SoSe 2024

Universität Stuttgart
PD. Dr. P. H. Lesky

Zahlen

Inhaltsverzeichnis

1 Axiomatisch konstruktiver Aufbau

1.1 Definition: Die **natürlichen Zahlen** sind eine Menge $\mathbb{N}$, auf der eine Abbildung $NF : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (Nachfolgerabbildung) definiert ist mit folgenden Eigenschaften.

(N1) $\exists!\, n_0 \in \mathbb{N} : n_0 \notin NF(\mathbb{N})$. Bezeichnung: $1 := n_0$.

(N2) NF ist injektiv.

(N3) Induktionsaxiom: Ist $M \subseteq \mathbb{N}$ mit

$$1 \in M \;\wedge\; \forall n \in \mathbb{N} : \big(n \in M \Rightarrow NF(n) \in M\big),$$

so gilt $M = \mathbb{N}$.

1.2 Existenz (von Neumann): Idee:

$$\begin{array}{l} 1 := \{\emptyset\}, \quad 2 := \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \quad 3 := \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \quad \dots \\ NF(n) := n \cup \{n\} \end{array}$$

Beachte: n besitzt n Elemente.

Unendlichkeitsaxiom: Es gibt eine Menge U mit folgenden Eigenschaften:

$$\{\emptyset\} \in U \;\wedge\; \forall x \in U : x \cup \{x\} \in U.$$

Bilde $\mathbb{N}$ als Schnittmenge aller Mengen U, die diese Eigenschaft besitzen.

1.3 Definition: Für festes $n \in \mathbb{N}$ definiere induktiv

1) $n + 1 := NF(n)$, $n + NF(m) := NF(n + m)$ für $m = 2, 3, \dots$

2) $n \cdot 1 := n$, $n \cdot NF(m) := n \cdot m + n$ für $m = 2, 3, \dots$

1.4 Satz: **1)** Für $+, \cdot$ gelten Asssotiativ-, Kommutativ- und Distributivgesetz.

2) Kürzungsregel: $\forall n, n', m \in \mathbb{N} : (n + m = n' + m \Rightarrow n = n')$.

1.5 Definition und Satz: Durch

$$\leq \;:=\; \big\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \;\big|\; n = m \;\vee\; \exists k \in \mathbb{N} : n = m + k\big\}$$

wird auf $\mathbb{N}$ eine vollständige Ordnungsrelation definiert.

1.6 Definition und Satz: **1)** Durch

$$\sim_{\mathbb{Z}} \;:=\; \big\{\big((m,n),(m',n')\big) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N})^2 : m + n' = m' + n\big\}$$

wird auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ eine Äquivalenzrelation definiert.

2) Die Äquivalenzklassen heißen **ganze Zahlen**:

$$\mathbb{Z} \;:=\; \big\{ \big[(m,n)\big] : (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \big\}.$$

3) Durch

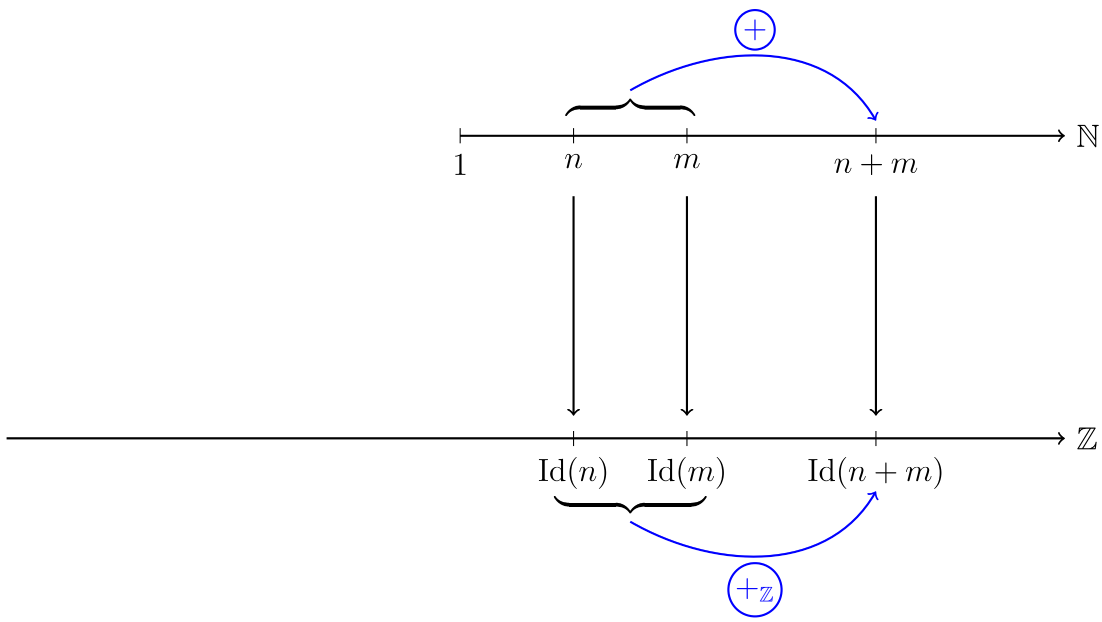
$$\big[(m,n)\big] +_{\mathbb{Z}} \big[(m',n')\big] \;:=\; \big[(m+m', n+n')\big]$$

ist auf $\mathbb{Z}$ eine wohldefinierte Addition erklärt. $(\mathbb{Z}, +_{\mathbb{Z}})$ ist eine abelsche Gruppe mit $0 = \big[(1,1)\big]$.

4) Für jede Äquivalenzklasse gibt es einen speziellen Vertreter, nämlich

$$\big[(m,n)\big] \;=\; \begin{cases} \big[(1,1)\big] & \text{falls } m = n, \\ \big[(m',1)\big] & \text{mit } m' + n = m + 1 \text{ falls } m > n, \\ \big[(1,n')\big] & \text{mit } m + n' = n + 1 \text{ falls } n > m. \end{cases}$$

Die Abbildung $\mathrm{Id} : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} : n \mapsto \big[(n+1,1)\big]$ ist injektiv und erhält die Addition.



5) Identifikation: $n := \mathrm{Id}(n) = \big[(n+1,1)\big]$ für $n \in \mathbb{N}$.
Bezeichnung: $-n := \big[(1,n+1)\big]$ für $n \in \mathbb{N}$, $0 := \big[(1,1)\big]$.
$\Rightarrow\; \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$.

6) Durch

$$\leq \;:=\; \big\{ \big[(m,n)\big], \big[(m',n')\big] \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \;\big|\; m + n' \leq m' + n \big\}$$

wird auf $\mathbb{Z}$ eine vollständige Ordnungsrelation definiert.
Es gilt $m \leq n \Leftrightarrow \mathrm{Id}(m) \leq \mathrm{Id}(n)$.

7) Multiplikation:

$$\big[(m,n)\big] \cdot_{\mathbb{Z}} \big[(m',n')\big] \;:=\; \big[(m \cdot m' + n \cdot n', m \cdot n' + m' \cdot n)\big]$$

Es gilt $\mathrm{Id}(m) \cdot_{\mathbb{Z}} \mathrm{Id}(n) = \mathrm{Id}(m \cdot n)$. Außerdem ist $\cdot_{\mathbb{Z}}$ assoziativ, kommutativ, und es gilt das Distributivgesetz.

1.7 Rationale Zahlen: Definiere

$$\begin{aligned} \sim_{\mathbb{Q}} &:= \Big\{\big((z,n),(y,m)\big) \in (\mathbb{Z}\times\mathbb{N})^2 \;\Big|\; z\cdot m = y\cdot n\Big\} \\ \mathbb{Q} &:= \Big\{\big[(z,n)\big]_{\sim_{\mathbb{Q}}} : (z,n) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}\Big\} \\ \mathrm{Id} : \mathbb{Z} &\to \mathbb{Q} : \big[(z,1)\big]_{\sim_{\mathbb{Q}}} \end{aligned}$$

Id ist injektiv. Identifiziere $\mathbb{Z}$ und $\mathrm{Id}(\mathbb{Z})$.
Definiere Addition, Multiplikation, Ordnung in $\mathbb{Q}$. Dann ist $\mathbb{Q}$ ein geordneter Körper, der $\mathbb{Z}$ enthält und das archimedische Axiom erfüllt:

$$\forall q \in \mathbb{Q}\ \exists n \in \mathbb{N} : n > q.$$

Insbesondere folgt $\frac{1}{n} \to 0$ in $\mathbb{Q}$.

1.8 Bruchschreibweise: Schreibe $\dfrac{z}{n} := \big[(z,n)\big]_{\mathbb{Q}}$. Dann

$$\frac{z}{n} = \frac{y}{m} \;\Leftrightarrow\; \big[(z,n)\big]_{\mathbb{Q}} = \big[(y,m)\big]_{\mathbb{Q}} \;\Leftrightarrow\; (z,n) \sim_{\mathbb{Q}} (y,m) \;\Leftrightarrow\; z\cdot m = y\cdot n.$$

1.9 Definition: Eine Folge (I_n) abgeschlossener Intervalle $I_n = [a_n, b_n]$ in einem geordneten Körper heißt **Intervallschachtelung**, falls

1) $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \le b_n$ und

2) (a_n) ist monoton wachsend, (b_n) ist monoton fallend und

3) $b_n - a_n \to 0$ für $n \to \infty$.

Vorstellung: Die Intervalle ziehen sich auf einen Punkt zusammen.

1.10 Beispiele: **1)** $I_n = \big[2 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\big] \;\Rightarrow \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{2\}$.

2) $a_n = \max\big\{x = 1{,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n : \alpha_j \in \{0,1,\ldots,9\} \;\wedge\; x^2 \le 2\big\}$,
$b_n = \min\big\{x = 1{,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n : \alpha_j \in \{0,1,\ldots,9\} \;\wedge\; x^2 \ge 2\big\}$
(I_n) ist Intervallschachtelung in $\mathbb{Q}$ mit $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n = \emptyset$, denn $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n \Rightarrow x^2 \le 2 \;\wedge x^2 \ge 2$.

1.11 Definition: Die reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +, \cdot, \le)$ sind der „kleinste" geordnete archimedische Körper, der $\mathbb{Q}$ enthält und **vollständig** ist, d.h. dass in $\mathbb{R}$

(i) jede Cauchy-Folge konvergiert, oder äquivalent

(ii) für jede Intervallschachtelung (I_n) existiert ein $x \in \mathbb{R}$ mit $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{x\}$, oder äquivalent

(iii) Jede monotone wachsende und beschränkte Folge konvergiert.

Konstruktion von $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{Q}$ durch Cauchy-Folgen oder durch Dedekindsche Schnitte.

1.12 Definition: **1)** $x \in \mathbb{Q}$ heißt **rational**.

2) $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ heißt **irrational**.

3) $x \in \mathbb{R}$ heißt **algebraisch**, wenn es ein Polynom $p \neq 0$ mit ganzzahligen Koeffizienten gibt, so dass $p(x) = 0$ gilt.

4) $x \in \mathbb{R}$ heißt **transzendent**, wenn x nicht algebraisch ist.

1.13 Beispiele: **1)** Alle rationalen Zahlen sind algebraisch.

2) $x = \sqrt{2}$ ist irrational und algebraisch, denn x ist Nullstelle des Polynoms $p(x) = x^2 - 2$.

3) Die eulersche Zahl e und Kreiszahl π sind transzendent.

1.14 Bemerkung:: $\mathbb{R}$ kann zum Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen erweitert werden. Dabei muss man auf die Ordnung verzichten. Es gibt keinen Körper, der $\mathbb{C}$ als Teilkörper enthält.
Für genaueres siehe *Zahlen* von Ebbinghaus.

2 Der euklidische Algorithmus

2.1 Definition: Für $m, n \in \mathbb{N}$ ist

1) $\mathrm{ggT}(m,n) := \max\{l \in \mathbb{N} : l \text{ teilt } m \ \wedge l \text{ teilt } n\}$ der **größte gemeinsame Teiler**,

2) $\mathrm{kgV}(m,n) := \min\{k \in \mathbb{N} : m \text{ teilt } k \ \wedge n \text{ teilt } k\}$ das **kleinste gemeinsame Vielfache**.

Es gilt $\mathrm{ggT}(m,n) \cdot \mathrm{kgV}(m,n) = m \cdot n$ (Beweis über Primfaktorzerlegung).

2.2 Teilen mit Rest: Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Dann existieren $k, r \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ mit

$$m \ = \ k \cdot n + r \ \wedge \ 0 \leq r \leq n - 1. \qquad (*)$$

k, r sind eindeutig.

Beweis: Offensichtlich gilt

$$k = \max\{j \in \mathbb{N} : j \cdot n \leq m\} \text{ und } r = m - k \cdot n.$$

Daran sieht man Existenz und Eindeutigkeit. □

2.3 Teilen mit Rest erhält den $\mathbf{ggT}$: Seien m, n, k, r wie in $(*)$, zusätzlich $r > 0$. Dann

$$\mathrm{ggT}(m,n) \ = \ \mathrm{ggT}(n,r).$$

Beweis: **1)** $m = l_1 \cdot \mathrm{ggT}(m,n)$, $n = l_2 \cdot \mathrm{ggT}(m,n)$
$\Rightarrow$ $r = m - kn = (l_1 - kl_2)\mathrm{ggT}(m,n)$
$\Rightarrow$ $\mathrm{ggT}(m,n)$ teilt r und n
$\Rightarrow$ $\mathrm{ggT}(m,n) \leq \mathrm{ggT}(n,r)$

2) $\mathrm{ggT}(n,r)$ teilt $m = kn + r$ und n $\Rightarrow \mathrm{ggT}(n,r) \leq \mathrm{ggT}(m,n)$. □

2.4 Euklidischer Algorithmus: Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$.
Definiere $r_1, r_2, \ldots, r_N$ rekursiv durch

$$\begin{aligned} m &= k_1 n + r_1, & 0 < r_1 \leq n-1 \\ n &= k_2 r_1 + r_2, & 0 < r_2 \leq r_1 - 1 \\ r_1 &= k_3 r_2 + r_3, & 0 < r_3 \leq r_2 - 1 \end{aligned}$$

In jedem Schritt wird r_j kleiner $\Rightarrow$ nach endlich vielen Schritten $r_{N+1} = 0$

$$r_{N-1} = k_{N+1} r_N + 0, \quad r_N \neq 0$$

Nach letztem Satz: $\mathrm{ggT}(m,n) = \mathrm{ggT}(n,r_1) = \mathrm{ggT}(r_1,r_2) = \ldots = \mathrm{ggT}(r_{N-1},r_N) = r_N$.

2.5 Beispiel: $\mathrm{ggT}(288, 228) = 12$:

$$\begin{array}{rcl|rcl} 288 &=& 1 \cdot 228 + 60 & 60 &=& 288 - 228 \\ 228 &=& 3 \cdot 60 + 48 & 48 &=& 228 - 3 \cdot 60 \;=\; 228 - 3 \cdot (288 - 228) \;=\; (-3) \cdot 288 + 4 \cdot 228 \\ 60 &=& 1 \cdot 48 + 12 & 12 &=& 60 - 1 \cdot 48 \;=\; (288 - 228) - (-3 \cdot 288 + 4 \cdot 228) \\ 48 &=& 4 \cdot 12 + 0 & &=& 4 \cdot 288 - 5 \cdot 228 \\ \multicolumn{3}{l|}{\Rightarrow \mathrm{ggT}(288,228) = 12} & \multicolumn{3}{l}{\Rightarrow \mathrm{ggT}(288,228) \;=\; 4 \cdot 288 - 5 \cdot 228} \end{array}$$

2.6 Satz: Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es $k, l \in \mathbb{Z}$, so dass

$$km + ln = \mathrm{ggT}(m,n). \qquad (*)$$

Beweis: Erweiterter Euklidischer Algorithmus, siehe letztes Beispiel. □

2.7 Bemerkung: Ist (k_0, l_0) eine Lösung von $(*)$, so sind alle Lösungen von $(*)$ durch

$$(k,l) = \left(k_0 + j\frac{\mathrm{kgV}(m,n)}{m}, l_0 - j\frac{\mathrm{kgV}(m,n)}{n}\right) \quad (j \in \mathbb{Z})$$

gegeben.

2.8 Beispiel: Aus dem euklidischen Algorithmus in 2.5 folgt

$$\begin{aligned} \frac{288}{228} &= 1 + \frac{60}{228} = 1 + \frac{1}{\frac{228}{60}} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{60}{48}}} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}} \\ \frac{228}{60} &= 3 + \frac{48}{60} \\ \frac{60}{48} &= 1 + \frac{12}{48} = 1 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

3 Endliche Kettenbrüche

3.1 Vorbemerkung: Ein endlicher Kettenbruch ist ein Ausdruck der Form

$$[k_1, k_2, k_3, k_4, k_5] := \; k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \frac{1}{k_3 + \frac{1}{k_4 + \frac{1}{k_5}}}}.$$

Letztes Beispiel: Jedes $x \in \mathbb{Q}$, $x > 0$ lässt sich als endlicher Kettenbruch mit $k_1 \in \mathbb{N}_0$, $k_j \in \mathbb{N}$ darstellen. Umgekehrt stellt jeder Kettenbruch eine rationale Zahl dar.

3.2 Definition: Seien $N \in \mathbb{N}$, $k_1, \dots k_N \in \mathbb{Q}$ mit $k_2, \dots, k_N > 0$ und rekursiv

$$\begin{aligned} [k_1] \;&:=\; k_1, \quad [k_1, k_2] \;:=\; k_1 + \frac{1}{k_2} \\ [k_1, k_2, \dots, k_{n+1}] \;&:=\; \left[k_1, k_2, \dots, k_{n-1}, k_n + \frac{1}{k_{n+1}}\right] \quad \text{für } n = 2, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Dann heißt $[k_0, k_1, \dots, k_N]$ **Kettenbruch** mit den **Teilnennern** k_j. Der Kettenbruch $[k_0, k_1, \dots, k_n]$ ($n \leq N$) heißt n-ter **Näherungsbruch** für $[k_0, k_1, \dots, k_N]$.

3.3 Satz: $[k_1, k_2, \dots, k_n] \;=\; k_1 + \dfrac{1}{[k_2, \dots, k_n]} \;\overset{3.2}{=}\; \big[k_1, [k_2, \dots, k_n]\big]$ für $2 \leq n \leq N$.

Beweis: Induktionsanfang $n = 2$: $[k_1, k_2] = k_1 + \dfrac{1}{k_2} = k_1 + \dfrac{1}{[k_2]}$ klar nach Definition.

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} [k_1, k_2, \dots, k_{n+1}] \;&\overset{3.2}{=}\; \left[k_1, \dots, k_{n-1}, k_n + \frac{1}{k_{n+1}}\right] \\ &\overset{\text{Ind.Vor.}}{=}\; k_1 + \cfrac{1}{\left[k_2, \dots, k_{n-1}, k_n + \frac{1}{k_{n+1}}\right]} \\ &\overset{3.2}{=}\; k_1 + \frac{1}{[k_2, \dots, k_{n+1}]} \end{aligned}$$

Induktionsschluss: Die Formel gilt für $n = 2, \dots, N$. □

3.4 Anmerkung: Später in der Anwendung immer $k_1, \dots, k_N \in \mathbb{N}$ wie in 3.1, nur falls notwendig $k_1 \in \mathbb{Z}$.

3.5 Satz: Seien $k_1, \dots, k_N \in \mathbb{Q}$, $k_2, \dots, k_N > 0$. Dann gilt

$$[k_1, \dots, k_n] \;=\; \frac{p_n}{q_n} \quad \text{für } n = 1, \dots, N, \tag{$*$}$$

wobei $p_n, q_n \in \mathbb{Q}$ durch folgende Rekursion gegeben sind:

$$\left.\begin{array}{l} p_1 = k_1 \;\wedge\; q_1 = 1, \\ p_2 = k_2 k_1 + 1 \;\wedge\; q_2 = k_2, \\ p_n = k_n p_{n-1} + p_{n-2} \;\wedge\; q_n = k_n q_{n-1} + q_{n-2} \quad (3 \leq n \leq N). \end{array}\right\} \tag{$**$}$$

Beweis: Induktionsanfang: $n=1$: $[k_1] = k_1 = \frac{p_1}{q_1}$ ✓

$n=2$: $[k_1, k_2] = k_1 + \frac{1}{k_2} = \frac{k_1 k_2 + 1}{k_2} = \frac{p_2}{q_2}$ ✓

Induktionsschritt: Sei $2 \le n \le N-1$

Induktionsvoraussetzung: $[k_1, \dots, k_n] = \frac{p_n}{q_n} = \frac{k_n p_{n-1} + p_{n-2}}{k_n q_{n-1} + q_{n-2}}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ [k_1, \dots, k_{n+1}] &= \left[k_1, \dots, k_{n-1}, k_n + \frac{1}{k_{n+1}}\right] \\
&\overset{\text{Ind.Vor.}}{=} \frac{\left(k_n + \frac{1}{k_{n+1}}\right) p_{n-1} + p_{n-2}}{\left(k_n + \frac{1}{k_{n+1}}\right) q_{n-1} + q_{n-2}} \\
&= \frac{p_n + \frac{1}{k_{n+1}} p_{n-1}}{q_n + \frac{1}{k_{n+1}} q_{n-1}} \cdot \frac{k_{n+1}}{k_{n+1}} \\
&= \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Induktionsbehauptung ist bewiesen

Induktionsschluss: $(*)$ gilt. □

3.6 Folgerung: Es gelten

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} & q_{n+1} \\ p_n & q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{n+1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_n & q_n \\ p_{n-1} & q_{n-1} \end{pmatrix}$$

und $\det \begin{pmatrix} k_{n+1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1, \quad \det \begin{pmatrix} p_2 & q_2 \\ p_1 & q_1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} k_2 k_1 + 1 & k_2 \\ k_1 & 1 \end{pmatrix} = 1.$

Mit Induktion folgt

$$\det \begin{pmatrix} p_n & q_n \\ p_{n-1} & q_{n-1} \end{pmatrix} = (-1)^n.$$

3.7 Folgerung: Seien $k_1, \dots, k_N \in \mathbb{N}$. Dann gelten:

1) $p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^n$.

2) $p_n, q_n \in \mathbb{N}$ und p_n, q_n sind teilerfremd (folgt aus 1)).

3) (p_n) ist streng monoton wachsend, (q_n) ist streng monoton wachsend ab $n=2$ (siehe $(**)$). Insbesondere $p_n \ge n$ für $n \in \mathbb{N}$ und $q_n \ge n-1$ für $n \ge 2$.

4) $\left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| = \left|\frac{p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n}{q_n q_{n-1}}\right| \overset{1)}{=} \frac{1}{q_n q_{n-1}}$ für $n \ge 2$.

5) $\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_3}{q_3} < \dots < \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} < \frac{p_{2n}}{q_{2n}} < \frac{p_{2n-2}}{q_{2n-2}} < \dots < \frac{p_2}{q_2}$, denn

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \overset{1)}{=} \frac{(-1)^n}{q_n q_{n-1}} = \text{alternierend, Betrag streng monoton fallend}$$

Aus 4) und 5): Die Folge (I_n) der abgeschlossenen Intervalle $I_n = \left[\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}, \frac{p_{2n}}{q_{2n}}\right]$ bildet eine Intervallschachtelung.

6) $x = [k_1, \dots, k_N] \in I_n$ für $n \le N$ (folgt aus 5)).

3.8 Folgerung: Sei $x = [k_1, \ldots, k_N]$. Für zwei aufeinanderfolgende Näherungsbrüche $\frac{p}{q} = [k_1, \ldots, k_n]$ oder $\frac{p}{q} = [k_1, \ldots, k_{n+1}]$ gilt für mindestens einen der beiden

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| \; < \; \frac{1}{2q^2}.$$

Beweis: Annahme: $\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| \geq \frac{1}{2q_n^2} \;\wedge\; \left|x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| \geq \frac{1}{2q_{n-1}^2}$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{1}{q_n q_{n-1}} &\overset{3.7,4)}{=} \Big|\underbrace{\frac{p_n}{q_n} - x}_{} + \underbrace{x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}}_{}\Big| \\
&\qquad \text{das selbe Vorzeichen (3.7, 5))} \\
&\geq \frac{1}{2q_n^2} + \frac{1}{q_{n-1}^2} \\
\Rightarrow 0 &\geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{q_n^2} - \frac{2}{q_n q_{n-1}} + \frac{1}{q_{n-1}^2}\right) = \left(\frac{1}{q_n} - \frac{1}{q_{n-1}}\right)^2 \\
\Rightarrow q_{n-1} &= q_n \quad \lightning \quad 3.7,\ 3)
\end{aligned}$$

$\square$

3.9 Hilfssatz: Sei $x = [k_1, \ldots, k_N]$ und $k'_n = [k_n, \ldots, k_N]$ für $n \leq N$ (insbesondere $k'_1 = x$). Dann

$$x \; = \; \frac{k'_n p_{n-1} + p_{n-2}}{k'_n q_{n-1} + q_{n-2}} \quad \text{für } n = 3, \ldots, N.$$

Beweis: Induktionsanfang $n = 3$:

$$\begin{aligned}
x &\overset{3.3}{=} k_1 + \frac{1}{k'_2} \overset{3.3}{=} k_1 + \frac{1}{k_2 + \frac{1}{k'_3}} \\
&= k_1 + \frac{1}{\frac{k_2 k'_3 + 1}{k'_3}} = k_1 + \frac{k'_3}{k_2 k'_3 + 1} = \frac{k_1 k_2 k'_3 + k_1 + k'_3}{k_2 k'_3 + 1} \\
&\underset{q_1 = 1, q_2 = k_1}{\overset{p_1 = k_1, p_2 = k_1 k_2 + 1}{=}} \frac{k'_3 p_2 + p_1}{k'_3 q_2 + q_1} \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Induktionsschritt: Beachte $k'_n = [k_n, \ldots, k_N] \overset{3.3}{=} k_n + \frac{1}{k'_{n+1}}$

$$\begin{aligned}
x &\overset{\text{Ind.Vor.}}{=} \frac{k'_n p_{n-1} + p_{n-2}}{k'_n q_{n-1} + q_{n-2}} \\
&\overset{3.3}{=} \frac{\left(k_n + \frac{1}{k'_{n+1}}\right) p_{n-1} + p_{n-2}}{\left(k_n + \frac{1}{k'_{n+1}}\right) q_{n-1} + q_{n-2}} \\
&\underset{\text{für } p_n, q_n}{\overset{\text{Rekursion}}{=}} \frac{p_n + \frac{1}{k'_{n+1}} p_{n-1}}{q_n + \frac{1}{k'_{n+1}} q_{n-1}} \\
&= \frac{k'_{n+1} p_n + p_{n-1}}{k'_{n+1} q_n + q_{n-1}} \quad \text{(Induktionsbehauptung)}
\end{aligned}$$

Induktionsschluss: Die Formel ist für $n = 3, \ldots, N$ bewiesen.

$\square$

3.10 Hilfssatz: Mit $q_n' := k_n' q_{n-1} + q_{n-2}$ für $n \geq 3$ gelten

1) (q_n') ist streng monoton wachsend.

2) $x - \dfrac{p_n}{q_n} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{q_n q_{n+1}'}$ für $n = 2, \ldots, N-1$.

Beweis: **1)** Es gilt $k_n < k_n' = k_n + \frac{1}{k_{n+1}'} < k_n + 1$

$$\Rightarrow \quad q_n' \begin{cases} > \ k_n q_{n-1} + q_{n-2} \ = \ q_n \\ < \ (k_n+1) q_{n-1} + q_{n-2} \ = \ q_n + q_{n-1} \\ \qquad \leq \ k_{n+1} q_n + q_{n-1} \ = \ q_{n+1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad q_n < q_n' < q_{n+1}$$

$\Rightarrow$ (q_n') ist streng monoton wachsend.

2)
$$x - \frac{p_n}{q_n} = \frac{k_{n+1}' p_n + p_{n-1}}{k_{n+1}' q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} \overset{\text{HN}}{=} \frac{p_n(k_{n+1}' q_n - k_{n+1}' q_n - q_{n-1}) + p_{n-1} q_n}{q_{n+1}' q_n} \overset{\text{3.7, 1)}}{=} \frac{(-1)^{n+1}}{q_{n+1}' q_n}$$

□

3.11 Folgerung: **1)** $\left| x - \dfrac{p_n}{q_n} \right| < \left| x - \dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right|$.

2) $|q_n x - p_n| < |q_{n-1} x - p_{n-1}|$.

Beweis: **1)** $\left| \dfrac{(-1)^{n+1}}{q_{n+1}' q_n} \right| < \left| \dfrac{(-1)^n}{q_n' q_{n-1}} \right|$.

2) $\dfrac{1}{q_{n+1}'} < \dfrac{1}{q_n'}$ nach Definition von q_n'.

□

3.12 Bestapproximation: Seien $x = [k_1, \ldots, k_N]$, $\dfrac{p_n}{q_n} = [k_1, \ldots, k_n]$, $2 \leq n \leq N$ und $p, q \in \mathbb{N}$ mit $q \leq q_n$ und $\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$. Dann

1) $|q_n x - p_n| < |qx - p|$ (Bestapproximation 2. Art).

2) $\left| x - \dfrac{p_n}{q_n} \right| < \left| x - \dfrac{p}{q} \right|$ (Bestapproximation 1. Art).

Beweis: 1) $\Rightarrow$ 2): $\left|x-\frac{p_n}{q_n}\right| = |q_n x - p_n|\frac{1}{q_n} \underset{1)}{\overset{q\le q_n}{<}} \frac{1}{q}|qx-p| = \left|x-\frac{p}{q}\right|$.

Beweis von 1): $\boxed{\text{Fall } q = q_n:}$ Beachte $q_n' = k_n' q_{n-1} + q_{n-2}$ für $n = 3, \ldots, N-1$.

Unterfall $n = N$: $0 = |q_N x - p_N| = |qx - p_N| \overset{p\neq p_N}{<} |qx-p|$.

Unterfall $n \le N-1$: $|qx - p_n| = |q_n x - p_n| \overset{3.10}{=} \frac{1}{q_{n+1}'} < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ $|p-qx| \underset{\text{nach unten}}{\overset{\text{Dreiecksungleichung}}{\ge}} |p-p_n| - |p_n - qx| > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > |q_n x - p_n|$

$\boxed{\text{Fall } q_{n-1} < q < q_n:}$ Bestimme μ, ν so, dass

$$\begin{aligned} p &= \mu p_n + \nu p_{n-1} \\ q &= \mu q_n + \nu q_{n-1} \end{aligned}$$

Lösung:
$$\begin{aligned} pq_n - qp_n &= \nu(p_{n-1}q_n - p_n q_{n-1}) &&= \nu(-1)^{n+1} \quad \Rightarrow \mu, \nu \in \mathbb{Z}. \\ pq_{n-1} - qp_{n-1} &= \mu(p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1}) &&= \mu(-1)^n \end{aligned}$$

Aus $\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$ folgt $\nu \neq 0$, dann auch $\mu \neq 0$.

Wegen $q_{n-1} < q = \mu q_n + \nu q_{n-1} < q_n$ haben μ, ν verschiedene Vorzeichen.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad |qx-p| &= \left|(\mu q_n + \nu q_{n-1})x - (\mu p_n + \nu p_{n-1})\right| \\ &= \left| \underbrace{q_n \mu \overbrace{\left(x - \frac{p_n}{q_n}\right)}}_{\text{gleiches Vorzeichen}} \!\!{}^{\text{verschiedene Vorzeichen}} + \underbrace{q_{n-1}\nu \overbrace{\left(x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right)}} \right| \\ &\ge |\nu| \cdot |q_{n-1}x - p_{n-1}| \\ &\overset{3.11}{>} |q_n x - p_n| \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Fall } q \le q_{n-1}:}$ Wähle $m \in \mathbb{N}$, $m \ge 2$ mit $q_{m-1} < q \le q_m$ oder $m = 1$ (dann $q = q_1 = 1$).

$\Rightarrow$ $|qx-p| \overset{\text{vorige Fälle}}{>} |q_m x - p_m| \overset{3.11}{>} |q_{m+1}x - p_{m+1}| \overset{3.11}{>} \ldots > |q_n x - p_n|$. $\square$

3.13 Definition: Seien $N \in \mathbb{N}$, $k_1 \in \mathbb{Z}$, $k_2, \ldots, k_N \in \mathbb{N}$, $x = [k_1, \ldots, k_N]$. Dann heißt $[k_1, \ldots, k_N]$ **endliche Kettenbruchdarstellung** von x.

3.14 Satz: Sei $x \in \mathbb{Q}$. Dann besitzt x eine endliche Kettenbruchdarstellung.

Beweis: Wähle $M \in \mathbb{N}$, so dass $x + M > 1$.
Sei $x + M = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$, $p > q$. Wende den euklidischen Algorithmus auf p, q an und wandle die Gleichungen wie in Beispiel 2.8 in einen Kettenbruch um. Dann folgt $x + M = [k_1, \ldots, k_N]$ und daraus $x = [k_1 - M, k_2, k_3, \ldots, k_N]$. $\square$

3.15 Folgerung: Für $x \in \mathbb{R}$ gilt: x ist genau dann rational, wenn x eine endliche Kettenbruchdarstellung besitzt.

3.16 Bemerkung: Die endliche Kettenbruchdarstellung $x = [k_1, \ldots, k_N]$ ist eindeutig, wenn man $k_N \neq 1$ voraussetzt.

4 Nicht abbrechende Kettenbrüche

4.1 Satz: Sei (k_n) eine Folge in $\mathbb{N}$, $\frac{p_n}{q_n} := [k_1, \ldots, k_n]$ und

$$I_n := \left[\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}, \frac{p_{2n}}{q_{2n}}\right].$$

Dann bildet (I_n) eine Intervallschachtelung.

Beweis: 3.7, 5) $\Rightarrow$ $I_{n+1} \subseteq I_n$
3.7, 4) $\Rightarrow$ $\left|\frac{p_{2n}}{q_{2n}} - \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}\right| = \frac{1}{q_{2n-1}q_{2n}} \to 0$ für $n \to \infty$, da $q_n \geq n-1$ nach 3.7, 3). □

4.2 Definition: Seien (k_n) Folge in $\mathbb{N}$, p_n, q_n, I_n wie vorher und

$$x := \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} \text{ bzw. } \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{x\}.$$

Dann heißt $[k_1, k_2, \ldots]$ **Kettenbruchdarstellung** von x. Schreibe $x = [k_1, k_2, \ldots]$.

4.3 Bemerkung: Dies liefert nur Kettenbruchdarstellungen für $x > 1$. Für $x \leq 1$ gehe vor wie im Beweis von 3.14.

4.4 Folgerung: Voraussetzungen wie 4.2, $k'_n := [k_n, k_{n+1}, \ldots]$, $q'_n = k'_n q_{n-1} + q_{n-2}$. Dann

1) $[k_1, k_2, \ldots] = k_1 + \frac{1}{[k_2, k_3, \ldots]} = k_1 + \frac{1}{k'_2}$ (vgl. 3.3).

2) $x = \frac{k'_n p_{n-1} + p_{n-2}}{k'_n q_{n-1} + q_{n-2}}$ für $n \geq 3$ (vgl. 3.9).

3) $x - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^{n+1}}{q_n q'_{n+1}}$, $\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{1}{q_n^2}$ (vgl. 3.10 und $q'_{n+1} \geq q_n$).

4) Es gelten die Bestapproximations-Ungleichungen aus 3.12.

4.5 Beispiel: Es gilt $p_{n+1} = k_{n+1}p_n + p_{n-1}$, $q_{n+1} = k_{n+1}q_n + q_{n-1}$. Der Kettenbruch mit den kleinsten Nennern (konvergiert also am „langsamsten") ist

$$x = [1,1,1,1,\ldots]: \quad \begin{aligned} &p_1 = 1,\ q_1 = 1 \\ &p_2 = 2,\ q_2 = 1 \\ &p_{n+1} = p_n + p_{n-1},\ q_{n+1} = q_n + q_{n-1} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $(q_n) = (1, 1, 2, 3, 5, \ldots)$ ist die Folge der Fibonacci-Zahlen.
Insbesondere: Für beliebige Kettenbrüche gilt $q_n \geq f_n = n$-te Fibonacci-Zahl.

$p_n = q_{n+1} \ \Rightarrow\ \frac{p_n}{q_n} = \frac{f_{n+1}}{f_n} \to \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (Theorie der Fibonacci-Zahlen).

Hier einfacher:
$$\begin{aligned} & x = [1,1,1,\ldots] \overset{4.4,\,1)}{=} 1 + \frac{1}{[1,1,1,\ldots]} = 1 + \frac{1}{x} \\ \Rightarrow\ & x^2 - x - 1 = 0 \ \wedge\ x > 0 \\ \Leftrightarrow\ & x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

4.6 Satz: Jede irrationale Zahl $x > 1$ besitzt eine eindeutige Kettenbruchdarstellung.

Beweis: Existenz: Euklidischer Algorithmus:

$$\begin{aligned} x &= k_1 \cdot 1 + r_1, && k_1 \in \mathbb{N},\ 0 \le r_1 < 1 \\ 1 &= k_2 \cdot r_1 + r_2, && k_2 \in \mathbb{N},\ 0 \le r_2 < r_1 \\ &\vdots \\ r_{n-1} &= k_{n+1} \cdot r_n + r_{n+1}, && k_1 \in \mathbb{N},\ 0 \le r_{n+1} < r_n \end{aligned}$$

Es gilt immer $r_j > 0$. Andernfalls wäre x rational.

Behauptung: $x = [k_1, k_2, \ldots]$

Es gilt $x = k_1 + \frac{1}{\frac{1}{r_1}} = k_1 + \frac{1}{k_2 + \frac{r_2}{r_1}} = \left[k_1, k_2 + \frac{r_2}{r_1}\right]$

Mit vollständiger Induktion: $x = \left[k_1, k_2, \ldots, k_n + \frac{r_n}{r_{n-1}}\right]$

$\Rightarrow\ [k_1, \ldots, k_{2n-1}] < x < [k_1, \ldots, k_{2n}]$, also $x \in I_n$

$\overset{I_n \text{ Intervallschachtelung}}{\Rightarrow} \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{x\}$.

Eindeutigkeit: Beweise mit vollständiger Induktion, dass $(k_1, r_1), \ldots, (k_n, r_n)$ für jedes n eindeutig ist.

Induktionsanfang: Offensichtlich ist (k_1, r_1) eindeutig, siehe oben die Definition.

Nachdem r_1 bekannt ist, ist auch (k_2, r_2) eindeutig, siehe oben.

Induktionsschritt: (k_{n+1}, r_{n+1}) wird durch die Gleichung

$$r_{n-1} = k_{n+1} \cdot r_n + r_{n+1}, \text{ wobei } k_1 \in \mathbb{N} \text{ und } 0 \le r_{n+1} < r_n$$

bestimmt. Offensichtlich ist die Lösung eindeutig, wenn r_{n-1} und r_n bekannt sind. $\square$

4.7 Satz: Hat $x \in \mathbb{R}$ eine reinperiodische Kettenbruchdarstellung

$$x = [k_1, \ldots, k_n, k_1, \ldots, k_n, k_1, \ldots] := [\overline{k_1, \ldots, k_n,}],$$

dann ist x irrational und Nullstelle eines quadratischen Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten. Man sagt: x ist **quadratische Irrationalzahl**. Insbesondere ist x algebraisch.

Beweis: x ist irrational, da die Kettenbruchdarstellung nicht endlich ist.

Wegen der Periodizität gilt $k'_{n+1} = x$.

4.4, 2) $\Rightarrow\ x = \frac{k'_{n+1} p_n + p_{n-1}}{k'_{n+1} q_n + q_{n-1}} = \frac{x p_n + p_{n-1}}{x q_n + q_{n-1}}$

$\Rightarrow\ q_n x^2 + x(q_{n-1} - p_n) - p_{n-1} = 0.$ $\square$

4.8 Definition: Für $x, y \in \mathbb{R}$ sei

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad \exists a, b, c, d \in \mathbb{Z} : x = \frac{ay + b}{cy + d} \ \wedge\ ad - bc \in \{1, -1\}.$$

4.9 Satz: $\sim$ ist Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$.

Beweis: Es gelte $x \sim y$ und $y \sim z$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ x &= \frac{a_1 y + b_1}{c_1 y + d_1} = \frac{a_1 \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} + b_1}{c_1 \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} + d_1} \\ &= \frac{(a_1 a_2 + b_1 c_2) z + a_1 b_2 + d_2 b_1}{(c_1 a_2 + d_1 c_2) z + c_1 b_2 + d_1 d_2} \\ &= \frac{a_3 z + b_3}{c_3 z + d_3} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{pmatrix} a_3 & c_3 \\ b_3 & d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ b_2 & d_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad a_3 d_3 - b_3 c_3 = \det(\ldots) \cdot \det(\ldots) = \pm 1.$$

1) Reflexivität: $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 1$.

2) Symmetrie: $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$ hat ganzzahlige Einträge.

3) Transitivität klar.

□

4.10 Folgerung: $x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow x \sim 0$.

Beweis: $\Leftarrow$: Trivial

$\Rightarrow$: Sei $x = \dfrac{p}{q}$ gekürzt.

2.6: $\exists k, l \in \mathbb{Z} : kp + lq = \mathrm{ggT}(p, q) = 1$

$\Rightarrow\ \dfrac{p}{q} = \dfrac{l \cdot 0 + p}{(-k) \cdot 0 + q}$ und $lq - (-k)q = 1$.

□

4.11 Hilfssatz: Stimmen die Kettenbruchdarstellungen von x und y bis auf endliche viele Werte überein, so folgt $x \sim y$.

Beweis: Sei $x = [k_1, \ldots] = k_1 + \dfrac{1}{k_2'} = \dfrac{k_1 \cdot k_2' + 1}{1 \cdot k_2' + 0} \Rightarrow x \sim k_2' \sim k_3' \sim \ldots$

Genauso $y = [l_1, \ldots] \Rightarrow y \sim l_2' \sim l_3' \ldots$

$\exists n, m \in \mathbb{N} : k_n' = l_m' \Rightarrow x \sim k_n' = l_m' \sim y$.

□

4.12 Satz (Lagrange): Die Kettenbruchdarstellung von x ist genau dann periodisch, d.h.

$$x = \left[k_1, \ldots, k_n, \overline{k_{n+1}, \ldots, k_{n+m}}\right],$$

wenn x quadratische Irrationalzahl ist.

Beweis: $\Rightarrow$: Sei $y := [\overline{k_{n+1}, \ldots, k_{n+m}}]$. Nach 4.11 $x \sim y$, d.h.

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad \text{mit } ad - bc \in \{1, -1\}.$$

4.7: $ey^2 + fy + g = 0$ mit geeigneten $e, f, g \in \mathbb{Z}$, $e \neq 0$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ e\Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big)^2 + f\,\frac{ax+b}{cx+d} + g &= 0 \\ \Leftrightarrow\ e(ax+b)^2 + f(ax+b)(cx+d) + g(cx+d)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Also ist x Nullstelle eines quadratischen Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten.
x irrational $\Rightarrow$ Koeffizient vor x^2 ist ungleich Null.

$\Leftarrow$: Es gelte $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{Z}$ und $x = [k_1, k_2, \ldots]$. Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$

$$x \overset{\text{4.4, 2)}}{=} \frac{k'_n p_{n-1} + p_{n-2}}{k'_n q_{n-1} + q_{n-2}}.$$

Einsetzen in $ax^2 + bx + c = 0$ ergibt

$$A_n k'^2_n + B_n k'_n + C_n = 0 \qquad (*)$$

mit

$$\begin{aligned} A_n &= a p_{n-1}^2 + b p_{n-1} q_{n-1} + c q_{n-1}^2 && \in \mathbb{Z} \\ B_n &= 2a p_{n-1} p_{n-2} + b(p_{n-1} q_{n-2} + p_{n-2} q_{n-1}) + 2c q_{n-1} q_{n-2} && \in \mathbb{Z} \\ C_n &= A_{n-1} && \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

und $B_n^2 - 4A_nC_n = (b^2 - 4ac)(p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1})^2 = b^2 - 4ac$ (Nachrechnen).
Aus 4.4, 3): $p_{n-1} = q_{n-1}x + \dfrac{(-1)^{n-1}}{q'_n}$. Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned} A_n &= a\Big((q_{n-1}x)^2 + 2x\frac{(-1)^{n-1}}{q'_n} q_{n-1} + \frac{1}{q'^2_n}\Big) + b\Big(q_{n-1}x + \frac{(-1)^{n-1}}{q'_n}\Big) q_{n-1} + c q_{n-1}^2 \\ &= 2ax\frac{(-1)^{n-1}}{q'_n} q_{n-1} + a\frac{1}{q'^2_n} + b\frac{(-1)^{n-1}}{q'_n} q_{n-1} + q_{n-1}^2 \underbrace{(ax^2 + bx + c)}_{=0} \end{aligned}$$

Mit $q'_n = k'_n q_{n-1} + q_{n-2} > q_{n-1} > 1$ folgt

$$\begin{aligned} |A_n| &\leq |2ax| + |a| + |b| \\ |C_n| &= |A_{n-1} \leq |2ax| + |a| + |b| \\ |B_n|^2 &\leq |b^2 - 4ac|| + 4|A_n C_n| \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $(A_n), (B_n), (C_n)$ sind beschränkte Folgen
$A_n, B_n, C_n \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ Es gibt nur endlich viele Gleichungen $(*)$, jede hat maximal zwei Lösungen
$\Rightarrow$ $\exists n, L \in \mathbb{N} : k'_{n+L} = k'_n$
$\Rightarrow$ x hat eine periodische Kettenbruchdarstellung.

$\square$

5 Transzendente Zahlen

5.1 Definition: $x \in \mathbb{R}$ heißt **approximierbar zur Ordnung** $n \in \mathbb{N}$, falls es ein $K > 0$ gibt, so dass die Ungleichung

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| \;\leq\; \frac{K}{q^n} \;\wedge\; (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \;\wedge\; \frac{p}{q} \neq x \qquad (*)$$

unendlich viele Lösungen (p,q) besitzt.

5.2 Satz: Ist x irrational, so ist x zur Ordnung $n = 2$ approximierbar.

Beweis: Wähle $l \in \mathbb{N}$, so dass $x + l > 1$.
4.6 $\Rightarrow$ $x + l = [k_1, k_2, \ldots]$
4.4, 3) $\Rightarrow$ $\left|x + l - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{1}{q_n^2}$ $\Rightarrow$ $\left|x - \frac{p_n - lq_n}{q_n}\right| \leq \frac{1}{q_n^2}$
3.7, 3) $\Rightarrow$ (q_n) ist streng monoton wachsend $\Rightarrow$ $(p_n - lq_n, q_n)$ sind unendlich viele Lösungen. $\square$

5.3 Satz: Jede rationale Zahl x ist zur Ordnung $n = 1$ approximierbar, aber zu keiner höheren Ordnung.

Beweis: Sei $x = \frac{a}{b}$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$, a, b teilerfremd.

1) Aus 2.6: Die Gleichung

$$aq - bp \;=\; \mathrm{ggT}(a,b) = 1$$

besitzt unendlich viele Lösungen $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Also besitzt

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| \;=\; \left|\frac{a}{b} - \frac{p}{q}\right| \;=\; \left|\frac{aq - bp}{bq}\right| \;=\; \underbrace{\frac{1}{bq}}_{\neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{p}{q}} \;:=\; \frac{K}{q}$$

unendlich viele Lösungen.

2) Seien nun $n \geq 2$ und $K > 0$ fest. Ist (p,q) Lösung von $(*)$ und $\frac{p}{q} \neq \frac{a}{b} = x$, so folgt

$$\frac{K}{q^n} \;\geq\; \left|x - \frac{p}{q}\right| \;=\; \left|\frac{bp - aq}{qb}\right| \;\geq\; \frac{1}{qb}$$

und somit $Kb \geq q^{n-1}$. Diese Ungleichung wird nur von endlich vielen $q \in \mathbb{N}$ erfüllt. Aus

$$|p| \;=\; q\left|\frac{p}{q}\right| \;\leq\; q\left(\left|\frac{p}{q} - \frac{a}{b}\right| + \left|\frac{a}{b}\right|\right) \;\leq\; q\left(\frac{K}{q^n} + \frac{|a|}{b}\right)$$

folgt, dass es auch für $p \in \mathbb{Z}$ nur endlich viele Möglichkeiten gibt.
Also besitzt $(*)$ für fest gewählte $n \geq 2$ und $K > 0$ nur endlich viele Lösungen.

$\square$

5.4 Definition: Sei $x \in \mathbb{R}$. Ist x zur Ordnung n approximierbar und nicht zur Ordnung $n+1$, so heißt n die **Approximationsordnung** von x. Ist x zu jeder Ordnung n approximierbar, so ist die Approximationsordnung von x unendlich.

5.5 Satz: Ist $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $x = [k_1, k_2, \ldots]$ mit $k_1 \in \mathbb{Z}$, $k_j \in \mathbb{N}$, und ist (k_j) beschränkt, so hat x die Approximationsordnung $n = 2$. Dies gilt insbesondere für quadratische Irrationalzahlen.

Beweis: Nach 5.2 ist x zur Ordnung $n = 2$ approximierbar.

O.B.d.A. $x > 1$. Es gelte $k_j \leq M$ für $j \in \mathbb{N}$.
Zeige: Für jedes $K > 0$ besitzt die Ungleichung

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| \;\leq\; \frac{K}{q^3}$$

nur endlich viele Lösungen.
Sei $K > 0$ fest, $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ Lösung der Ungleichung und $\dfrac{p_n}{q_n} = [k_1, \ldots, k_n]$.

Fall $1 \leq q \leq q_2$: Dies sind nur endlich viele Werte für q.

Fall $q > q_2$: Wähle $j \in \mathbb{N}$ mit $q_j < q \leq q_{j+1}$.
Bestapproximation 3.12: $\left|x - \dfrac{p}{q}\right| > \left|x - \dfrac{p_{j+1}}{q_{j+1}}\right| \overset{\text{4.4, 3)}}{=} \dfrac{1}{q_{j+1}q'_{j+2}}$.
Es gilt

$$\begin{aligned} &k'_{j+2} = [k_{j+2}, k_{j+3}, \ldots] < k_{j+2} + 1 \leq M + 1, \\ &q_{j+1} = k_{j+1}q_j + q_{j-1} \leq Mq_j + q_{j-1} < (M+1)q_j \end{aligned}$$

und

$$q'_{j+2} \;=\; k'_{j+2}q_{j+1} + q_j \;<\; (M+1)q_{j+1} + q_j \;<\; \big((M+1)^2 + 1\big)q_j.$$

Nun folgt

$$\begin{aligned} \frac{K}{q^3} \;&\geq\; \left|x - \frac{p}{q}\right| \;=\; \frac{1}{q_{j+1}q'_{j+2}} \\ &>\; \frac{1}{(M+1)\big((M+1)^2+1\big)q_j^2} \\ &\geq\; \frac{1}{(M+1)\big((M+1)^2+1\big)} \cdot \frac{1}{q^2}. \end{aligned}$$

Somit ist q beschränkt, es gibt nur endlich viele Möglichkeiten für q.
Wie im Beweis von 5.3: Es gibt auch nur endlich viele Möglichkeiten für p. $\square$

5.6 Definition: Eine algebraische Zahl $x \in \mathbb{R}$ heißt **algebraisch vom Grad kleinergleich m**, falls es ein Polynom P mit ganzzahligen Koeffizienten und $\mathrm{Grad}(P) = m$ gibt, so dass $P(x) = 0$.

5.7 Satz: Ist $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ algebraisch vom Grad kleinergleich m, so lässt x keine Approximation höherer Ordnung als m zu.
Kontraposition: Ist die Approximationsordnung von x unendlich, so ist x transzendent.

Beweis: Sei $P(y) = a_m y^m + \ldots a_1 y + a_0$ mit $a_j \in \mathbb{Z}$ und $P(x) = 0$.
$\Rightarrow\ P(y) = (y-x)^k Q(y)$, Q Polynom mit $Q(y) \neq 0$ für $x - \delta < y < x + \delta$.
$\Rightarrow\ P(y) \neq 0$ für $y \in]x-\delta, x[\cup]x, x+\delta[$.
Für $\frac{p}{q} \in]x-\delta, x+\delta[$ gilt $P\left(\frac{p}{q}\right) \neq 0$, da $x \neq \frac{p}{q}$.

$$\Rightarrow \left|P\left(\frac{p}{q}\right)\right| \;=\; \frac{|a_m p^m + a_{m-1}p^{m-1}q + \ldots + a_1 p q^{m-1} + a_0 q^m|}{q^m} \;\overset{a_j,p,q\in\mathbb{Z}}{\geq}\; \frac{1}{q^m}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{p}{q} - x\right| \;=\; \frac{\left|P\left(\frac{p}{q}\right)\right|}{\left|\left(\frac{p}{q}-x\right)^{k-1} Q\left(\frac{p}{q}\right)\right|} \;\geq\; \frac{1}{q^m \cdot \max_{|y-x|\leq\delta} \left|(y-x)^{k-1}Q(y)\right|}$$

Wie im letzten Beweis erlaubt

$$\frac{K}{q^{m+l}} \;\geq\; \left|\frac{p}{q} - x\right| \;\geq\; \frac{1}{q^m M}$$

mit $l \in \mathbb{N}$ nur endlich viele Möglichkeiten für p, q.

$\square$

5.8 Beispiel: $x = [10, 10^{2!}, 10^{3!}, 10^{4!}, \ldots]$ ist transzendent. ($x = 10 + \cfrac{1}{10^2 + \cfrac{1}{10^6 + \cfrac{1}{10^{24} + \ldots}}}$)

Beweis: x ist irrational, da die Kettenbruchdarstellung nicht endlich ist.

Zeige, dass $\left|\frac{p}{q} - x\right| < \frac{1}{q^m}$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ unendlich viele Lösungen besitzt.

Kandidaten sind die Näherungsbrüche $\frac{p_n}{q_n} = [k_1, \ldots, k_n] := [10, 10^{2!}, \ldots, 10^{n!}]$.

Mit $q'_{n+1} = k'_{n+1} q_n + q_{n-1} \overset{k'_{n+1} > k_{n+1}}{>} k_{n+1}$ und $q_n \geq 1$ folgt

$$\left|\frac{p_n}{q_n} - x\right| \overset{\text{4.4, 3)}}{=} \frac{1}{q'_{n+1} q_n} \;<\; \frac{1}{k_{n+1}} \overset{k_n = 10^{n!}}{=} \frac{1}{k_n^{n+1}}.$$

Aus $q_1 = 1 < k_1 + 1$, $q_2 = k_2 < k_2 + 1$ und

$$q_{n+1} \;=\; k_{n+1} q_n + q_{n-1} \;<\; (k_{n+1} + 1) q_n$$

folgt

$$\begin{aligned}
q_n \quad &< \quad (k_n + 1) q_{n-1} \;<\; \ldots \;<\; (k_n + 1)(k_{n-1} + 1) \cdots (k_1 + 1) \\
&= \quad \left(1 + \frac{1}{k_n}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{k_1}\right) \cdot k_1 \cdots k_n \\
&< \quad 2^n \cdot 10^{1! + 2! + \ldots + n!} \\
&< \quad 10^n \cdot 10^{(n-1)(n-1)! + n!} \\
&\overset{n \leq (n-1)!}{\leq} \quad 10^{2n!} \\
&= \quad k_n^2
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{p_n}{q_n} - x\right| \;\leq\; \frac{1}{k_n^{n+1}} \;<\; \frac{1}{q_n^{(n+1)/2}} \;\leq\; \frac{1}{q_n^m} \text{ für alle } n \geq 2m - 1.$$

$\square$

6 Die eulersche Zahl e

6.1 Satz: Die Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ ist konvergent.

Beweis: Sei $a_n := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

1) (a_n) ist monoton wachsend: $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{(n+1)!}$.

2) (a_n) ist beschränkt: Für $k \geq 2$ gilt $k! = 1 \cdot \underbrace{2 \cdots k}_{k-1 \text{ Faktoren}} \geq 2^{k-1}$, gilt auch für $k = 1$.

$$\Rightarrow a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \overset{\text{geom. Reihe}}{<} 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3.$$

$\square$

6.2 Satz: Die Folge (b_n) mit $b_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ ist konvergent.

Beweis: **1)** (b_n) ist monoton wachsend: Für $n \geq 2$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{b_n}{b_{n-1}} &= \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{(n+1)^n (n-1)^{n-1}}{n^{2n-1}} \\ &= \underbrace{\frac{(n^2-1)^n}{n^{2n}}}_{=(1-\frac{1}{n^2})^n \geq 1 - \frac{n}{n^2} = \frac{n-1}{n}} \cdot \underbrace{\frac{n}{n-1}}_{>0} \geq \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n-1} = 1. \end{aligned}$$

2) (b_n) ist beschränkt:

$$\begin{aligned} b_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \overset{\text{Binomi}}{=} \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{k}}_{= \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}} \left(\frac{1}{n}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n} \\ &< \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = a_n < 3. \end{aligned}$$

$\square$

6.3 Satz: $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Beweis: **1)** $b_n \overset{\text{letzter Beweis}}{<} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} b_n \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$

2) Sei $m \in \mathbb{N}$ fest. Für $n \ge m$ nach letztem Beweis:

$$\begin{aligned} b_n \;&\ge\; \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n} \;\underset{m \text{ fest}}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}}\; a_m \\ &\Rightarrow\; \forall m \in \mathbb{N} : \lim_{n\to\infty} b_n \ge a_m \\ &\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \ge \lim_{m\to\infty} a_m \end{aligned}$$

$\square$

6.4 Definition: Die **eulersche Zahl** e ist definiert durch

$$\mathrm{e} \;:=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \;=\; \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

6.5 Bemerkung: Weitere Zugänge zu e siehe Übungen.

6.6 Satz: e ist transzendent.

Beweis: Annahme: e ist algebraisch: $\exists n \in \mathbb{N}\ \exists a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z} : a_0 + a_1\mathrm{e} + \dots a_n\mathrm{e}^n = 0$.
Für $p > n$, $p > |a_0|$, p Primzahl setze

$$P(x) \;:=\; x^{p-1}(x-1)^p(x-2)^p\cdots(x-n)^p \;=:\; \sum_{k=p-1}^{(n+1)p-1} b_k x^k.$$

Beachte:
- Für $j = 0, \dots, p-1$ und $l = 1, \dots, n$ gilt $P^{(j)}(l) = 0$,
- Für $j = 0, \dots, p-2$ gilt $P^{(j)}(0) = 0$,
- $P^{(p-1)}(0) = (p-1)!(-1)^{np}(n!)^p$ ist durch $(p-1)!$ teilbar, aber nicht durch $p!$,
- Für $j \ge p$ und $l = 0, \dots, n$ ist $P^{(j)}(l)$ durch $p!$ teilbar.

Setze $I(x) \;:=\; \int_0^x \mathrm{e}^{x-t} P(t)\,\mathrm{d}t$.

$$\begin{aligned} \overset{\text{partielle Int.}}{\Rightarrow} \quad I(x) \;&=\; \Big[-P(t)\mathrm{e}^{x-t}\Big]_{t=0}^{x} + \int_0^x \mathrm{e}^{x-t}P'(t)\,\mathrm{d}t \\ &=\; \mathrm{e}^x P(0) - P(x) + \quad {}'' \\ &\;\vdots \\ &=\; \sum_{j=0}^{(n+1)p-1} \left(\mathrm{e}^x P^{(j)}(0) - P^{(j)}(x)\right) + 0. \end{aligned}$$

Setze

$$K \;:=\; \sum_{l=0}^{n} a_l I(l) \quad \text{(wichtig: ab } l = 0\text{, obwohl } I(0) = 0\text{)}$$

1) Zeige: $|K| \geq (p-1)!$.

$$\begin{aligned}
K \;&:=\; \sum_{j=0}^{(n+1)p-1} \underbrace{\sum_{l=0}^{n} a_l \big(\mathrm{e}^l P^{(j)}(0) - P^{(j)}(l)\big)}_{=0} \\
&=\; -\sum_{j=0}^{(n+1)p-1} \sum_{l=0}^{n} a_l P^{(j)}(l) \\
&=\; \underbrace{-a_0 P^{(p-1)}(0)}_{\text{durch } (p-1)! \text{ teilbar, nicht durch } p!} \;-\; \sum_{j=p}^{(n+1)p-1} \sum_{l=0}^{n} a_l \underbrace{P^{(j)}(l)}_{\text{durch } p! \text{ teilbar}}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ K ist ganzzahlig, durch $(p-1)!$ teilbar, aber nicht durch $p!$.

2) Zeige: $\exists c_1, c_2 > 0 : |K| \leq c_1 \cdot c_2^p$.

Setze $\overline{\overline{P}} := \displaystyle\sum_{k=p-1}^{(n+1)p-1} |b_k| x^k$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\; \big|P(t)\big| \;&\leq\; \overline{\overline{P}}(|t|) \;\leq\; \overline{\overline{P}}(|x|) \text{ für } |t| \leq |x| \\
\Rightarrow\; \big|I(x)\big| \;&\leq\; \int_0^x \mathrm{e}^{x-t} \overline{\overline{P}}(|t|)\,\mathrm{d}t \;\leq\; \overline{\overline{P}}(x) \cdot x\mathrm{e}^x \text{ für } x \geq 0.
\end{aligned}$$

Wegen $\big|\overline{\overline{P \cdot Q}}(x)\big| \leq \overline{\overline{P}}(|x|) \cdot \overline{\overline{Q}}(|x|)$ gilt für $0 \leq k \leq n$

$$\overline{\overline{P}}(k) \;\leq\; k^{p-1}(k+1)^p(k+2)^p \cdots (k+n)^p \;\leq\; (2n)^{(n+1)p-1}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\; |K| \;&\leq\; \sum_{k=0}^{n} |a_k|\, I(k) \\
&\leq\; \sum_{k=0}^{n} |a_k| k \mathrm{e}^k \overline{\overline{P}}(k) \\
&\leq\; \sum_{k=0}^{n} |a_k| k \mathrm{e}^k (2n)^{(n+1)p-1} \\
&\leq\; \Bigg(\underbrace{\sum_{k=0}^{n} |a_k| \mathrm{e}^k}_{=:c_1}\Bigg)\Big(\underbrace{(2n)^{n+1}}_{=:c_2}\Big)^p
\end{aligned}$$

Hierbei sind c_1, c_2 unabhängig von p (n, a_k sind fest).

1) und 2) $\Rightarrow$ $(p-1)! \leq c_1\, c_2^p$. Wähle p genügend groß $\lightning$

$\square$

Hinweis zum Widerspruch: Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > c_2$. Beachte, dass n fest ist. Wegen $\dfrac{n+1}{n} > 1$ gilt $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{p-n} \to \infty$ für $p \to \infty$, insbesondere $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{p-n} \geq c_1 \cdot n^n$ für $p \geq p_0$. Damit folgt

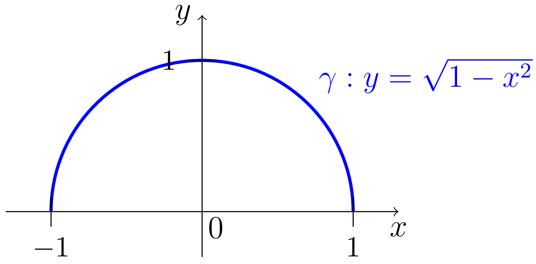
$$\begin{aligned}
p! \;&=\; p(p-1)\cdots(n+1)\cdot n! \;\geq\; (n+1)^{p-n} \cdot n! \;\geq\; (n+1)^{p-n} \\
&=\; \left(\frac{n+1}{n}\right)^{p-n} \cdot n^{p-n} \;\overset{p \geq p_0}{\geq}\; c_1 \cdot n^n \cdot n^{p-n} \;=\; c_1 \cdot n^p \;\overset{n > c_2}{>}\; c_1 \cdot c_2^p \text{ für } p \geq p_0.
\end{aligned}$$

Hinweis zum Beweis: Der Beweis beruht auf der Eigenschaft, dass $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x$ gilt.

7 Die Kreiszahl π

7.1 Vorüberlegung: Bogenlänge der Halbkreislinie γ.

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix}, \; -1 \le t \le 1 \\
x'(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}} \end{pmatrix}, \; -1 < t < 1 \\
\|x'(t)\|^2 &= 1 + \frac{t^2}{1-t^2} = \frac{1}{1-t^2} \\
L(\gamma) &= \int_{-1}^{1} \|x'(t)\| \, \mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \, \mathrm{d}t \text{ (uneigentliches Integral)}
\end{aligned}
$$

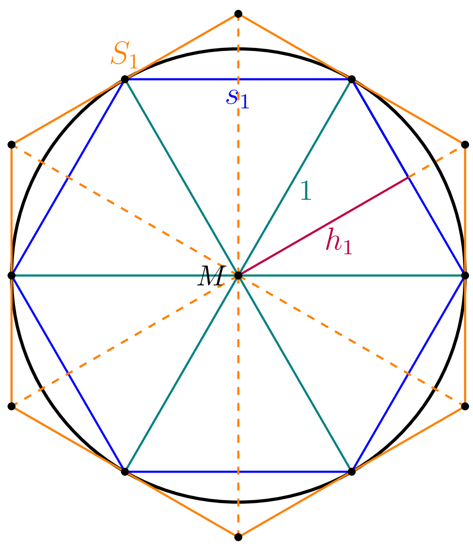


7.2 Definition: $\pi := \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \, \mathrm{d}t.$

7.3 Bemerkung: Es gilt $\pi = 2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} \, \mathrm{d}t$ (siehe Übungen).

7.4 Approximation (Archimedes): Der Einheitskreis wird durch zwei Sechsecke approximiert. Anschließend wird in jedem Schritt die Eckenzahl verdoppelt.

Schritt 1, Sechsecke:



einbeschriebenes Sechseck:

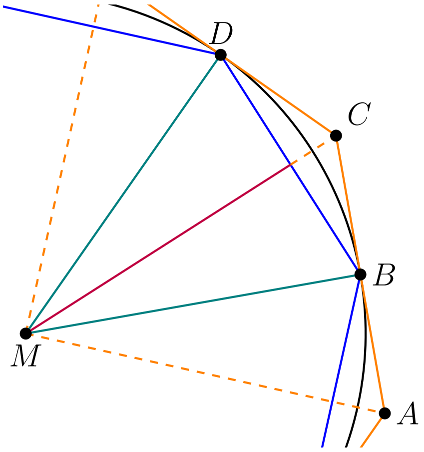
$$s_1 = 1, \quad h_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

umschreibendes Sechseck:

$$\frac{S_1}{1} = \frac{s_1}{h_1} \quad \Rightarrow S_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

$$\Rightarrow \; 3s_1 = 3 < \pi < 3S_1 = 2\sqrt{3} \approx 3{,}464.$$

Die gleichen Beziehungen im allgemeinen $3 \cdot 2^n$-Eck:

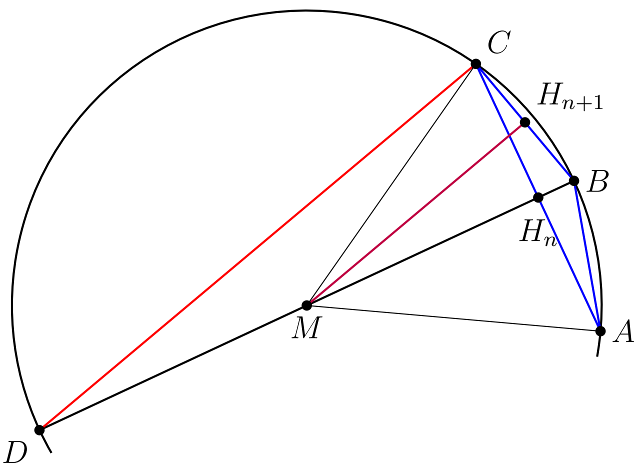


$$\frac{S_n}{1} = \frac{s_n}{h_n} \;\Rightarrow\; s_n = h_n \cdot S_n \tag{1}$$

$$1 - h_n^2 = \left(\frac{s_n}{2}\right)^2 \tag{2}$$

Flächeninhalte: $\left.\begin{aligned} A_{\triangle MBD} &= \frac{1}{2} h_n s_n \\ A_{\triangle MAC} &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot S_n \end{aligned}\right\}$ (3)

Der Iterationsschritt für das einbeschriebene $3 \cdot 2^n$-Eck:



$\angle BCD = \frac{\pi}{2}$ (Thaleskreis)
$\angle BH_{n+1}M = \frac{\pi}{2}$ (Höhe im Dreieck MBC)

Beachte: $MH_{n+1} \parallel DC \;\Rightarrow\; |DC| = 2|MH_{n+1}| = 2h_{n+1}$

Fläche $\triangle DBC$: Einerseits $A_{DBC} = \frac{1}{2} \cdot |DB| \cdot |H_nC| \quad = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} s_n = \frac{1}{2} s_n$

Andererseits $A_{DBC} = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |CD| \quad = \frac{1}{2} \cdot s_{n+1} \cdot 2h_{n+1}$

$$\Rightarrow\; s_n \;=\; 2 s_{n+1} h_{n+1}. \tag{4}$$

7.5 Satz: Seien

- l_n und a_n der Umfang und der Flächeninhalt des einbeschriebenen $3 \cdot 2^n$-Ecks,
- L_n und A_n der Umfang und der Flächeninhalt des umschreibenden $3 \cdot 2^n$-Ecks,

Nach Konstruktion sind (a_n), (l_n) monoton wachsend und (A_n), (L_n) monoton fallend. Weiter gelten:

1) $a_n = \frac{1}{2} l_{n-1}$,

2) $A_n = \frac{1}{2} L_n$,

3) $0 < A_n - a_n < \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{4^{n-1}}$,

4) $0 < L_n - l_n = 2(A_n - a_{n+1}) < 2(A_n - a_n) < \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{4^{n-2}}$.

7.6 Folgerung: $I_n := [l_n, L_n] \;\Rightarrow\; I_n$ ist Intervallschachtelung
$\Rightarrow\; (l_n), (L_n)$ sind konvergent, $\lim\limits_{n\to\infty} l_n = \lim\limits_{n\to\infty} L_n = 2\pi$
$\overset{1), 2)}{\Rightarrow} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} A_n = \frac{1}{2} \lim\limits_{n\to\infty} L_n = \pi$.

Beweis von 7.5: Beachte: $3 \cdot 2^n =$ Anzahl der Kanten bzw. Dreiecke im n-ten Schritt.

1) $a_n \overset{(3)}{=} 3 \cdot 2^n \cdot \frac{s_n h_n}{2} \overset{(4)}{=} 3 \cdot 2^n \cdot \frac{s_{n-1}}{4} = \frac{1}{2} 3 \cdot 2^{n-1} s_{n-1} = l_{n-1}$.

2) $A_n \overset{(3)}{=} 3 \cdot 2^n \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot S_n = \frac{1}{2} L_n$.

3) $0 < A_n - a_n$ nach Konstruktion.

$$
\begin{aligned}
A_n - a_n \quad &= \quad 3 \cdot 2^n \cdot \frac{1}{2}(S_n - s_n \cdot h_n) \\
&\overset{(1)}{=} \quad 3 \cdot 2^n \cdot \frac{1}{2} S_n (1 - h_n^2) \\
&\overset{(2)}{=} \quad 3 \cdot 2^{n-1} \cdot S_n \cdot \frac{s_n^2}{4} \\
&\overset{(3)}{\leq} \quad A_n \cdot \frac{S_n^2}{4} \\
&\overset{(3)}{=} \quad A_n^3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{(3 \cdot 2^n)^2} \\
&\leq \quad A_1^3 \cdot \frac{1}{9 \cdot 4^n} \\
&\overset{A_1 = 2\cdot\sqrt{3}}{=} \quad \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3 \cdot 4^{n-1}}
\end{aligned}
$$

□

7.7 Bemerkungen: **1)** π ist transzendent.

2) e^{π} ist transzendent.

3) Es ist nicht bekannt, ob π^{e} transzendent ist.