Universität Stuttgart
PD. Dr. P. H. Lesky

Elementargeometrie fürs Lehramt

Teil II: Analytische Geometrie

Inhaltsverzeichnis

1 Mathematische Grundbegriffe

1.1 Definition: Sei $G \neq \emptyset$ eine Menge.

1) Eine Abbildung $+ : G \times G \to G : (x, y) \mapsto x + y$ heißt **Verknüpfung** auf G.

2) Ist $+$ eine Verknüpfung auf G, so heißt $(G, +)$ **Gruppe**, wenn die Verknüpfung die folgenden Eigenschaften besitzt.

(AG) $x + (y + z) = (x + y) + z$ für alle $x, y, z \in G$ (**Assoziativgesetz**),

(NE) Es gibt ein **neutrales Element** $0 \in G$, d.h. $x + 0 = x = 0 + x$ für alle $x \in G$,

(IE) Zu jedem $x \in G$ existiert ein **inverses Element** $-x \in G$, d.h. es gilt $x + (-x) = 0$.

3) Eine Gruppe $(G, +)$ heißt **abelsche Gruppe**, wenn zusätzlich das Kommutativgesetz

(KG) $x + y = y + x$ für alle $x, y \in G$

gilt.

1.2 Beispiele: **1)** $(\mathbb{N}, +)$ ist keine Gruppe, da es z.B. zu $x = 1$ kein inverses Element gibt.

2) $(\mathbb{Z}, +)$ ist abelsche Gruppe, $(\mathbb{Z}, \cdot)$ und $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$ sind keine Gruppen.

3) $(\mathbb{Q}, +)$ und $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ sind abelsche Gruppen.

1.3 Definition: Eine abelsche Gruppe $(V, +)$ wird zu einem **Vektorraum** über $\mathbb{R}$ oder **reellem Vektorraum**, wenn zusätzlich eine **skalare Multiplikation** $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V : (r, \vec{v}) \mapsto r \cdot \vec{v}$ definiert ist und die folgenden Eigenschaften besitzt (für alle $r, s \in \mathbb{R}$, $\vec{v}, \vec{w} \in V$).

(V1) $r \cdot (s \cdot \vec{v}) = (r\, s) \cdot \vec{v}$ (Verträglichkeit verschiedener Multiplikationen),

(V2) $(r + s) \cdot \vec{v} = r \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{v}$,

(V3) $r \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = r \cdot \vec{v} + r \cdot \vec{w}$,

(V4) $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$ (Verträglichkeit mit neutralem Element in $\mathbb{R}$).

1.4 Beispiel: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} \text{ und } r \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\, x_1 \\ r\, x_2 \end{pmatrix}$$

ist ein Vektorraum.

1.5 Bemerkung: Durch die Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl wird der Vektor *skaliert*. Im Unterschied zu Vektoren heißen Zahlen auch *Skalare*.

1.6 Definition: Seien $A \neq \emptyset$ eine Menge, genannt **Punktraum**, und $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum. Dann heißt A **affiner Raum** (über $\mathbb{R}$), wenn eine Abbildung $\overrightarrow{(.)} : A \times A \to V : (P, Q) \to \overrightarrow{PQ}$ definiert ist und die folgenden Eigenschaften besitzt.

(A1) Zu jedem Punkt $P \in A$ und jedem Vektor $\vec{v} \in V$ gibt es genau einen Punkt $Q \in A$, so dass $\overrightarrow{PQ} = \vec{v}$ gilt.

(A2) Für alle Punkte $P, Q, R \in A$ gilt $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ (Verträglichkeit Vektoraddition mit $\overrightarrow{(.)}$).

1.7 Beispiel: Seien $A = \{(u_1, u_2) : u_1, u_2 \in \mathbb{R}\}$ und $V = \mathbb{R}^2$ der Vektorraum aus dem letzten Beispiel. Mit der Abbildung

$$\overrightarrow{(u_1, u_2), (v_1, v_2)} := \begin{pmatrix} v_1 - u_1 \\ v_2 - u_2 \end{pmatrix}$$

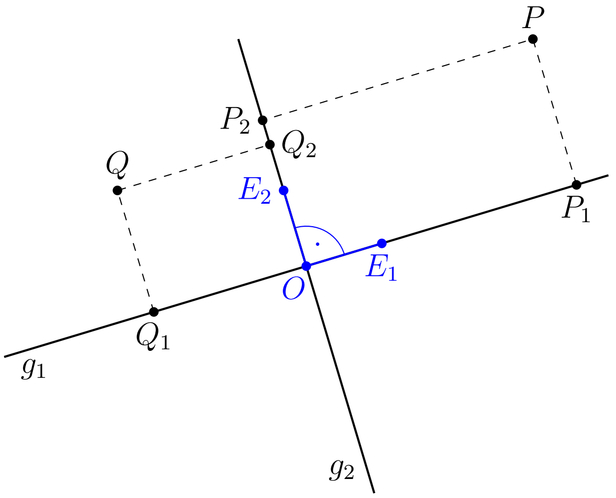
ist A ein affiner Raum. Zu (A2):

$$\overrightarrow{(u_1, u_2), (v_1, v_2)} + \overrightarrow{(v_1, v_2), (w_1, w_2)} = \begin{pmatrix} v_1 - u_1 \\ v_2 - u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 - v_1 \\ w_2 - v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 - u_1 \\ w_2 - u_2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{(u_1, u_2), (w_1, w_2)}.$$

2 Koordinaten in der euklidischen Ebene

Die Idee von René Descartes (latinisiert Renatus Cartesius): Lege ein rechtwinkliges Koordiatensystem in die Ebene. Dadurch wird jeder Punkt der Ebene durch seine Koordinaten eindeutig bestimmt. Mit den Koordinaten kann man rechnen. Dadurch wird die Ebene zu einem affinen Raum.

2.1 Definition: Seien O, E_1, E_2 drei verschiedene Punkte in der Ebene, so dass $\angle E_1OE_2 = 90°$ und $\overline{OE_1} = \overline{OE_2}$. Dann definiert (O, E_1, E_2) ein **kartesisches Koordinatensystem**.



$P : x_1 > 0,\ x_2 > 0$
$Q : x_1 < 0,\ x_2 > 0$

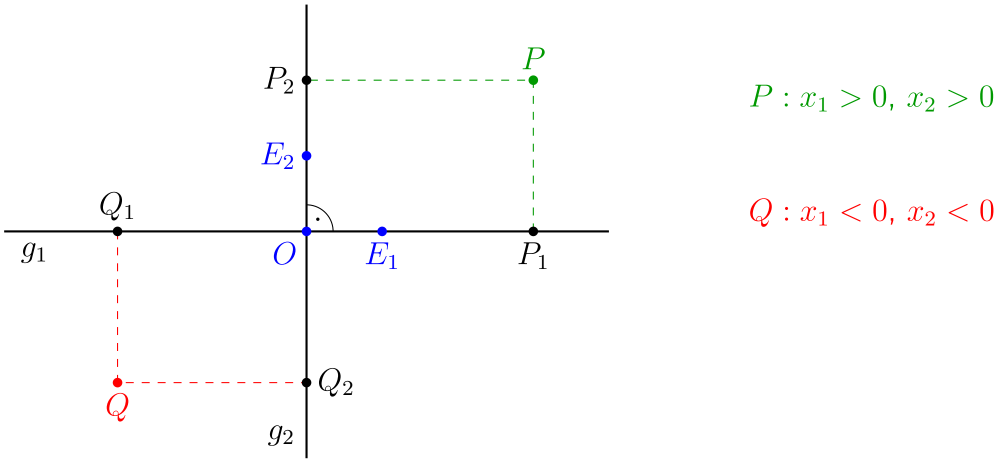
Ist P ein Punkt der Ebene, dann sei P_1 der Schnittpunkt der zu OE_2 parallelen Geraden durch P mit der Geraden g_1 durch O und E_1. Die $\boldsymbol{x_1}$**-Koordinate** von P ist definiert durch

$$x_1 := \begin{cases} 0 & \text{falls } P_1 = O \\ +\dfrac{\overline{OP_1}}{\overline{OE_1}} & \text{falls } \angle E_1OP_1 = 0° \\ -\dfrac{\overline{OP_1}}{\overline{OE_1}} & \text{falls } \angle E_1OP_1 = 180° \end{cases}$$

Entsprechend ist die x_2-Koordinate von P definiert.

2.2 Satz: Sei $A = \{(u_1, u_2) : u_1, u_2 \in \mathbb{R}\}$. Dann ist die Abbildung, die jeden Punkt der Ebene auf sein Koordinatenpaar $(x_1, x_2) \in A$ abbildet, bijektiv.

Beweis: Man gibt die Umkehrabbildung an. Sei $(u_1, u_2) \in A$ gegeben.



Wähle P_1 auf der Geraden g_1 durch O und E_1, so dass

$$
\begin{array}{llll}
\angle E_1OP_1 = 0^\circ & \text{und } \dfrac{\overline{OP_1}}{\overline{OE_1}} = u_1 & \text{falls } u_1 > 0 \\
\angle E_1OP_1 = 180^\circ & \text{und } \dfrac{\overline{OP_1}}{\overline{OE_1}} = -u_1 & \text{falls } u_1 < 0 \\
P_1 = O & & \text{falls } u_1 = 0
\end{array}
$$

Wähle P_2 entsprechend auf der Geraden g_2 durch O und E_2.

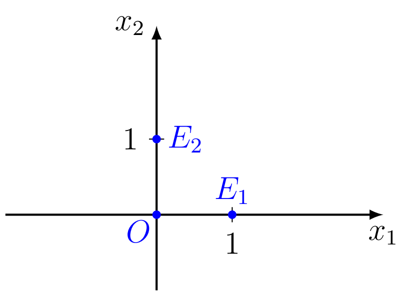
Schnitt der Parallelen zu g_2 durch P_1 mit der Parallelen zu g_1 durch P_2 ergibt den Punkt P, dessen Koordinaten (u_1, u_2) sind.

$\square$

2.3 Definition: Hat ein Punkt P die Koordinaten (x_1, x_2), so schreibt man $P(x_1, x_2)$ (in der Schule $P(x_1 \mid x_2)$).

2.4 Beispiele: $O(0, 0)$, $E_1(1, 0)$, $E_2(0, 1)$.

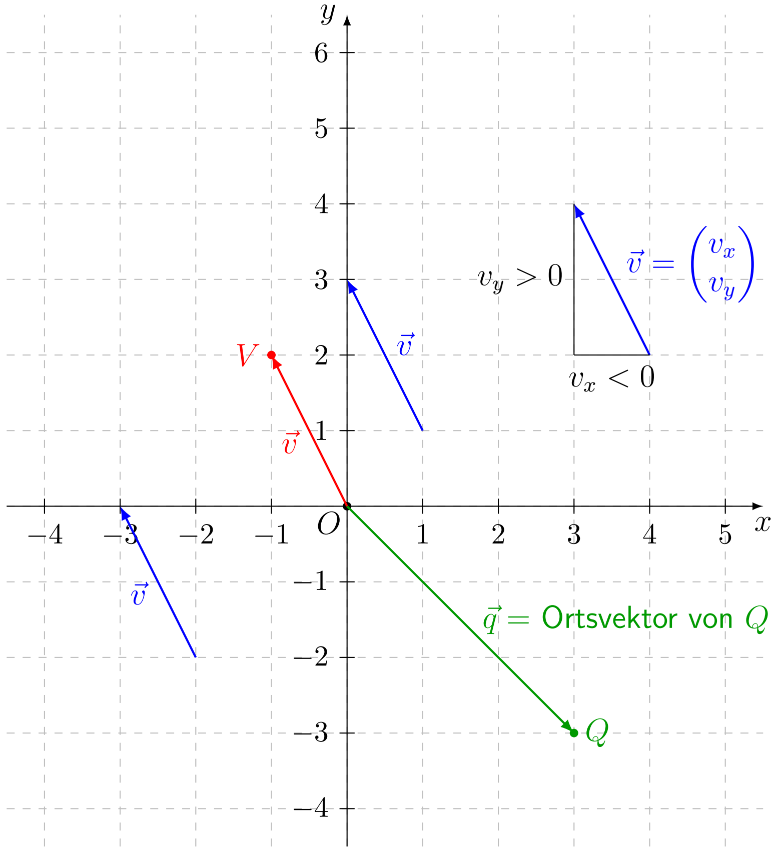
2.5 Definition: Man nennt O den **Ursprung**, g_1 die $\boldsymbol{x_1}$**-Achse**, g_2 die $\boldsymbol{x_2}$**-Achse** und versieht die Achsen mit einem Pfeil, der in Richtung wachsender x_1- bzw. x_2-Koordinaten zeigt.



3 Vektoren

3.1 Grundvoraussetzung: Im Folgenden setzen wir voraus, dass in der Ebene ein kartesisches Koordinatensystem mit x- und y-Achse festgelegt ist. Alle Koordinatenangaben beziehen sich auf ein solches Koordinatensystem.

3.2 Definition: **1)** Ein **Vektor** $\vec{v}$ ist eine Verschiebungsvorschrift in der Ebene.



2) Vektoren kann man durch ihre Verschiebungspfeile darstellen. Ist v_x die Verschiebung in x-Richtung, v_y die Verschiebung in y-Richtung, so schreibt man

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}.$$

Für die Nullverschiebung schreibt man $\vec{0} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (**Nullvektor**).

3) Die Menge aller Vektoren bezeichnet man mit $\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} : v_x, y_y \in \mathbb{R} \right\}$.

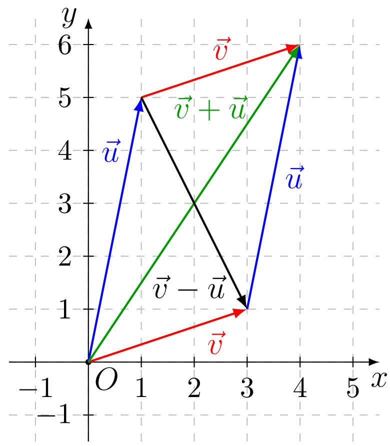
4) Derjenige Pfeil des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, der im Ursprung O startet, heißt **Standard-Pfeil** von $\vec{v}$. Er zeigt auf den zu $\vec{v}$ **gehörenden Punkt** $V(v_x, v_y)$.

5) Ist ein Punkt $Q(x_Q, y_Q)$ gegeben, so heißt $\vec{q} := \begin{pmatrix} x_Q \\ y_Q \end{pmatrix}$ **Ortsvektor** von Q. Umgekehrt ist Q der zu $\vec{q}$ gehörende Punkt.

3.3 Definition: **1)** **Addition** zweier Vektoren $\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{R}^2$ durch Aneinandersetzen:

$$\vec{v} + \vec{u} \;=\; \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \;:=\; \begin{pmatrix} v_x + u_x \\ v_y + u_y \end{pmatrix}.$$

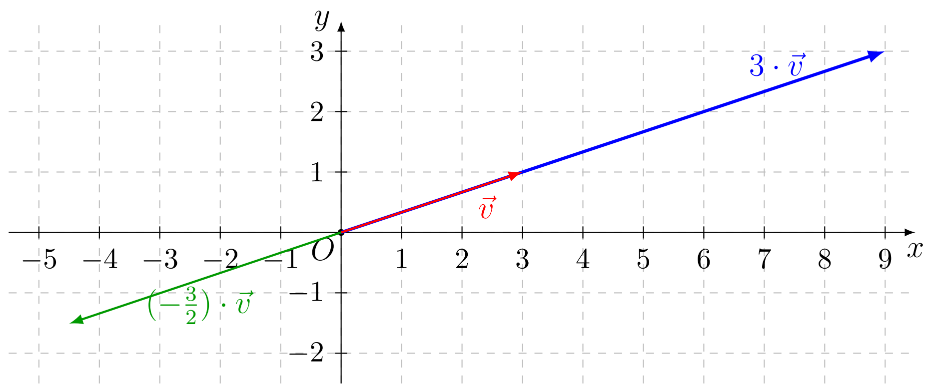
Hinweis zur Differenz: $(\vec{v} - \vec{u}) + \vec{u} = \vec{v}$.



2) Multiplikation einer Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ mit einem Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ durch Skalierung des Vektors:

$$\lambda \cdot \vec{v} \;=\; \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \;:=\; \begin{pmatrix} \lambda v_x \\ \lambda v_y \end{pmatrix}$$

(**skalare Multiplikation**).



3.4 Bemerkung: Mit diesen Rechenoperationen bildet $\mathbb{R}^2$ einen Vektorraum.

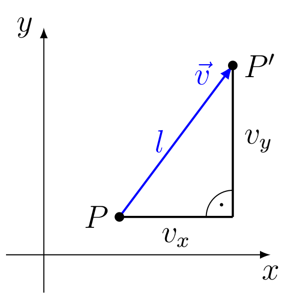
3.5 Definition: Sei $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$. Die **Norm** oder **Länge** von $\vec{v}$ definiert man durch

$$\|\vec{v}\| \;:=\; \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

3.6 Folgerung: Für $\lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ gilt $\|\lambda \cdot \vec{v}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{v}\|$.

3.7 Satz: Die Norm des Vektors $\vec{v}$ ist gleich der Länge jedes seiner Pfeile. Insbesondere: Wird der Punkt P durch die Verschiebung $\vec{v}$ auf den Punkt P' verschoben, so gilt $\|\vec{v}\| = \overline{PP'}$.

Beweis:

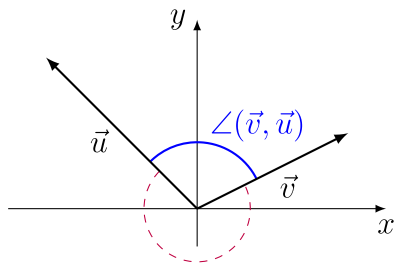


Pythagoras: $l^2 = v_x^2 + v_y^2$
$\Rightarrow\;\; l = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \|\vec{v}\|$

$\square$

4 Winkel und Skalarprodukt

4.1 Definition: **1)** Seien $\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$. Der **Winkel** $\angle(\vec{v}, \vec{u})$ zwischen $\vec{v}$ und $\vec{u}$ ist definiert als das Minimum der eingeschlossenen Winkel ihrer Standard-Pfeile.



Es gilt also $0° \leq \angle(\vec{v}, \vec{u}) \leq 180°$.

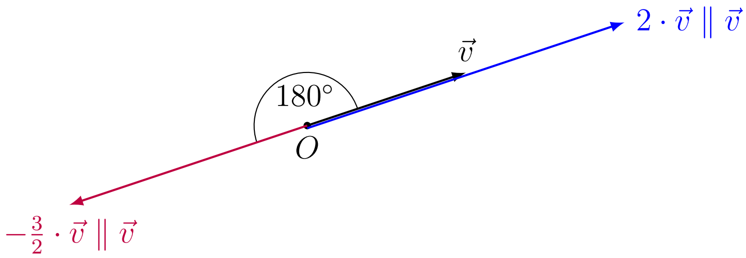
Dies ist ein nicht orientierter Winkel, es gilt $\angle(\vec{v}, \vec{u}) = \angle(\vec{u}, \vec{v})$.

Außerdem $\angle(-\vec{v}, \vec{u}) = 180° - \angle(\vec{v}, \vec{u})$

2) $\vec{v}$ und $\vec{u}$ heißen **orthogonal**, falls $\angle(\vec{v}, \vec{u}) = 90°$ oder $\vec{v} = \vec{0}$ oder $\vec{u} = \vec{0}$. Schreibe $\vec{v} \perp \vec{u}$.

3) $\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$ heißen **parallel**, falls $\angle(\vec{v}, \vec{u}) = 0°$ oder $\angle(\vec{v}, \vec{u}) = 180°$ gilt. Schreibe $\vec{v} \parallel \vec{u}$.

4.2 Satz: $\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$ sind genau dann parallel, wenn es ein $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\vec{u} = \lambda \cdot \vec{v}$ gilt.



Ohne Beweis.

4.3 Definition: Das **Skalarprodukt** von $\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{R}^2$ ist

$$\vec{v} \bullet \vec{u} \;=\; \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \;:=\; v_x\, u_x + v_y\, u_y.$$

4.4 Bemerkungen: **1)** Unterscheide das Skalarprodukt von der skalaren Multiplikation.

2) Das Skalarprodukt zweier Vektoren ergibt einen Skalar.

4.5 Eigenschaften: **1)** $\vec{v} \bullet \vec{u} = \vec{u} \bullet \vec{v}$,

2) $\vec{v} \bullet (\vec{u} + \vec{w}) = \vec{v} \bullet \vec{u} + \vec{v} \bullet \vec{w}$.

3) $(\lambda \cdot \vec{v}) \bullet (\mu \cdot \vec{u}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot (\vec{v} \bullet \vec{u})$

4.6 Hilfssatz: Sind $\vec{v}, \vec{u} \neq \vec{0}$ parallel, so gibt es folgende zwei Fälle.

Im Fall $\angle(\vec{v}, \vec{u}) = 0°$ gilt $\vec{v} \bullet \vec{u} = \|v\| \cdot \|w\|$ und insbesondere $\vec{v} \bullet \vec{v} = \|\vec{v}\|^2$.

Im Fall $\angle(\vec{v}, \vec{u}) = 180°$ gilt $\vec{v} \bullet \vec{u} = -\|v\| \cdot \|w\|$

Beweis: Es gilt $\vec{u} = \lambda \cdot \vec{v}$ mit $\lambda > 0$ (erster Fall) bzw. $\lambda < 0$ (zweiter Fall). Daraus folgt

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \lambda v_x \\ \lambda v_y \end{pmatrix} &= v_x \cdot \lambda v_x + v_y \cdot \lambda v_y \\ &= \lambda(v_x^2 + v_y^2) \\ &= \lambda \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{v}\| \\ &= \|\vec{v}\| \cdot \frac{\lambda}{|\lambda|} \|\lambda \cdot \vec{v}\| \\ &= \frac{\lambda}{|\lambda|} \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\|\end{aligned}$$

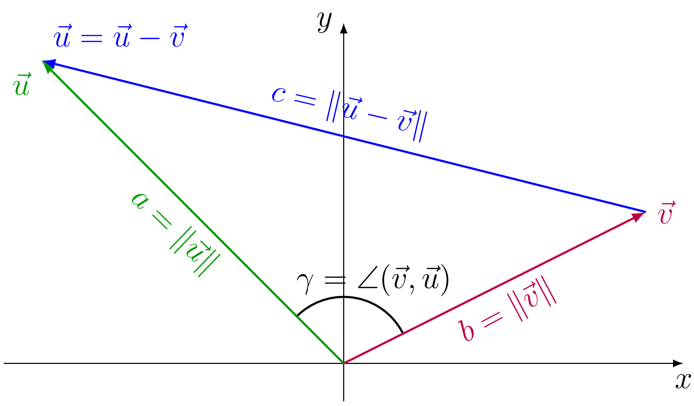
$\square$

4.7 Satz (Skalarprodukt-Winkel-Formel): Seien $\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$. Dann gilt

$$\vec{v} \bullet \vec{u} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \cos\big(\angle(\vec{v}, \vec{u})\big).$$

Beweis: Fall $\angle(\vec{v}, \vec{u}) = 0°$: Dann gilt $\cos\big(\angle(\vec{v}, \vec{u})\big) = 1$ und $\vec{v} \bullet \vec{u} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\|$ (Hilfssatz).

Fall $0° < \angle(\vec{v}, \vec{u}) < 180°$:



Cosinussatz: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$

Rechenregeln für das Skalarprodukt liefern

$$c^2 \;=\; \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 \;=\; (\vec{u} - \vec{v}) \bullet (\vec{u} - \vec{v}) \;=\; \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{v} \bullet \vec{u} + \|\vec{v}\|^2.$$

In die Gleichung des Cosinussatzes eingesetzt:

$$\begin{aligned} & \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{v} \bullet \vec{u} + \|\vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\gamma) \\ \Leftrightarrow \quad & -2\vec{v} \bullet \vec{u} &= -2\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\gamma) \\ \Leftrightarrow \quad & \vec{v} \bullet \vec{u} &= \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\gamma) \end{aligned}$$

Fall $\angle(\vec{v}, \vec{u}) = 180°$: Dann gilt $\cos\big(\angle(\vec{v}, \vec{u})\big) = -1$ und $\vec{v} \bullet \vec{u} = -\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\|$ (Hilfssatz). $\square$

4.8 Folgerung: $\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{R}^2$ sind genau dann orthogonal, wenn $\vec{v} \bullet \vec{u} = 0$ gilt, denn für $0° \leq \varphi \leq 180°$ gilt $\cos(\varphi) = 0 \;\Leftrightarrow\; \varphi = 90°$.

Insbesondere: Ist $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$, so ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} -u_y \\ u_x \end{pmatrix}$ orthogonal zu $\vec{u}$, denn $\vec{u} \bullet \vec{n} = 0$.

4.9 Satz: Für $\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{R}^2$ gilt $\|\vec{v} + \vec{u}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{u}\|$ (**Dreiecksungleichung**).

Beweis:
$$\begin{aligned} \|\vec{v} + \vec{u}\|^2 &= (\vec{v} + \vec{u}) \bullet (\vec{v} + \vec{u}) \\ &= \vec{v} \bullet \vec{v} + 2\vec{v} \bullet \vec{u} + \vec{u} \bullet \vec{u} \\ &= \|\vec{v}\|^2 + 2\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\| \cos\big(\angle(\vec{v}, \vec{u})\big) + \|\vec{u}\|^2 \\ &\leq \|\vec{v}\|^2 + 2\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\| + \|\vec{u}\|^2 \\ &= \big(\|\vec{v}\| + \|\vec{u}\|\big)^2 \end{aligned}$$

Da $\|\vec{v} + \vec{u}\|$ und $\|\vec{v} + \|\vec{u}\|$ nicht negativ sind, ergibt beiderseitiges Wurzelziehen die Behauptung. $\square$

5 Geraden

5.1 Vorbemerkung: Mit Punkten darf/kann man nicht rechnen, mit Vektoren dagegen schon.

5.2 Vereinbarung: Sei $A(a_x, a_y)$ ein Punkt. Dann bezeichnen wir den Ortsvektor $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ von A mit $\vec{a}$. Entsprechend mit $\vec{b}$ den Ortsvektor von B usw.

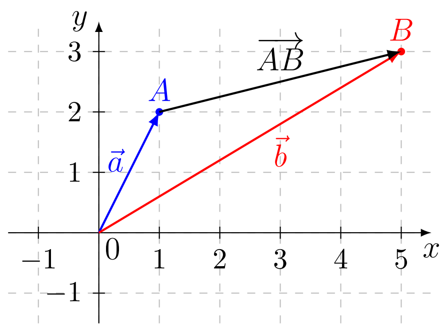
5.3 Definition: Seien A, B zwei Punkte. Der Vektor, der den Punkt A auf den Punkt B verschiebt, wird mit $\overrightarrow{AB}$ bezeichnet.

5.4 Satz: Es gelten:

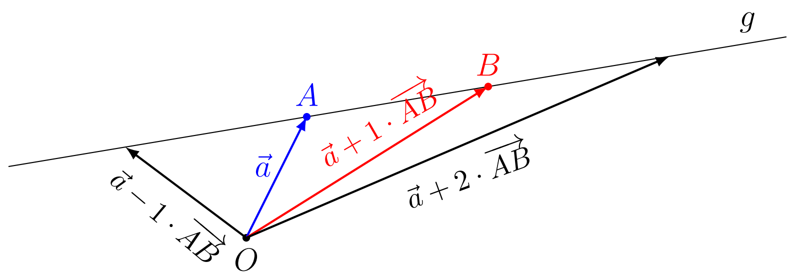
1) $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ und

2) $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ und

3) $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.



5.5 Satz: Seien A, B zwei verschiedene Punkte. Wir wissen: Es gibt genau eine Gerade g, die A und B enthält.



g ist die Menge aller Punkte, die durch Verschiebung von A mit einem beliebigen Vielfachen von $\overrightarrow{AB}$ erhalten werden können. Es gilt

$$g = \{X : \overrightarrow{OX} = \vec{a} + t \cdot \overrightarrow{AB} \text{ mit } t \in \mathbb{R}\}.$$

Man schreibt kurz

$$g : \vec{x} = \vec{a} + t \cdot \overrightarrow{AB} \quad \text{für } t \in \mathbb{R}. \qquad \text{(PD)}$$

5.6 Definition: Seien A, B, g wie vorher. Dann heißt $\vec{a}$ **Stützvektor** und $\overrightarrow{AB}$ **Richtungsvektor** der Geraden, (PD) heißt **Parameterdarstellung** von g. Der Punkt A heißt auch **Stützpunkt** der Geraden.
Achtung: Weder Stützvektor noch Richtungsvektor sind eindeutig. Wichtig ist, dass der Richtungsvektor nicht der Nullvektor ist.

5.7 Satz: Sei eine Gerade g durch einen Stützvektor $\vec{a}$ und einen Richtungsvektor $\vec{u} \neq \vec{0}$ gegeben, d.h.

$$g : \vec{x} \;=\; \vec{a} + t \cdot \vec{u} \quad \text{für } t \in \mathbb{R}.$$

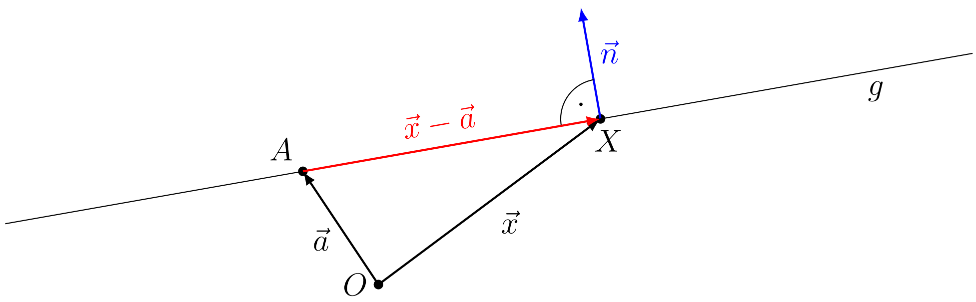
Ist $\vec{n} \neq \vec{0}$ mit $\vec{n} \perp \vec{u}$, dann gehört ein Vektor $\vec{x}$ genau dann zu einem Geradenpunkt, wenn

$$\vec{n} \bullet (\vec{x} - \vec{a}) \;=\; 0 \tag{N}$$

bzw.

$$\vec{n} \bullet \vec{x} \;=\; \vec{n} \bullet \vec{a} \tag{N'}$$

gilt. Der Vektor $\vec{n}$ heißt **Normalenvektor**, die Gleichungen (N) und (N') heißen **Normalenform** der Geraden.



5.8 Bemerkung: Seien $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix}$ und $d := \vec{n} \bullet \vec{a}$. Dann wird (N') zu

$$n_x\, x + n_y\, y = d.$$

Man kann die Menge der Geradenpunkte ohne Verwendung von Vektoren angeben durch

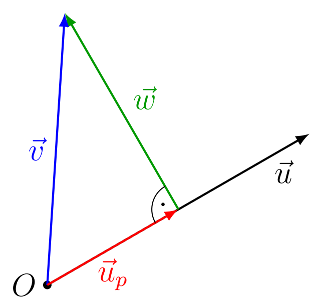
$$g \;=\; \big\{(x, y) : n_x\, x + n_y\, y = d\big\}.$$

In der Ebene ist jede Gerade gleich der Menge aller Lösungen eines linearen Gleichungssystems mit einer Gleichung.

5.9 Hilfssatz: Seien $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$ und

$$\vec{u}_p := \frac{\vec{v} \bullet \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \vec{u}, \quad \vec{w} := \vec{v} - \vec{u}_p.$$

Dann ist $\vec{w}$ orthogonal zu $\vec{u}$ und $\vec{u}_p$ parallel zu $\vec{u}$.
D.h. es gilt $\vec{v} = \vec{u}_p + \vec{w}$, und $\vec{u}_p$, $\vec{w}$ sind orthogonal. Man nennt $\vec{u}_p$ die **orthogonale Projektion** von $\vec{v}$ auf $\vec{u}$.



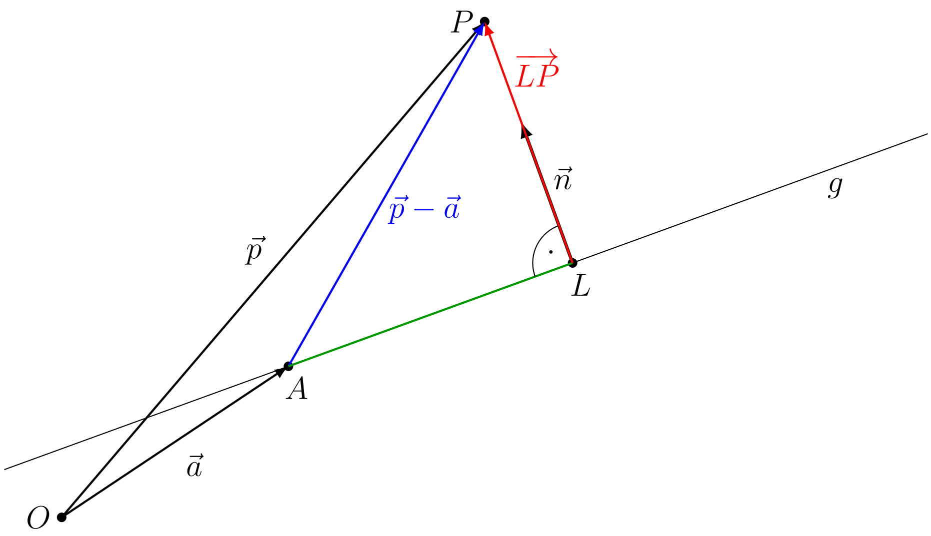
Beweis: $\vec{w} \bullet \vec{u} = \left(\vec{v} - \dfrac{\vec{v} \bullet \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \vec{u}\right) \bullet \vec{u} = \vec{v} \bullet \vec{u} - \dfrac{\vec{v} \bullet \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \vec{u} \bullet \vec{u} = 0$

$\Rightarrow$ $\vec{w}$ ist orthogonal zu $\vec{u}$. $\square$

5.10 Satz: Ist eine Gerade g durch ihre Normalenform (N) gegeben und P ein beliebiger Punkt, dann ist der Abstand von P zu g gegeben durch

$$d(P, g) \;=\; \frac{1}{\|n\|}\left|\vec{n} \bullet (\vec{p} - \vec{a})\right|.$$

Beweis:



Nach dem Hilfssatz ist $\overrightarrow{LP}$ die Projektion von $\vec{p} - \vec{a}$ auf $\vec{n}$. Also gilt

$$\overrightarrow{LP} \;=\; \frac{(\vec{p} - \vec{a}) \bullet \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \vec{n}.$$

Es folgt

$$d(P, g) \;=\; \|\overrightarrow{LP}\| \;=\; \left|\frac{(\vec{p} - \vec{a}) \bullet \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\right| \|\vec{n}\|,$$

und Kürzen von $\|\vec{n}\|$ ergibt die Behauptung. $\square$

5.11 Definition: Ist eine Gerade g durch ihre Normalenform (N) gegeben und

$$\vec{n}_0 \;:=\; \frac{1}{\|\vec{n}\|} \cdot \vec{n}$$

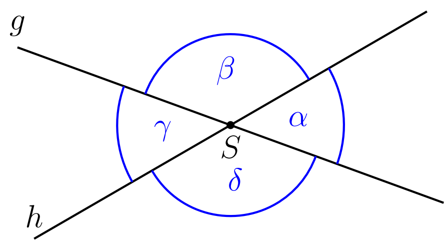
der **Normaleneinheitsvektor** (d.h. $\vec{n}_0 \perp g$ und $\|\vec{n}_0\| = 1$), so heißt

$$\vec{n}_0 \bullet (\vec{x} - \vec{a}) \;=\; 0 \qquad \text{(HNF)}$$

die **Hessesche Normalenform** der Geraden.

5.12 Folgerung: Ist eine Gerade g durch ihre Hessesche Normalenform (HNF) gegeben und ein Punkt P, dann gilt $d(P, g) \;=\; \left|\vec{n}_0 \bullet (\vec{p} - \vec{a})\right|$.

5.13 Definition: Seien zwei verschiedene Geraden g, h gegeben, die sich schneiden. Der **Schnittwinkel** von g und h ist definiert als das Minimum der Winkel, die durch die entsprechenden Halbgeraden definiert werden. Schreibe $\angle(g, h)$.



5.14 Satz: **1)** Es gilt $0° \leq \angle(g,h) \leq 90°$.

2) Sind zwei sich schneidende Geraden mit Richtungsvektoren $\vec{v}$ bzw. $\vec{u}$ gegeben, dann berechnet man den Schnittwinkel durch

$$\cos\big(\angle(g,h)\big) = \frac{1}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\|} \cdot |\vec{v} \bullet \vec{u}|.$$

Hinweis: Falls $\vec{v}\bullet\vec{u} < 0$, dann gilt $90° < \angle(\vec{v},\vec{u}) \leq 180°$. In diesem Fall gilt $\angle(g,h) = 180° - \angle(\vec{v},\vec{u})$. Dies entspricht der Multiplikation des Cosinus des Winkels mit -1. Deshalb wird der Betrag des Skalarproduktes verwendet.

6 Beweise und Berechnungen mit Vektoren

6.1 Satz: Sind in einem Viereck zwei gegenüberliegende Seiten parallel und gleich lang, dann ist das Viereck ein Parallelogramm.

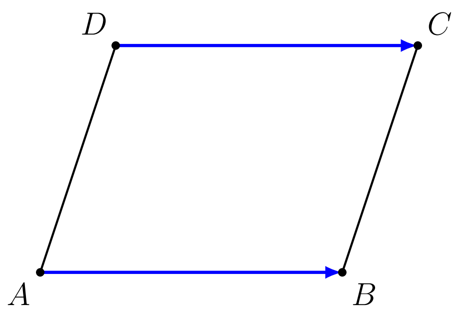
Beweis: $\overline{AB} = \overline{CD}$ und $AB \parallel CD \;\Rightarrow\; \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$

$\Rightarrow\; \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$

$\Rightarrow\; AD \parallel BC$

$\overset{AB\parallel CD}{\Rightarrow}$ ABCD ist ein Parallelogramm.



$\square$

6.2 Satz von Varignon: In jedem ebenen Viereck sind die Seitenmittelpunkte die Ecken eines Parallelogramms.

Beweis: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$.

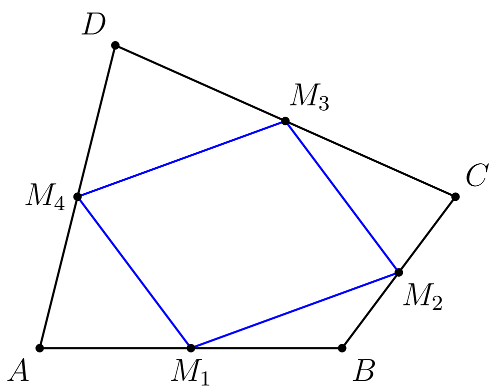
$\overrightarrow{M_1M_2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$ und
$\overrightarrow{M_3M_4} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA})$

Mit der ersten Gleichung folgt

$$\overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{M_3M_4} = \vec{0}.$$

$\Rightarrow\; \overrightarrow{M_1M_2} = -\overrightarrow{M_3M_4} = \overrightarrow{M_4M_3}$

Letzter Satz $\Rightarrow$ $M_1M_2M_3M_4$ ist ein Parallelogramm.



$\square$

Alternativer Beweis mit Ortsvektoren: Aus den Ortsvektoren der Ecken berechnen sich die Ortsvektoren der Seitenmittelpunkte folgendermaßen:

$$\begin{aligned}\vec{m}_1 &= \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})\\ \vec{m}_2 &= \frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})\\ \vec{m}_3 &= \frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d})\\ \vec{m}_4 &= \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{d})\end{aligned}$$

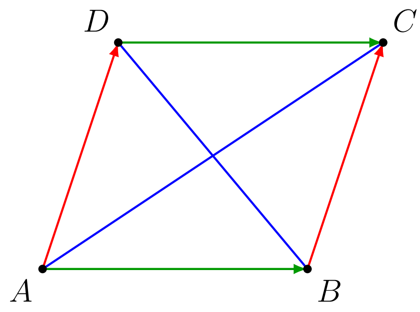
$$\begin{aligned}\Rightarrow \overrightarrow{M_1M_2} &= \vec{m}_2-\vec{m}_1 = \frac{1}{2}\big(\vec{b}+\vec{c}-(\vec{a}+\vec{b})\big) = \frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{a})\\ \overrightarrow{M_4M_3} &= \vec{m}_3-\vec{m}_4 = \frac{1}{2}\big(\vec{c}+\vec{d}-(\vec{a}+\vec{d})\big) = \frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{a}) = \overrightarrow{M_1M_2}\end{aligned}$$

Letzter Satz $\Rightarrow$ es liegt ein Parallelogramm vor.

6.3 Satz: Ein Parallelogramm ist genau dann ein Rechteck, wenn seine Diagonalen gleich lang sind.

Beweis: $ABCD$ ist ein Parallelogramm

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \text{ und } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$



$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$

Mit $\|\vec{v}\|^2 = \vec{v} \bullet \vec{v}$ (siehe 4.6) folgt

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{AC}\|^2 &= (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}) \bullet (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\\ &= \|\overrightarrow{AB}\|^2 + 2\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{BC} + \|\overrightarrow{BC}\|^2\\ \|\overrightarrow{DB}\|^2 &= \|\overrightarrow{AB}\|^2 - 2\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{BC} + \|\overrightarrow{BC}\|^2\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Es gilt genau dann $\|\overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{DB}\|^2$, wenn

$$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{BC} = 0. \tag{$*$}$$

Wegen

$$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CD} \bullet \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{BC}$$

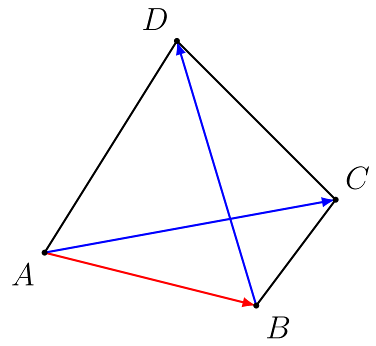
ist $(*)$ dazu äquivalent, dass in allen Ecken rechte Winkel vorliegen. □

6.4 Bemerkung: Ein Beweis des Satzes von Pythagoras mit Vektorrechnung ist nicht sinnvoll, denn dann liegt ein Zirkelschluss vor. Für den Beweis der Skalarprodukt-Winkel-Formel wird der Cosinussatz benötigt bzw. für den Spezialfall des rechten Winkels der Satz des Pythagoras als Spezialfall des Cosinussatzes.

6.5 Satz: Sei ein Viereck gegeben mit den Seitenlängen a, b, c, d. Dann sind die Diagonalen genau dann orthogonal, wenn $a^2+c^2 = b^2+d^2$, wobei a, c bzw. b, d die Längen jeweils gegenüberliegender Seiten bezeichnen.

Beweis: Stelle die Seitenvektoren nur mit Hilfe der Vektoren $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}$ dar.

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{BC} &= -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \\
\overrightarrow{CD} &= -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} \\
\overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}
\end{aligned}
$$



Mit $\|\vec{v}\|^2 = \vec{v} \bullet \vec{v}$ folgt

$$
\begin{aligned}
\|\overrightarrow{BC}\|^2 &= \|\overrightarrow{AB}\|^2 - 2\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} + \|\overrightarrow{AC}\|^2 \\
\|\overrightarrow{CD}\|^2 &= (-\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) \bullet (-\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) \\
&= \|\overrightarrow{AC}\|^2 - 2\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BD} + \|\overrightarrow{AB}\|^2 + 2\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{BD} + \|\overrightarrow{BD}\|^2 \\
\|\overrightarrow{AD}\|^2 &= \|\overrightarrow{AB}\|^2 + 2\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{BD} + \|\overrightarrow{BD}\|^2
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \; a^2 - b^2 + c^2 - d^2 \; = \; \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{BC}\|^2 + \|\overrightarrow{CD}\|^2 - \|\overrightarrow{AD}\|^2 \; = \; -2\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BD}.$$

$\Rightarrow$ $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 0$ gilt genau dann, wenn $\overrightarrow{AC}$ orthogonal zu $\overrightarrow{BD}$ ist. □

6.6 Bemerkung: Die Skalarprodukt-Winkel-Formel gilt auch im dreidimensionalen Raum. Daher funktioniert dieser Beweis auch, wenn das Viereck nicht eben ist. Dann schneiden sich die Diagonalen nicht. Die Bedingung $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ ist dann äquivalent dazu, dass die Richtungen der Diagonalen senkrecht zueinander sind (bzw. die Richtungsvektoren der entsprechenden windschiefen Geraden).

6.7 Folgerung: In jedem regelmäßigen Tetraeder (d.h. alle Seiten sind gleich lang) sind die Richtungen gegenüberliegender Kanten orthogonal.

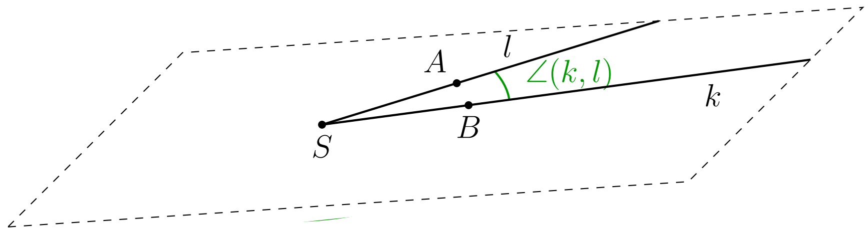
7 Koordinaten im euklidischen Raum

7.1 Grundlagen: Zusätzlich zu den Grundlagen und Sätzen aus der elementaren Geometrie gehen wir von folgenden Voraussetzungen aus.

- Der Raum ist eine Menge, deren Elemente **Punkte** heißen.
- Eine **Ebene** e ist eine spezielle Menge von Punkten. Nach unserer Vorstellung ist klar, wie eine Ebene aussieht. Statt $P \in e$ sagt man, dass P in e liegt oder dass e durch P verläuft.
- Sind drei verschiedene Punkte gegeben, die nicht auf einer Geraden liegen, so gibt es genau eine Ebene, die die drei Punkte enthält. Die Ebene **geht durch** die drei Punkte.
- Sind zwei verschiedene Punkte A, B einer Ebene e gegeben, so ist die Gerade durch A und B Teilmenge von e, sie **liegt in** e.
- In jeder Ebene im Raum gelten die Definitionen und Sätze der ebenen Geometrie mit einer Ausnahme. Es gibt keinen orientierten Winkel, denn es gibt keine ausgezeichnete „obere“ Seite der Ebene.

7.2 Folgerung: Zwei verschiedene Halbgeraden k, l, die in einem gemeisamen Punkt S starten, liegen in einer Ebene. Denn zwei weitere Punkte $A \in k$ und $B \in l$ legen mit (O) eine Ebene fest, in der k und l liegen.

7.3 Definition: Seien zwei verschiedene Halbgeraden k, l, die in einem gemeisamen Punkt S starten, gegeben und e die Ebene mit $k, l \subseteq e$. Dann ist der (nicht orientierte) Winkel $\angle(k, l)$ definiert als das Minimum der beiden Winkel, die durch die Halbgeraden in e eingeschlossen sind.

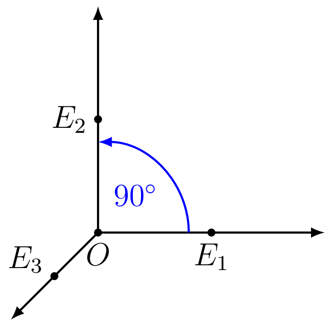


Es gilt $\angle(l, k) = \angle(k, l)$. Ist $A \in l$ und $B \in k$, so definiert man $\angle ASB := \angle BSA := \angle(k, l)$.

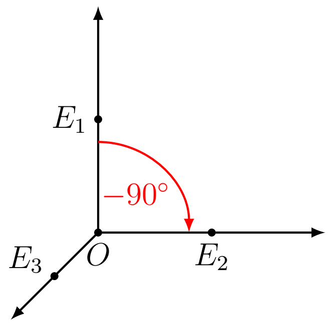
7.4 Definition: Im Raum ist ein **kartesisches Koordinatensystem** gegeben durch 4 Punkte O, E_1, E_2, E_3, E_4, wobei folgende Bedingungen erfüllt sein müssen:

- $\angle E_1OE_2 = 90°$ und $\angle E_2OE_3 = 90°$ und $\angle E_1OE_3 = 90°$ und
- Die Halbgeraden mit gemeinsamem Anfangspunkt O, die durch E_1 bzw. E_2 bzw. E_3 gehen, bilden ein **Rechtssystem**, d.h. wenn man von E_3 auf die Ebene schaut, die durch O, E_1, E_2 geht, dann gilt für den orientierten Winkel $\angle E_1OE_2 = 90°$. (Hier definiert man durch E_3 eine „obere" Seite der Ebene.)

Rechtssystem:



Linkssystem:



7.5 Bemerkung: Ein anderer Nachweis eines Rechtssystems ist die *rechte Hand Regel*. Die Handfläche enthält gedanklich O, der Daumen zeigt in Richtung E_1, der Zeigefinger in Richtung E_2 und der Mittelfinger in Richtung E_3.

7.6 Grundvoraussetzung: Im Folgenden setzen wir voraus, dass im Raum ein kartesisches Koordinatensystem mit x-, y- und z-Achse festgelegt ist. Alle Koordinatenangaben beziehen sich auf ein solches Koordinatensystem.

8 Vektoren im Raum

8.1 Definition: **1)** Ein **Vektor** $\vec{v}$ ist eine Verschiebungsvorschrift im Raum.

2) Vektoren kann man durch ihre Verschiebungspfeile darstellen:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}, \quad \text{entsprechend } \vec{0} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

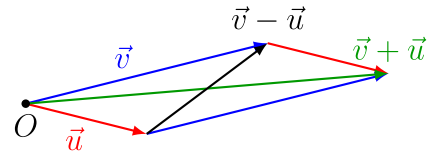
3) Die Menge aller Vektoren bezeichnet man mit $\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} : v_x, y_y, v_z \in \mathbb{R} \right\}$.

4) Derjenige Pfeil des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, der im Ursprung O startet, heißt **Standard-Pfeil** von $\vec{v}$. Er zeigt auf den zu $\vec{v}$ **gehörenden Punkt** $V(v_x, v_y, v_z)$.

5) Ist ein Punkt $P(x_P, y_P, z_P)$ gegeben, so heißt $\vec{p} := \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix}$ **Ortsvektor** von P.

8.2 Definition: **1)** **Addition** zweier Vektoren $\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{R}^3$ durch Aneinandersetzen:

$$\vec{v} + \vec{u} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v_x + u_x \\ v_y + u_y \\ v_z + u_z \end{pmatrix}.$$



2) Multiplikation einer Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ mit einem Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ durch Skalierung des Vektors:

$$\lambda \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda v_x \\ \lambda v_y \\ \lambda v_z \end{pmatrix} \quad \text{(}\textbf{skalare Multiplikation}\text{).}$$

8.3 Bemerkung: Mit diesen Rechenoperationen bildet $\mathbb{R}^3$ einen Vektorraum.

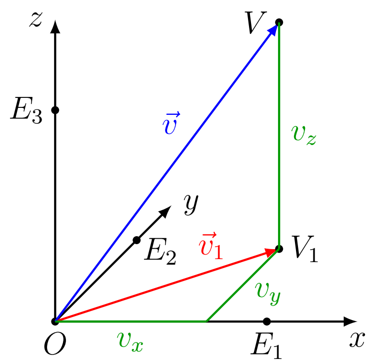
8.4 Definition: Sei $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$. Die **Norm** oder **Länge** von $\vec{v}$ definiert man durch

$$\|\vec{v}\| := \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

8.5 Eigenschaften: Für $\lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ gilt $\|\lambda \cdot \vec{v}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{v}\|$.

8.6 Satz: Die Norm des Vektors $\vec{v}$ ist gleich der Länge jedes seiner Pfeile. Insbesondere: Wird der Punkt P durch die Verschiebung $\vec{v}$ auf den Punkt P' verschoben, so gilt $\|\vec{v}\| = \overline{PP'}$.

Beweis: Betrachte den Standard-Pfeil von $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$. Sei $\vec{v}_1 := \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{pmatrix}$.



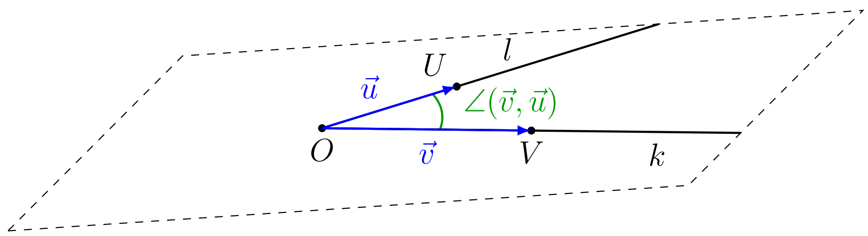
In der Ebene, die durch die O, E_1, E_2 bestimmt ist, gilt nach Pythagoras $\overline{OV_1} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.

In der Ebene, die durch O, V_1, V aufgespannt wird, gilt nach Pythagoras

$$\overline{OV} = \sqrt{\overline{OV_1}^2 + v_z^2} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \|\vec{v}\|.$$

□

8.7 Definition: **1)** Seien $\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$. Der **Winkel** zwischen $\vec{v}$ und $\vec{u}$ ist definiert als $\angle(\vec{v}, \vec{u}) := \angle(k, l)$, wobei k die Halbgerade ist, die in O startet und den zu $\vec{v}$ gehörenden Punkt V enthält, l entsprechend für $\vec{u}$.



2) $\vec{v}$ und $\vec{u}$ heißen **orthogonal**, falls $\angle(\vec{v}, \vec{u}) = 90°$ oder $\vec{v} = \vec{0}$ oder $\vec{u} = \vec{0}$. Schreibe $\vec{v} \perp \vec{u}$.

3) $\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ heißen **parallel**, falls $\angle(\vec{v}, \vec{u}) = 0°$ oder $\angle(\vec{v}, \vec{u}) = 180°$ gilt. Schreibe $\vec{v} \parallel \vec{u}$.

8.8 Eigenschaften: $0° \leq \angle(\vec{v}, \vec{u}) \leq 180°$, $\angle(\vec{v}, \vec{u}) = \angle(\vec{u}, \vec{v})$ und $\angle(-\vec{v}, \vec{u}) = 180° - \angle(\vec{v}, \vec{u})$.

8.9 Satz: $\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ sind genau dann parallel, wenn es ein $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\vec{u} = \lambda \cdot \vec{v}$ gilt.

8.10 Definition: Das **Skalarprodukt** von $\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{R}^3$ ist

$$\vec{v} \bullet \vec{u} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} := v_x u_x + v_y u_y + v_z u_z.$$

8.11 Eigenschaften: $\vec{v} \bullet \vec{u} = \vec{u} \bullet \vec{v}$, $\vec{v} \bullet (\vec{u} + \vec{w}) = \vec{v} \bullet \vec{u} + \vec{v} \bullet \vec{w}$, $(\lambda \cdot \vec{v}) \bullet (\mu \cdot \vec{u}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot (\vec{v} \bullet \vec{u})$, $\vec{v} \bullet \vec{v} = \|\vec{v}\|^2$.

8.12 Satz (Skalarprodukt-Winkel-Formel): Seien $\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$. Dann gilt

$$\vec{v} \bullet \vec{u} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \cos\big(\angle(\vec{v}, \vec{u})\big).$$

Zum Beweis: O und die zu den Vektoren $\vec{v}, \vec{u}$ gehörenden Punkte V, W definieren eine Ebene. In dieser Ebene folgt die Behauptung wie im $\mathbb{R}^2$ aus dem Cosinussatz.

8.13 Definition: Für $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ ist das **Vektorprodukt** $\vec{u} \times \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\vec{u} \times \vec{v} \;=\; \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \;:=\; \begin{pmatrix} u_y\, v_z - v_y\, u_z \\ u_z\, v_x - v_z\, u_x \\ u_x\, v_y - v_x\, u_y \end{pmatrix}$$

8.14 Satz: Für $\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ gelten:

1) $\vec{v} \times \vec{u}$ ist orthogonal zu $\vec{v}$ und zu $\vec{u}$.

2) $\vec{v}, \vec{u}, \vec{v} \times \vec{u}$ bilden ein Rechtssystem falls $\vec{v} \times \vec{u} \neq \vec{0}$.

3) $\|\vec{v} \times \vec{u}\| = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \sin\big(\angle(\vec{v}, \vec{u})\big)$.

9 Geraden und Ebenen

9.1 Definition: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^3$. Dann heißt die Menge $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ **linear unabhängig**, wenn

$$\lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{v}_n \;=\; \vec{0}$$

nur dann gilt, wenn $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$. Andernfalls heißt die Menge $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ **linear abhängig**.
Man sagt kurz: Die Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ sind linear unabhängig/abhängig.

9.2 Satz: **1)** Ist einer der Vektoren der Nullvektor, z.B. $\vec{v}_1 = \vec{0}$, dann ist $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ linear abhängig.

2) Fall $n = 1$: Ist $\vec{v}_1 \neq 0$, so ist $\{\vec{v}_1\}$ linear unabhängig.

3) Fall $n = 2$: $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ ist genau dann linear abhängig, wenn $\vec{v}_1 = \lambda \cdot \vec{v}_2$ mit geeignetem $\lambda \in \mathbb{R}$ oder $\vec{v}_2 = \lambda \cdot \vec{v}_1$. Sind $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \neq \vec{0}$, dann sind sie genau dann linear abhängig, wenn sie parallel sind.

4) Fall $n = 3$: Ist $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ linear unabhängig, dann kann jeder Vektor $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ als eindeutige Linearkombination der drei Vektoren dargestellt werden, d.h. es gibt eindeutig bestimmte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, so dass

$$\vec{u} \;=\; \lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 + \lambda_3 \cdot \vec{v}_3.$$

Man sagt: $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ ist eine **Basis** des $\mathbb{R}^3$.

5) $n \geq 4$: Jede Menge mit mehr als drei Vektoren aus dem $\mathbb{R}^3$ ist immer linear abhängig.

9.3 Satz: **1)** Sind $\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ und gilt $\vec{v} \perp \vec{u}$, dann ist $\{\vec{v}, \vec{u}\}$ linear unabhängig.

2) Ist $\{\vec{v}, \vec{u}\} \subseteq \mathbb{R}^3$ linear unabhängig, und ist $\vec{n} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ orthogonal zu $\vec{v}, \vec{u}$, dann ist $\{\vec{v}, \vec{u}, \vec{n}\}$ linear unabhängig.

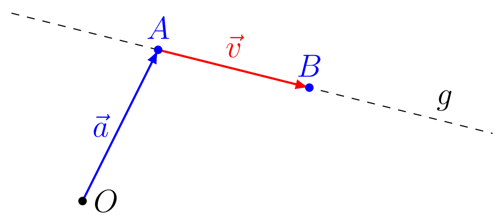
9.4 Satz: Ist g die Gerade durch zwei verschiedene Punkte A, B im Raum, so gilt

$$g \;=\; \{X : \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB} \text{ mit } t \in \mathbb{R}\}$$

(**Parameterdarstellung** einer Geraden) bzw. kurz

$$g : \vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{v} \;\text{ für } t \in \mathbb{R}$$

mit dem **Stützvektor** $\vec{a} = \overrightarrow{OA} \in \mathbb{R}^3$ und dem **Richtungsvektor** $\vec{v} = \overrightarrow{AB} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$.

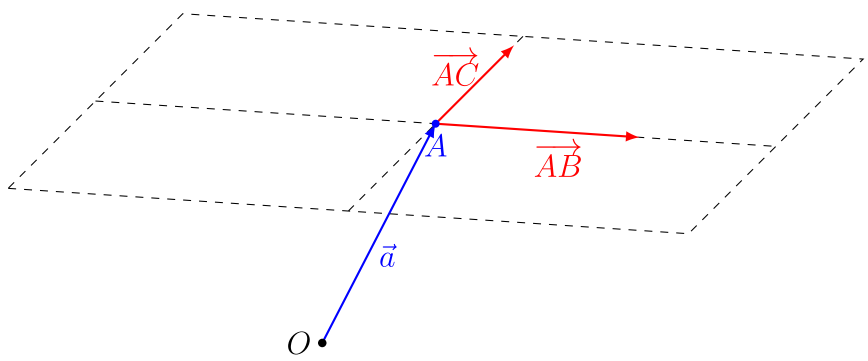


9.5 Satz: Seien A, B, C drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen. Dann ist die Ebene e durch A, B, C gegeben durch die **Parameterdarstellung**

$$e \;=\; \left\{X : \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC} \text{ mit } t, s \in \mathbb{R}\right\}.$$

Man schreibt kurz

$$e : \vec{x} = \vec{a} + t \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC} \;\text{ für } t, s \in \mathbb{R}.$$



9.6 Definition: Seien A, B, C, e wie vorher. Dann heißt $\vec{a}$ **Stützvektor** der Ebene und $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ heißen **Richtungsvektoren** von e. Der Punkt A heißt auch **Stützpunkt** oder **Aufpunkt** von e.

9.7 Satz: Seien A, B, C drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen. Dann sind $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ linear unabhängig.

Beweis: Da die drei Punkte nicht auf einer Geraden liegen, sind sie verschieden, und es gilt $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$.

Falls $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ linear abhängig wären, gäbe es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$. Dann lägen alle drei Punkte auf der Geraden

$$g : \vec{x} = \;\overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB} \;\text{ für } t \in \mathbb{R},$$

denn $\vec{x}(t=0) = \overrightarrow{OA}$, $\vec{x}(t=1) = \overrightarrow{OB}$ und $\vec{x}(t=\lambda) = \overrightarrow{OC}$. Widerspruch! $\square$

9.8 Satz: Seien $\{\vec{v}, \vec{u}\} \subseteq \mathbb{R}^3$ linear unabhängig und $\vec{n} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ orthogonal zu $\vec{v}$ und zu $\vec{u}$. Ist $\vec{w}$ ein weiterer Vektor, der orthogonal zu $\vec{v}$ und zu $\vec{u}$ ist, dann gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass $\vec{w} = \lambda \cdot \vec{n}$. D.h. alle Vektoren, die orthogonal zu $\vec{v}$ und zu $\vec{u}$ sind, sind zueinander parallel oder der Nullvektor.

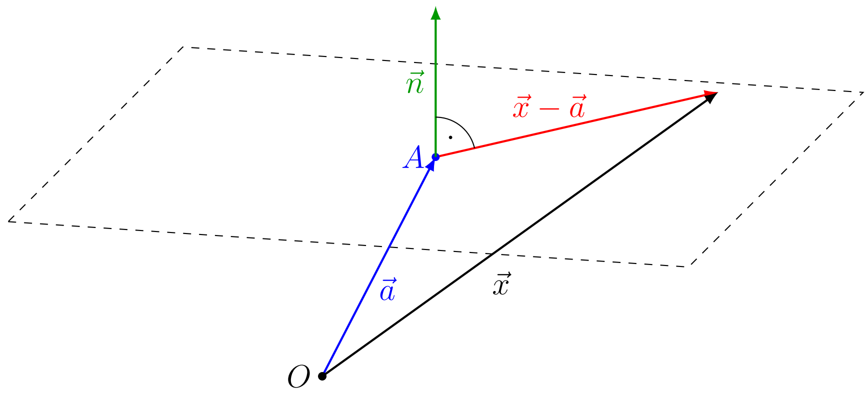
9.9 Satz: Sei eine Ebene e durch einen Stützvektor $\vec{a}$ und zwei linear unabhängige Richtungsvektoren $\vec{v}, \vec{u}$ gegeben. Ist $\vec{n} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ mit $\vec{n} \perp \vec{v}$ und $\vec{n} \perp \vec{u}$ gegeben, dann gehört der Vektor $\vec{x}$ genau dann zu einem Punkt der Ebene, wenn

$$\vec{n} \bullet (\vec{x} - \vec{a}) \;=\; 0 \tag{N}$$

bzw.

$$\vec{n} \bullet \vec{x} \;=\; \vec{n} \bullet \vec{a} \tag{N'}$$

gilt. Der Vektor $\vec{n}$ heißt **Normalenvektor**, die Gleichungen (N) und (N') heißen **Normalenform** der Ebene.



9.10 Bemerkung: Seien

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \text{ und } d := \vec{n} \bullet \vec{a}.$$

Dann wird (N') zu

$$n_x\, x + n_y\, y + n_z\, z = d.$$

Man kann die Menge der Punkte der Ebene e ohne Verwendung von Vektoren angeben durch

$$e \;=\; \big\{(x, y, z) : n_x\, x + n_y\, y + n_z\, z = d\big\}.$$

Im Raum ist jede Ebene gleich der Menge aller Lösungen eines passenden linearen Gleichungssystems mit einer Gleichung.

9.11 Satz und Definition: Seien zwei Geraden g, h gegeben. Falls sie in einer Ebene liegen, ist alles so wie früher: Sie können parallel sein, sich schneiden oder identisch sein. Falls es keine Ebene gibt, in der beide Geraden liegen, dann heißen sie **windschief**.

9.12 Satz: **1)** Zwei Geraden sind genau dann windschief, wenn sie sich nicht schneiden und ihre Richtungsvektoren nicht parallel sind.

2) Zwei Geraden mit Stützvektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und Richtungsvektoren $\vec{v}, \vec{u}$ sind genau dann windschief, wenn $\{\vec{a} - \vec{b}, \vec{v}, \vec{u}\}$ linear unabhängig ist.

9.13 Satz: Sind e_1, e_2 zwei Ebenen, dann gibt es für die Schnittmenge die folgenden drei Fälle.

- $e_1 \cap e_2 = \emptyset$: Die Ebenen sind parallel.
- $e_1 \cap e_2 = g$ wobei g eine Gerade bezeichnet. Die Ebenen **schneiden** sich in der Geraden g.
- $e_1 \cap e_2 = e_1$, d.h. die Geraden sind identisch.

Insbesondere kann $e_1 \cap e_2$ nicht nur genau einen Punkt enthalten.

9.14 Satz: Ist g eine Gerade und e eine Ebene, so gibt es für die Schnittmenge die folgenden drei Fälle.

1) $e \cap g = \emptyset$: g ist parallel zu e.

2) $e \cap g = \{P\}$: e und g **schneiden** sich im Punkt P.

3) $e \cap g = g$: Die Gerade g **liegt in** $\boldsymbol{e}$.

10 Abstände und Winkel bei Geraden und Ebenen

10.1 Definition: Seien P ein Punkt, g, h Geraden und e, f Ebenen. Dann definiert man die folgenden Abstände.

1) $d(P, g) := \min\{\overline{XP} : X \in g\}$,

2) $d(P, e) := \min\{\overline{XP} : X \in e\}$,

3) $d(g, h) := \min\{\overline{XQ} : X \in g$ und $Q \in h\}$,

4) $d(e, f) := \min\{\overline{XQ} : X \in e$ und $Q \in f\}$,

5) $d(g, e) := \min\{\overline{XQ} : X \in g$ und $Q \in e\}$.

10.2 Satz: **1)** Seien $g : \vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{v}$ eine Gerade und P ein Punkt mit Ortsvektor $\vec{p}$. Ist $t_0 \in \mathbb{R}$ die Lösung der Gleichung

$$(\vec{a} + t \cdot \vec{v} - \vec{p}) \bullet \vec{v} = 0,$$

dann ist $\vec{l} = \vec{a} + t_0 \cdot \vec{v}$ der Ortsvektor des Lotfußpunktes L von P auf g, und es gilt $d(P, g) = \overline{PL} = \|\vec{p} - \vec{l}\|$.

2) Sind g, h parallele Geraden und ist $P \in g$ ein beliebiger Punkt von g, so gilt $d(g, h) = d(P, h)$.

3) Seien

$$g : \vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{v} \text{ für } t \in \mathbb{R}, \quad h : \vec{x} = \vec{b} + s \cdot \vec{u} \text{ für } s \in \mathbb{R}$$

zwei windschiefe Geraden. Ist (t_0, s_0) die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \big(\vec{a} + t \cdot \vec{v} - (\vec{b} + s \cdot \vec{u})\big) \bullet \vec{v} &= 0 \\ \big(\vec{a} + t \cdot \vec{v} - (\vec{b} + s \cdot \vec{u})\big) \bullet \vec{u} &= 0 \end{aligned}$$

dann sind $\vec{l_1} = \vec{a} + t_0 \cdot \vec{v}$ und $\vec{l_2} = \vec{b} + s_0 \cdot \vec{u}$ die Ortsvektoren der Punkte L_1, L_2 von g bzw. h, die den kürzesten Abstand besitzen. Es gilt $d(g, h) = \overline{L_1 L_2} = \|\vec{l_1} - \vec{l_2}\|$.

10.3 Satz: **1)** Seien $e : \vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{u}$ für $t, s \in \mathbb{R}$ eine Ebene und P ein Punkt mit Ortsvektor $\vec{p}$. Ist $(t_0, s_0) \in \mathbb{R}$ die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} (\vec{a} + t \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{u} - \vec{p}) \bullet \vec{v} &= 0 \\ (\vec{a} + t \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{u} - \vec{p}) \bullet \vec{u} &= 0 \end{aligned}$$

dann ist $\vec{l} = \vec{a} + t_0 \cdot \vec{v} + s_0 \cdot \vec{u}$ der Ortsvektor des Lotfußpunktes L von P auf e, und es gilt $d(P, e) = \overline{PL} = \|\vec{p} - \vec{l}\|$.

2) Sind e, f parallele Ebenen, und ist $P \in e$ ein beliebiger Punkt von e, so gilt $d(e, f) = d(P, f)$.

3) Sind e eine Ebene, g eine zu e parallele Gerade und $P \in g$ ein beliebiger Punkt von g, so gilt $d(g, e) = d(P, e)$.

10.4 Satz: Ist eine Ebene e durch ihre Normalenform (N) gegeben und P ein beliebiger Punkt, dann ist der Abstand von P zu g gegeben durch

$$d(P, g) = \frac{1}{\|n\|} \left| \vec{n} \bullet (\vec{p} - \vec{a}) \right|.$$

10.5 Definition: Ist eine Ebene e durch ihre Normalenform $\vec{n} \bullet (\vec{x} - \vec{a}) = 0$ gegeben und

$$\vec{n}_0 := \frac{1}{\|\vec{n}\|} \cdot \vec{n}$$

der **Normaleneinheitsvektor** (d.h. $\vec{n}_0 \parallel \vec{n}$ und $\|\vec{n}_0\| = 1$), so heißt

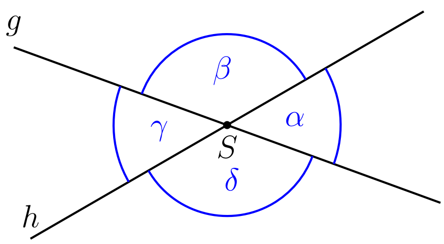
$$\vec{n}_0 \bullet (\vec{x} - \vec{a}) = 0 \tag{HNF}$$

die **Hessesche Normalenform** der Ebene.

10.6 Folgerung: Ist ein Punkt P gegeben und eine Ebene e durch ihre Hessesche Normalenform (HNF), dann gilt

$$d(P, e) = \left| \vec{n}_0 \bullet (\vec{p} - \vec{a}) \right|.$$

10.7 Definition: Seien zwei verschiedene Geraden g, h gegeben, die sich schneiden. Der **Schnittwinkel** von g und h ist definiert als das Minimum der Winkel, die durch die entsprechenden Halbgeraden definiert werden. Schreibe $\angle(g, h)$.



10.8 Satz (vgl 5.14): **1)** Es gilt $0° \leq \angle(g,h) \leq 90°$.

2) Sind zwei sich schneidende Geraden mit Richtungsvektoren $\vec{v}$ bzw. $\vec{u}$ gegeben, dann berechnet man den Schnittwinkel durch

$$\cos\big(\angle(g,h)\big) = \frac{1}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\|} \cdot |\vec{v} \bullet \vec{u}|.$$

10.9 Definition: Seien e, f zwei sich schneidende Ebenen und $P \in e \cap f$. Dann ist der **Schnittwinkel** von e und f definiert als der Schnittwinkel der beiden Geraden durch P, die als Richtungsvektor einen Normalenvektor von e bzw. f besitzen. Schreibe $\angle(e,f)$.

10.10 Folgerung: Seien e, f zwei sich schneidende Ebenen mit Normalenvektor $\vec{n}_e$ bzw. $\vec{n}_f$. Dann kann der Schnittwinkel von e und f durch

$$\cos\big(\angle(e,f)\big) = \frac{1}{\|\vec{n}_e\| \cdot \|\vec{n}_f\|} \cdot |\vec{n}_e \bullet \vec{n}_f|$$

berechnet werden.