots) \;=\; a_n \quad \lightning$$

$\square$

1.3 Definition: **1)** Durch

$$\begin{aligned} (P+Q)(x) &:= P(x) + Q(x) && \text{für } P, Q \in \mathbb{C}[x], \\ (\lambda \cdot P)(x) &:= \lambda P(x) && \text{für } P \in \mathbb{C}[x],\ \lambda \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

wird $\mathbb{C}[x]$ bzw. $\mathbb{R}[x]$ zu einem Vektorraum über $\mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{R}$.

2) Durch $(P \cdot Q)(x) := P(x) \cdot Q(x)$ für $P, Q \in \mathbb{C}[x]$ wird auf $\mathbb{C}[x]$ eine assoziative und kommutative Multiplikation definiert, für die

$$\begin{aligned} (P+Q) \cdot R &= P \cdot R + Q \cdot R \\ \lambda \cdot (P \cdot Q) &= (\lambda \cdot P) \cdot Q \;=\; P \cdot (\lambda \cdot Q) \end{aligned}$$

gilt. Dadurch werden $\mathbb{C}[x]$ bzw. $\mathbb{R}[x]$ zu einer kommutativen assoziativen Algebra.

1.4 Satz: Für $P, Q \in \mathbb{C}[x]$ gelten

1) $\deg(P+Q) \leq \max\big\{\deg(P), \deg(Q)\big\}$,

2) $\deg(P \cdot Q) = \deg(P) + \deg(Q)$,
insbesondere gilt der Satz vom Nullprodukt: $P \cdot Q = 0 \Rightarrow P = 0 \ \vee Q = 0$.

Beweis durch Nachrechnen.

1.5 Satz (Division mit Rest): Seien $P, Q \in \mathbb{C}[x]$ und $Q \neq 0$, $\deg(Q) \leq \deg(P)$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome $S, R \in \mathbb{C}[x]$, so dass

$$P = S \cdot Q + R \quad \text{mit} \quad \deg(R) < \deg(Q).$$

Gilt für den **Rest** $R = 0$, so heißt P durch Q **teilbar**.

Beweis: Übungen

1.6 Satz: **1)** Sei $P \in \mathbb{C}[x]$ mit $\deg(P) \geq 1$. Dann gelten

a) $P(\lambda) = 0 \;\Leftrightarrow\; P(x) = (x-\lambda)\cdot S(x)$ mit $S \in \mathbb{C}[x]$, $\deg(S) = \deg(P) - 1$.

b) P hat höchstens $\deg(P)$ Nullstellen.

2) Sind $x_1, \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden, $P, Q \in \mathbb{C}[x]$, $\deg(P), \deg(Q) \leq n$ und $Q(x_j) = P(x_j)$ für $j = 1, \ldots, n+1$, dann folgt $P = Q$ (Identitätssatz).

Beweis: Übungen

1.7 Fundamentalsatz der Algebra: Ist $P \in \mathbb{C}[x]$ mit $\deg(P) \geq 1$, so besitzt P mindestens eine Nullstelle $\lambda \in \mathbb{C}$.

Beweis: Sei $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$, $a_n \neq 0$, $n \geq 1$.

1) Zeige: $\exists r > 0\ \forall x \in \mathbb{C}, |x| \geq r : \big|P(x)\big| \geq \big|P(0)\big|$.

$$\begin{aligned}
\big|P(x)\big| &= |x|^n \cdot \Big|a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{k-n}\Big| \quad \text{für } x \neq 0 \\
&\geq |x|^n \cdot \Big(|a_n| - \Big|\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{k-n}\Big|\Big) \\
&\geq |x|^n \cdot \Big(|a_n| - \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \cdot |x|^{k-n}}_{\to 0 \text{ für } |x|\to\infty}\Big) \\
&\geq |x|^n |a_n| \cdot \frac{1}{2} \quad \text{für } |x| \geq r_1 \\
&\geq \big|P(0)\big| \quad \text{für } |x| \geq r_2
\end{aligned}$$

$\Rightarrow\ \big|P(x)\big| \ \geq\ \big|P(0)\big|$ für $|x| \geq r := \max\{r_1, r_2\}$.

2) Zeige: $\exists x_0 \in \mathbb{C} : \big|P(x_0)\big| = \min\limits_{x\in\mathbb{C}} \big|P(x)\big|$.

Sei $r > 0$ aus 1). Die abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{B_r(0)}$ ist kompakt, und $x \mapsto \big|P(x)\big|$ ist stetig

$$\Rightarrow\ \exists x_0 \in \overline{B_r(0)} : \big|P(x_0)\big| = \min\Big\{\big|P(x)\big| : x \in \overline{B_r(0)}\Big\}.$$

Für $|x| \geq r$ gilt $\big|P(x)\big| \geq \big|P(0)\big| \geq \big|P(x_0)\big|$

$$\Rightarrow\ \big|P(x_0)\big| \ =\ \min_{x\in\mathbb{C}} \big|P(x)\big|.$$

3) Annahme: $P(x_0) \neq 0$.

Entwickle P um x_0:

$$P(x) \ =\ P(x - x_0 + x_0) \ =\ \sum_{k=0}^{n} b_k (x-x_0)^k \ =\ b_0 + \sum_{k=L}^{n} b_k (x-x_0)^k$$

mit $b_L \neq 0$ ($L > 1$, falls $b_1 = 0$). Außerdem gilt $b_0 = P(x_0) \neq 0$.

Sei nun $z_0 \in \mathbb{C}$ mit
$$z_0^L \;=\; -\frac{b_0}{b_L}.$$
Beachte, dass $b_L z_0^L = -b_0$ gilt. Setze $x = x_0 + \varepsilon z_0$, also $x - x_0 = \varepsilon z_0$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\; P(x_0+\varepsilon z_0) &= b_0 + b_L \varepsilon^L z_0^L + \sum_{k=L+1}^{n} b_k (\varepsilon z_0)^k \\
&= b_0(1-\varepsilon^L) + \varepsilon^{L+1} \underbrace{\sum_{k=L+1}^{n} b_k \varepsilon^{k-L-1} z_0^k}_{|\;|\le c \text{ für } \varepsilon \le 1}
\end{aligned}$$
$$\Rightarrow\; \big|P(x_0+\varepsilon z_0)\big| \;\le\; |b_0|(1-\varepsilon^L) + \varepsilon^{L+1}\cdot c$$

Wähle $\varepsilon > 0$ so klein, dass $\varepsilon \cdot c \le \frac{1}{2}|b_0|$.

$$\Rightarrow\; \big|P(x_0+\varepsilon z_0)\big| \;\le\; |b_0|\Big(1-\varepsilon^L + \frac{1}{2}\varepsilon^L\Big) \;<\; |b_0| \;=\; \big|P(x_0)\big| \quad ↯ \quad \big|P(x_0)\big| = \min_{x\in\mathbb{C}} \big|P(x)\big|$$

$\Rightarrow\; P(x_0) = 0.$ □

1.8 Folgerung: Ist $P \in \mathbb{C}[x]$ und $n = \deg(P) \ge 1$, dann gibt es $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$, so dass
$$P(x) \;=\; a_n \prod_{j=1}^{n} (x - x_j), \quad a_n \text{ Koeffizient vor } x^n.$$

Beweis:
$$\begin{aligned}
P(x) &\overset{1.7,\,1.6}{=} (x-x_1)S_1(x), && \deg(S_1) = n-1 \\
&= (x-x_1)(x-x_2)S_2(x), && \deg(S_2) = n-2 \\
&\;\vdots \\
&= \prod_{j=1}^{n}(x-x_j)\cdot S_n(x), && \deg(S_n) = n-n = 0
\end{aligned}$$
$\Rightarrow\; S_n = \mathrm{konst}$
Ausmultiplizieren, Koeffizientenvergleich vor x^n $\;\Rightarrow\; S_n(x) = a_n$. □

1.9 Definition: Ist $P \in \mathbb{C}[x]$ und $P(x_0) = 0$, so heißt x_0 **Nullstelle der Ordnung** $\boldsymbol{k}$ ($k \in \mathbb{N}$), falls P durch $(x-x_0)^k$ teilbar ist, aber nicht durch $(x-x_0)^{k+1}$.

1.10 Satz (reelle Polynome): **1)** $P \in \mathbb{R}[x] \;\wedge P(x_0) = 0 \;\Rightarrow\; P(\overline{x_0}) = 0$.

2) Seien $P \in \mathbb{R}[x]$ und $n = \deg(P) \ge 1$. Dann gibt es $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$ und $z_1, \ldots, z_l \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, so dass $k + 2l = n$ und
$$P(x) \;=\; a_n \prod_{j=1}^{k}(x-x_j) \cdot \prod_{j=1}^{l} \underbrace{(x-z_j)(x-\overline{z_j})}_{=:P_j(x)},$$
und die Polynome $P_j(x) = x^2 - 2(\operatorname{Re} z_j)x + |z_j|^2$ sind reell und **irreduzibel** über $\mathbb{R}$ (d.h. durch kein Polynom $(x-\lambda)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ teilbar).

Beweis: **1)** Sei $P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$, $a_j \in \mathbb{R}$, $P(x_0) = 0$.

$$\Rightarrow\ P(\overline{x}) \ = \ \sum_{j=0}^{n} a_j \overline{x_0}^j \ \overset{a_j\in\mathbb{R}}{=} \ \sum_{j=0}^{n} \overline{a_j\, x_0^j} \ = \ \overline{\sum_{j=0}^{n} a_j\, x_0^j} \ = \ \overline{P(x_0)} \ = \ 0.$$

2) Induktion nach $n = \deg(P)$.

Induktionsanfang $n = 1$: $P(x) = a_0 + a_1 x = a_1\Big(x + \dfrac{a_0}{a_1}\Big)$

$n = 2$: $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

Lösungsformel: 2 verschiedene reelle Nullstellen x_1, x_2
$\Rightarrow\ P(x) = a_2(x - x_1)(x - x_2)$
oder 1 doppelte reelle Nullstelle x_1
$\Rightarrow\ P(x) = a_2(x - x_1)^2$
oder 2 konjugiert komplexe Nullstellen $z_1, \overline{z_1}$
$\Rightarrow\ P(x) = a_2(x - z_1)(x - \overline{z_1})$

Induktionsschritt: $\deg(P) = n + 1$
1.7 $\Rightarrow\ \exists x_1 \in \mathbb{C} : P(x_1) = 0 \overset{1.6}{\Rightarrow} P(x) = (x - x_1)Q(x)$, $\deg(Q) = n$.
$\boxed{\text{Fall } x_1 \in \mathbb{R}:}$ Dann ist Q reelles Polynom.
Wende Induktionsvoraussetzung auf Q an $\Rightarrow$ Induktionsbehauptung
$\boxed{\text{Fall } x_1 \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}:}$ 1) $\Rightarrow\ P(\overline{x_1}) = 0$
$\Rightarrow\ P(x) = (x - x_1)(x - \overline{x_1})R(x)$ mit $\deg(R) = n - 1$, und R ist reelles Polynom.
Wende Induktionsvoraussetzung auf R an $\Rightarrow$ Induktionsbehauptung

Induktionsschluss: Die Aussage gilt für alle $n \in \mathbb{N}$. □

1.11 Satz (rationale Nullstellen): Sei $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ mit $a_j \in \mathbb{Z}$. Ist $P\Big(\dfrac{p}{q}\Big) = 0$, wobei $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ teilerfremd, dann ist p Teiler von a_0 und q Teiler von a_n.

Beweis: Übungen

1.12 Satz (Vieta): Sei $P \in \mathbb{C}[x]$,

$$P(x) \ = \ 1 \cdot x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \ = \ \prod_{j=1}^{n} (x - x_j).$$

Dann folgt durch Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich

$$a_j \ = \ (-1)^{n-j} \sum_{I\subseteq\{1,\ldots,n\},\ |I|=n-j} \ \prod_{k\in I} x_k \quad \text{für } j = 1, \ldots, n.$$

1.13 Beispiele: $n = 2$: $P(x) = x^2 + px + q$, $P(x_1) = P(x_2) = 0$, $x_1 \neq x_2$
$\Rightarrow\ p = -(x_1 + x_2)$, $q = x_1 x_2$.
$n = 3$: $P(x) = x^3 + px^2 + qx + r = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$
$\Rightarrow\ p = -(x_1 + x_2 + x_3)$, $q = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$, $r = -x_1x_2x_3$.

2 Polynomgleichungen

2.1 Quadratische Gleichungen: Mit $p, q \in \mathbb{C}$ ist die quadratische Gleichung

$$x^2 + px + q \;=\; 0 \tag{1}$$

gegeben. Es gilt

$$\begin{aligned} x^2 + px + q = 0 \;\; &\Leftrightarrow \;\; x^2 + 2\frac{p}{2}x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = \left(\frac{p}{2}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow \;\; \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \\ &\Leftrightarrow \;\; x^2 + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\ &\Leftrightarrow \;\; x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \end{aligned}$$

Man nennt $D = \dfrac{p^2}{4} - q$ die **Diskriminante** der Gleichung (1).
Nun seien $p, q \in \mathbb{R}$. Falls $D > 0$, hat (1) zwei relle Lösungen, falls $D = 0$ hat (1) genau eine Lösung, und die ist reell, falls $D < 0$ hat (1) zwei konjugiert komplexe Lösungen.

2.2 Satz: Die Gleichung

$$\sum_{j=0}^{n} a_j x^j \;=\; 0$$

mit $a_j \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$, wird durch die Substitution

$$y \;=\; \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}\left(x + \frac{a_{n-1}}{na_n}\right)$$

auf die **reduzierte Form**

$$y^n + \sum_{j=0}^{n-2} b_j y^j \;=\; 0$$

mit $b_j \in \mathbb{C}$ transformiert ($\sqrt[n]{a_n}$ bezeichnet irgendeine Lösung der Gleichung $z^n = a_n$).

Beweis durch Nachrechnen.

2.3 Kubische Gleichungen: Gegeben ist die Gleichung

$$x^3 + px + q \;=\; 0 \tag{2}$$

mit $p \neq 0$ (sonst $x^3 = -q$) und $q \neq 0$ (sonst $x(x^2 + p) = 0$).
Ansatz $x = u + \dfrac{t}{u}$, t wird später fest gewählt. Setze

$$\left(u + \frac{t}{u}\right)^3 \;=\; u^3 + 3u^2\frac{t}{u} + 3u\left(\frac{t}{u}\right)^2 + \left(\frac{t}{u}\right)^3$$

in (2) ein. Dann folgt

$$\begin{aligned} u^3 + 3tu + 3\frac{t^2}{u} + \frac{t^3}{u^3} + p\left(u + \frac{t}{u}\right) + q \;&=\; 0 \\ \Leftrightarrow \;\; u^3 + u(3t + p) + \frac{t}{u}(3t + p) + \frac{t^3}{u^3} + q \;&=\; 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\overset{\text{Wähle } t=-\frac{p}{3}}{\Leftrightarrow} & u^3 + \frac{\left(-\frac{p}{3}\right)^3}{u^3} + q &= 0 \\
&\Leftrightarrow & u^6 + qu^3 - \frac{p^3}{27} &= 0 \\
&\Leftrightarrow & u^3 &= -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \quad (u \neq 0 \text{ da } p \neq 0)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Alle 3 Lösungen von (2) sind durch

$$x = u - \frac{p}{3u} \quad \text{mit} \quad u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad \text{(drei verschiedene komplexe Werte)}$$

gegeben (Formeln von Cardano). Man nennt $D = \dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}$ die **Diskriminante** der Gleichung (1). Nun seien $p, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Falls $D < 0$, besitzt (2) drei reelle Lösungen, falls $D = 0$, besitzt (2) zwei reelle und keine weitere Lösung, falls $D > 0$, besitzt (2) eine reelle und zwei konjugiert komplexe Lösungen (Übungen).

2.4 Quartische Gleichungen: Gegeben ist die Gleichung

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0 \tag{3}$$

mit $q \neq 0$ (sonst $x^4 + px^2 + r = 0$ biquadratisch) und $r \neq 0$ (sonst $x(x^3 + px + q) = 0$). Berechne mit 2.3 die Lösungen t_1, t_2, t_3 der **Resolventengleichung**

$$t^3 + 2pt^2 + (p^2 - 4r)t - q^2 = 0. \tag{4}$$

Beachte, dass $t_j \neq 0$ wegen $q \neq 0$. Nach Vieta gelten

$$t_1 + t_2 + t_3 = -2p \quad \text{und} \quad t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 = q^2.$$

Dann kann (3) folgendermaßen gelöst werden.

$$\begin{aligned}
(3) \quad \Leftrightarrow \quad x^4 + px^2 &= -qx - r \\
\Leftrightarrow \quad x^4 + (p+t_1)x^2 &= t_1x^2 - qx - r = t_1\Big(x^2 - \frac{q}{t_1}x\Big) - r \\
\Leftrightarrow \quad \Big(x^2 + \frac{p+t_1}{2}\Big)^2 &= t_1\Big(x - \frac{q}{2t_1}\Big)^2 \underbrace{- \frac{q^2}{4t_1} + \Big(\frac{p+t_1}{2}\Big)^2 - r}_{=\frac{1}{4t_1}(-q^2 - 4t_1r + p^2t_1 + 2pt_1^2 + t_1^3) = 0 \text{ nach } (4)} \\
\Leftrightarrow \quad x^2 + \frac{p+t_1}{2} &= \pm\sqrt{t_1}\Big(x - \frac{q}{2t_1}\Big) \\
\Leftrightarrow \quad x^2 \mp \sqrt{t_1}\,x &= \mp\frac{q}{2\sqrt{t_1}} - \frac{p+t_1}{2} \\
\Leftrightarrow \quad \Big(x^2 \mp \frac{\sqrt{t_1}}{2}\Big)^2 &= \frac{t_1}{4} \mp \frac{q}{2\sqrt{t_1}} - \frac{p+t_1}{2} = \frac{1}{4}\Big(-t_1 - 2p \mp \frac{2q}{\sqrt{t_1}}\Big) \\
&= \frac{1}{4}(t_2 + t_3 \mp 2\sqrt{t_2}\,\sqrt{t_3}) = \frac{1}{4}\big(\sqrt{t_2} \mp \sqrt{t_3}\big)^2 \\
&\ \text{falls } \sqrt{t_1}, \sqrt{t_2}, \sqrt{t_3} \text{ so gewählt, dass } \sqrt{t_1} \cdot \sqrt{t_2} \cdot \sqrt{t_3} = q \\
&\ \text{Beachte: Minus links und rechts gehören zusammen} \\
\Leftrightarrow \quad x - \frac{\sqrt{t_1}}{2} = \pm\frac{1}{2}\big(\sqrt{t_2} - \sqrt{t_3}\big) &\text{ oder } x + \frac{\sqrt{t_1}}{2} = \pm\frac{1}{2}\big(\sqrt{t_2} + \sqrt{t_3}\big)
\end{aligned}$$

Alle vier Lösungen sind gegeben durch

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}\big(\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}-\sqrt{t_3}\big), \\ x_2 &= \frac{1}{2}\big(\sqrt{t_1}-\sqrt{t_2}+\sqrt{t_3}\big), \\ x_3 &= \frac{1}{2}\big(-\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}+\sqrt{t_3}\big), \\ x_4 &= \frac{1}{2}\big(-\sqrt{t_1}-\sqrt{t_2}-\sqrt{t_3}\big), \end{aligned}$$

wobei t_1, t_2, t_3 die Lösungen von (4) und die Wurzeln so gewählt sind, dass $\sqrt{t_1}\cdot\sqrt{t_2}\cdot\sqrt{t_3} = q$.

2.5 Satz von Abel-Ruffini: Eine Polynomgleichung fünften oder höheren Grades ist im Allgemeinen nicht durch Radikale (d.h. Ausdrücke mit den Rechenoperationen Addition, Multiplikation und Wurzeln) auflösbar.

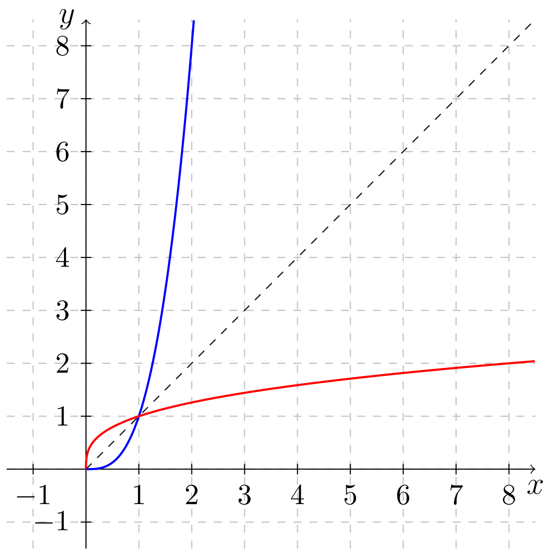
2.6 Bemerkung: Es ist also nicht sinnvoll, eine allgemeine Lösungsformel für Gleichungen höherer als vierter Ordnung zu suchen (außer man erweitert die Menge der zulässigen Operationen).

3 Wurzelfunktionen

3.1 Satz und Definition: Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Funktion $f_n : [0,\infty[\to [0,\infty[: x \mapsto x^n$ ist bijektiv und streng monoton wachsend.

Die streng monoton wachsende bijektive Umkehrfunktion $f_n^{-1} : [0,\infty[\to [0,\infty[$ heißt ***n*-te Wurzel**. Schreibe $f_n^{-1}(x) =: \sqrt[n]{x} =: x^{\frac{1}{n}}$ für $x \geq 0$.

3.2 Beispiel:



3.3 Bemerkung: Man könnte z.B. $x^{\frac{1}{3}}$ auch für negatives x definieren. Aber dann bekommt man Probleme mit den Potenzgesetzen, z.B.

$$-2 = (-8)^{\frac{1}{3}} \neq \big((-8)^2\big)^{\frac{1}{6}} = +2.$$

Die Gleichung $x^3 = a$ besitzt für jedes $a \in \mathbb{R}$ eine eindeutige reelle Lösung. Man schreibt $x = -\sqrt[3]{-a}$ für konkretes $a < 0$ oder allgemein $x = \operatorname{sign}(a)\sqrt[3]{|a|}$.

4 Exponential- und Logarithmusfunktion

4.1 Satz: Sei $a \in]0,1[\cup]1,\infty[$. Es gibt genau eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

(E1) $\forall x, y \in \mathbb{R} : f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ und

(E2) $f(1) = a$.

Es gilt $\mathrm{Bild}(f) =]0,\infty[$. Für $a > 1$ ist f streng monoton wachsend, für $a < 1$ streng monoton fallend. Man schreibt $a^x := f(x)$ (**Exponentialfunktion** zur **Basis** a).

Beweis: 1) Eindeutigkeit: Für $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ folgt aus (E1), dass $f\left(\frac{p}{q}\right) = f(1)^{\frac{p}{q}}$ (vgl. Aufgabe 3.3).
$\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ und f stetig $\Rightarrow$ $f(x)$ eindeutig für $x \in \mathbb{R}$.

2) Existenz: Für $a = \mathrm{e}$ wähle f als Lösung von

$$f'(x) = f(x) \text{ für } x \in \mathbb{R}, \quad f(0) = 1$$

(vgl Aufgabe 4.3).
Für $a \neq \mathrm{e}$ definiere $\ln = \log_{\mathrm{e}}$ (nächster Satz) und setze $f(x) = \mathrm{e}^{x\ln(a)}$.

3) Eigenschaften für $a > 1$ (im Fall $a \in]0,1[$ betrachte $b = \frac{1}{a} > 1$):

- $f(n) = a^n \to \infty$ und $f(-n) = \left(\dfrac{1}{a}\right)^n \to 0$ für $n \to \infty$.
  Zwischenwertsatz $\Rightarrow$ $\mathrm{Bild}(f) \supseteq \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \big[f(-n), f(n)\big] =]0,\infty[$.
  $f(x) = f\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2}\right) \overset{\text{(E1)}}{=} \left(f\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)^2 \geq 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{Bild}(f) \subseteq [0,\infty[$
  Annahme $\exists x \in \mathbb{R} : f(x) = 0 \;\Rightarrow\; f(1) = f(1-x+x) \overset{\text{(E1)}}{=} f(1-x)f(x) = 0$ ↯
  Also $\mathrm{Bild}(f) =]0,\infty[$.
- Zeige: Für $x > 0$ gilt $f(x) > 1$. Benütze $a^r > a^s$ für $r > s$ mit $r, s \in \mathbb{Q}$.
  Wähle $r_0 \in]0,x[$, $r_0 \in \mathbb{Q}$ und (r_n) Folge in $\mathbb{Q}$ mit $r_n \to x$.
  $\Rightarrow$ $r_n > r_0$ für $n > N_0$ und $f(x) \overset{f \text{ stetig}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} f(r_n) \geq f(r_0) = a^{r_0} > a^0 = 1$.
- Für $x < y$ folgt $f(y) = f(y-x+x) = \underbrace{f(y-x)}_{>1}\underbrace{f(x)}_{>0} > f(x)$.

$\square$

4.2 Folgerung: Aus 2) im Beweis: Die Funktion $x \mapsto \mathrm{e}^x$ ist differenzierbar mit $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x$.
$\Rightarrow$ Die Funktion $x \mapsto a^x = \mathrm{e}^{x\ln(a)}$ ist differenzierbar mit $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a^x = \mathrm{e}^{x\ln(a)}\ln(a) = \ln(a) \cdot a^x$.

4.3 Satz: Sei $a \in]0,1[\cup]1,\infty[$. Es gibt genau eine stetige Funktion $g :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ mit

(L1) $\forall x, y \in]0,\infty[: g(x \cdot y) = g(x) + g(y)$ und

(L2) $g(a) = 1$.

Es gelten

1) $\operatorname{Bild}(g) = \mathbb{R}$,

2) Für $a > 1$ ist g streng monoton wachsend, für $a < 1$ streng monoton fallend,

3) $\forall x \in \mathbb{R} : g(a^x) = x \ \wedge\ \forall x > 0 : a^{g(x)} = x$.

Man schreibt $\log_a(x) := g(x)$ (**Logarithmus zur Basis a**), speziell $\ln(x) = \log_{\mathrm{e}}(x)$ (**natürlicher Logarithmus**).

Beweis: a) $g(1) = g(1 \cdot 1) \overset{\text{(L1)}}{=} g(1) + g(1) \ \Rightarrow\ g(1) = 0$
$\Rightarrow\ 0 = g\left(\frac{1}{x} \cdot x\right) = g\left(\frac{1}{x}\right) + g(x) \ \Rightarrow\ g\left(\frac{1}{x}\right) = -g(x)$

b) Sei $n \in \mathbb{N}$. $g(x^n) = g(x \cdots x) \overset{\text{(L1)}}{=} ng(x)$
$\Rightarrow\ g(x^{-n}) = g\left(\frac{1}{x^n}\right) \overset{\text{a)}}{=} -g(x^n) = -ng(x)$
Außerdem $g(x) = \frac{1}{m} g(x^m) \ \Rightarrow\ g\left(x^{\frac{1}{m}}\right) = \frac{1}{m} g(x)$
$\Rightarrow\ g\left(x^{\frac{p}{q}}\right) = g\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p = pg\left(x^{\frac{1}{q}}\right) = \frac{p}{q} g(x)$ für $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow\ g\left(a^{\frac{p}{q}}\right) = \frac{p}{q}\, g(a) = \frac{p}{q}$ für $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ eindeutig
g stetig, $\mathbb{Q} \cap]0, \infty[$ dicht in $]0, \infty[\ \Rightarrow\ g(a^x)$ eindeutig und $g(a^x) = x$ für $x \in \mathbb{R}$.

c) $f : x \mapsto a^x$ bijektiv und $g \circ f = \mathrm{Id} \ \Rightarrow\ g = f^{-1}$
Insbesondere: g ist eindeutig, $a^{g(x)} = x$ und $\operatorname{Bild}(g) = D(f) = \mathbb{R}$.

d) $a > 1$: $f : x \mapsto a^x$ ist streng monoton wachsend $\Rightarrow$ Umkehrfunktion g ist streng monoton wachsend. Genauso folgt im Fall $a < 1$, dass g streng monoton fallend ist. $\square$

4.4 Eigenschaften: Für $a \in]0, 1[\cup]1, \infty[$ und $x, y > 0$ gelten

1) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$,

2) $\log_a(1) = 0$, $\log_a(a) = 1$,

3) $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$,

4) $\log_a(x^y) = y \log_a(x)$,

5) $\log_a(x) = \dfrac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$ für $b \in]0, 1[\cup]1, \infty[$,

6) Sei nun $a > 1$. Dann $\forall x > y : \log_a(x) > \log_a(y)$, speziell $\forall x > 1 : \log_a(x) > 0$,

Beweis: **1)** Klar, siehe (L1)

2) Klar, siehe letzter Beweis

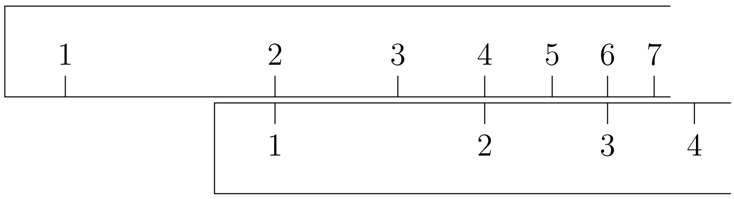
3) Klar, siehe letzter Beweis

4) Aus b) des letzten Beweises: $\log_a\left(x^{\frac{p}{q}}\right) = \dfrac{p}{q}\log_a(x)$,
Dann Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$, Stetigkeit der Exponential- und der Logarithmusfunktion.

5) Setze $\tilde{g}(x) := \dfrac{\log_b(x)}{\log_b(a)} \;\Rightarrow\; \tilde{g}(x\cdot y) = \tilde{g}(x) + \tilde{g}(y)$ und $\tilde{g}(a) = 1$,
Eindeutigkeit von $g \;\Rightarrow\; \tilde{g} = g = \log_a$.

6) $\log_a(x) = g(x) \overset{x>y}{>} g(y) = \log_a(y)$. $\square$

4.5 Anwendung Rechenschieber:



4.6 Satz: $x \mapsto \log_a(x)$ ist differenzierbar mit $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log_a(x) = \log_a(\mathrm{e})\dfrac{1}{x}$. Insbesondere $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(x) = \dfrac{1}{x}$.

Beweis (Skizze):

$$\begin{aligned}\frac{\log_a(x+h)-\log_a(x)}{h} &= \frac{1}{h}\log_a\left(\frac{x+h}{x}\right) = \frac{1}{x}\frac{x}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{h}} \\ &\to \frac{1}{x}\log_a(\mathrm{e}) \text{ für } h\to 0\end{aligned}$$

da $\log_a$ stetig ist und $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \to \mathrm{e}$ für $n\to\infty$. $\square$

4.7 Satz (Mercator): Für $0 < x \le 1$ gilt

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \mp \ldots = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}.$$

Beweis: $$\ln(1+x) \overset{\ln(1)=0}{=} \int_1^{1+x}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t \underset{\text{Reihe}}{\overset{\text{geometrische}}{=}} \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty}(-t)^k\right)\mathrm{d}t$$

Nach Leibniz-Kriterium (funktioniert nur für $t \ge 0$)

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{1+t} - \sum_{k=0}^{n}(-t)^k\right| \le t^{n+1} \\ \Rightarrow\; &\left|\int_0^x\left(\frac{1}{1+t} - \sum_{k=0}^{n}(-t)^k\right)\mathrm{d}t\right| \le \frac{1}{n+2}x^{n+2} \;\to\; 0 \text{ für } n\to\infty \\ \Rightarrow\; &\int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\int_0^x(-t)^k\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{k+1}}{k+1}.\end{aligned}$$

$\square$

4.8 Bemerkung: Die Aussage des Satzes gilt auch für $-1 < x < 0$, aber der Beweis funktioniert nur für $x \geq 0$.

4.9 Satz: Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\mathrm{e}^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

Beweis: Sei $f(x) = \mathrm{e}^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

1) Konvergenz: Für $|x| \leq M \in \mathbb{N}$, $k \geq M+2$ gilt

$$\left|\frac{x^k}{k!}\right| \leq \frac{M^{M+2}\, M^{k-M-2}}{M!(M+1)\cdots k} \leq \frac{M^{M+2}}{M!} \cdot 1 \cdot \frac{1}{(k-1)k}.$$

$\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{1}{n}$ konvergiert für $n \to \infty$.
Mit dem Vergleichskriterium folgt die Konvergenz der Reihe.

2) Aus Cauchy-Produkt: $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$.

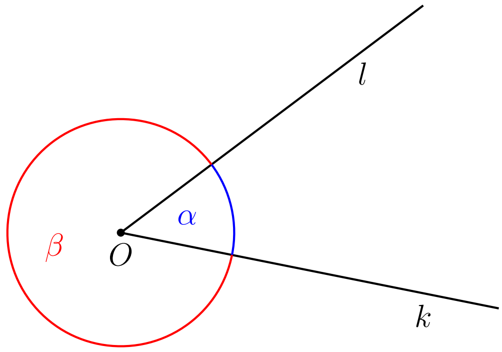
3) $f(1) = \mathrm{e}$ (siehe Definition von e in Teil I).

Eindeutigkeit in Satz 4.1 $\Rightarrow$ $f(x) = \mathrm{e}^x$. $\square$

4.10 Bemerkung: Durch $\mathrm{e}^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ für $x \in \mathbb{C}$ wird eine ganze Funktion definiert. Sie ist die einzige holomorphe Funktion, die auf $\mathbb{R}$ mit der reellen Exponentialfunktion übereinstimmt.

5 Trigonometrische Funktionen

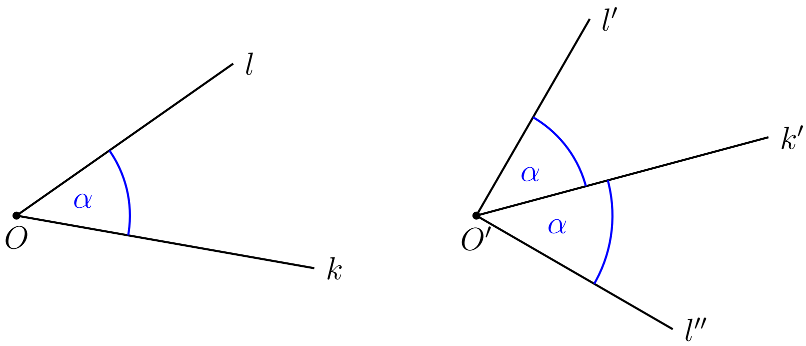
5.1 Vorbemerkung: Zwei Halbgeraden mit dem selben Anfangspunkt O, die nicht identisch sind, bestimmen zwei Winkel



5.2 Definition: **1)** Ein **orientierter Winkel** α ist definiert durch zwei Halbgeraden k, l mit dem selben Anfangspunkt O, die nicht identisch sind. Schreibe $\alpha = \angle(k, l)$, wenn k durch Drehung um O im Gegenuhrzeigersinn auf l abgebildet werden kann.

2) Sind ein Winkel $\alpha = \angle(k, l)$ und eine Halbgerade k' mit Anfangspunkt O' gegeben, so kann der Winkel α in O' von k' aus abgetragen werden.

Dies entspricht der Anwendung von Verschiebung, Drehung, Spiegelung.

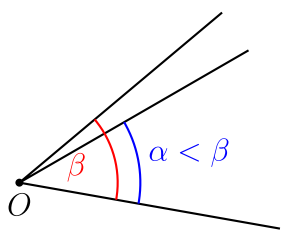


5.3 Bemerkung: Man definiert den nicht orientierten Winkel zwischen k und l, als den „kleineren“ der beiden Winkel in der Skizze von 5.1.

In der Dreiecksgeometrie benützt man für die Winkelbezeichnungen orientierte Winkel und bezeichnet $\angle AOB := \angle(k, l)$, wobei O den gemeinsamen Anfangspunkt von k und l bezeichnet und A auf k und B auf l liegt. Zur Definition der trigonometrischen Funktionen werden orientierte Winkel verwendet, man benötigt hier auch negative Winkel.

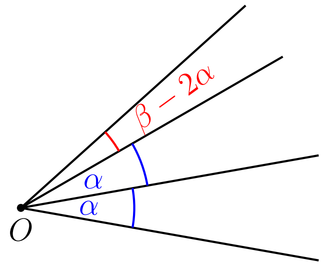
Beim Schnittwinkel zwischen zwei Geraden g, h handelt es sich um einen nicht orientierten Winkel, denn der Winkel ist unabhängig von der Reihenfolge der Geraden.

5.4 Definition: **1)** Zwei Winkel heißen **gleich**, wenn sie aufeinander abgetragen werden können. Der Winkel α heißt **kleiner** als β, wenn er bei entsprechender Abtragung „innerhalb“ des Winkel β liegt.



2) Man kann

- Den kleineren Winkel α in den größeren Winkel β abtragen,
- zählen, wie oft der kleinere in den größern Winkel passt,
- mit dem Restwinkel und α entsprechend weitermachen.



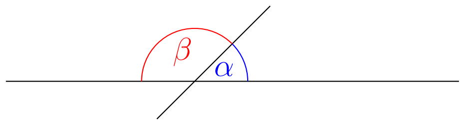
Der euklidische Algorithmus liefert das Verhältnis der beiden Winkelgößen als Kettenbruch, also als reelle Zahl.

$$\begin{array}{rcl} \beta &=& \alpha + \beta - 2\alpha \;=\; \alpha + r_1 \\ \alpha &=& k \cdot r_1 + r_2 \\ &\vdots& \end{array} \qquad \Rightarrow \; \frac{\beta}{\alpha} = 2 + \frac{r_1}{\alpha} = 2 + \frac{1}{\frac{\alpha}{r_1}} = 2 + \frac{1}{k + \frac{r_2}{r_1}} = \dots$$

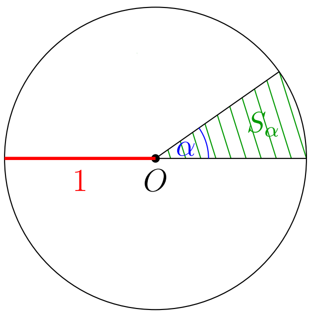
3) Referenzwinkel: Bezeichne die Größe des Vollwinkels als 2π. Damit kann jede Winkelgröße als reelle Zahl dargestellt werden.

Konsequenzen: **a)** $\angle(l,k) = 2\pi - \angle(k,l)$,

b) **Nebenwinkel** $\alpha + \beta = \pi$

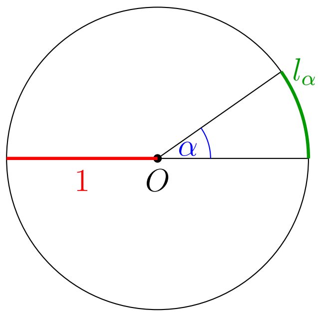


c)



Sektorfläche im Einheitskreis

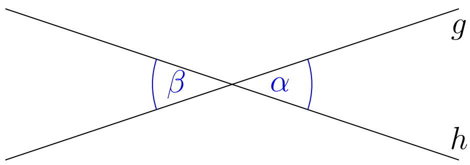
$$S_\alpha = \frac{\alpha}{2}$$



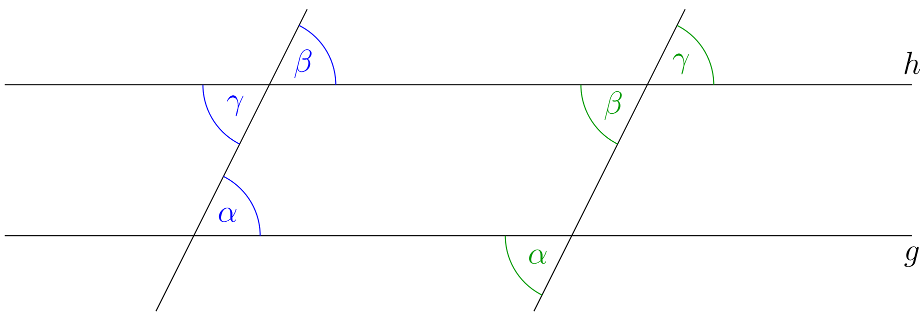
Länge des Kreisbogens im Einheitskreis

$$l_\alpha = \alpha$$

5.5 Satz: **1)** Gegeben sind zwei sich schneidende Geraden. Dann sind Winkel und **Gegenwinkel** gleich groß.



2) Gegeben sind zwei parallele und eine schneidende Gerade.



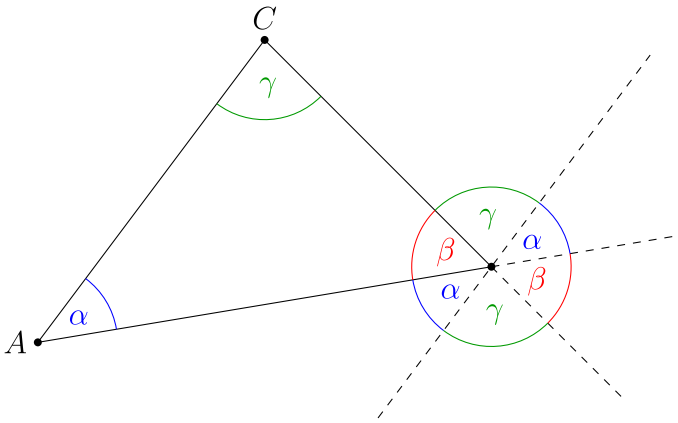
a) Dann sind die **Stufenwinkel** α, β gleich groß. Und umgekehrt: $\alpha = \beta \;\Rightarrow\; g \parallel h$.

b) Dann sind die **Wechselwinkel** α, γ gleich groß. Und umgekehrt: $\alpha = \gamma \;\Rightarrow\; g \parallel h$.

Beweis: 1) und 2a) sind für uns Axiome. 2b) folgt aus 1) und 2a). $\square$

5.6 Folgerung: Die Summe der Innenwinkel im Dreieck beträgt π.

Beweis: Zeichne Parallele zu AC durch B.



$\Rightarrow\ 2(\alpha+\beta+\gamma) = \text{Vollwinkel} = 2\pi.$

□

5.7 Definition: **1)** Zwei Dreiecke heißen **kongruent**, wenn sie durch Hintereinanderausführung von Verschiebung, Drehung, Spiegelung aufeinander abgebildet werden können.

2) Zwei Dreiecke heißen **ähnlich**, wenn sie durch Hintereinanderausführung von Verschiebung, Drehung, Spiegelung und zentrischer Streckung aufeinander abgebildet werden können.

5.8 Bemerkung: **1)** Kongruente Dreiecke sind ähnlich.

2) Die Beziehungen „kongruent“ und „ähnlich“ sind Kongruenzrelationen.

5.9 Satz: **1)** Zwei Dreiecke sind genau dann kongruent, wenn sie

(sss) in ihren Seitenlängen oder

(sws) in zwei Seitenlängen und dem eingeschlossenen Winkel oder

(wsw) bzw. **(sww)** in einer Seitenlänge und zwei Winkeln

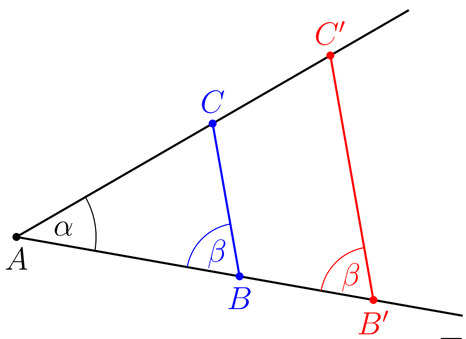
übereinstimmen.

2) Zwei Dreiecke sind genau dann ähnlich, wenn sie in zwei Winkeln (und damit in allen drei) übereinstimmen.

Beweis: **1)** Aus den Angaben (sss), (sws), (wsw), (sww) können die Dreiecke eindeutig konstruiert werden (z.B. mit Zirkel und Lineal).

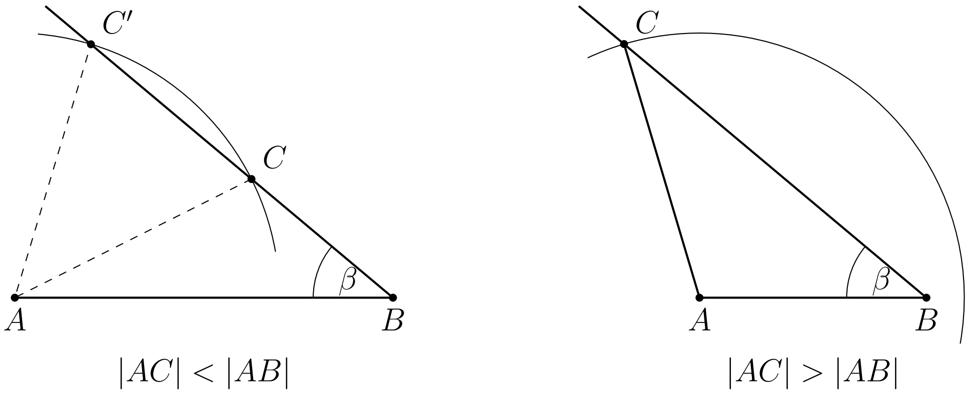
2) $\Rightarrow$: Alle genannten Abbildungen sind winkeltreu.

$\Leftarrow$: Zeichne den Winkel α mit Scheitel A und trage auf einem Schenkel in beliebigem Punkt B den Winkel β ab. Schnittpunkt der freien Schenkel von α und β ergibt den Punkt C. Die bei verschiedener Wahl von B enstehenden Dreiecke können durch Streckung aufeinander abgebildet werden, sind also ähnlich.



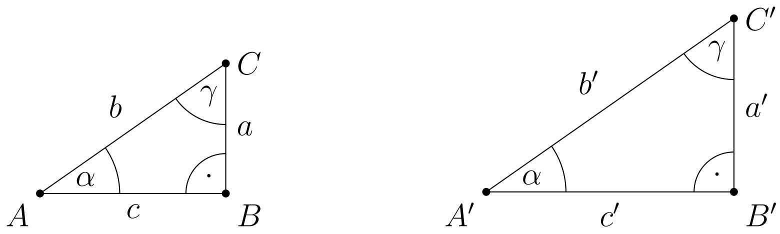
□

5.10 Bemerkung: (ssw) liefert keinen Kongruenzsatz.



Aber: (Ssw) liefert Kongruenz, dem gegebenen Winkel muss die längere der gegebenen Seiten gegenüberliegen.

5.11 Definition (Sinus und Cosinus im rechtwinkligen Dreieck): Seien Dreiecke mit $\beta = \frac{\pi}{2}$ und gleichem Winkel α gegeben.



Alle solchen Dreiecke sind ähnlich, d.h. es gilt $\dfrac{|a'|}{|a|} = \dfrac{|b'|}{|b|} = \dfrac{|c'|}{|c|}$.

Es folgen $\dfrac{|a'|}{|b'|} = \dfrac{|a|}{|b|}$, $\dfrac{|c'|}{|b'|} = \dfrac{|c|}{|b|}$.

Für $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ definiere

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &:= \frac{|a|}{|b|} = \frac{\text{Gegenkathete(nlänge)}}{\text{Hypothenuse(nlänge)}}, \\ \cos(\alpha) &:= \frac{|c|}{|b|} = \frac{\text{Ankathete(nlänge)}}{\text{Hypothenuse(nlänge)}}. \end{aligned}$$

Es folgen $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\gamma) = \cos(\alpha)$ und $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\gamma) = \sin(\alpha)$ und

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = \frac{|a|^2 + |c|^2}{|b|^2} \overset{\text{Pythagoras}}{=} \frac{|b|^2}{|b|^2} = 1.$$

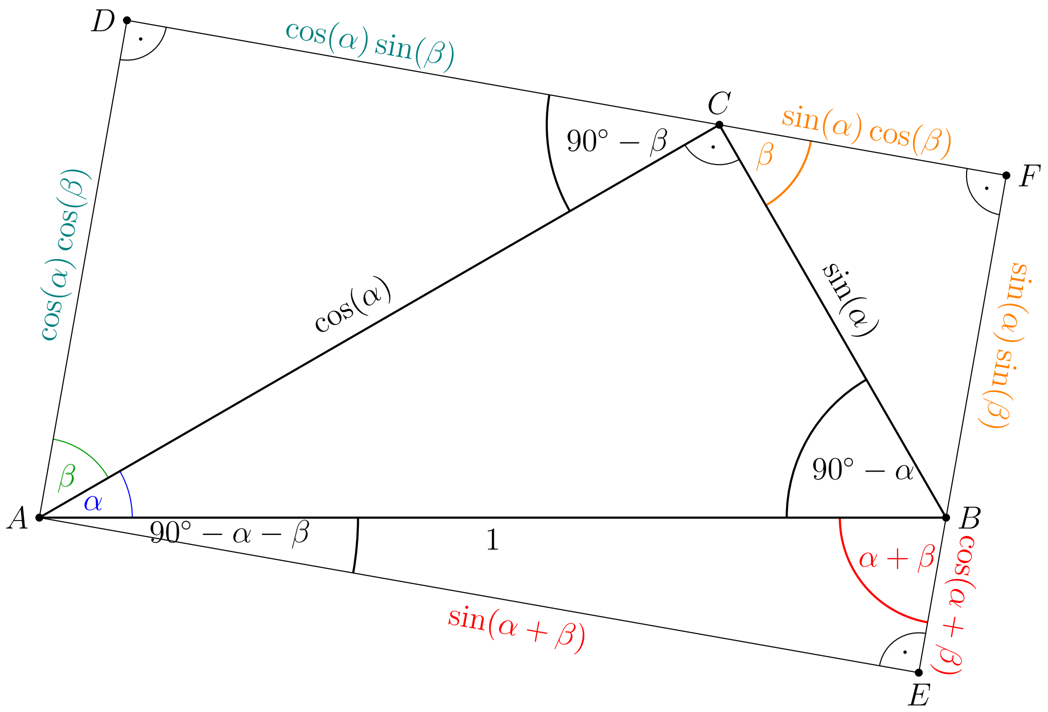
5.12 Satz (spezielle Werte):

α	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\sin(\alpha)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos(\alpha)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

5.13 Satz: Für $\alpha, \beta > 0$ und $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$ gelten die **Additionstheoreme**

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)\\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta).\end{aligned}$$

Beweis: Konstruiere ein Dreieck ABC mit Seitenlänge $|AB| = 1$, $\angle(BAC) = \alpha$ und rechtem Winkel in C (Thaleskreiskonstruktion). Konstruiere das Dreieck ACD mit $\angle(CAD) = \beta$ und rechtem Winkel in D. Verlängere DC über C hinaus und konstruiere das Dreieck CBF mit rechtem Winkel in F. Verlängere FB über B hinaus und konstruiere das Dreieck BAE mit rechtem Winkel in E. Dann ist $AEFD$ ein Rechteck (Winkelsumme im Viereck). Stelle alle Seitenlängen mit Hilfe von $\sin(\alpha)$, $\sin(\beta)$, $\cos(\alpha)$, $\cos(\beta)$ dar, so wie in der Skizze. Trage $\sin(\alpha+\beta)$ und $\cos(\alpha+\beta)$ an den entsprechenden Seiten ein. Da bei einem Rechteck gegenüberliegende Seiten gleich lang sind, folgen die Additionstheoreme.



□

5.14 Definition (Fortsetzung): Die Additionstheoreme sollen auch für $0 \le \alpha, \beta, \alpha+\beta \le \pi$ gelten.

1) Additionstheoreme mit $\alpha = 0 \Rightarrow \sin(0) = 0$ und $\cos(0) = 1$.

2) Additionstheoreme mit $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1\\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2 - \left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2 = 0.\end{aligned}$$

Definiere also $\sin(0) := \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) := 0$ und $\cos(0) := \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) := 1$.
Insbesondere sind dann die Beziehungen

$$\cos(\alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), \qquad \sin(\alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

aus 5.11 auch für $\alpha \in \{0, \frac{\pi}{2}\}$ richtig.

3) Additionstheoreme mit $\beta = \frac{\pi}{2}$ und $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) &= 0 + \cos(\alpha) \cdot 1 = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\left(\pi - \left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right), \\
\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) &= 0 - \sin(\alpha) \cdot 1 = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\left(\pi - \left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right).
\end{aligned}$$

Definiere $\sin(\alpha) := \sin(\pi - \alpha)$ und $\cos(\alpha) := -\cos(\pi - \alpha)$ für $\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$.

Entsprechend können

$$\sin(\alpha) := -\sin(-\alpha) \text{ und } \cos(\alpha) := \cos(-\alpha) \text{ für } -\pi \leq \alpha < 0$$

und die 2π-periodischen Fortsetzungen

$$\sin(\alpha) = \sin(\alpha - 2\pi k) \text{ und } \cos(\alpha) = \cos(\alpha - 2\pi k)$$

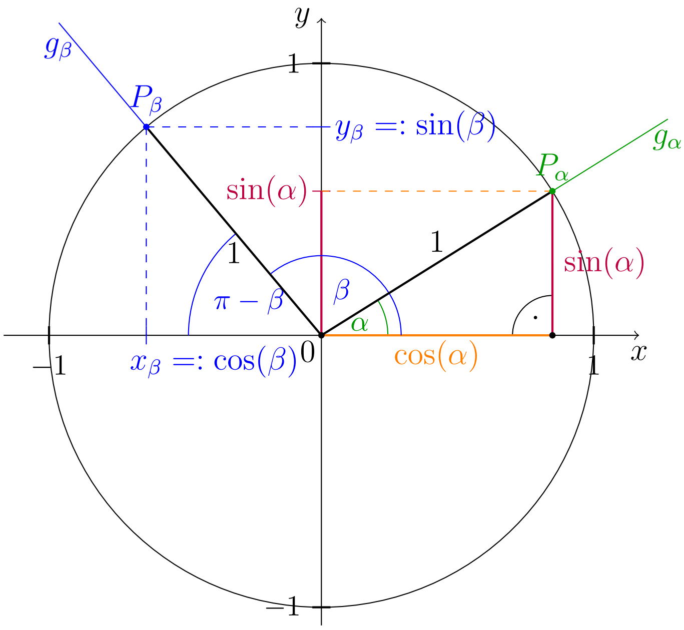
mit $k \in \mathbb{Z}$ begründet werden.

5.15 Satz: Die Additionstheoreme aus 5.13 gelten für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Beweis: Übungen (wichtigste Fälle).

5.16 Satz: Sei $P(x, y)$ ein Punkt des Einheitskreises (Kreis um O mit Radius 1). Bezeichnet α den orientierten Winkel zwischen der positiven x-Achse und der Strecke OP, dann gilt

$$x = \cos(\alpha) \text{ und } y = \sin(\alpha).$$



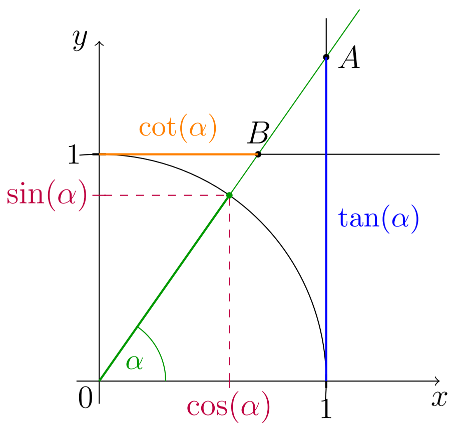
Insbesondere gilt $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$ (**trigonometrischer Pythagoras**).

5.17 Definition (weitere Winkelfunktionen):

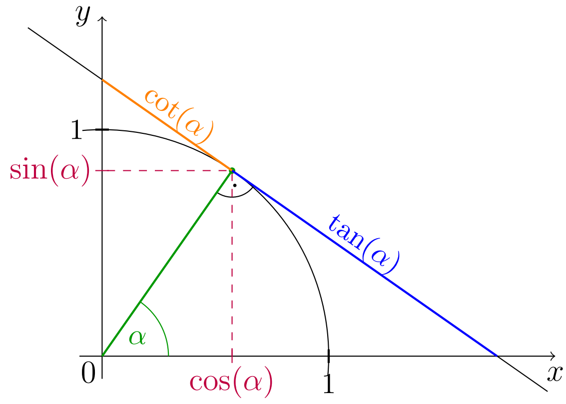
$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \text{ (**Tangens**)}, \quad \cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \text{(**Cotangens**)}$$

für alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die der Nenner nicht Null ist.

5.18 Veranschaulichung: Die Werte von $\tan(\alpha)$ und $\cot(\alpha)$ sind in den Graphiken als Streckenlängen sichtbar. Begründung mit Hilfe ähnliche Dreiecke.



oder



5.19 Satz: **1)** $\lim\limits_{x\to 0} \sin(x) = 0$,

2) $\lim\limits_{x\to 0} \cos(x) = 1$,

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$,

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)-1}{x^2} = \dfrac{1}{2}$, insbesondere gilt $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)-1}{x} = 0$.

Beweis: Übungen

5.20 Satz: Die Sinus- und die Cosinusfuktion sind differenzierbar (also auch stetig), und es gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin(x) = \cos(x) \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cos(x) = -\sin(x).$$

Insbesondere sind beide Funktionen beliebig oft differenzierbar.

Beweis:

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} &\overset{\text{Additionsth.}}{=} \frac{\sin(x)\cos(h)+\cos(x)\sin(h)-\sin(x)}{h} \\ &= \sin(x)\frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x)\frac{\sin(h)}{h} \\ &\overset{h\to 0}{\to} 0 + \cos(x)\cdot 1. \end{aligned}$$

Für die Ableitung der Cosinusfunkion genauso. $\square$

5.21 Bemerkung: Aus den Reihenentwicklungen der Exponential-, Sinus- und Cosinusfunktion folgt die **Formel von Euler**

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)$$

für $x \in \mathbb{R}$ (und auch für $x \in \mathbb{C}$). Hieraus folgt die **Formel von Moivre**

$$\big(\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)\big)^n = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} = \cos(nx) + \mathrm{i}\sin(nx) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Anwendung des binomischen Satzes ergibt

$$\cos(nx) + \mathrm{i}\sin(nx) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^{n-k}(x) \cdot \mathrm{i}^k \sin^k(x).$$

Durch Vergleich der Real- und Imaginärteile sieht man, dass

$$\begin{aligned} \cos(nx) &= T_n\big(\cos(x)\big) \\ \frac{\sin(nx)}{\sin(x)} &= U_{n-1}\big(\cos(x)\big) \end{aligned}$$

gilt, wobei T_n und U_n Polynome vom Grad n sind. T_n heißen Tschebyscheff-Polynome 1. Art, U_n Tschebyscheff-Polynome 2. Art. Beachte: T_n und U_n haben ganzzahlige Koeffizienten.

5.22 Folgerung: Mit $x = \frac{\pi}{n}$ folgt

$$\cos\left(n\frac{\pi}{n}\right) \;=\; -1 \;=\; T_n\Big(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\Big) \quad \text{bzw.} \quad T_n\Big(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\Big) + 1 \;=\; 0.$$

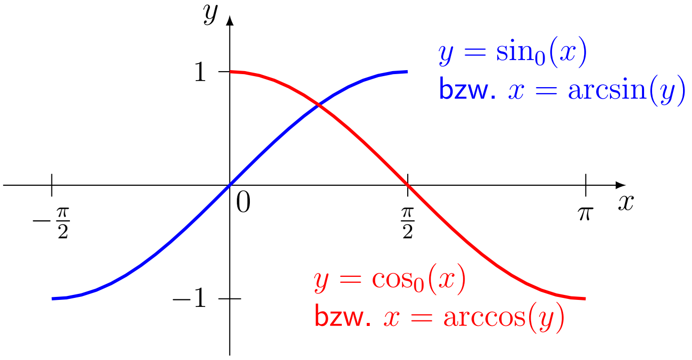
Somit ist $\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$ algebraisch und damit auch $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}$.
Mit $x = \frac{\pi}{m}$ folgt, dass $\cos\left(\frac{n\pi}{m}\right) = T_n\big(\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)\big)$ algebraisch ist und auch $\sin\left(\frac{n\pi}{m}\right)$.
Sinus und Cosinus von rationalen Vielfachen von π sind also immer algebraisch.

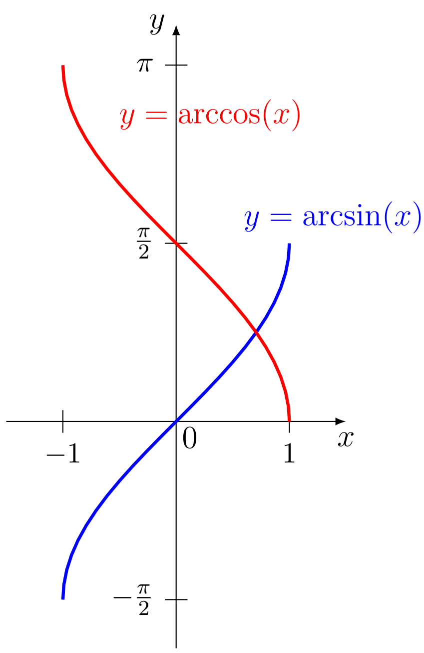
6 Die Arcusfunktionen

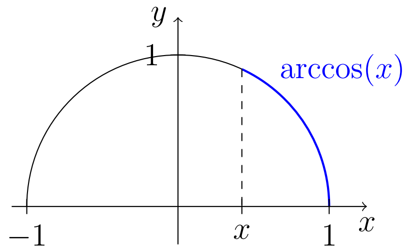
6.1 Bemerkung: Die Funktionen $\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind weder injektiv noch surjektiv. Oft werden jedoch „Umkehrfunktionen“ benötigt. Abhilfe: Definitions- und Zielmenge einschränken. Je nach Wahl der Einschränkung entstehen verschiedene Umkehrfunktionen. Man spricht von verschiedenen Zweigen der Umkehrfunktion.

6.2 Definition: **1)** Der Hauptzweig des Arcussinus ist definiert als Umkehrfunktion der Funktion $\sin_0 : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1] : x \mapsto \sin(x)$ und wird mit $\arcsin$ bezeichnet.

2) Der Hauptzweig des Arcuscosinus wird mit $\arccos$ bezeichnet und ist definiert als Umkehrfunktion von $\cos_0 : [0, \pi] \to [-1, 1] : x \mapsto \cos(x)$.







6.3 Bemerkungen: **1)** Für $x \in [-1,1]$ liefert $\arccos(x)$ die Länge des Kreisbogens (lateinisch arcus) im Einheitskreis zwischen $(0,1)$ und $(x, \sqrt{1-x^2})$.

2) Manchmal liefert $\arcsin(x)$ nicht den Wert, den man berechnen möchte.

6.4 Satz: **1)** $\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ist stetig und in $]-1,1[$ differenzierbar mit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arcsin(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2) $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ ist stetig und in $]-1,1[$ differenzierbar mit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arccos(x) \;=\; \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Beweis: a) Stetigkeit aus Satz der Analysis: Ist $f : D \to \mathrm{Bild}(f) \subseteq \mathbb{R}$ stetig und bijektiv, und ist D kompakt, dann ist f^{-1} stetig. Hier ist $D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ bzw. $D = [0,\pi]$ kompakt.

b) Wegen a) kann die Formel für die Umkehrfunktion

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f^{-1}(y) \;=\; \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y)\big)}$$

verwendet werden. Für $f = \sin_0$ und $-1 < y < 1$ folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \arcsin(y) \quad &= \quad \frac{1}{\cos\big(\arcsin(y)\big)} \\
&\underset{\text{da } -\frac{\pi}{2} < \arcsin(y) < \frac{\pi}{2}}{\overset{\cos(\arcsin(y))>0}{=}} \quad \frac{1}{\sqrt{\cos^2\big(\arcsin(y)\big)}} \\
&= \quad \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\big(\arcsin(y)\big)}} \\
&= \quad \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.
\end{aligned}$$

Entsprechend folgt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \arccos(y) \;=\; \frac{1}{-\sin\big(\arccos(y)\big)} \;\overset{\sin(\arccos(y))>0}{=}\; \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

$\square$

6.5 Satz: Für $x \in [-1,1]$ gelten

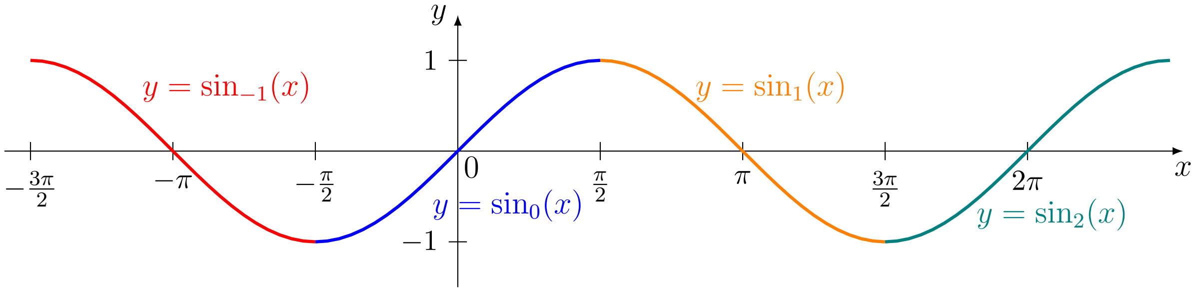
$$\begin{aligned}
\arcsin(-x) &= -\arcsin(x), \\
\arccos(-x) &= \pi - \arccos(x), \\
\arcsin(x) + \arccos(x) &= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

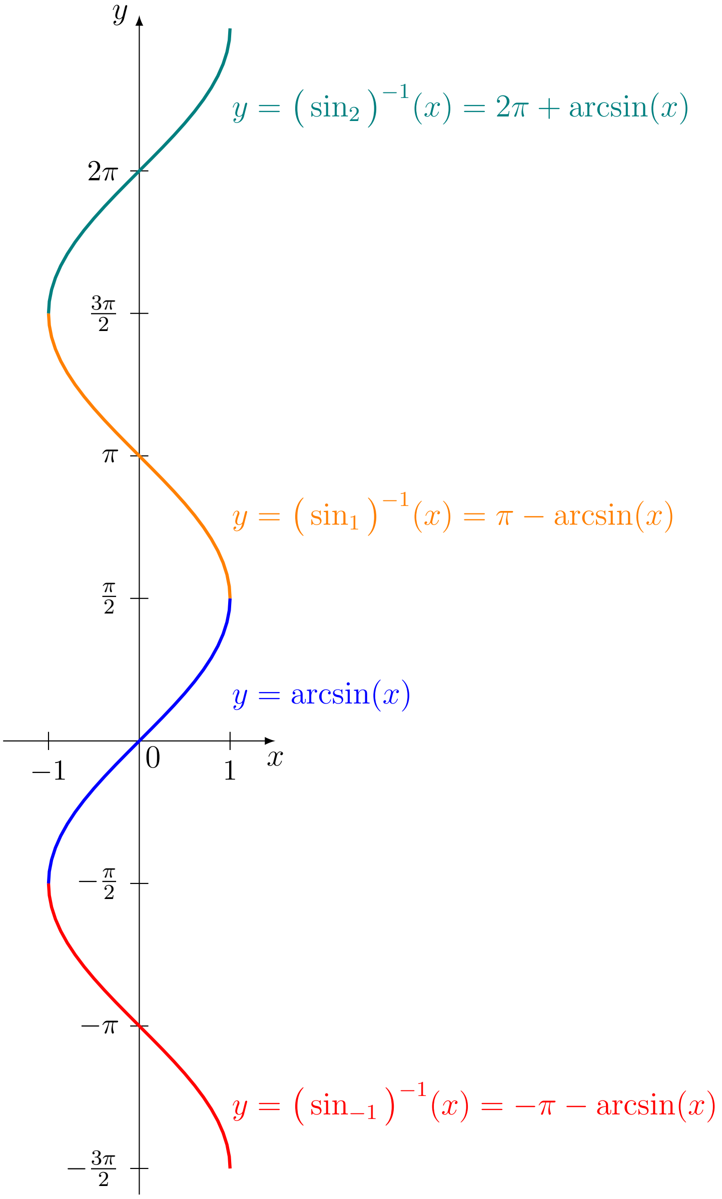
Beweis: Sei $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$. Mit $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) =: y$ folgt

$$\frac{\pi}{2} - x = \arccos(y) \ \wedge \ x = \arcsin(y).$$

$\Rightarrow \ \dfrac{\pi}{2} = \arccos(y) + \arcsin(y).$
Rest entsprechend. $\square$

6.6 Andere Zweige des Arcussinus:



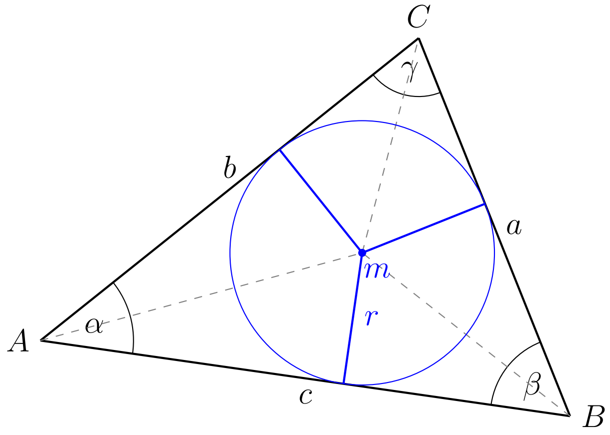


6.7 Bemerkung: Für den Arcustangens siehe Übungen.

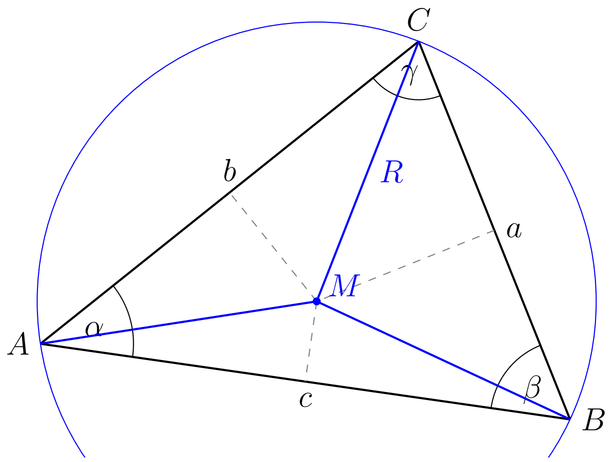
7 Berechnungen am Dreieck

7.1 Bemerkung: In Formeln schreiben wir a für die Seitenlänge der Seite a.

7.2 Bezeichnungen:



Inkreismittelpunkt m:
Schnittpunkt der Winkelhalbierenden,
$r =$ Inkreisradius.



Umkreismittelpunkt M:
Schnittpunkt der Mittelsenkrechten,
$R =$ Umkreisradius

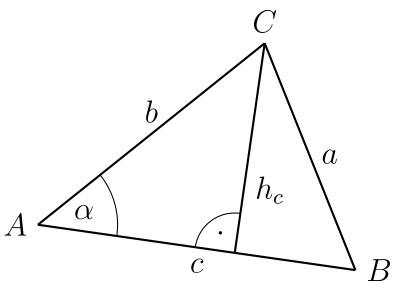
7.3 Satz: Für den Flächeninhalt eines Dreiecks gelten

$$F_\Delta \;=\; \frac{a\cdot b\cdot \sin(\gamma)}{2} \;=\; \frac{a\cdot c\cdot \sin(\beta)}{2} \;=\; \frac{b\cdot c\cdot \sin(\alpha)}{2} \;=\; \frac{r}{2}(a+b+c),$$

insbesondere

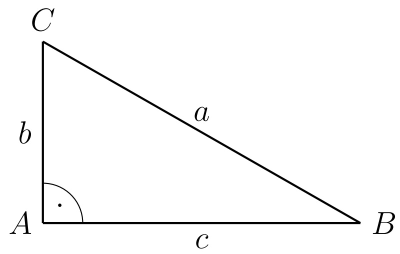
$$r \;=\; \frac{1}{a+b+c}ab\sin(\gamma) \;=\; \ldots$$

Beweis: 1) Fall $\alpha < \frac{\pi}{2}$:



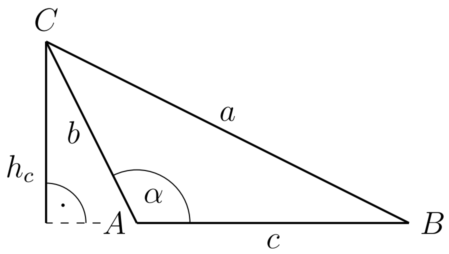
$$F_\Delta = \frac{1}{2}c\cdot h_c = \frac{1}{2}c\cdot b\cdot \sin(\alpha)$$

Fall $\alpha = \frac{\pi}{2}$:



$$F_\Delta = \frac{1}{2} c \cdot b = \frac{1}{2} c \cdot b \cdot \sin(\alpha)$$

Fall $\alpha > \frac{\pi}{2}$:



$$F_\Delta = \frac{1}{2} c \cdot h_c = \frac{1}{2} c \cdot b \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{2} c \cdot b \cdot \sin(\alpha)$$

2) Genauso $F_\Delta = \frac{1}{2} ac \sin(\beta)$ und $F_\Delta = \frac{1}{2} ba \sin(\gamma)$.

3) Siehe Skizze in 7.2.

$$F_\Delta = F_{ABm} + F_{BCm} + F_{CAm} = \frac{1}{2} c \cdot r + \frac{1}{2} a \cdot r + \frac{1}{2} b \cdot r.$$

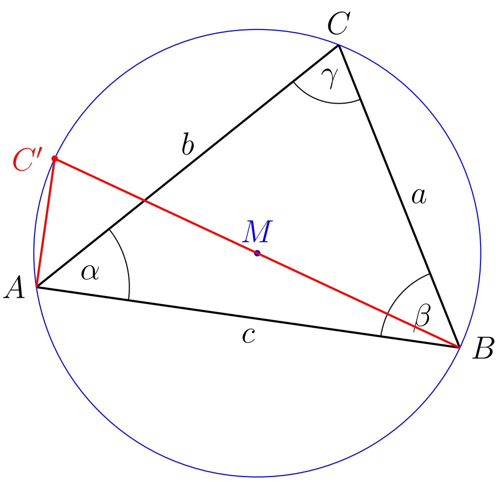
$\square$

7.4 Satz: In jedem Dreieck gilt

$$\underbrace{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}}_{\text{Sinussatz}} = 2R.$$

Beweis: **1)** $\frac{2F_\Delta}{abc} \overset{7.3}{=} \frac{\sin(\gamma)}{c} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{a}$.

2) O.B.d.A. $\alpha, \gamma < \frac{\pi}{2}$ (sonst Winkel permutieren).



Konstruiere C' als Schnitt der Geraden durch B und M mit dem Umkreis.

Umfangswinkelsatz $\Rightarrow \angle AC'B = \gamma$

Satz des Thales $\Rightarrow \angle BAC' = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \sin(\gamma) = \frac{c}{2R}$ bzw. $R = \frac{c}{2\sin(\gamma)}$.

Selber überprüfen: Bleibt der Beweis im Fall $\gamma > \frac{\pi}{2}$ gleich?

$\square$

7.5 Folgerung: Für den Flächeninhalt eines Dreiecks gilt

$$F_\Delta \overset{7.3}{=} \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2} \overset{7.4}{=} \frac{abc}{4R}.$$

7.6 Cosinussatz: In jedem Dreieck gilt

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Beweis: Übungen

7.7 Formel von Heron: In jedem Dreieck gilt mit $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$

$$F_\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Beweis:
$$\begin{aligned}
F_\Delta^2 &= \frac{1}{4}c^2h_c^2 \\
&= \frac{1}{4}c^2b^2\sin^2(\alpha) \\
&= \frac{1}{4}\Big(c^2b^2 - c^2b^2\cos^2(\alpha)\Big) \\
&\overset{\text{Cosinussatz}}{=} \frac{1}{4}\Big(c^2b^2 - \frac{1}{4}(b^2+c^2-a^2)^2\Big) \\
&= \frac{1}{16}\big(4c^2b^2 - (b^2+c^2-a^2)^2\big) \\
&\overset{\text{3. Binomi}}{=} \frac{1}{16}\big(2cb + (b^2+c^2-a^2)\big)\big(2cb - (b^2+c^2-a^2)\big) \\
&= \frac{1}{16}\big((b+c)^2 - a^2\big)\big(a^2 - (b-c)^2\big) \\
&\overset{\text{3. Binomi}}{=} \frac{1}{16}(\underbrace{b+c+a}_{=2s})(\underbrace{b+c-a}_{=2s-2a})(\underbrace{a+b-c}_{=2s-2c})(\underbrace{a-(b-c)}_{=2s-2b}).
\end{aligned}$$

□