Graphentheorie

zum Selbstlernen

Vorwort

Dies ist ein Skript zum Selbststudium. Du kannst hier Grundlagen der Graphentheorie kennenlernen.

Der Text ist im Wesentlichen der Mitschrieb aus einem Online-Kurs *Graphentheorie* im Schülerseminar für Klasse 8-10. Du findest diesen und andere Kurse auf der Seite

`https://pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/iadm/Zirkel/material-Schuelerseminar/`

Falls Du beim Studium des vorliegenden Textes Fragen hast, kannst Du beim Online-Kurs im entsprechenden Video nachsehen, dort gibt es ausführlichere Erklärungen. Um die Verbindung zu finden, ist am Rand des Textes markiert, wann die einzelnen Einheiten des Online-Kurses beginnen.

Die Aufgaben sind auch dieselben wie im Online-Kurs. Im Lerntext sind keine Lösungen dabei, damit Du sie selber lösen kannst. Bei den Aufgaben ist oft Platz, um Deine Lösungen aufzuschreiben. Manchmal musst Du aber auch ein extra Blatt für die Berechnungen dazunehmen. Falls Du Deine Lösungen überprüfen willst, stehen alle Aufgaben mit Lösungen im letzten Kapitel dieses Skripts.

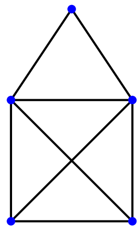
Ich wünsche Dir viel Spaß beim Durcharbeiten des Skripts und bei den Aufgaben!

4. März 2025 Peter Lesky

1 Was ist ein Graph?

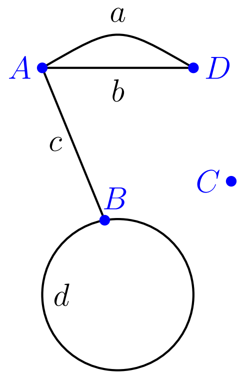
Beginn Online-Einheit 1

Du kennst sicher die Aufgabe, das Haus vom Nikolaus in einem Zug zu zeichnen, ohne eine Linie doppelt zu zeichnen. Das Gebilde, das dabei herauskommt, hat Ecken und verbindende Linien. So ein Gebilde nennt man *Graph*. Aber nun genauer.



Definition: Ein Graph besteht aus Ecken und Kanten. Er muss mindestens eine Ecke besitzen. Jede Kante verbindet zwei verschiedene Ecken oder eine Ecke mit sich selber.

Bezeichnungen:



C: isolierte Ecke
d: Schlinge
a, b: parallele Kanten
$\text{Grad}(A) = 3$
$\text{Grad}(B) = 3$
$\text{Grad}(C) = 0$
$\text{Grad}(D) = 2$

Definition: Eine Ecke, an der keine Kante endet, heißt isoliert.
Eine Kante, die eine Ecke mit sich selbst verbindet, heißt Schlinge.
Zwei Kanten, die die selben Ecken verbinden, heißen parallel.
Der Grad einer Ecke ist die Anzahl der Endpunkte von Kanten in dieser Ecke.

Bemerkung: Der kleinste Graph besteht aus einer Ecke. Der ist aber langweilig.

Aufgabe 1

a) Zeichne einen Graphen mit 2 Ecken mit Grad 1 und 7.

b) Zeichne einen Graphen mit 5 Ecken mit Grad $1, 2, 2, 2, 3$.

c) Zeichne zwei verschiedene Graphen mit jeweils 4 Ecken, wovon zwei den Grad 2 und zwei den Grad 3 haben.

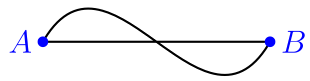
d) Fülle die Tabelle aus:

	a)	b)	c_1)	c_2)
Summe Eckengrade				
Anzahl Kanten				

e) Wie hängen die Eckengrade und die Zahl der Kanten zusammen?

f) Warum gibt es keinen Graphen mit drei Ecken mit den Graden $4, 5, 6$?

Vereinbarung: Kreuzen sich zwei Kanten, ohne dass dort eine Ecke eingezeichnet ist, so stellen wir uns vor, dass die Kanten übereinander verlaufen, ohne sich zu schneiden.



Graph mit zwei Ecken und zwei parallelen Kanten

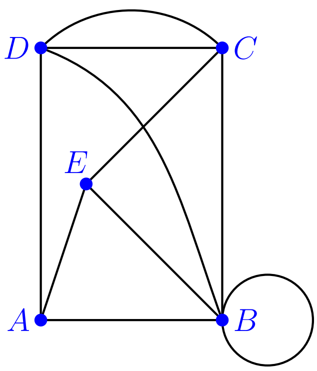
Beim *Haus vom Nikolaus* haben wir bei der Kreuzung der Diagonalen keine Ecke eingezeichnet. Also schneiden sich die Diagonalen nicht.

2 Graphen als Tabellen

Methode: Zeichne eine Tabelle, die für jede Ecke sowohl eine Spalte als auch eine Zeile enthält. Trage in das Feld der Zeile B und Spalte C ein, wie viele Kanten B und C verbinden.

Aufgabe 2

Trage in die Tabelle ein, wie viele Kanten die jeweiligen Ecken verbinden.



	A	B	C	D	E	Grad
A						
B						
C						
D						
E						

Aufgabe 3

Zeichne zwei verschieden aussehende Graphen, die die folgende Tabelle besitzen.

	A	B	C	D
A	1	0	1	1
B	0	0	0	2
C	1	0	2	1
D	1	2	1	0

Definition: Zwei Graphen heißen isomorph, wenn sie bei geeigneter Bezeichnung der Ecken dieselbe Tabelle besitzen.
Anschaulich: Der eine Graph kann so „verbogen“ werden, dass der andere entsteht.

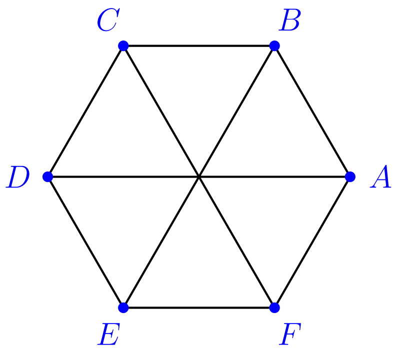
Satz: Sind zwei Graphen isomorph, so haben sie dieselbe

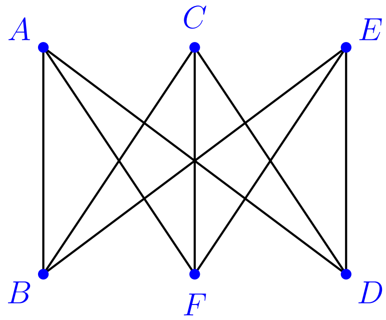
- Anzahl von Ecken
- Anzahl von Kanten
- Anzahl von Schlingen
- Anzahl paralleler Kanten
- Liste der Eckengrade bis auf Reihenfolge

Umgekehrt: Ist einer dieser Punkte nicht erfüllt, so sind die Graphen nicht isomorph.

Aufgabe 4

Zeige, dass die folgenden Graphen isomorph sind:





	A	B	C	D	E	F
A						
B						
C						
D						
E						
F						

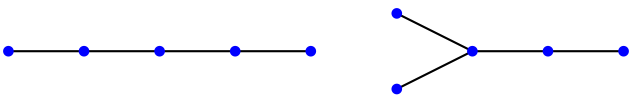
	A	B	C	D	E	F
A						
B						
C						
D						
E						
F						

Die Graphen sind isomorph, denn ....

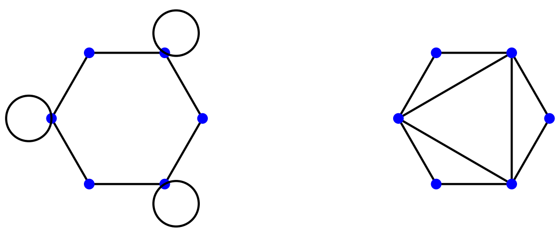
Aufgabe 5

Warum sind die folgenden Graphen jeweils nicht isomorph?

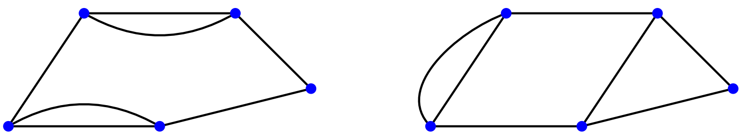
a)



b)



c)



3 Rundwege

Definition: 1) Ein Kantenzug in einem Graphen ist eine Folge von Kanten, die nacheinander ohne Absetzen gezeichnet werden können.
Beim Nachfahren eines Kantenzugs wird die Ecke, in der die erste Kante beginnt, über den Kantenzug mit der Ecke, in der die letzte Kante endet, verbunden.

2) Ein Graph heißt zusammenhängend, wenn es zu je zwei beliebig gewählten Ecken immer einen Kantenzug gibt, der sie verbindet.

3) Ein Kantenzug heißt geschlossen, wenn Anfangsecke = Endecke.

4) Ein Kantenzug, der

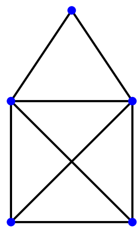
- jede Kante genau ein Mal benützt und
- geschlossen ist,

heißt eulersche Tour.

5) Ein Graph, der eine eulersche Tour enthält, heißt eulerscher Graph.

Anschaulich: Einen eulerschen Graphen ohne isolierte Ecke kann man zeichnen ohne abzusetzen, ohne eine Kante doppelt abzufahren und so, dass man bei der Anfangsecke endet.

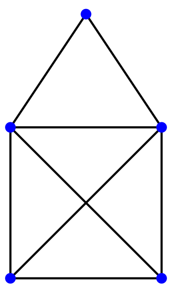
Betrachte nochmal das *Haus vom Nikolaus*. Beim Zeichnen geht man einen Kantenzug entlang. Da man durch alle Ecken kommt, ist der Graph zusammenhängend. Der Kantenzug ist jedoch nicht geschlossen, also keine eulersche Tour.

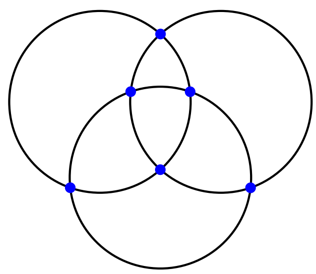


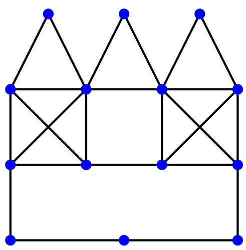
Achtung: Bei eulerschen Touren oder eulerschen Graphen geht es nur um die Kanten. Isolierte Ecken darf es geben.

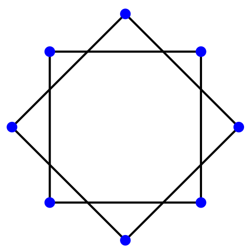
Aufgabe 6

In welchem der Graphen gibt es eine eulersche Tour?

a) 

b) 

c) 

d) 

Bei großen Graphen kann es sehr mühsam sein, eine eulersche Tour zu finden. Wir lernen nun eine einfache Bedingung kenne, die garantiert, dass ein Graph eulersch ist.

<u>Satz:</u> In einem eulerschen Graphen sind alle Eckengrade geradzahlig.

<u>Beweis:</u> Fall 1: E ist eine isolierte Ecke. Dann gilt $\mathrm{Grad}(E) = 0$, und 0 ist gerade.

Fall 2: E ist eine nicht isolierte Ecke. Betrachte eine eulersche Tour. Diese geht durch E. Sei n die Zahl, wie oft die Tour durch E kommt. Dann gilt $\mathrm{Grad}(E) = 2n$, da die Tour E immer auf einer Kante erreicht und auf einer anderen Kante verlässt und beim nächsten Durchgang neue Kanten verwendet werden. $\square$ Das selbe Argument stimmt auch, wenn E die Anfangsecke ist. Denn dann ist E auch die Endecke. Diese beiden Kanten addieren 2 zum Eckengrad von E dazu. Und für die restlichen Durchgänge gilt das Argument wie vorher. $\square$

<u>Satz von Euler:</u> Ein Graph ohne isolierte Ecke ist genau dann eulersch, wenn er zusammenhängend ist und alle Eckengrade gerade sind.

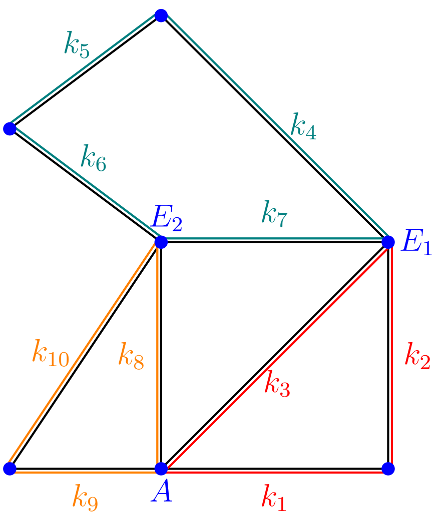
<u>Beweis:</u> Ist der Graph eulersch, so gilt:
- Nach dem letzten Satz sind alle Eckengrade gerade.
- Sind zwei Ecken gegeben, dann kann man von der einen Ecke aus so lange eine eulersche Tour entlanggehen, bis man bei der anderen Ecke ankommt, da keine der Ecken isoliert ist. Dann hat man einen Kantenzug gefunden, der die beiden Ecken verbindet. Also ist der Graph zusammenhängend. (Da es keine isolierten Ecken gibt, geht jede eulersche Tour durch die beiden Ecken.)

Jetzt setze voraus: Alle Eckengrade sind gerade und der Graph ist zusamenhängend.
Beweise: Es gibt eine eulersche Tour. Dazu geben wir eine Methode an, wie man in jedem solchen Graphen eine eulersche Tour findet.

Schritt 1: Wähle irgendeine Ecke A als Anfangsecke. Bilde einen Kantenzug, bis die Anfangsecke wieder erreicht ist. Dies geht, da jede andere Ecke, die man erreicht, auch wieder auf einer anderen Kante verlassen werden kann (gerader Eckengrad).

Schritt 2: Falls noch nicht alle Kanten benützt wurden, gehe auf dem bisherigen Kantenzug bis zur ersten Ecke E_1, von der eine nicht benutzte Kante abzweigt. Da der Eckengrad eine gerade Zahl ist, müssen sogar zwei Kanten abzweigen. Gehe eine dieser Kanten entlang und bilde einen Kantenzug aus lauter noch nicht verwendeten Kanten, bis wieder E_1 erreicht wird. Füge diesen neuen Kantenzug in den alten ein.

Wiederhole nun Schritt 2 so oft, bis alle Kanten verbraucht sind. Da der Graph zusammenhängend ist, bleibt keine Kante übrig. $\square$



Erster Kantenzug:

$$A - k_1 - k_2 - k_3 - A$$

Erste Erweiterung:

$$A - k_1 - k_2 - E_1 - k_4 - k_5 - k_6 - k_7 - E_1 - k_3 - A$$

Zweite Erweiterung:

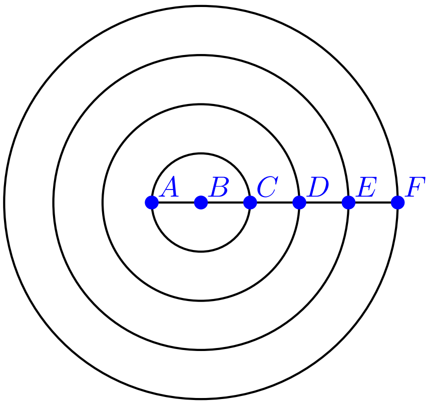
$$A - k_1 - k_2 - E_1 - k_4 - k_5 - k_6 - E_2$$
$$- k_8 - k_9 - k_{10} - E_2 - k_7 - E_1 - k_3 - A$$

Nun sind alle Kanten verbraucht und wir haben eine eulersche Tour gefunden.

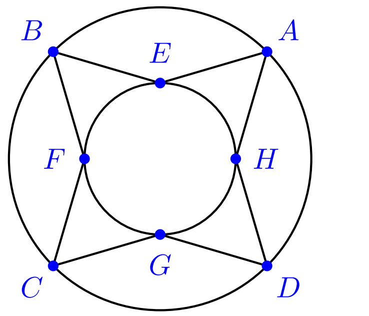
Aufgabe 7

Welcher der folgenden Graphen ist eulersch? Trage Deine Antwort in die Tabelle ein.

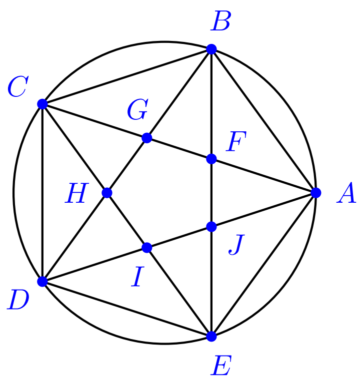
a)



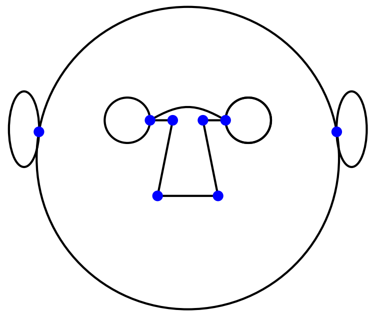
b)



c)

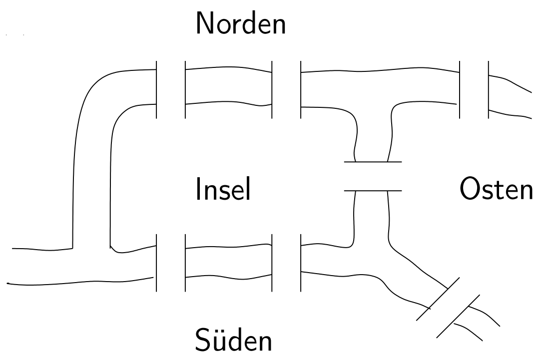


d)



	eulersch	nicht eulersch weil
Graph a)		
Graph b)		
Graph c)		
Graph d)		

Aufgabe 8



Das Königsberger Brückenproblem: In Königsberg gibt es 7 Brücken über die Pregel, wie im nebenstehenden Stadtplan dargestellt. Die Frage ist nun, ob es einen Rundweg durch Königsberg gibt, so dass jede der Brücken genau ein Mal überquert wird. Zeichne einen Graphen, der zu diesem Problem passt: Die Brücken sollen als Kanten dargestellt werden, da man sie genau einmal überqueren soll. Entscheide dann, ob ein solcher Rundweg möglich ist.

4 Einfache Graphen

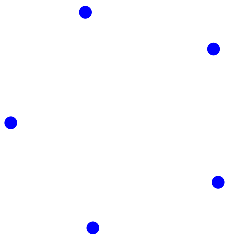
Beginn Online-Einheit 2

Definition: 1) Ein Graph heißt einfach, wenn er keine Schlingen und keine parallelen Kanten besitzt.

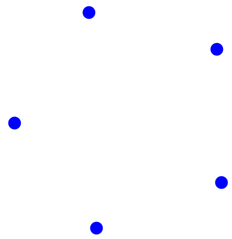
Aufgabe 9

a) Ergänze den Graphen 1, so dass er einfach ist und genau vier Kanten besitzt (Lösung ist nicht eindeutig).

b) Ergänze den Graphen 2, so dass er einfach ist und möglichst viele Kanten besitzt.



Graph 1



Graph 2

Definition: 2) Ein Graph heißt vollständiges Vieleck, wenn er einfach ist und jede Ecke mit jeder anderen durch eine Kante verbunden ist.

Aufgabe 10

a) Zeichne ein vollständiges 6-Eck, also einen vollständigen Graphen mit 6 Ecken. Wie viele Kanten besitzt es?

b) Wie viele Kanten besitzt ein vollständiges 10-Eck?

Aufgabe 11

Welche vollständigen n-Ecke sind eulersch?

Satz: Ein vollständiges Vieleck mit n Ecken besitzt $\frac{1}{2}n(n-1)$ Kanten.

Beweis: Jede Ecke ist mit jeder der anderen $n-1$ Ecken durch eine Kante verbunden.
$\Rightarrow$ $\mathrm{Grad}(E) = n-1$ für jede Ecke E im Graphen
$\Rightarrow$ Summe der Eckengrade ist $n \cdot (n-1)$
Hierbei wird jede Kante zwei Mal gezählt
$\Rightarrow$ der Graph besitzt $\frac{1}{2}n(n-1)$ Kanten. $\square$

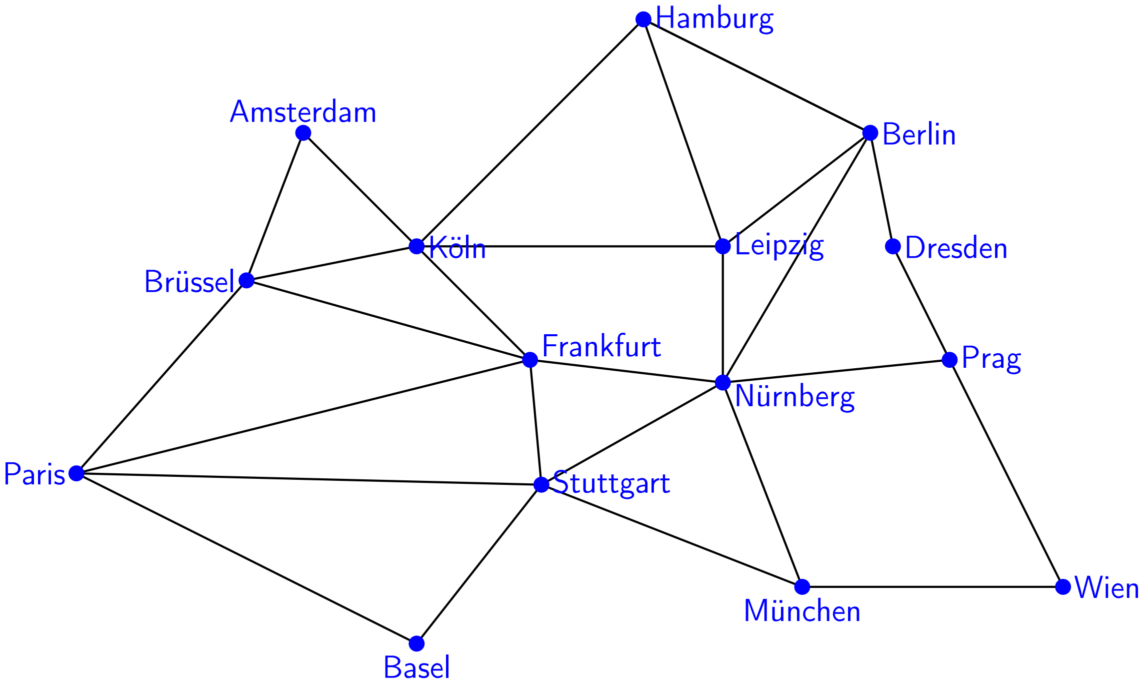
Ein vollständiges n-Eck heißt *vollständig*, weil ein einfacher Graph mit n Ecken nicht mehr Kanten besitzen kann. Daher liefert uns der letzte Satz eine Aussage über die Maximalzahl an Kanten, die ein einfacher Graph besitzen kann.

Folgerung: Ein einfacher Graph mit n Ecken besitzt höchstens $\frac{1}{2}n(n-1)$ Kanten.

5 Hamiltonsche Graphen

Aufgabe 12

Eine Freundesgruppe möchte eine Rundreise durch die in der Karte eingezeichneten Städte machen. Dabei wollen sie durch jede Stadt nur ein Mal reisen. Sie können nur die eingezeichneten Verbindungen benützen.



a) Gib es eine Rundreise, die in Berlin startet und anschließend durch Nürnberg und dann durch Leipzig geht?

b) Gibt es eine Rundreise, die in Berlin startet und anschließend durch Leipzig und dann durch Köln geht?

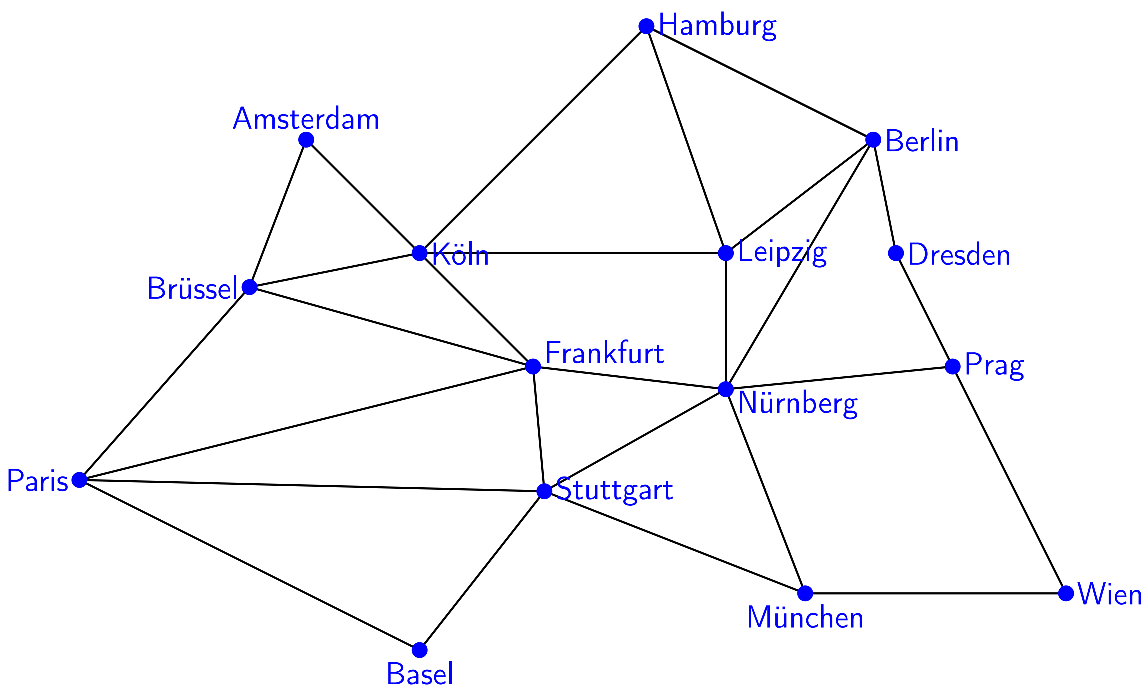
c) Gibt es eine Rundreise, die in Stuttgart losgeht, dann nach Basel, nach Paris und anschließend nach Brüssel?

d) Gibt es eine Rundreise, die in Berlin startet und anschließend nach Nürnberg und dann nach München geht?

Weiter auf nächster Seite

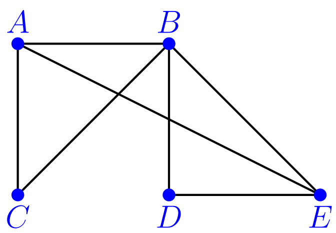
Aufgabe 13

Wie viele Kanten muss man im unten stehenden Graphen mindestens ergänzen, damit der Graph eulersch wird? Zeichne diese Kanten ein.

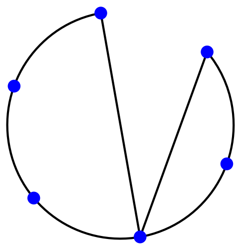


Definition: Ein geschlossener Kantenzug, der jede Ecke des Graphen genau ein Mal durchläuft und keine Kante zwei Mal benützt, heißt Hamiltonscher Kreis
Ein Graph, der einen Hamiltonschen Kreis enthält, heißt Hamiltonscher Graph.

Beispiele:



Graph 1:
Hamiltonscher Kreis:
$A - C - B - D - E - A$
$\Rightarrow$ hamiltonsch



Graph 2: nicht hamiltonsch

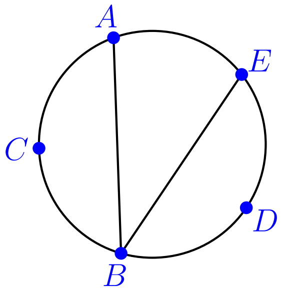
Um nachzuweisen, dass ein Graph hamiltonsch ist, reicht es, einen Hamiltonkreis anzugeben. Schwieriger ist der Nachweis, dass ein Graph nicht hamiltonsch ist. Bei Graph 2 sieht man, dass jeder Hamiltonkreis durch die unterste Ecke kommen muss und dann ein zweites Mal durch diese Ecke gehen müsste, was nicht erlaubt ist.

Bei einem Hamiltonkreis muss jede Ecke genau einmal durchlaufen werden im Unterschied zur eulerschen Tour, bei der jede Kante genau einmal benützt werden muss.

Erinnerung: Zwei Graphen sind isomorph, wenn sie die selbe Tabelle besitzen (bei geeigneter Bezeichnung ihrer Ecken). Oder wenn der eine Graph so verbogen werden kann, dass der andere ensteht.

Satz: Jeder hamiltonsche Graph ist isomorph zu einem Graphen, dessen Ecken auf einem Kreis liegen, und der die Kreislinie als Kantenzug enthält.

Beispiel:

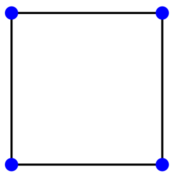


Graph 3: isomorph zu Graph 1

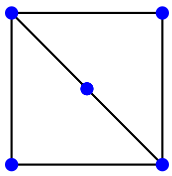
Man erhält den Graphen 3, indem man den hamiltonschen Kreis des Graphen 1 entlang geht und die Ecken in dieser Reihenfolge auf einem Kreis einzeichnet. Anschließend ergänzt man weitere Kanten, bis es zu jeder Kante des Graphen 1 eine Entsprechung im Graphen 3 gibt.

Aufgabe 14

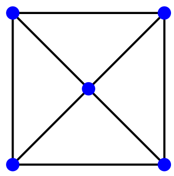
Untersuche, welcher der folgenden Graphen eulersch oder hamiltonsch ist. Trage in die Tabelle „j“ für ja, „n“ für nein ein.



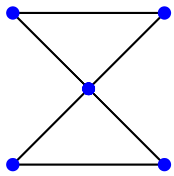
Graph 1



Graph 2



Graph 3



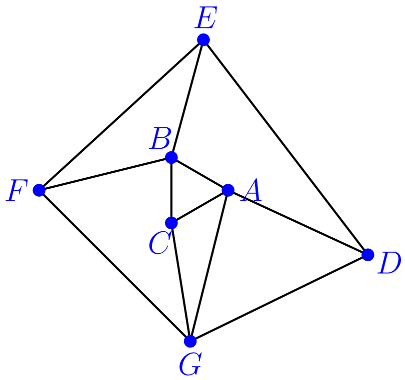
Graph 4

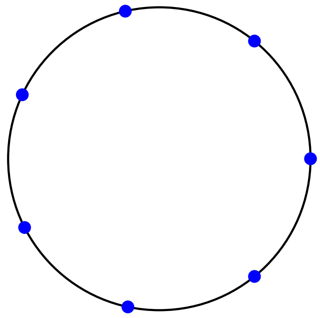
	Graph 1	Graph 2	Graph 3	Graph 4
ist eulersch				
ist hamiltonsch				

Weiter auf nächster Seite

Aufgabe 15

Gegeben sind die folgenden zwei Graphen.





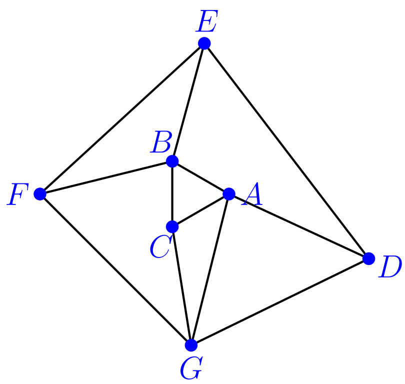
a) Finde im linken Graphen einen hamiltonschen Kreis.

Hamiltonscher Kreis:

b) Zeichne im rechten Graphen geeignete Bezeichnungen für die Ecken und weitere Kanten ein, so dass der fertige Graph isomorph zum linken Graphen ist.

Aufgabe 16

Gegeben ist nochmals der Graph aus der letzten Aufgabe.



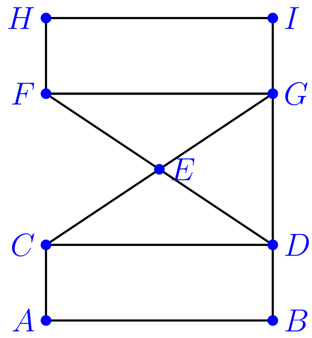
Gib möglichst viele verschiedene hamiltonsche Kreise des Graphen an. Hierbei bedeutet *verschieden*, dass die Reihenfolge unterschiedlich ist und nicht nur der Anfangspunkt im Kreis verschoben wurde.

Weiter auf nächster Seite

Beginn Online-Einheit 3

Aufgabe 17

Gegeben ist der nebenstehende einfache Graph.



a) Gib einen Kantenzug an, der A und F verbindet.

Antwort:

b) Warum ist der Graph hamiltonsch?

Antwort:

c) Gib einen geschlossenen Kantenzug an, der durch alle Ecken des Graphen verläuft, keine Kante zwei Mal benützt und trotzdem kein hamiltonscher Kreis ist.

Antwort:

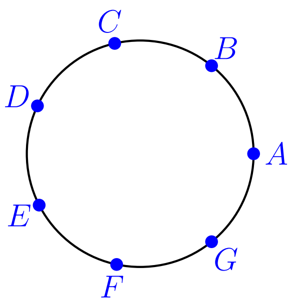
Es ist nicht immer einfach, einen hamiltonschen Kreis zu finden. Aber der folgende Satz besagt, dass ein Graph hamiltonsch ist, wenn er genügend viele Kanten besitzt.

Satz von Dirac: Ein Graph mit $n \geq 3$ Ecken, der einfach und zusammenhängend ist und bei dem $\text{Grad}(E) \geq \frac{n}{2}$ für jede Ecke E gilt, ist hamiltonsch.

Ohne Beweis. Wir benötigen diesen Satz im Weiteren nicht.

Dieser Satz gibt eine hinreichende Bedingung an. Wenn die Voraussetzungen des Satzes ($n \geq 3$, Graph einfach und zusammenhängend, $\text{Grad}(E) \geq \frac{n}{2}$ für jede Ecke E) erfüllt sind, dann ist der Graph hamiltonsch. Es gibt jedoch hamiltonsche Graphen, die nicht alle Voraussetzungen des Satzes erfüllen.

Beispiel: Hamiltonscher Graph mit 7 Ecken und möglichst wenig Kanten



Graph 1

Wir sehen: Jeder Eckengrad ist 2, und das ist kleiner als $\frac{7}{2}$.

Im Folgenden werden verschiedene Eigenschaften hamiltonscher Graphen zusammengestellt. Ist eine dieser Eigenschaften nicht erfüllt, dann ist der Graph nicht hamiltonsch.

Satz: 1) Ein hamiltonscher Graph ist zusammenhängend.
2) Für jede Ecke E in einem hamiltonschen Graphen gilt $\mathrm{Grad}(E) \geq 2$.

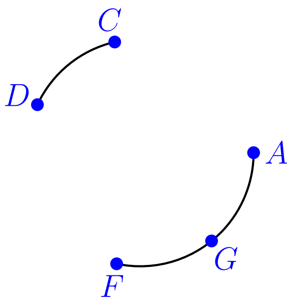
Beweis: 1) Seien E, E' zwei beliebige Ecken des Graphen. Da sie auf einem hamiltonschen Kreis liegen, gibt es einen Kantenzug, der die beiden Ecken verbindet.
2) E liegt auf einem hamiltonschen Kreis, also folgt $\mathrm{Grad}(E) \geq 2$. $\square$

Umgekehrt bedeutet dieser Satz: Ist ein Graph nicht zusammenhängend, so ist er nicht hamiltonsch. Oder gibt es eine Ecke E mit $\mathrm{Grad}(E) \leq 1$, so ist der Graph nicht hamiltonsch.

Die beiden Eigenschaften dieses Satzes sind nicht sehr kraftvoll. Um bessere Kriterien dafür zu formulieren, dass ein Graph nicht hamiltonsch ist, müssen wir den Begriff *Löschen von Ecken* definieren.

Definition: 1) Sei E eine Ecke in einem Graphen. E wird aus dem Graphen gelöscht, indem man E und alle Kanten, die E mit sich oder anderen Ecken verbinden, aus dem Graphen entfernt.
2) Ein Graph H heißt Teilgraph eines Graphen G, wenn alle Ecken und Kanten von H auch Ecken und Kanten von G sind.

Beispiel: Lösche aus Graph 1 die Ecken B und E.



Graph 2

Graph 2 ist ein Teilgraph von Graph 1. Graph 2 besteht aus zwei Teilgraphen, die jeder für sich zusammenhängend sind.

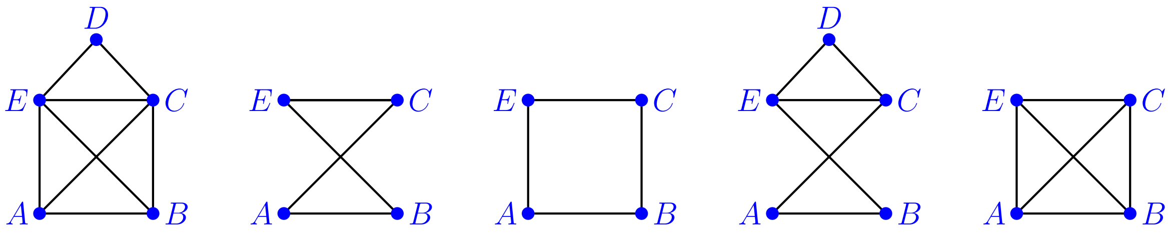
Wir definieren nun einen Fachbegriff, mit dem beschrieben werden kann, dass Graph 2 aus zwei „Teilen“ besteht.

Definition: Die maximal großen zusammenhängenden Teilgraphen eines Graphen heißen die Komponenten des Graphen. Ist ein Graph zusammenhängend, so besteht er aus einer Komponente.

Graph 2 besteht also aus zwei Komponenten, Graph 1 aus einer.

Aufgabe 18

Welcher der Graphen ist Teilgraph von einem oder von mehreren der skizzierten Graphen? Trage Deine Antworten in die Tabelle ein. Überlege Dir, ob ein Graph Teilgraph von sich selber sein kann (eventuell Definition nachsehen).

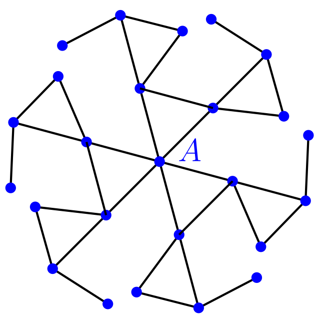


Graph 1 ist Teilgraph des Graphen	
Graph 2 ist Teilgraph des Graphen	
Graph 3 ist Teilgraph des Graphen	
Graph 4 ist Teilgraph des Graphen	
Graph 5 ist Teilgraph des Graphen	

Aufgabe 19

In wie viele Komponenten zerfällt nebenstehender Graph, wenn die Ecke A gelöscht wird?

Antwort: In $\boxed{}$ Komponenten

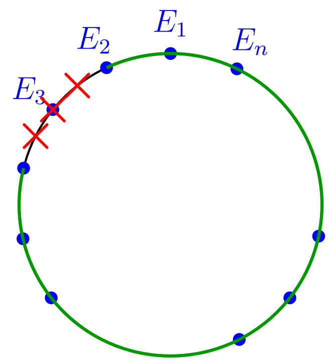


Wir sehen oben, dass der hamiltonsche Graph 1 nach dem Löschen zweier Ecken in zwei Komponenten zerfällt. Der folgende Satz beschreibt dies allgemeiner.

Satz: In einem hamiltonschen Graphen mit n Ecken gelten:
1) Löscht man eine Ecke, so ist der entstehende Teilgraph zusammenhängend.
2) Löscht man zwei Ecken, so zerfällt der entstehende Teilgraph in höchstens zwei Komponenten.
3) Löscht man m Ecken ($m < n$), so zerfällt der entstehende Teilgraph in höchstens m Komponenten.

Zur Veranschaulichung der Beweisidee verwenden wir einen hamiltonschen Graphen mit möglichst wenig Kanten.

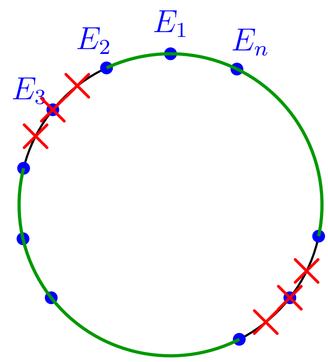
Beweisidee für den Satz über Eckenlöschen in hamiltonschen Graphen:



Löschen **einer** Ecke:

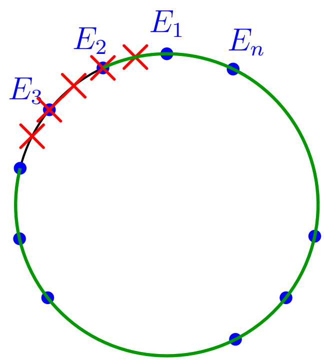
Der entstehende Graph

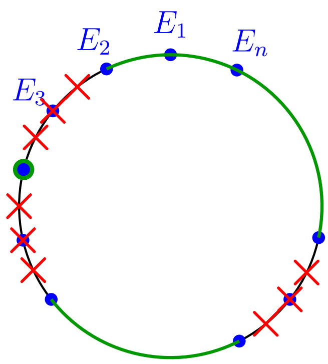
ist zusammenhängend



Löschen von **zwei** Ecken:

Der entstehende Graph
zerfällt in zwei Komponenten
oder bleibt zusammenhängend





Löschen von **drei** Ecken:

Der entstehende Graph
zerfällt in drei Komponenten
oder zerfällt in zwei Komponenten
oder bleibt zusammenhängend

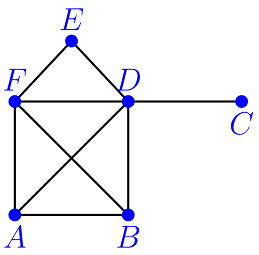
Wir sehen, dass beim Löschen einer Ecke höchstens eine Komponente in zwei Komponenten aufgeteilt werden kann. Beim Löschen einer Ecke erhöht sich also die Anzahl der Komponenten höchstens um 1. Damit folgt die Aussage des Satzes. $\square$

Wenn der Graph mehr Kanten besitzt, dann zerfällt er beim Löschen von Ecken eventuell in weniger Komponenten. Aber er zerfällt sicher nicht in mehr Komponenten.

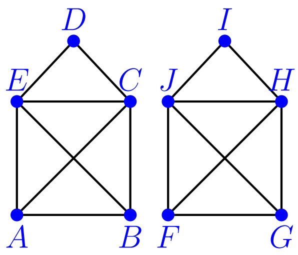
Umgekehrt bedeutet dieser Satz z.B.: Zerfällt ein Graph nach dem Löschen von 2 Ecken in drei Komponenten (wie in der letzten Aufgabe), dann ist er nicht hamiltonsch.

Aufgabe 20
Gib für jeden der Graphen unter Verwendung eines der letzten beiden Sätze eine Begründung dafür an, dass er nicht hamiltonsch ist.

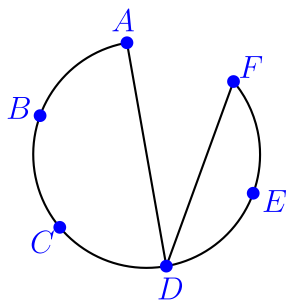
a)



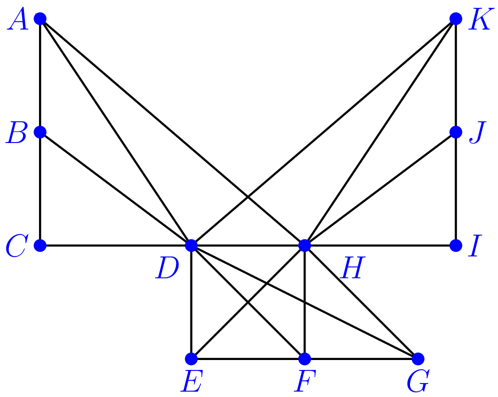
b)



c)



d)

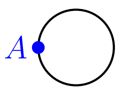


6 Wege und Kreise

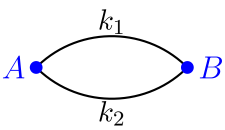
Definition: Ein Kantenzug heißt Weg, wenn er jede Ecke des Graphen höchstens ein Mal durchläuft und jede Kante höchstens ein Mal benützt. Anfangs- und End-Ecke dürfen übereinstimmen (diese Ecke wird auch nur ein Mal durchlaufen).

Definition: Ein Kreis ist ein Weg, der geschlossen ist.

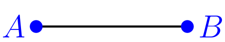
Beispiele:



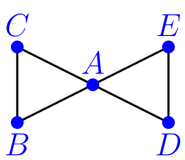
$A - A$: kleinst möglicher Kreis



$A \overset{k_1}{-} B \overset{k_2}{-} A$: Kreis mit zwei Ecken



$A - B - A$: Kein Weg, kein Kreis

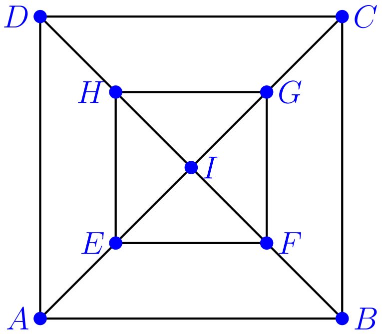


$A - B - C - A - D - E - A$: kein Weg und kein Kreis

Beachte: Jeder hamiltonsche Kreis ist ein Kreis, aber nicht umgekehrt.

Aufgabe 21

Gib im folgenden Graphen einen hamiltonschen Kreis und drei verschiedene nicht hamiltonsche Kreise an.



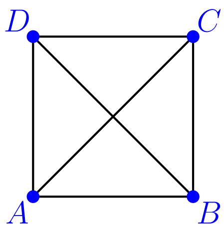
Hamiltonscher Kreis:

Nicht hamiltonsche Kreise:

Aufgabe 22

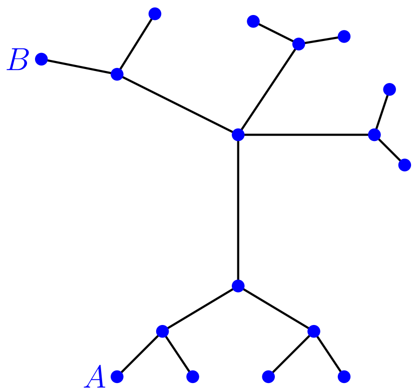
Wie viele verschiedene Wege gibt es jeweils, die A und B verbinden?

a)



Antwort: Es gibt $\boxed{}$ Weg(e)

b)



Antwort: Es gibt $\boxed{}$ Weg(e)

7 Bäume

Definition: Ein Graph, der zusammenhängend ist und keinen Kreis enthält, heißt Baum

Folgerung: Ein Baum enthält keine Schlingen und keine parallelen Kanten.

Warum ergibt sich die Folgerung direkt aus dem Beweis?

Satz: In einem Baum gibt es von jeder Ecke zu jeder anderen Ecke genau einen Weg.

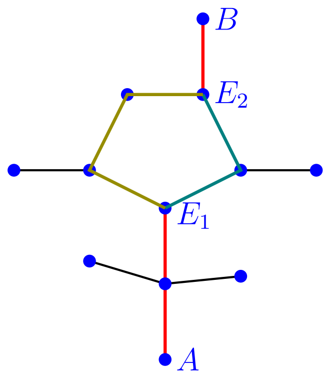
Beweis: Betrachte einen Baum.

1) Da der Baum zusammenhängend ist, gibt es von jeder Ecke zu jeder anderen mindestens einen Weg.

2) Nun beweisen wir, dass es von jeder Ecke zu jeder anderen höchstens einen Weg gibt. Dazu führen wir einen Widerspruchsbeweis.

Annahme: Es gibt im Baum zwei Ecken A und B, so dass mindestens zwei verschiedene Wege von A nach B existieren.

Wir gehen von A aus beide Wege so lange entlang, bis wir die erste Ecke erreicht haben, bei der sich die Wege trennen. Diese nennen wir E_1. Falls sich die Wege bereits in der ersten Kante unterscheiden, nennen wir A um in E_1. Dann gehen wir beide Wege so lange entlang, bis wir auf der erste Ecke stoßen, die sie wieder gemeinsam haben. Wir nennen diese Ecke E_2.



$\Rightarrow$ Der zusammengesetzte Weg von E_1 nach E_2 entlang des einen Weges und von E_2 nach E_1 entlang des anderen Weges ist ein Kreis.

Also gibt es im Baum einen Kreis $\lightning$

Also war die Annahme falsch, und für beliebige Ecken A, B gibt es nicht mehr als einen Weg von A nach B. $\square$

Aufgabe 23
Zeichne jeweils einen Graphen, der ein Baum ist und die angegebenen Eigenschaften besitzt.

a) Der Baum besitzt 7 Ecken und eine davon hat Eckengrad 5.

b) Der Baum besitzt 10 Ecken und zwei davon haben Eckengrad 5.

Aufgabe 24

a) Zeichne einen einfachen Graphen mit 8 Ecken und 8 Kanten, der hamiltonsch ist und nach Löschen einer Ecke ein Baum ist.

b) Zeichne einen einfachen Graphen mit 8 Ecken und 13 Kanten, der hamiltonsch ist und nach Löschen einer Ecke ein Baum ist.

Wir beginnen mit der Umkehrung zum letzten Satz der vorigen Einheit. Beginn Online-Einheit 4

Umkehrsatz: Gibt es in einem Graphen von jeder Ecke zu jeder anderen Ecke genau einen Weg, und enthält der Graph keine Schlinge, dann ist dieser Graph ein Baum.

Beweis: Der Graph ist zusammenhängend, da es von jeder Ecke zu jeder anderen einen Weg gibt.
Der Graph enthält keinen Kreis mit 1 Ecke, da er keine Schlinge besitzt.
Er enthält auch keinen Kreis mit mindestens 2 Ecken, denn andernfalls gäbe es zu zwei verschiedenen Ecken dieses Kreises zwei verschiedene Wege, die sie verbinden.
$\Rightarrow$ der Graph ist ein Baum. $\square$

Aufgabe 25
Skizziere Bäume mit 6 Ecken und den jeweils angegebenen Eigenschaften. Wie viele Kanten haben die Bäume?

a) Der Baum hat genau zwei Ecken mit Eckengrad 1,

b) Der Baum hat genau drei Ecken mit Eckengrad 1,

c) Der Baum hat genau vier Ecken mit Eckengrad 1,

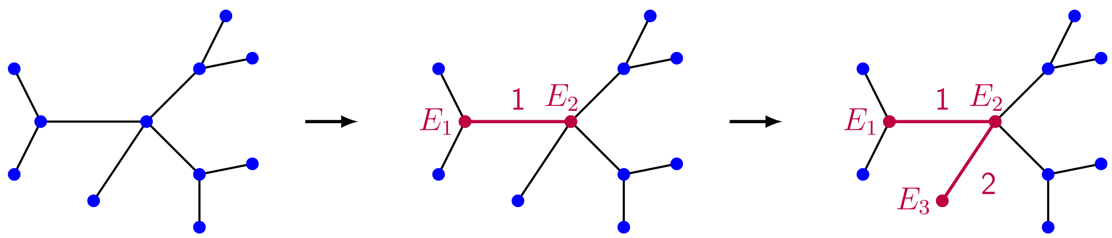
d) Der Baum hat genau fünf Ecken mit Eckengrad 1.

Ein Baum mit sechs Ecken hat offensichtlich immer gleich viele Kanten. Der folgende Satz verallgemeinert diese Aussage.

Satz: Ein Baum mit n Ecken besitzt genau $n-1$ Kanten

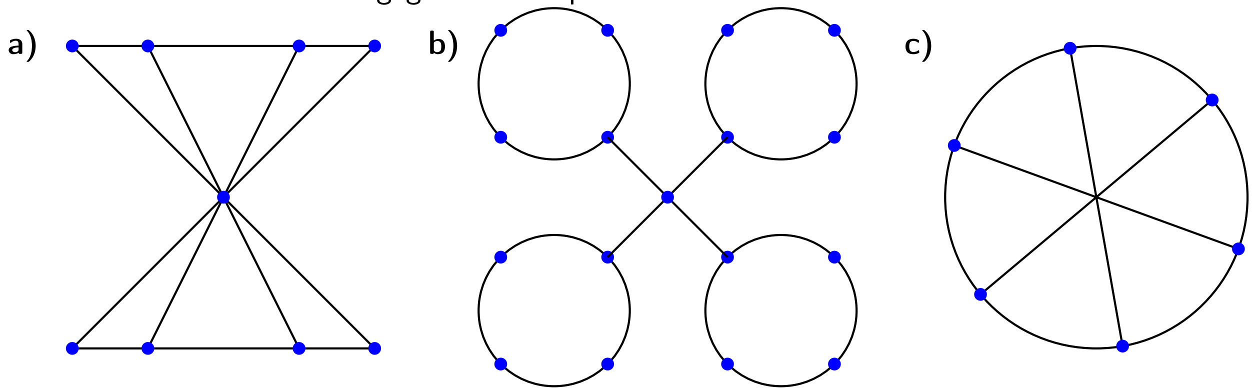
Beweis: Es sei ein Graph mit n Ecken gegeben. Wir färben seine Ecken und Kanten, während wir sie zählen.

1) Wähle eine beliebige Ecke E_1 und färbe sie.
2) Wähle eine beliebige Kante, die E_1 mit einer Ecke E_2 verbindet. Da keine Schlinge erlaubt ist, folgt $E_1 \neq E_2$. Färbe die gewählte Kante und E_1. Bisher gezählt: 2 Ecken und 1 Kante.
3) Wähle eine noch nicht gefärbte Kante, die E_1 oder E_2 mit einer Ecke E_3 verbindet. Da der Baum keinen Kreis enthält, gilt $E_3 \neq E_2$ und $E_3 \neq E_1$. Färbe die neue Kante und E_3. Bisher gezählt: 3 Ecken und 2 Kanten.



Setze entsprechend fort: In jedem Schritt wird eine neue Kante gefärbt, die eine der bereits gefärbten Ecken mit einer Ecke verbindet. Diese Ecke ist noch nicht gefärbt, da es im Baum keinen Kreis gibt, und wird jetzt gefärbt. Es kommt 1 Kante und 1 Ecke dazu.
Mit dieser Methode wird jede Ecke des Baumes gefärbt, da er zusammenhängend ist.
Nach n Schritten haben wir n Ecken und $n-1$ Kanten gezählt. Der Graph besitzt keine weiteren Kanten, denn jede weitere Kante müsste eine der bereits gefärbten Ecken mit einer neuen Ecke verbinden. Weitere Ecken besitzt der Graph nicht, also haben wir alle Ecken und Kanten des Graphen gezählt. □

Aufgabe 26
Streiche in den angegebenen Graphen jeweils so viele Kanten, dass der entstehende Teilgraph ein Baum ist und alle Ecken des gegebenen Graphen enthält.

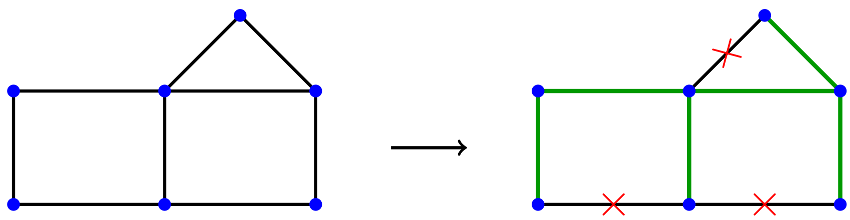


Definition: Ist ein Teilgraph eines Graphen ein Baum, der alle Ecken des Graphen enthält, so heißt er aufspannender Baum des Graphen.

Satz: Jeder zusammenhängende Graph besitzt einen aufspannenden Baum.

Beweis: Sei ein zusammenhängender Graph gegeben. Wenn er keinen Kreis enthält, ist er ein Baum und sein eigener aufspannender Baum.
Enthält er einen Kreis, so entferne eine Kante des Kreises aus dem Graphen. Der entstehende Teilgraph ist weiterhin zusammenhängend, da der Kreis zusammenhängend bleibt. Wiederhole diesen Schritt so oft, bis der entstehende Teilgraph keinen Kreis mehr enthält. Dieser ist ein aufspannender Baum des Graphen. □

Veranschaulichung:



Folgerung: Jeder zusammenhängende Graph mit n Ecken besitzt mindestens $n-1$ Kanten.

Beweis: Der Graph besitzt einen aufspannenden Baum mit n Ecken. Dieser hat $n-1$ Kanten, die alle im Graphen enthalten sind. □

Folgerung: Entfernt man aus einem Baum eine Kante, so ist er nicht mehr zusammenhängend.

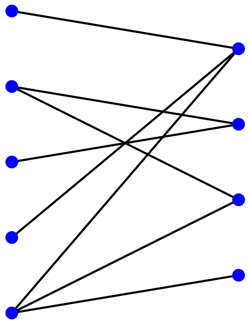
Beweis: Betrachte einen Baum mit n Ecken. Er hat $n-1$ Kanten. Entfernt man eine Kante, so hat der enstehende Teilgraph n Ecken und $n-2$ Kanten. Der Teilgraph kann nicht zusammenhängend sein, denn sonst müsste er mindestens $n-1$ Kanten besitzen. □

Folgerung: Besitzt ein zusammenhängender Graph mit n Ecken genau $n-1$ Kanten, so ist der Graph ein Baum.

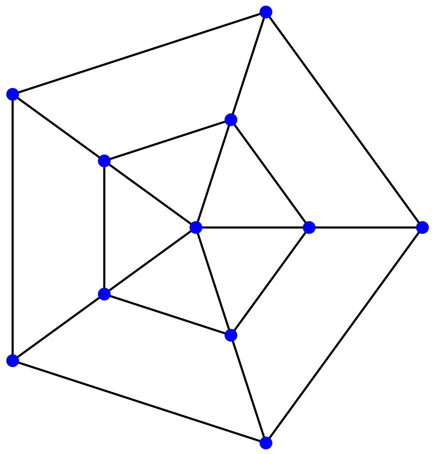
Beweis: Sei ein zusammenhängender Graph mit n Ecken und $n-1$ Kanten gegeben.
Letzter Satz $\Rightarrow$ Er enthält einen aufspannenden Baum. Dieser hat $n-1$ Kanten.
$\Rightarrow$ Der Graph ist gleich seinem aufspannenden Baum, ist also selber ein Baum. □

Aufgabe 27
Zeichne in die beiden Graphen jeweils einen aufspannenden Baum ein.

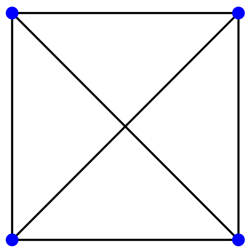
a)



b)



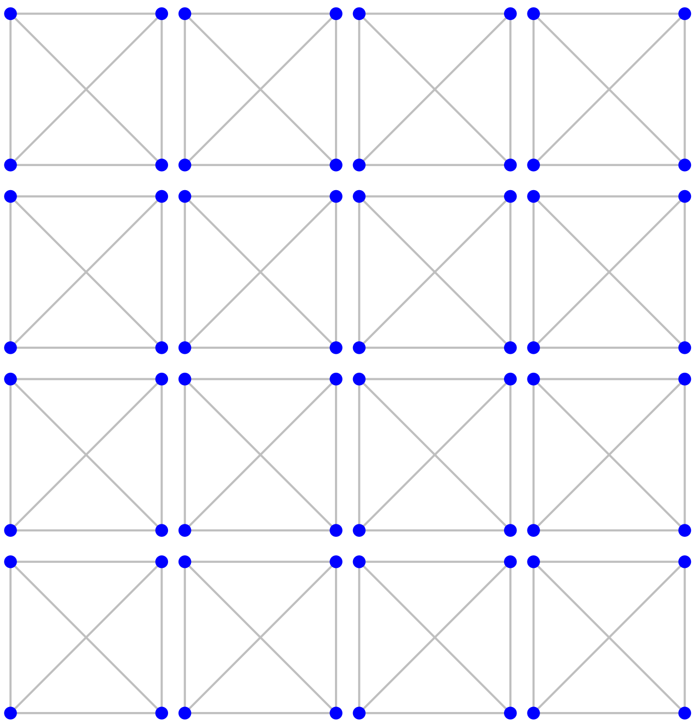
Aufgabe 28
Gegeben ist ein vollständiges Viereck.



a) Der Graph besitzt 16 verschiedene aufspannende Bäume. Skizziere sie.

b) Wie viele nicht zueinander isomorphe aufspannende Bäume gibt es? Skizziere alle nicht zueinander isomorphen aufspannenden Bäume.

Lösung zu a):

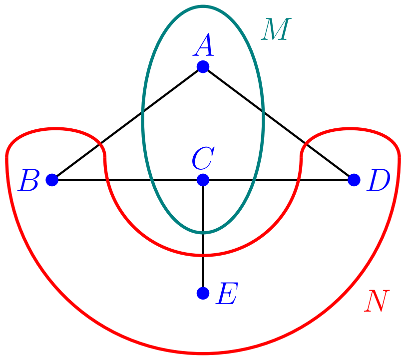


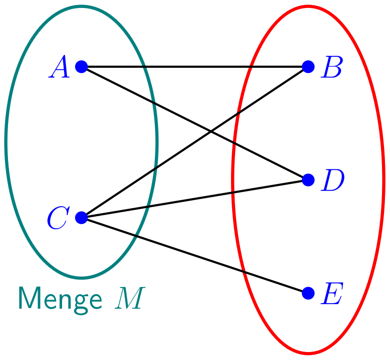
Lösung zu b):

8 Bipartite Graphen

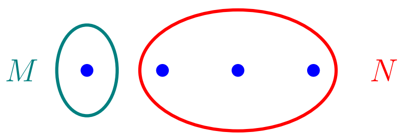
Definition: 1) In einem Graphen heißen zwei Ecken benachbart, falls sie durch mindestens eine Kante verbunden sind.
2) Ein einfacher Graph heißt bipartit, wenn die Menge seiner Ecken in zwei nichtleere Teilmengen M und N aufgeteilt werden kann, so dass nur Ecken aus verschiedenen Mengen benachbart sind. Kanten, die zwei Ecken derselben Teilmenge verbinden, gibt es nicht.

Beispiel: bipartiter Graph isomporpher Graph





Bemerkungen: 1) Ein bipartiter Graph besitzt mindestens zwei Ecken, denn sowohl in M als auch in N muss mindestens eine Ecke enthalten sein.
2) Ein Graph ohne Kanten mit mindestens zwei Ecken ist bipartit (aber langweilig).



3) Ein bipartiter Graph enthält keine Schlinge, denn jede Ecke mit einer Schlinge ist zu sich selbst benachbart.
4) Sind zwei Graphen isomorph, so sind entweder beide bipartit oder beide nicht bipartit.

Die Färbemethode:

Gegeben: Ein zusammenhängender Graph mit mindestens zwei Ecken.

Ziel: Entscheide, ob dieser Graph bipartit ist.

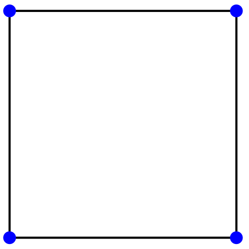
Vorgehen: 1) Wähle eine Ecke des Graphen und färbe sie grün.
2) Färbe alle ihre Nachbarn rot.
3) Färbe deren benachbarte Ecken wieder grün, usw.

Ergeben sich gleichfarbige benachbarte Ecken, so ist der Graph nicht bipartit.
Gelingt es, alle Ecken so zu färben, dass benachbarte Ecken verschieden gefärbt sind, dann ist der Graph bipartit. Die grünen Ecken bilden die Menge M, die roten die Menge N.

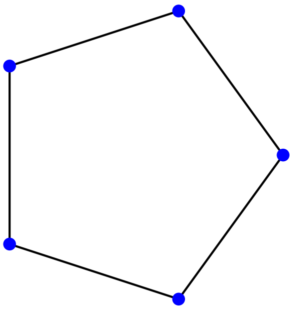
Aufgabe 29

Stelle mit Hilfe der Färbemethode fest, ob die Graphen bipartit sind oder nicht. Trage in die Tabelle J für Ja, N für Nein ein.

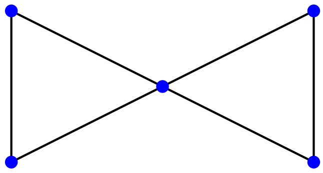
Graph 1:



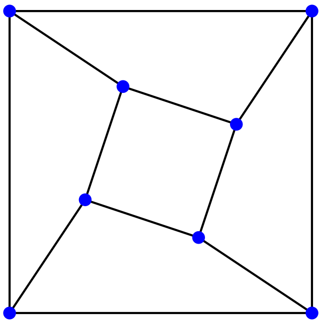
Graph 2:



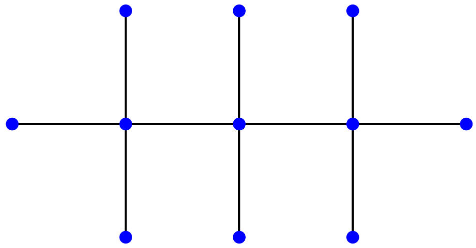
Graph 3:



Graph 4:



Graph 5:



Graph	Graph 1	Graph 2	Graph 3	Graph 4	Graph 5
ist bipartit					

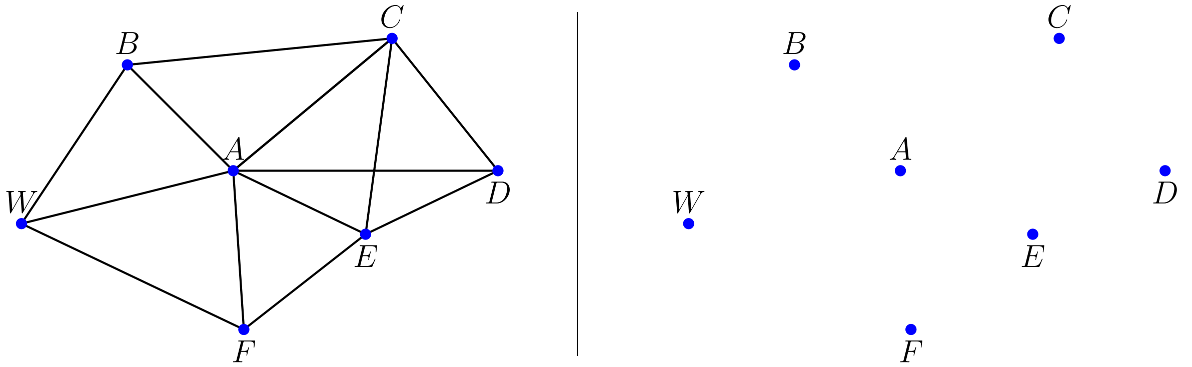
Weiter auf nächster Seite

Beginn Online-Einheit 5

Diese Einheit startet mit einer Aufgabe.

Aufgabe 30

a) Neben einem kleinen Bergdorf wurde ein Wasserwerk W zur Versorgung der Häuser $A, \ldots, F$ gebaut. In der Graphik unten links siehst Du die Häuser und die möglichen Wasserleitungen. Aus Kostengründen sollen möglichst wenig Leitungen gebaut werden. Streiche aus dem Graphen möglichst viele Kanten, so dass noch alle Häuser mit Wasser versorgt werden können. Zeichne dann die Kanten des entstehenden Teilgraphen rechts ein.



b) Wie heißt die Eigenschaft eines Graphen, die in unserem Beispiel garantiert, dass jedes Haus mit Wasser versorgt wird?

Antwort: Der Graph ist ________________.

c) Wie heißt der Teilgraph, den Du im Aufgabenteil a) gezeichnet hast, in Bezug auf den ursprünglichen Graphen?

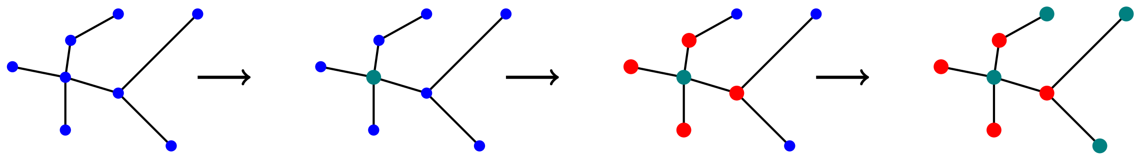
Antwort:

Der Teilgraph ist ein ____________________ des linken Graphen.

d) Die Wasserleitungsfirma hat nun Rohre geliefert, die zwei verschiedene Enden haben. Am einen Ende Anschlusstyp 1, am anderen den Anschlusstyp 2. Das bedeutet, dass nur Häuser mit verschiedenen Anschlüssen verbunden werden können. Außerdem ist vorgegeben, dass in jedem Haus nur einer der beiden Anschlusstypen verbaut werden kann. Zeige, dass die Wasserversorgung mit diesen Vorgaben gebaut werden kann. Färbe dazu die Häuser grün, die den Anschlusstyp 1 haben, und die anderen mit rot. Beachte, dass auch das Wasserwerk nur einen Anschlusstyp besitzen darf.

Satz: Jeder Baum mit mindestens zwei Ecken ist bipartit.

Beweisidee:



Beweis: Betrachte einen beliebigen Baum mit mindestens zwei Ecken.
Färbe eine beliebige Ecke grün. Laufe von dieser Ecke aus den Baum entlang und färbe die Ecken abwechselnd rot und grün.
Man erreicht jede Ecke, da der Baum zusammenhängend ist.
Jede Ecke wird nur über einen Weg erreicht. Daher treten keine Konflikte auf.
$\Rightarrow$ Der Baum ist bipartit. $\square$

Wann sind Graphen, die nur aus Ecken auf einem Kreis bestehen, bipartit?
Wir untersuchen folgende Fragestellung: *Für welche natürlichen Zahlen n ist ein Graph, der nur aus n Ecken auf einem Kreis besteht, bipartit?*

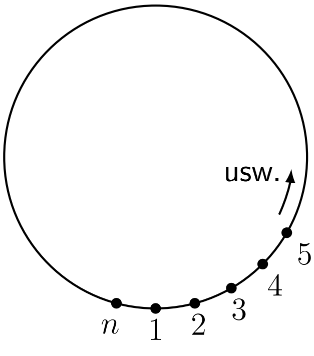
Schritt 1: Untersuche Beispiele für „kleine“ n von 2 bis 7.

n	2	3	4
Graph			
bipartit?			

n	5	6	7
Graph			
bipartit?			

Schritt 2: Stelle eine Vermutung auf, wie die obige Frage beantwortet werden kann.
Vermutung:
Gegeben ist ein Graph, der nur aus n Ecken auf einem Kreis besteht.
Falls n eine ______ Zahl ist, dann ist der Graph bipartit.
Falls n eine ______ Zahl ist, dann ist der Graph nicht bipartit.

Schritt 3: Beweise deine Vermutung durch geeignetes Färben der Ecken.
Die Ecken benennen wir hierzu gegen den Uhrzeigersinn mit den Zahlen 1 bis n. Beginne nun mit dem Färben, indem du Ecke 1 grün färbst und gegen den Uhrzeigersinn fortfährst. Welche Farbe haben dann die Ecken 2, 3, 4 usw.?



Für die Ecke mit der Nummer k ergibt sich folgender Zusammenhang:
Falls k eine ______ Zahl ist, dann ist die Ecke k grün.
Falls k eine ______ Zahl ist, dann ist die Ecke k rot.

Weiter auf nächster Seite

Zwischen welchen beiden benachbarten Ecken kann überhaupt ein Konflikt bei der Färbung auftreten?
Zwischen der Ecke mit der Nummer $\boxed{}$ und der Ecke mit der Nummer $\boxed{}$.

Falls n $\boxed{}$ ist, sind beide Ecken unterschiedlich gefärbt, und es gibt keinen Konflikt. In diesem Fall ist der Graph bipartit.

Falls n $\boxed{}$ ist, sind beide Ecken gleich gefärbt, und es gibt einen Konflikt. In diesem Fall ist der Graph nicht bipartit.

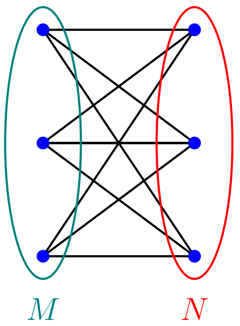
Damit hast Du den folgenden Satz bewiesen.

Satz: Ein Graph mit n Ecken, der nur aus einem Kreis besteht, ist genau dann bipartit, wenn n gerade ist.

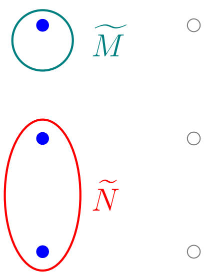
Satz: Jeder Teilgraph eines bipartiten Graphen, der mindestens zwei Ecken enthält, ist bipartit.

Beweis:

bipartiter Graph:

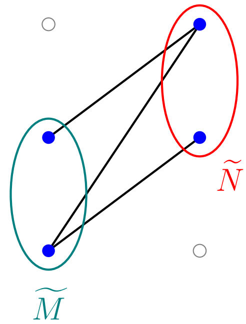


Fall 1: Nur Ecken aus M



Fall 2: Nur Ecken aus N Analog

Fall 3: Aus M und N mindestens eine Ecke



$\square$

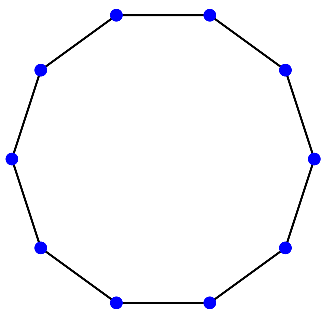
In den Fällen 1 und 2 kann man die Ecken beliebig auf die Mengen $\widetilde{M}$ und $\widetilde{N}$ verteilen.

Im Fall 3 enthält die Menge $\widetilde{M}$ alle Ecken von M, die im Teilgraph enthalten sind, und die Menge $\widetilde{N}$ alle Ecken von N, die im Teilgraphen enthalten sind. $\square$

Wir formulieren diesen Satz um, damit wir ihn besser benützen können.

Folgerung: Enthält ein Graph einen Teilgraphen mit mindestens zwei Ecken, der nicht bipartit ist, dann ist der Graph auch nicht bipartit.
Spezialfall: Enthält ein Graph einen Kreis mit einer ungeraden Anzahl von Ecken, so ist er nicht bipartit.

Aufgabe 31
Gegeben ist der nebenstehende bipartite Graph. Ergänze eine Kante, so dass der Graph nicht mehr bipartit ist.

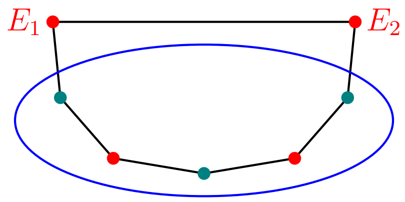


Satz: Ein einfacher Graph mit mindestens zwei Ecken ist genau dann bipartit, wenn er keinen Kreis mit ungerader Eckenzahl enthält.

Beweis: Aus Spezialfall: Ist ein Graph bipartit, so enthält er keinen Kreis mit ungerader Eckenzahl.

Betrachte einen einfachen Graphen, der keinen Kreis mit ungerader Eckenzahl enthält. Zeige: Der Graph ist bipartit.
Wir nehmen an, dass der Graph zusammenhängend ist.
Schritt 1: Konstruiere einen aufspannenden Baum. Der Baum ist bipartit. Färbe die Ecken, um sie den Mengen M und N zuzuordnen. Damit sind alle Ecken des Graphen gefärbt!
Schritt 2: Ergänze nun die restlichen Kanten des Graphen. Es gibt keine Kante, die gleich gefärbte Ecken verbindet, denn:

Annahme: Eine Kante verbindet zwei rote Ecken E_1, E_2. Im Baum gibt es einen Weg, der E_1 und E_2 verbindet. E_1, E_2 haben dieselbe Farbe und der Baum ist bipartit $\Rightarrow$ der Weg hat eine ungerade Anzahl an Ecken. Durch die Kante, die E_1 mit E_2 verbindet, entsteht ein Kreis mit ungerader Eckenzahl $\lightning$ $\square$

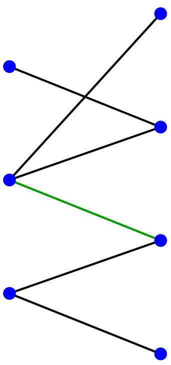


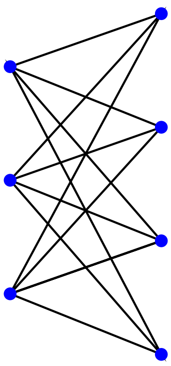
Weg im Baum von E_1 nach E_2

Definition: 1) Ein zusammenhängender bipartiter Graph heißt m–n–Graph, wenn seine zwei Eckenteilmengen M und N m Ecken bzw. n Ecken enthalten.

2) Ein bipartiter Graph ohne parallele Kanten, bei dem jede Ecke aus M mit jeder Ecke aus N benachbart ist, heißt vollständiger bipartiter Graph.

Veranschaulichung:


3–4–Graph


vollständiger 3–4–Graph

Frage: Warum ist der linke Graph ohne die grüne Kante kein 3–4–Graph? Man kann die Eckenmenge offensichtlich in eine Menge M mit 3 Ecken und eine Menge N mit 4 Ecken aufteilen, so dass die Definition *bipartit* erfüllt ist. Was fehlt dann?

Antwort: Ein m–n–Graph muss zusammenhängend sein. Ohne die grüne Kante ist der Graph nicht zusammenhängend.

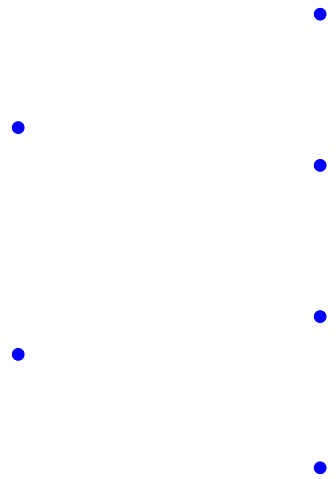
Aufgabe 32

a) Zeichne einen vollständigen 2–4–Graphen. Wie viele Kanten besitzt er?

b) Wie viele Kanten besitzt ein vollständiger m–n–Graph?

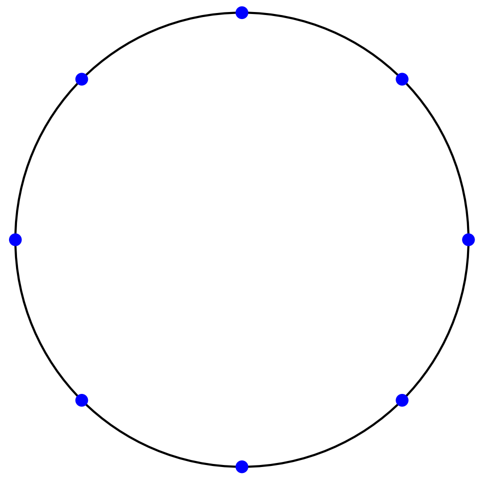
c) Ergänze im Achteck Kanten (keine Ecken), bis ein vollständiger bipartiter Graph ensteht. Welcher vollständige m–n–Graph entsteht hierdurch?

Lösung zu a)



Der Graph besitzt ☐ Kanten.

Lösung zu c)



Vollständiger ☐ – ☐ –Graph.

Aufgabe 33

Zeichne alle vollständigen bipartiten Graphen mit 6 Ecken, die nicht zueinander isomorph sind.

Aufgabe 34

Zeichne einen Baum, der ein

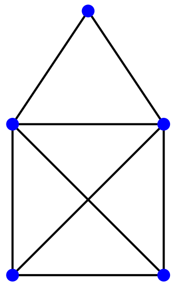
a) 2–3–Graph ist.

b) 1–4–Graph ist.

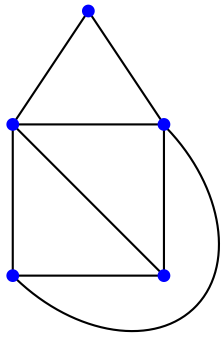
c) 4–9–Graph ist.

9 Ebene und plättbare Graphen

Das Haus vom Nikolaus



Isomorpher Graph

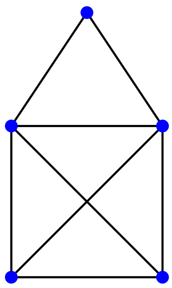


Im *Haus vom Nikolaus* kreuzen sich zwei Kanten, ohne dass der Kreuzungspunkt eine Ecke ist. Wir stellen uns vor, dass die eine Kante über der anderen verläuft. Das bedeutet, dass der Graph nicht ganz in der Zeichenebene enthalten ist, sondern in die dritte Dimension geht. Man kann den Graphen jedoch isomorph umzeichnen, so dass kein Kreuzungspunkt vorkommt, der keine Ecke ist.

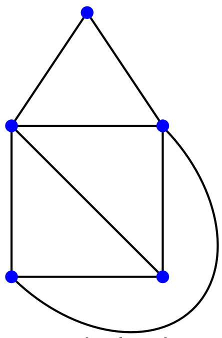
In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit Graphen, die sich so umzeichnen lassen.

Definition: 1) Ein in der Ebene gezeichneter Graph heißt eben, wenn seine Kanten keine Punkte gemeinsam haben außer Ecken.
2) Ein Graph heißt plättbar, wenn er isomorph zu einem ebenen Graphen ist.

Nochmal die beiden isomorphen Graphen von oben:



nicht eben, aber plättbar

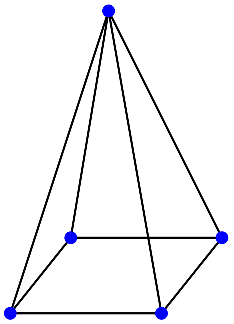


eben und plättbar

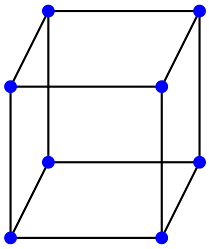
Weiter auf nächster Seite

Aufgabe 35
Gegeben sind die folgenden Graphen, die Begrenzungen dreidimensionaler Körper darstellen. Zeige, dass die Graphen plättbar sind, indem Du jeweils einen isomorphen ebenen Graphen zeichnest.

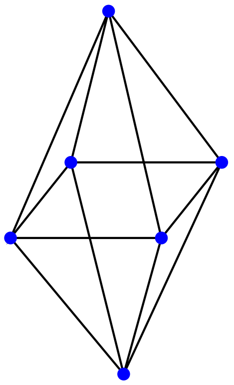
a) In dieser Teilaufgabe gibt es zwei verschiedene Lösungen!



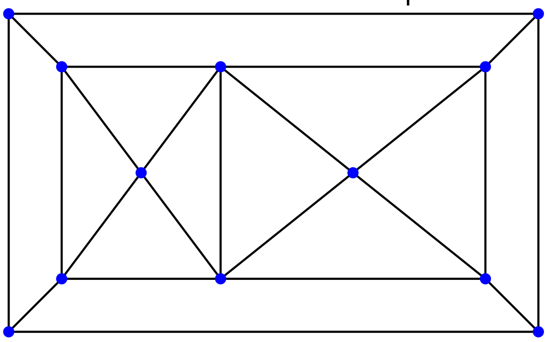
b)



c)



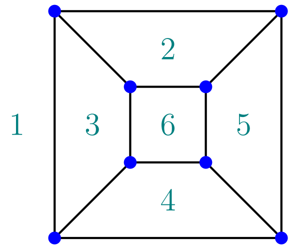
Aufgabe 36
Zeichne neben den ebenen Graphen ein Gebäude, das zu dem Graphen gehören könnte.



Weiter auf nächster Seite

Beobachtung: Ein ebener Graph unterteilt die Zeichenebene in Flächen, eine Außenfläche und keine, eine oder mehrere Innenflächen.

Beispiel:

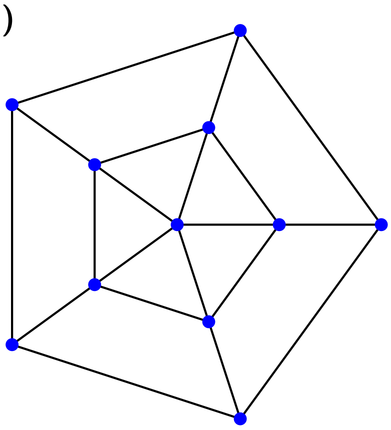


Dieser Graph unterteilt die Zeichenebene in 5 Innenflächen und die mit 1 nummerierte Außenfläche.

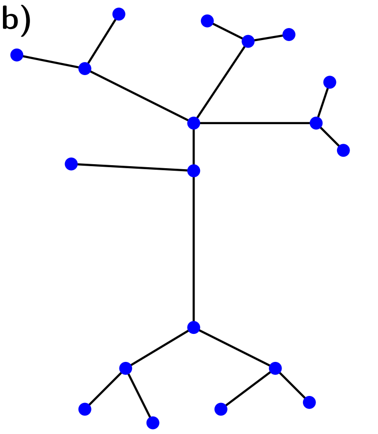
Aufgabe 37

Trage in die Graphen eine Nummerierung der Flächen ein, in die die Ebene durch den Graphen unterteilt wird. Vergiss die Außenfläche nicht. Fülle dann die Tabelle aus.

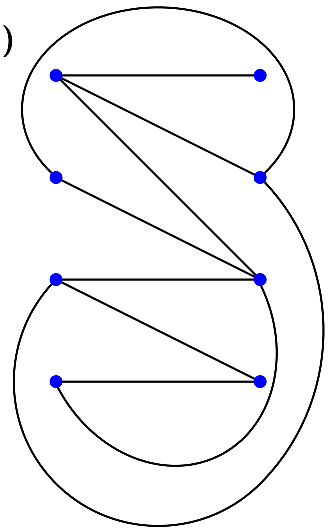
a)



b)



c)



Graph	Anzahl Ecken	Anzahl Kanten	Anzahl Flächen	$e-k+f$
a)	$e =$	$k =$	$f =$	
b)	$e =$	$k =$	$f =$	
c)	$e =$	$k =$	$f =$	
Baum mit n Ecken	$e =$	$k =$	$f =$	

Aufgabe 38

Zeichne zusammenhängende Graphen mit jeweils vier Kanten, die

a) eine Außenfläche und keine Innenfläche,

b) eine Außenfläche und eine Innenfläche,

c) eine Außenfläche und zwei Innenflächen,

d) eine Außenfläche und drei Innenflächen,

e) eine Außenfläche und vier Innenflächen

besitzen.

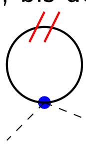
Beginn Online-Einheit 6

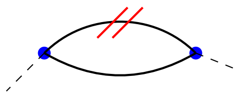
Zur Erinnerung:

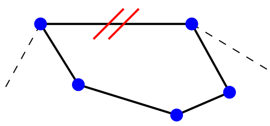
- Ein einfacher Graph ist ein Graph, der keine Schlingen und keine parallelen Kanten besitzt.
- Bei einem ebenem Graphen haben die Kanten keine Punkte gemeinsam außer Ecken.
- Ein plättbarer Graph besitzt einen isomorphen ebenen Graphen.
- In der letzten Aufgabe haben wir gesehen, dass $e+k-f$ für alle betrachteten Graphen gleich war.
  Insbesondere gilt für einen Baum mit n Ecken
  $$e=n,\ k=n-1 \text{ (früherer Satz)},\ f=1 \ \Rightarrow\ e-k+f=n-(n-1)+1=2.$$

Satz: Für jeden zusammenhängenden ebenen Graphen gilt die eulersche Flächenformel
$$e-k+f=2.$$
Hierbei bezeichnet e die Anzahl der Ecken, k die Anzahl der Kanten und f die Anzahl der Flächen. Die äußere Fläche muss mitgezählt werden.

Beweis: Betrachte einen zusammenhängenden ebenen Graphen mit e Ecken, k Kanten und f Flächen. Entferne so lange Kanten, bis der entstehende Teilgraph ein Baum ist.

Entfernen einer Schlinge:  f und k werden jeweils um 1 kleiner, e bleibt gleich
$\Rightarrow\ e-k+f$ bleibt gleich.

Entfernen einer parallelen Kante:  genauso

Entfernen einer Kante aus einem Kreis:  genauso

Wir können also alle Kreise „öffnen“, ohne den Wert von $e-k+f$ zu ändern. Der Graph bleibt zusammenhängend.

Am Ende bleibt ein Baum mit e Ecken übrig. Für diesen gilt $e-k+f=2$ (letzte Aufgabe).
$\Rightarrow$ Für den ursprünglich gegebenen Graphen gilt ebenfalls $e-k+f=2$. $\square$

Aufgabe 39

a) Ein zusammenhängender ebener Graph besitzt 13 Kanten und unterteilt die Ebene in 9 Flächen. Wie viele Ecken hat er?

b) Ein zusammenhängender ebener Graph hat 5 Ecken und 7 Flächen. Wie viele Kanten hat er?

c) Zeichne jeweils für a) und b) einen ebenen Graphen, der diese Eigenschaften hat. Sind die Graphen, die Du gezeichnet hast, einfach?

Aufgabe 40

a) Zeichne einen eben Graphen mit 7 Flächen, der nicht zusammenhängend ist und aus zwei Komponenten besteht. Berechne $e + k - f$.

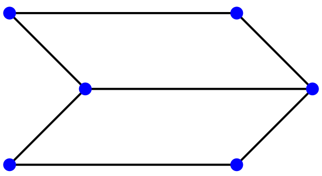
b) Zeichne einen eben Graphen mit 6 Flächen, der nicht zusammenhängend ist und aus drei Komponenten besteht. Berechne $e + k - f$.

c) Sei ein ebener Graph mit e Ecken, k Kanten und f Flächen gegeben, der aus n Komponenten besteht. Stelle eine Vermutung für den Wert von $e + k - f$ in Abhängigkeit von n auf. Überprüfe, ob Deine Formel auch für $n = 1$ stimmt. In diesem Fall ist der Graph zusammenhängend.

Ist ein Graph plättbar, so können wir dies überprüfen, indem wir einen isomorphen ebenen Graphen zeichnen. Wir wollen nun Werkzeuge kennenlernen, mit deren Hilfe wir feststellen können, ob ein Graph plättbar oder nicht plättbar ist. Dazu betrachten wir zunächst ebene Graphen mit möglichst vielen Kanten.

Definition: Ein Graph heißt vollständig eben, wenn er einfach und eben ist und ihm keine Kante hinzugefügt werden kann, ohne dass seine Eigenschaft, einfach und eben zu sein, verloren geht.

Aufgabe 41
Gegeben ist der folgende Graph.



Ergänze möglichst viele Kanten, so dass der entstehende Graph einfach und eben ist. Wie viele Kanten kannst Du ergänzen?

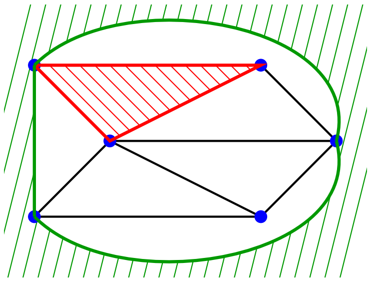
Nachdem Du möglichst viele Kanten ergänzt hast, stellt sich die Frage, ob wirklich nicht mehr Kanten ergänzt werden können.

Dieser Frage gehen wir im nächsten Satz nach. Dazu ziehen wir auf der folgenden Seite Schlussfolgerungen aus der Lösung dieser Aufgabe, die wir dann beim Beweis des Satzes benützen können.

Weiter auf nächster Seite

Rechts sind die Lösung und zwei markierte Flächen zu sehen.

Nachdem wir möglichst viele Kanten ergänzt haben, sehen wir, dass alle Flächen Dreiecke sind. Auch die grün markierte Außenfläche wird von drei Kanten begrenzt.



Satz: Ein vollständig ebener Graph mit $e \geq 3$ Ecken besitzt $k = 3 \cdot e - 6$ Kanten.

Beweis: Betrachte einen vollständig ebenen Graphen.
Er ist zusammenhängend, denn sonst könnte man noch eine Kante ergänzen.
$\Rightarrow$ Es gilt die eulersche Formel $f = 2 + k - e$.
Jede innere Fläche ist ein Dreieck, denn sonst könnte noch eine Kante eingefügt werden.
Die äußere Fläche wird auch von 3 Kanten begrenzt, denn sonst könnte man außen noch eine Kante ergänzen.
Addiert man die Anzahl der Kanten, die die Dreiecke begrenzen, so zählt man jede Kante doppelt.
$\Rightarrow$ $2k = 3f = 3(2 + k - e)$
$\Rightarrow$ $2k = 6 + 3k - 3e \;\Leftrightarrow\; 0 = 6 + k - 3e \;\Leftrightarrow\; k = 3e - 6.$ $\square$

Wir können nun kontrollieren, ob die letzte Aufgabe richtig gelöst wurde. Der Graph hat $e = 6$ Ecken. Da er einfach und eben sein soll, kann er höchstens $3 \cdot e - 6 = 12$ Kanten besitzen. Nachdem 5 Kanten ergänzt wurden, besitzt der Graph 12 Kanten. Wir haben also alle möglichen Kanten gefunden.

Folgerung: Ein einfacher ebener Graph mit $e \geq 3$ Ecken besitzt höchstens $k = 3e - 6$ Kanten.

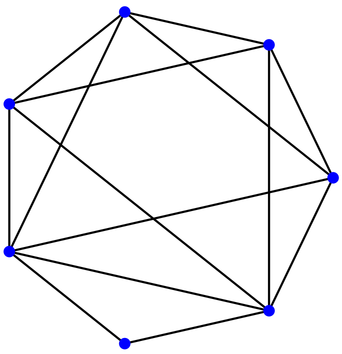
Aufgabe 42
Gegeben ist der unten links gezeichnete Graph.

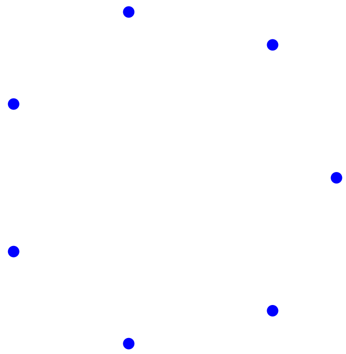
a) Beweise, dass der Graph plättbar ist, indem Du daneben einen isomorphen ebenen Graphen zeichnest.

b) Wie viele Ecken und Kanten besitzt der Graph? $e = \boxed{}$, $k = \boxed{}$.

c) Warum ist der Graph nicht vollständig eben?

d) Ergänze (zuerst im rechten, dann im linken Graphen) so viele Kanten (in rot), bis der Graph vollständig eben ist.

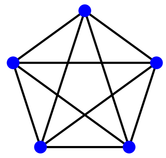




10 Nicht plättbare Graphen

Aufgabe 43

Gegeben ist das vollständige Fünfeck, siehe rechts.



a) Warum ist das vollständige Fünfeck einfach?

Antwort:

b) Wie viele Ecken und Kanten hat das vollständige Fünfeck? $e =$, $k =$.

c) Angenommen, das vollständige Fünfeck wäre plättbar. Dann besitzt es einen isomorphen einfachen und ebenen Graphen. Wie viele Ecken und Kanten hat der isomorphe Graph?

Antwort: $e =$, $k =$.

d) Für diesen isomorphen einfachen und ebenen Graphen gilt $3e - 6 =$,

e) Warum gibt es diesen isomorphen ebenen und einfachen Graphen nicht?

Antwort:

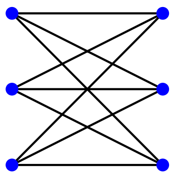
f) Also ist die Annahme, das vollständige Fünfeck wäre plättbar, .

Durch die Lösung der letzten Aufgabe hast Du den folgenden Satz bewiesen.

Satz: Ein vollständiges Fünfeck ist nicht plättbar.

Nun folgt das zweite wichtige Beispiel für einen nicht plättbaren Graphen.

Satz: Der vollständige 3–3–Graph ist nicht plättbar.



Beweisversuch:
$e = 6 \;\Rightarrow\; 3 \cdot e - 6 = 12$
Es gilt $k = 9 \leq 12$, also kein Widerspruch

Das klappt nicht, der Graph hat zu wenig Kanten. Zum Beweis wird eine andere Idee benötigt: Suche möglichst kurze Kreise im vollständigen 3–3–Graphen.

Alle Kreise im Graphen haben mindestens 4 Ecken bzw. 4 Kanten. Diese Eigenschaft können wir im Beweis verwenden.

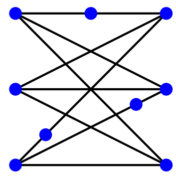
Weiter auf nächster Seite

Beweis: Annahme: Der vollständige 3–3–Graph ist plättbar
Dann gibt es einen isomorphen ebenen Graphen.
Der ebene Graph hat $e = 6$ Ecken und $k = 9$ Kanten.
eulersche Formel $\Rightarrow$ $f = 2 + k - e = 5$
Der ebene Graph hat, wie der vollständige 3–3–Graph, nur Kreise mit mindestens 4 Ecken.
$\Rightarrow$ jede Fläche wird von mindestens 4 Kanten begrenzt, auch die Außenfläche
Addiert man die Anzahl der begrenzenden Kanten, so zählt man jede Kante doppelt
$\Rightarrow$ $2k \geq 4f = 20$ $\Rightarrow k \geq 10$ ↯ Denn er besitzt nur 9 Kanten
$\Rightarrow$ die Annahme muss falsch sein
$\Rightarrow$ der vollständige 3–3–Graph ist nicht plättbar. $\square$

Satz: Ist ein Graph plättbar, dann sind auch alle seine Teilgraphen plättbar. Insbesondere: Besitzt ein Graph auch nur einen Teilgraphen, der nicht plättbar ist, dann ist der Graph nicht plättbar.

Beweisskizze: Gibt es zu einem Graphen einen isomorphen ebenen Graphen, dann gibt es zu jedem Teilgraphen einen isomorphen Teilgraphen des ebenen Graphen. Und der ist dann eben.

Beobachtung: Fügen wir im vollständigen 3–3–Graphen zusätzliche Ecken auf bereits bestehenden Kanten ein wie in der Graphik rechts, so ändert dies nichts daren, dass der Graph nicht plättbar ist.



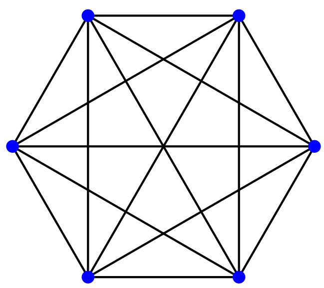
Definition: Fügt man in einem Graphen zusätzliche Ecken auf den bereits bestehenden Kanten ein, so erhält man eine Unterteilung des Graphen.
Durch eine zusätzliche Ecke werden aus einer Kante zwei neue Kanten.

Satz von Kuratowski: Ein Graph ist genau dann nicht plättbar, wenn er einen Teilgraphen enthält, der isomorph zu einem vollständigen Fünfeck oder einem vollständigen bipartiten 3-3-Graphen oder einer Unterteilung eines dieser beiden Graphen ist.

Auf den Beweis dieses Satzes verzichten wir.

Aufgabe 44
Gegeben ist das vollständige Sechseck, siehe rechts.

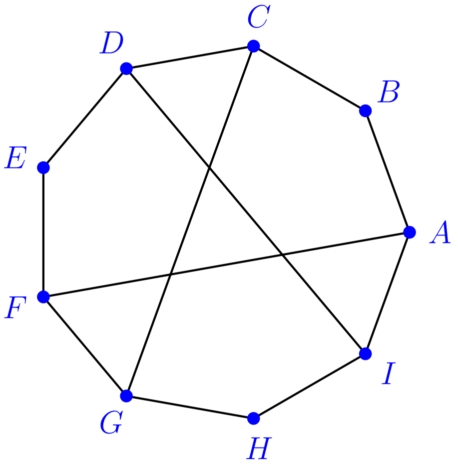
Beweise, dass das vollständige Sechseck nicht plättbar ist, indem Du einen Teilgraphen farbig markierst, der isomorph zu einem vollständigen Fünfeck ist.



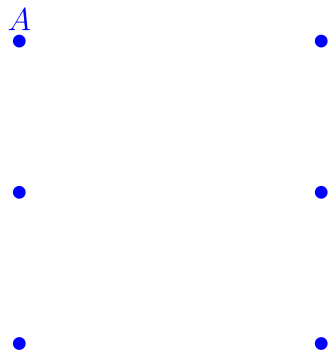
Aufgabe 45

Beweise, dass der unten gezeichnete Graph nicht plättbar ist. Weise dazu nach, dass er isomorph zu einer Unterteilung des vollständigen 3–3–Graphen ist. Zeichne dazu rechts den vollständigen 3–3–Graphen mit den vorgegebenen Ecken. Bezeichne dann die Ecken so, dass die Kanten des rechten Graphen denen im linken Graphen entsprechen. Dazu musst Du noch 3 Unterteilungsecken im rechten Graphen passend einfügen.

Hinweis: Die Ecke im rechten Graphen, die der Ecke A im linken Graphen entsprechen soll, ist bereits bezeichnet.



Lösung:



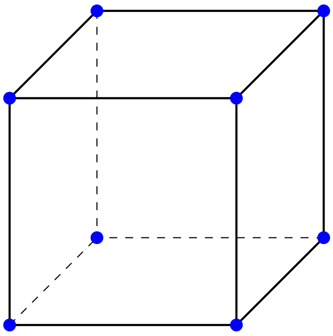
11 Graphen und Polyeder

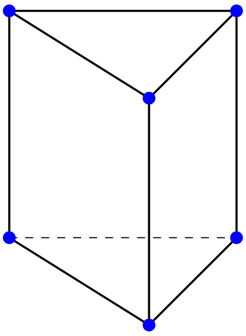
Beginn Online-Einheit 7

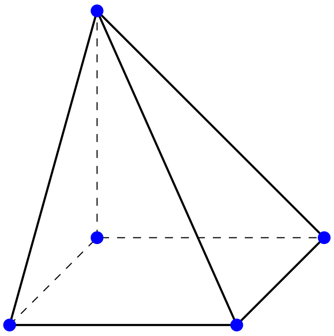
Definition: Ein Polyeder ist ein dreidimensionaler Körper, dessen Seiten aus ebenen Vielecksflächen bestehen. Die Vielecksflächene stoßen an den Kanten und den Ecken des Körpers zusammen. In jeder Ecke enden mindestens 3 Kanten.

Die Ecken und Kanten bilden den Graphen des Polyeders.

Beispiele für Polyeder:







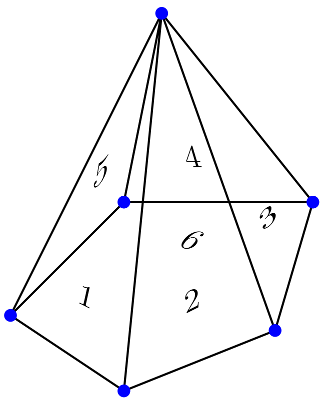
Weiter auf nächster Seite

Aufgabe 46

Gegeben ist das unten skizzierte Polyeder mit 6 Ecken, 10 Kanten und 6 Flächen. Die dreieckigen Seitenflächen sind der Reihe nach mit den Zahlen 1 bis 5 nummeriert, die fünfeckige Bodenfläche hat die Nummer 6.

a) Warum ist der Graph des Polyeders einfach?

b) Zeichne einen isomorphen ebenen Graphen und nummeriere die Flächen des Graphen so, dass ihre Nummern denen der Flächen des Polyeders entsprechen.
Hinweis: Der ebene Graph besitzt auch eine äußere Fläche.

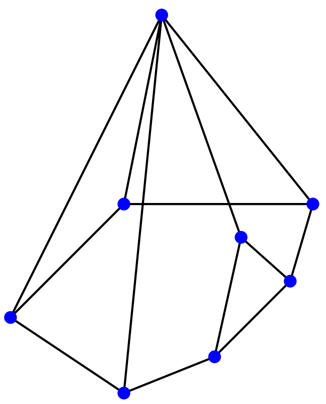


a) Der Graph ist einfach, denn:

b) Isomorpher ebener Graph:

Aufgabe 47

Beim Polyeder aus der letzten Aufgabe wurde eine Ecke abgeschnitten, siehe unten stehende Graphik. Zeichne einen isomorphen ebenen Graphen. Wie viele Ecken, Kanten, Flächen hat der vorliegende Graph mehr als der aus der vorigen Aufgabe?



a) Isomorpher ebener Graph:

b) Im Vergleich zum Graphen aus der letzten Aufgabe erhöhte sich die Anzahl der Ecken um ☐,

die der Kanten um ☐ und

die der Flächen um ☐.

Weiter auf nächster Seite

Satz: Für jeden Graphen eines Polyeders gelten:

1) Der Graph ist zusammenhängend und einfach,

2) Eckenzahl $e \geq 4$,

3) Kantenzahl $k \geq 6$.

Beweis: 1) Zusammenhängend: Ein Polyeder ist ein Körper.
Die Kante eines Polyeders sind Geradenstücke. Daher besitzt der Graph keine parallelen Kanten und keine Schlingen, ist also einfach.

2) 3 Ecken liegen in einer Ebene, bilden also nicht die Ecken eines Körpers $\Rightarrow$ $e \geq 4$.

3) In jeder Ecke enden mindestens 3 Kanten
$\Rightarrow$ Es gibt mindestens $4 \cdot 3 = 12$ Enden von Kanten.
Jede Kante hat zwei Enden $\Rightarrow$ $k \geq 6$. $\square$

Aufgabe 48

a) Konstruiere ein Polyeder mit $k = 8$ Kanten. Zeichne einen isomorphen ebenen Graphen. *Hinweis:* Das Polyeder kann entsprechend zu dem aus Aufgabe 1 konstruiert werden. Wähle als Grundfläche ein Viereck.

b) Konstruiere ein Polyeder mit $k = 11$ Kanten. Zeichne einen isomorphen ebenen Graphen. *Hinweis:* Verwende das Polyeder aus Teilaufgabe a) und schneide eine Ecke ab (vgl. die Konstruktion für Aufgabe 2).

Aufgabe 49

a) Sei k ein Element der Menge $\{6, 8, 10, \ldots\}$. Konstruiere ein Polyeder mit k Kanten, indem Du eine Grundfläche mit $n = \frac{k}{2}$ Ecken und eine Spitze wählst.

b) Sei k ein Element der Menge $\{9, 11, 13, \ldots\}$. Konstruiere ein Polyeder mit k Kanten, indem Du eine Grundfläche mit $n = \frac{k-3}{2}$ Ecken und eine Spitze wählst und dann eine Ecke abschneidest.

Satz: 1) Zu jeder natürlichen Zahl $k \geq 6$, $k \neq 7$ gibt es ein Polyeder mit k Kanten.

2) Es gibt kein Polyeder mit 7 Kanten.

Beweis: Siehe letzte und nächste Übungsaufgabe.

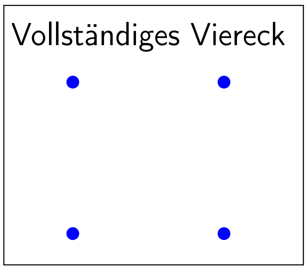
Aufgabe 50

In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass es kein Polyeder mit 7 Kanten gibt. Fülle dazu die Lücken aus.

Betrachte den Graphen des Polyeders. Die Anzahl seiner Ecken wird mit e bezeichnet. Wir wissen, dass der Graph einfach ist.

Weiter wissen wir, dass $e \geq \boxed{\quad}$ gilt. Nun können wir eine Fallunterscheidung vornehmen.

Fall $e = 4$: Zeichne rechts ein vollständiges Viereck, d.h. einen einfachen Graphen mit 4 Ecken und möglichst vielen Kanten.



Das vollständige Viereck besitzt $k = \boxed{\quad}$ Kanten. Ein einfacher Graph mit 4 Ecken kann nicht mehr Kanten besitzen.

$\Rightarrow$ Es gibt kein Polyeder mit $e = \boxed{\quad}$ Ecken und 7 Kanten.

Fall $e \geq 5$: Der Eckengrad jeder Ecke ist mindestens $\boxed{\quad}$.

$\Rightarrow$ Im Graphen gibt es mindestens $\boxed{\quad}$ Enden von Kanten.

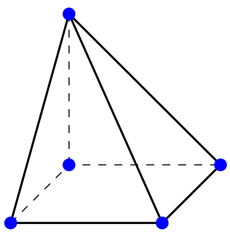
Jede Kante hat 2 Enden $\Rightarrow$ Für die Anzahl von Kanten folgt $k \geq \boxed{\quad}$.

$\Rightarrow$ Der Graph besitzt mindestens $\boxed{\quad}$ Kanten.

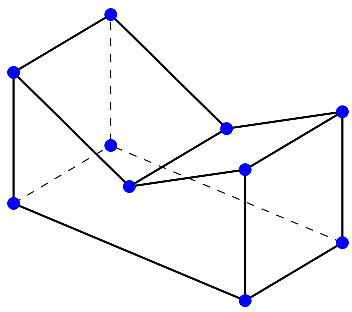
$\Rightarrow$ Es gibt kein Polyeder mit $e \geq \boxed{\quad}$ Ecken und 7 Kanten. $\square$

Definition: Ein Polyeder heißt konvex, wenn die Verbindungsstrecken beliebiger Punkte des Polyeders ganz im Polyeder verlaufen.

Konvexes Polyeder:



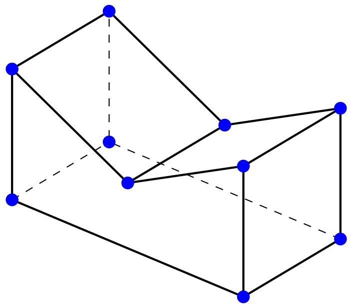
Nicht konvexes Polyeder:



Satz: Der Graph eines konvexen Polyeders ist plättbar, d.h. er besitzt einen isomorphen ebenen Graphen. Die Anzahl der Flächen des Polyeders ist gleich der Anzahl der Flächen des ebenen Graphen, wenn beim ebenen Graphen die äußere Fläche mitgezählt wird.

Veranschaulichung: Bei dem Graphen eines konvexen Polyeders kann man so durch eine seiner Flächen hindurchsehen, so dass man den Graphen des Polyeders ohne Kreuzungen der Kanten sieht. Die Fläche, durch die man hindurchsieht, wird die äußere Fläche des ebenen Graphen.

Aufgabe 51
Gegeben ist das rechts dargestellte Polyeder.



a) Weise nach, dass das Polyeder nicht konvex ist. Zeichne dazu eine Verbindungsstrecke zweier Punkte des Polyeders ein, die nicht ganz im Polyeder verläuft.

b) Weise nach, dass der Graph des Polyeders einen isomorphen ebenen Graphen besitzt, obwohl die Voraussetzung *konvex* nicht erfüllt ist. Zeichne dazu einen isomorphen ebenen Graphen.

Satz: Für jedes konvexe Polyeder gilt die eulersche Polyederformel: $e - k + f = 2$

Beweis: Betrachte ein konvexes Polyeder. Der Graph des Polyeders besitzt einen isomorphen Graphen, der eben, einfach und zusammenhängend ist. Für jeden ebenen und zusammenhängenden Graphen gilt die eulersche Formel $e - k + f = 2$ (früherer Satz).
Der Graph des Polyeders besitzt gleich viele Ecken, Kanten und Flächen,
$\Rightarrow$ Die Formel gilt auch für das Polyeder. $\square$

Satz: Ein ebener Graph, der isomorph zu dem Graphen eines Polyeders ist, hat folgende Eigenschaften:

1) Er ist zusammenhängend und einfach,

2) $e \geq 4$,

3) Jede Ecke hat mindestens den Grad 3,

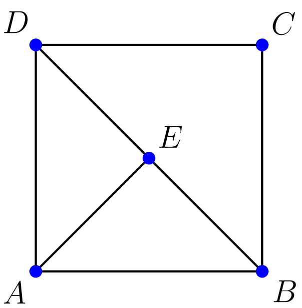
4) $k \geq 6$.

Beweis: Jeder Graph eines Poyeders besitzt alle diese Eigenschaften, also auch jeder isomorphe Graph. $\square$

Aufgabe 52
Gegeben ist der unten stehende ebene Graph mit 7 Kanten.

a) Zeige, dass die eulersche Formel gilt.

b) Warum gibt es kein Polyeder, dessen Graph isomorph zum hier gezeigten Graphen ist?

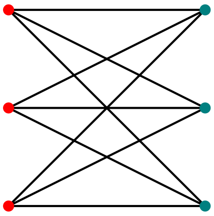


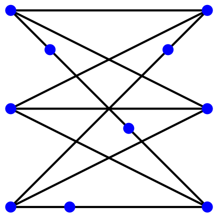
a) $e =$, $k =$, $f =$

$\Rightarrow \; e - k + f =$

b) Es gibt kein Polyeder, dessen Graph isomorph zum nebenstehenden Graphen ist, denn

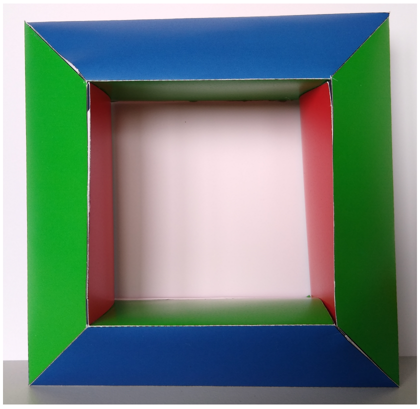
Erinnerung: Wenn ein Graph einen Teilgraphen enthält, der isomorph zu einer Unterteilung des vollständigen 3–3–Graphen ist, dann ist er nicht plättbar.

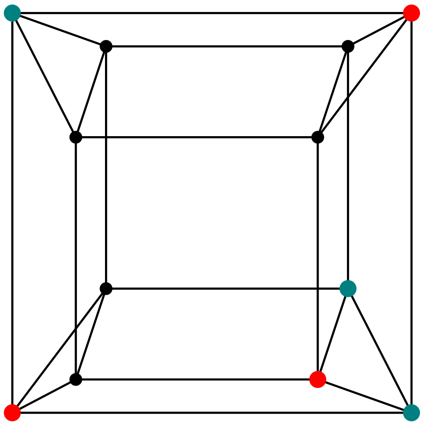
3–3–Graph: 

Unterteilung des 3–3–Graphen: 

Aufgabe 53

Gegeben ist das nicht konvexe Polyeder, dessen Photo und Graph abgebildet sind.





a) Bestimme die Anzahl der Flächen, Kanten und Ecken des Polyeders. Zeige, dass die eulersche Polyederformel nicht gilt. Beachte, dass die im Graphen als Dreiecke erscheinende Flächen keine Seiten des Polyeders sind.

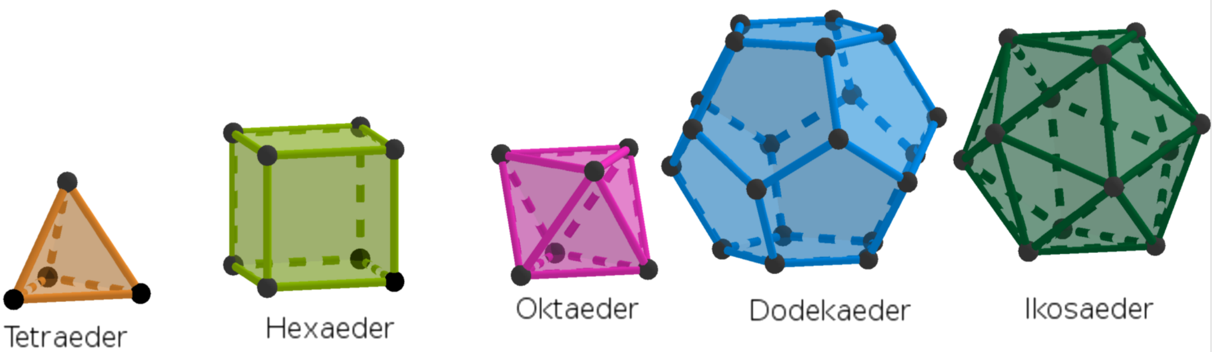
$\boxed{e = \qquad}$, $\boxed{k = \qquad}$, $\boxed{f = \qquad}$, $\Rightarrow$ $\boxed{e - k + f = \qquad\qquad \neq 2}$.

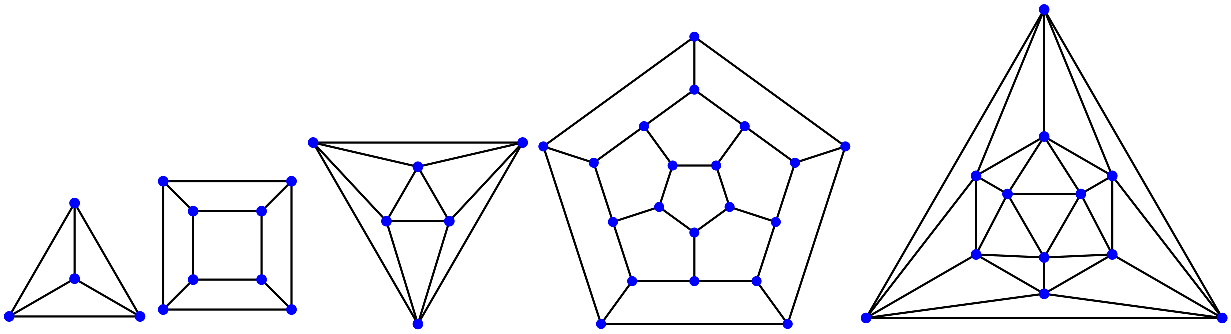
b) Zeige, dass der Graph des Polyeders nicht plättbar ist, indem Du einen Teilgraphen blau markierst, der isomorph zu einer Unterteilung des 3-3-Graphen ist.

12 Platonische Körper und Graphen

Definition: Ein konvexes Polyeder heißt platonischer Körper, wenn alle Flächen aus kongruenten regelmäßigen n-Ecken bestehen und in jeder Ecke gleich viele Kanten enden.

Platonische Körper und zu ihren Graphen isomorphe ebene Graphen:





Tetraeder Hexaeder Oktaeder Dodekaeder Ikosaeder

Aufgabe 54
Trage in die Tabelle den Eckengrad g der Ecken und die Ecken-, Kanten- und Flächenzahl ein.

	Tetraeder	Hexaeder	Oktaeder	Dodekaeder	Ikosaeder
$g =$					
$e =$					
$k =$					
$f =$					

Definition: Ein zusammenhängender einfacher ebener Graph heißt platonischer Graph, wenn er folgende Eigenschaften besitzt:

1) Alle Ecken des Graphen haben den selben Grad, dieser beträgt mindestens 3 und

2) alle Flächen (auch die äußere) haben die selbe Anzahl Kanten, diese ist mindestens 3.

Folgerung: Die fünf Polyeder Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder, Ikosaeder sind platonische Körper, ihre Graphen sind isomorph zu platonische Graphen.

Satz: Jeder platonische Graph ist isomorph zu einem der Graphen von Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder, Ikosaeder. Daher gibt es genau diese fünf platonischen Körper.

Aufgabe 55

In dieser Aufgabe zeigen wir: Jeder platonische Graph ist isomorph zu einem der Graphen von Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder, Ikosaeder. Fülle dazu die Lücken aus.

Wir betrachten einen platonischen Graphen mit e Ecken, k Kanten und f Flächen. Seien zusätzlich g der Eckengrad, den jede Ecke besitzt, und n die Anzahl der Kanten, die jede Fläche begrenzen.

Jede Ecke hat den Eckengrad g $\Rightarrow$ es gibt $\boxed{}$ Enden von Kanten.

Da jede Kante $\boxed{}$ Enden besitzt, gibt es insgesamt $k = \boxed{}$ Kanten.

Umformen nach der Anzahl der Ecken e liefert

$$e = \boxed{}. \qquad (*)$$

Addiert man die Anzahl der Kanten, die die Flächen begrenzen, so zählt man jede Kante doppelt $\Rightarrow$ Der Graph besitzt $k = \boxed{}$ Kanten. Umformen nach der Anzahl der Flächen liefert

$$f = \boxed{}. \qquad (**)$$

Setzt man $(*)$ und $(**)$ für e und f in die eulersche Formel ein, so erhält man

$$2 = e - k + f \quad \Rightarrow \quad 2 = \boxed{}.$$

Teilt man auf beiden Seiten durch $2k$, so erhält man die Gleichung $\boxed{}$.

Nach dem ersten Satz gilt $g \geq 3$ und $n \geq 3$. Deshalb müssen wir jetzt einfach durchprobieren, für welche Werte von g und n wir Lösungen für k finden. Starte dazu mit $g = 3$ und erhöhe n solange, bis du keine sinnvolle Lösung mehr für k findest. Fahre dann mit dem nächst größeren g fort.

g	n	$\frac{1}{g} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2}$	k	Name
3	3			

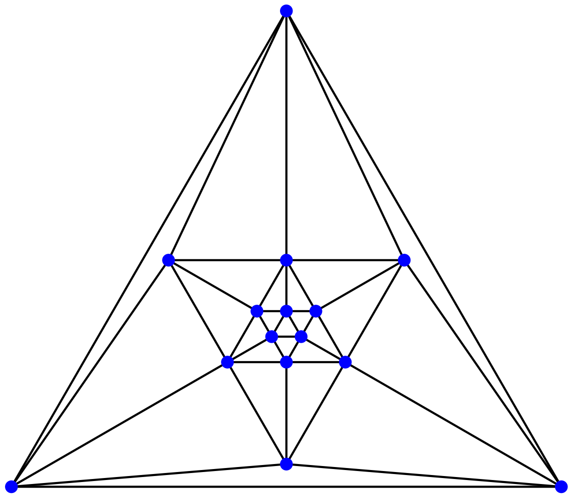
Warum sind wir mit den hier betrachtetet Werten für g und n fertig und müssen nicht alle möglichen Kombinationen durchgehen?

Aufgabe 56

Gegeben ist der nebenstehende ebene Graph. Er ist isomorph zu dem Graphen eines Polyeders.

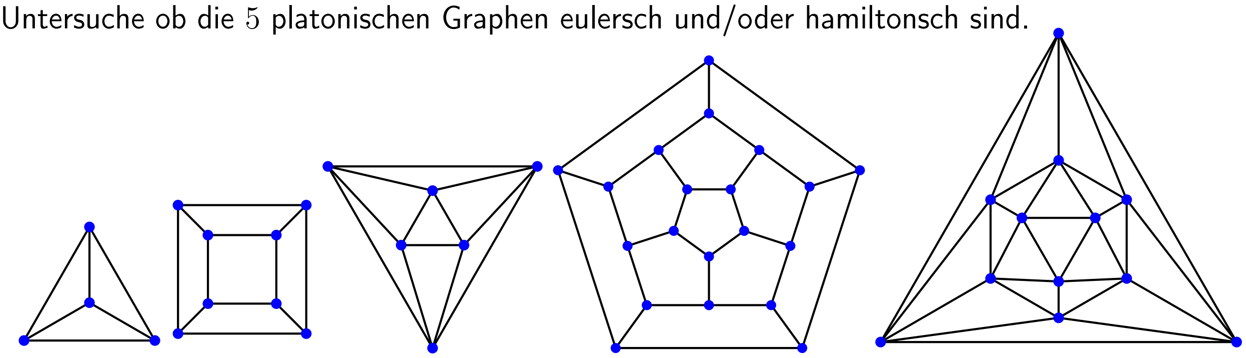
a) Aus was für n-Ecken bestehen die Seiten des Polyeders?

b) Warum kann das zugehörige Polyeder nicht platonisch sein?



Aufgabe 57

Untersuche ob die 5 platonischen Graphen eulersch und/oder hamiltonsch sind.



Tetraeder Hexaeder Oktaeder Dodekaeder Ikosaeder

	Tetraeder	Hexaeder	Oktaeder	Dodekaeder	Ikosaeder
ist eulersch					
ist hamiltonsch					

Lösungen der Aufgaben

Aufgabe 1

a) Zeichne einen Graphen mit 2 Ecken mit Grad 1 und 7.

b) Zeichne einen Graphen mit 5 Ecken mit Grad $1, 2, 2, 2, 3$.

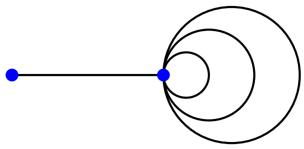
c) Zeichne zwei verschiedene Graphen mit jeweils 4 Ecken, wovon zwei den Grad 2 und zwei den Grad 3 haben.

d) Fülle die Tabelle aus:

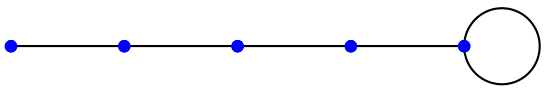
e) Wie hängen die Eckengrade und die Zahl der Kanten zusammen?

f) Warum gibt es keinen Graphen mit drei Ecken mit den Graden $4, 5, 6$?

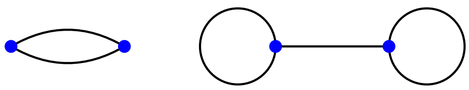
Lösung: **a)**



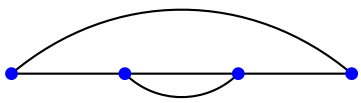
b)



d$_1$)



d$_2$)



d)

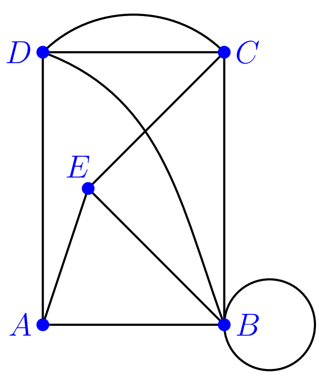
	a)	b)	c$_1$)	c$_2$)
Summe Eckengrade	8	10	10	10
Anzahl Kanten	4	5	5	5

e) Summe der Eckengrade $=2$ Mal Anzahl der Kanten.

f) Die Summe der Eckengrade kann nicht ungerade sein (vgl. vorige Teilaufgabe). Hier sollte sie $4+5+6=15$ sein, das geht nicht.

Aufgabe 2

Trage in die Tabelle ein, wie viele Kanten die jeweiligen Ecken verbinden.



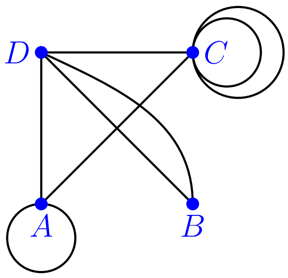
	A	B	C	D	E	Grad
A	0	1	0	1	1	3
B	1	1	1	1	1	6
C	0	1	0	2	1	4
D	1	1	2	0	0	4
E	1	1	1	0	0	3

Aufgabe 3

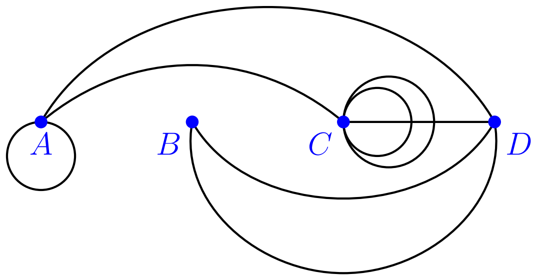
Zeichne zwei verschieden aussehende Graphen, die die folgende Tabelle besitzen.

	A	B	C	D
A	1	0	1	1
B	0	0	0	2
C	1	0	2	1
D	1	2	1	0

Lösung: Eine Lösung:

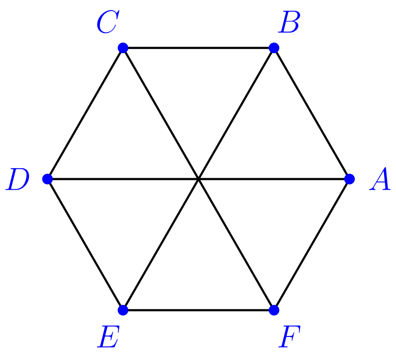


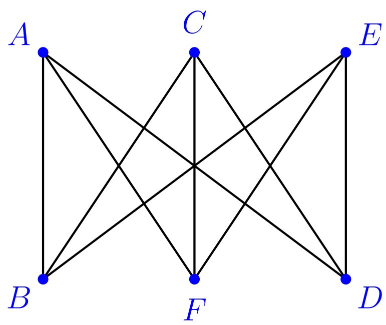
Eine anders aussehende Lösung:



Aufgabe 4

Zeige, dass die folgenden Graphen isomorph sind:





Lösung: Linker Graph:

	A	B	C	D	E	F
A		1		1		1
B	1		1		1	
C		1		1		1
D	1		1		1	
E		1		1		1
F	1		1		1	

Rechter Graph:

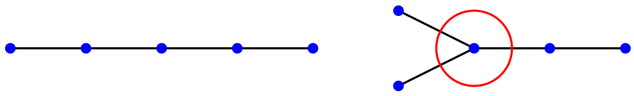
	A	B	C	D	E	F
A		1		1		1
B	1		1		1	
C		1		1		1
D	1		1		1	
E		1		1		1
F	1		1		1	

Die Graphen sind isomorph, denn die Tabellen sind gleich.
(Nullen wurden in den Tabellen weggelassen)

Aufgabe 5

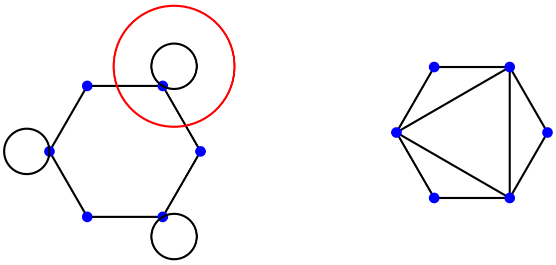
Warum sind die folgenden Graphen jeweils nicht isomorph?

Lösung: a)



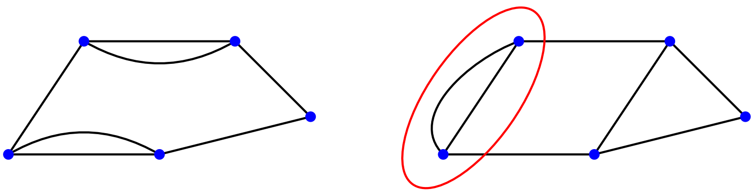
Eckengrad 3 kommt nur im rechten Graphen vor.

b)



Der linke Graph hat Schlingen, der rechte hat keine.

c)

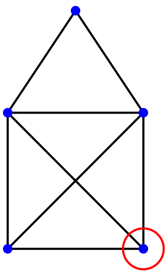


Der linke Graph hat zwei Paare paralleler Kanten, der rechte hat nur ein Paar.

Aufgabe 6

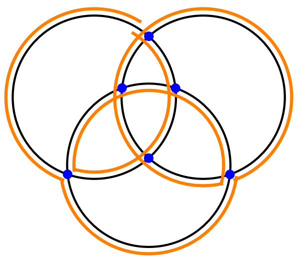
In welchem der Graphen gibt es eine eulersche Tour?

Lösung: a)



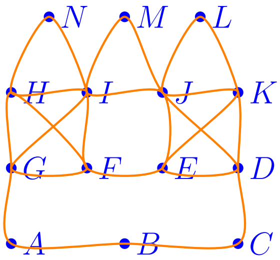
Es gibt keine eulersche Tour, denn wenn man rechts unten startet, endet man immer in der linken unteren Ecke.

b)



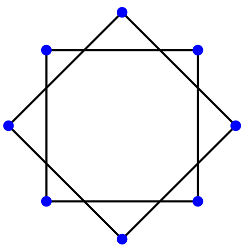
Eine eulersche Tour ist eingezeichnet.

c)



Es gibt eine eulersche Tour.

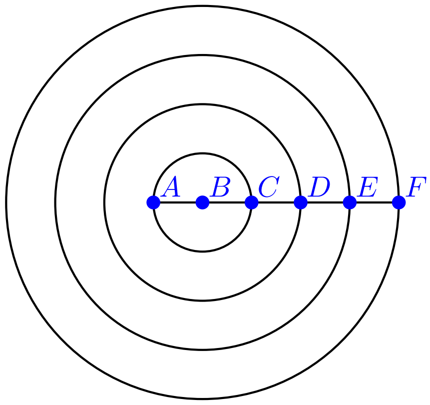
d)

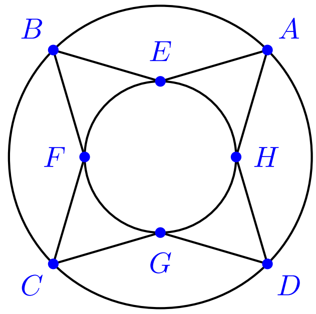


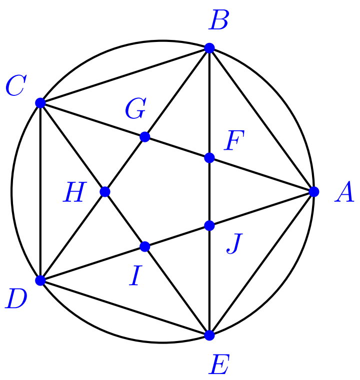
Es gibt keine eulersche Tour, denn man kommt nicht von dem einen Rechteck zum anderen.

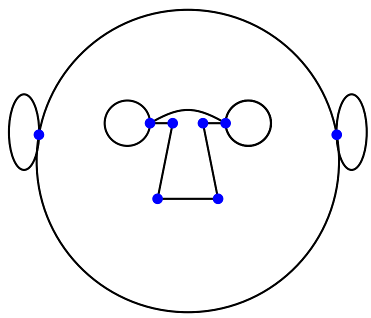
Aufgabe 7

Welcher der folgenden Graphen ist eulersch? Trage Deine Antwort in die Tabelle ein.

a)


b)


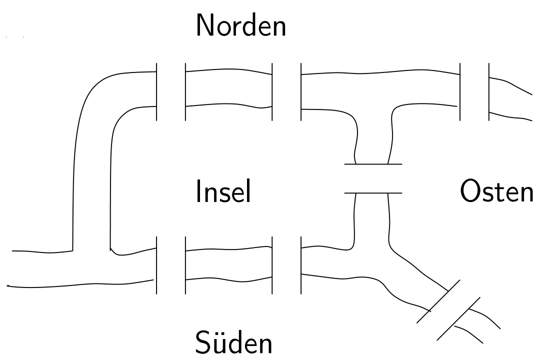
c)


d)


Lösung:

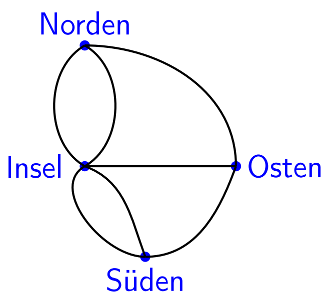
	eulersch	nicht eulersch weil
Graph a)		$\mathrm{Grad}(F) = 3$ ist ungerade
Graph b)	Ja	
Graph c)	Ja	
Graph d)		nicht zusammenhängend

Aufgabe 8



Das Königsberger Brückenproblem: In Königsberg gibt es 7 Brücken über die Pregel, wie im nebenstehenden Stadtplan dargestellt. Die Frage ist nun, ob es einen Rundweg durch Königsberg gibt, so dass jede der Brücken genau ein Mal überquert wird. Zeichne einen Graphen, der zu diesem Problem passt: Die Brücken sollen als Kanten dargestellt werden, da man sie genau einmal überqueren soll. Entscheide dann, ob ein solcher Rundweg möglich ist.

Lösung:

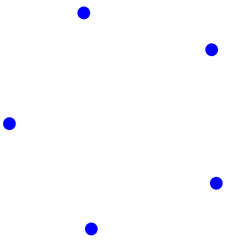


Ein solcher Rundweg wäre eine eulersche Tour. Es gibt aber keine eulersche Tour zu dem Graphen, da es ungerade Eckengrade gibt (es sind sogar alle Eckengrade ungerade). Also gibt es keinen Rundweg durch Königsberg, bei dem jede Brücke genau ein Mal überquert wird.

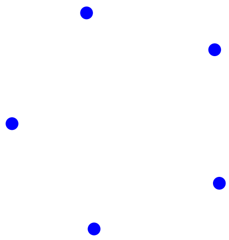
Aufgabe 9

a) Ergänze den Graphen 1, so dass er einfach ist und genau vier Kanten besitzt (Lösung ist nicht eindeutig).

b) Ergänze den Graphen 2, so dass er einfach ist und möglichst viele Kanten besitzt.

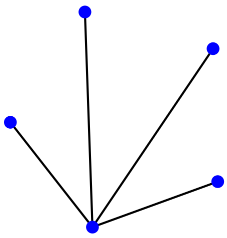


Graph 1

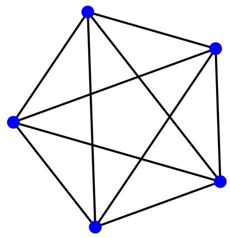


Graph 2

Lösung:



Graph 1



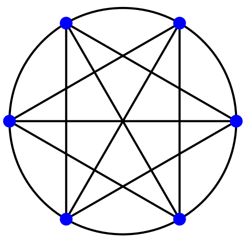
Graph 2

Aufgabe 10

a) Zeichne ein vollständiges 6-Eck, also einen vollständigen Graphen mit 6 Ecken. Wie viele Kanten besitzt es?

b) Wie viele Kanten besitzt ein vollständiges 10-Eck?

Lösung: a)



15 Kanten

b) $9 + 8 + 7 + \ldots + 1 = 45$ Kanten

Aufgabe 11

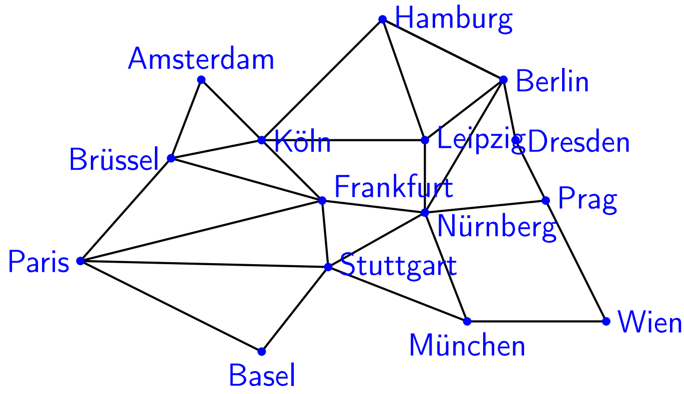
Welche vollständigen n-Ecke sind eulersch?

Lösung: Beim vollständigen n-Eck ist der Eckengrad jeder Ecke $\mathrm{Grad}(E) = n - 1$. Außerdem ist jedes vollständige n-Eck zusammenhängend. Nach dem Satz von Euler gilt also:

- Ist $n \geq 2$ ungerade, dann ist das vollständige n-Eck ein eulerscher Graph,
- Ist $n \geq 2$ gerade, dann ist das vollständige n-Eck nicht eulersch.

Aufgabe 12

Eine Freundesgruppe möchte eine Rundreise durch die in der Karte eingezeichneten Städte machen. Dabei wollen sie durch jede Stadt nur ein Mal reisen. Sie können nur die eingezeichneten Verbindungen benützen.



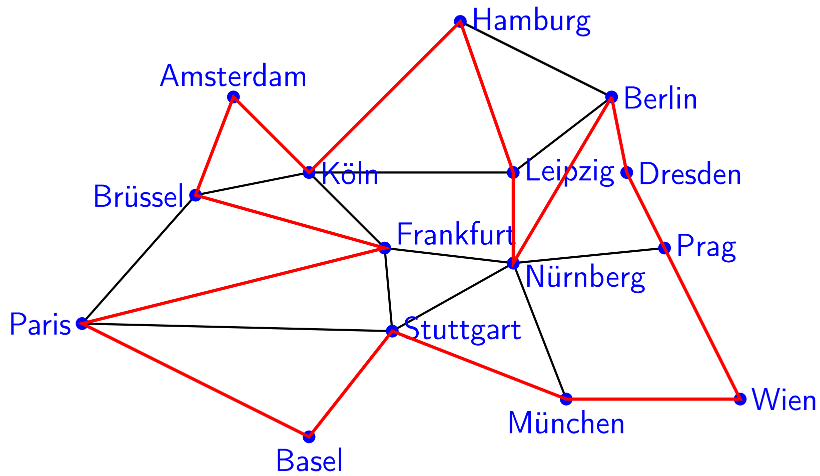
a) Gib es eine Rundreise, die in Berlin startet und anschließend durch Nürnberg und dann durch Leipzig geht?

b) Gibt es eine Rundreise, die in Berlin startet und anschließend durch Leipzig und dann durch Köln geht?

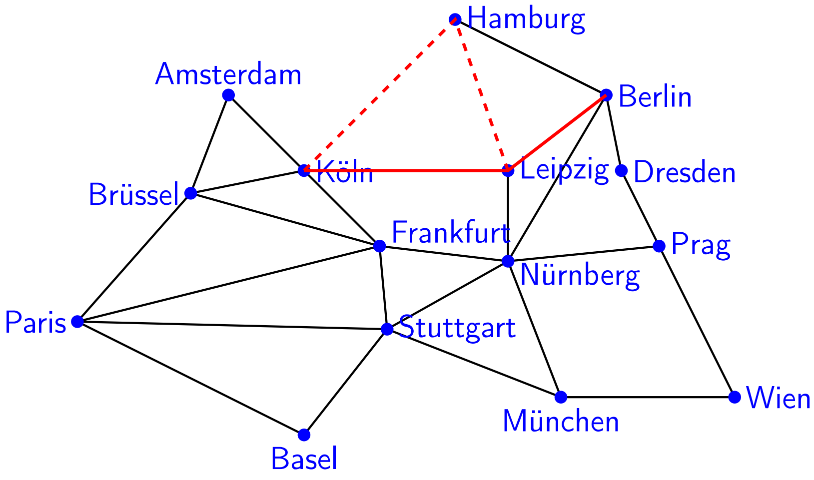
c) Gibt es eine Rundreise, die in Stuttgart losgeht, dann nach Basel, nach Paris und anschließend nach Brüssel?

d) Gibt es eine Rundreise, die in Berlin startet und anschließend nach Nürnberg und dann nach München geht?

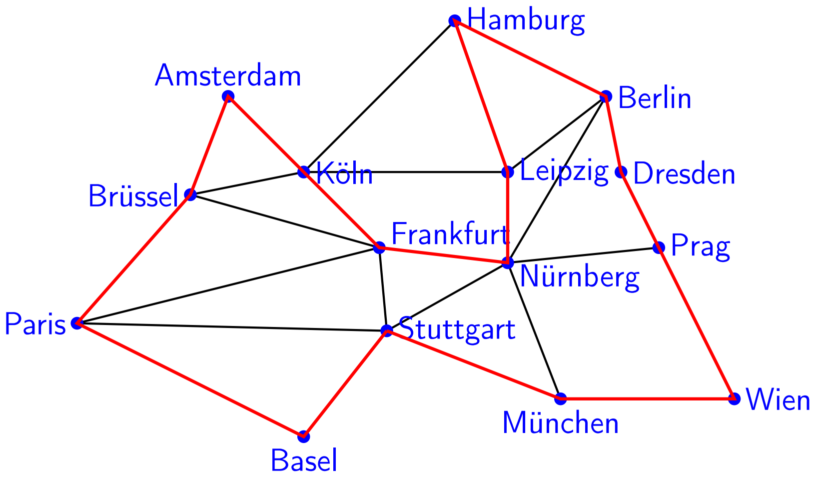
Lösung: **a)** Ja:



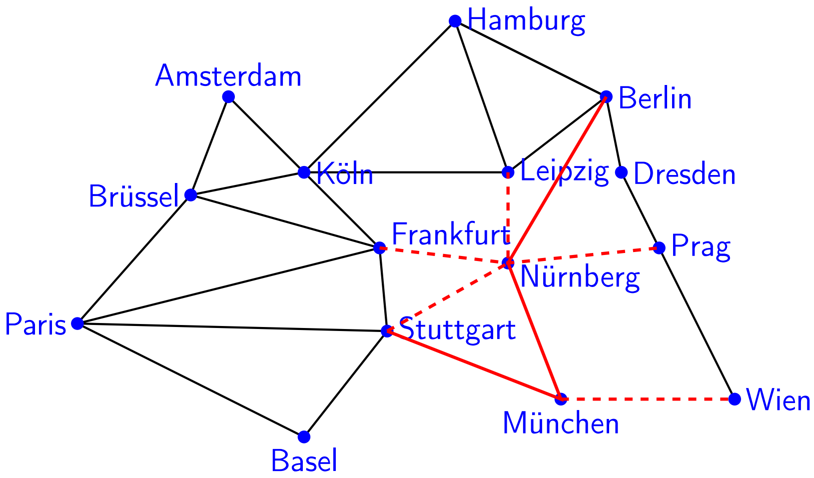
b) Nein. Man kann nicht von Köln nach Hamburg fahren, denn dann bleibt nur noch der Rückweg nach Berlin übrig. Fährt man von Köln zu einer anderen Stadt, so können die Verbindungen Köln–Hamburg und Leipzig–Hamburg nicht mehr verwendet werden, so dass Hamburg nicht mehr in der Rundreise vorkommen kann.



c) Ja:

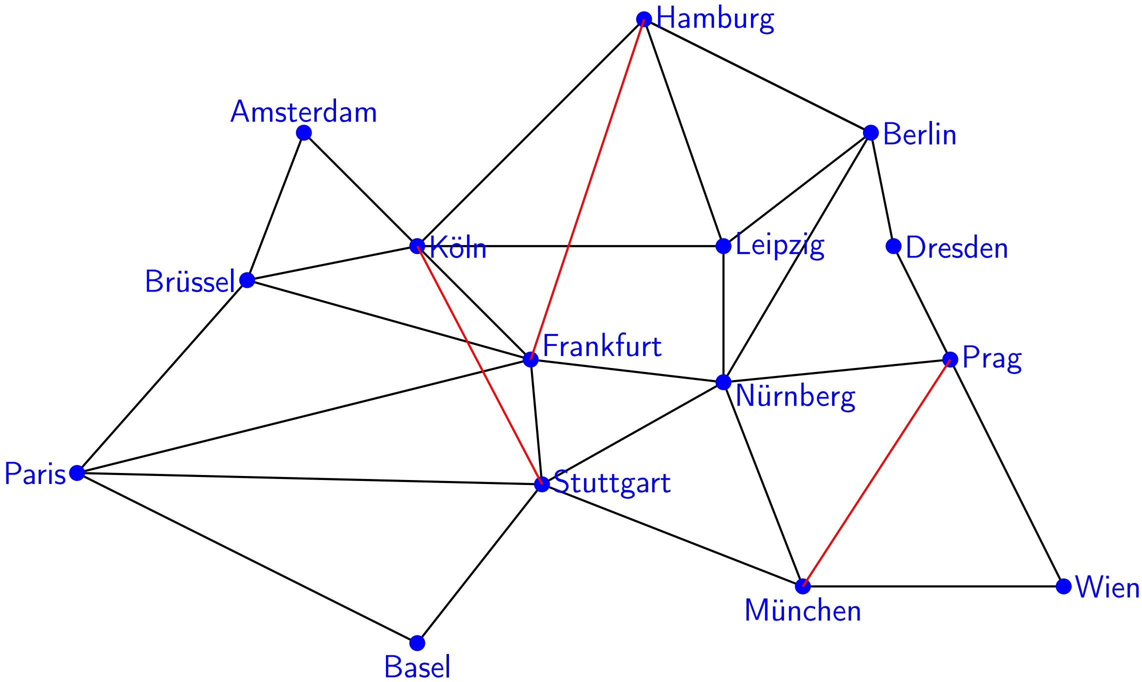


d) Nein. Von München aus kann man entweder nach Wien fahren. Dann kann die Reise nur noch durch Prag und Dresden nach Berlin zurück gehen. Oder man fährt von München nach Stuttgart. Dann kommt man nicht mehr nach Wien, siehe Bild.



Aufgabe 13

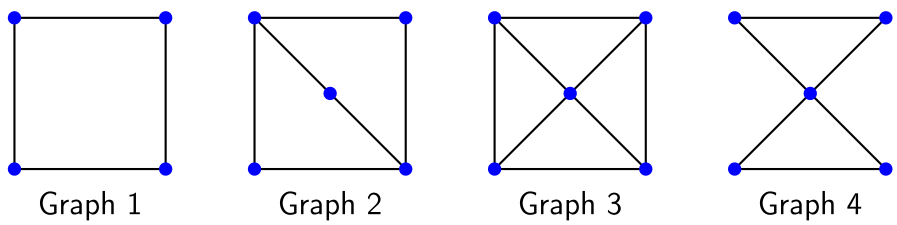
Wie viele Kanten muss man im unten stehenden Graphen mindestens ergänzen, damit der Graph eulersch wird? Zeichne diese Kanten ein.



Lösung: Man muss mindestens drei Kanten ergänzen, siehe rot ergänzte Kanten. Dann haben alle Knoten einen geraden Eckengrad. Und der Graph ist zusammenhängend. Also ist er eulersch.

Aufgabe 14

Untersuche, welcher der folgenden Graphen eulersch oder hamiltonsch ist. Trage in die Tabelle „j“ für ja, „n“ für nein ein.

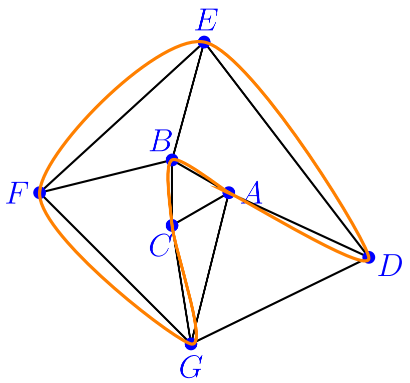


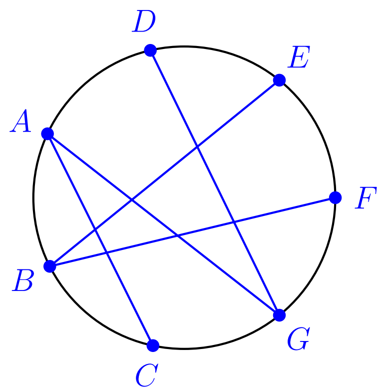
Lösung:

	Graph 1	Graph 2	Graph 3	Graph 4
ist eulersch	J	N	N	J
ist hamiltonsch	J	N	J	N

Aufgabe 15

Gegeben sind die folgenden zwei Graphen.





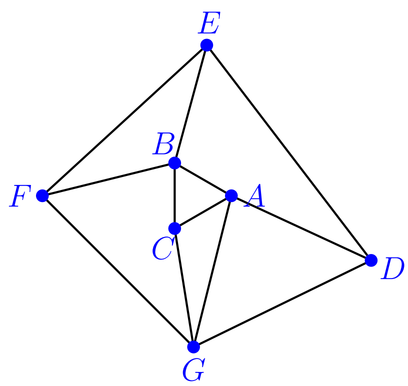
a) Finde im linken Graphen einen hamiltonschen Kreis.

Hamiltonscher Kreis: $A - B - C - G - F - E - D - A$

b) Zeichne im rechten Graphen geeignete Bezeichnungen für die Ecken und weitere Kanten ein, so dass der fertige Graph isomorph zum linken Graphen ist.

Aufgabe 16

Gegeben ist nochmals der Graph aus der letzten Aufgabe.



Gib möglichst viele verschiedene hamiltonsche Kreise des Graphen an. Hierbei bedeutet *verschieden*, dass die Reihenfolge unterschiedlich ist und nicht nur der Anfangspunkt im Kreis verschoben wurde.

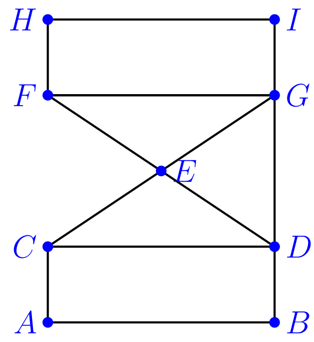
Lösung: Da jeder hamiltonsche Kreis durch A geht, reicht es, nur hamiltonsche Kreise anzugeben, die in A starten und enden.

Alle möglichen verschiedenen hamiltonschen Kreise sind:

eine Richtung	umgekehrt
$A-B-C-G-F-E-D-A$	$A-D-E-F-G-C-B-A$
$A-B-F-E-D-G-C-A$	$A-C-G-D-E-F-B-A$
$A-C-B-E-F-G-D-A$	$A-D-G-F-E-B-C-A$
$A-C-B-F-E-D-G-A$	$A-G-D-E-F-B-C-A$
$A-C-G-F-B-E-D-A$	$A-D-E-B-F-G-C-A$
$A-D-E-F-B-C-G-A$	$A-G-C-B-F-E-D-A$

Aufgabe 17

Gegeben ist der nebenstehende einfache Graph.



a) Gib einen Kantenzug an, der A und F verbindet.

Antwort: $A - C - E - F$

b) Warum ist der Graph hamiltonsch?

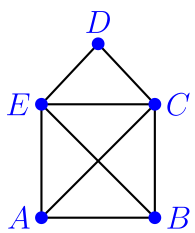
Antwort: Er enthält einen hamiltonschen Kreis:
$A - B - D - G - I - H - F - E - C - A$

c) Gib einen geschlossenen Kantenzug an, der durch alle Ecken des Graphen verläuft, keine Kante zwei Mal benützt und trotzdem kein hamiltonscher Kreis ist.

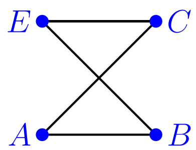
Antwort: Z.B. $A - B - D - E - G - I - H - F - E - C - A$

Aufgabe 18

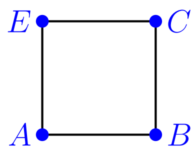
Welcher der Graphen ist Teilgraph von einem oder von mehreren der skizzierten Graphen? Trage Deine Antworten in die Tabelle ein. Überlege Dir, ob ein Graph Teilgraph von sich selber sein kann (eventuell Definition nachsehen).



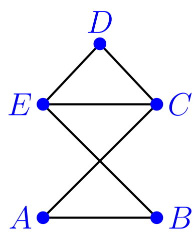
Graph 1



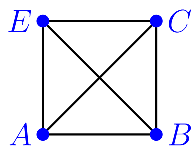
Graph 2



Graph 3



Graph 4



Graph 5

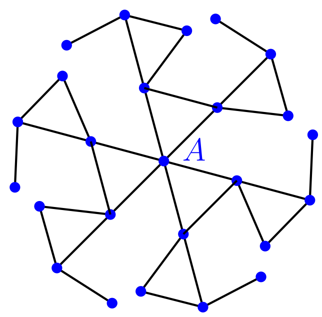
Lösung:

Graph 1 ist Teilgraph des Graphen	1
Graph 2 ist Teilgraph des Graphen	1, 2, 4, 5
Graph 3 ist Teilgraph des Graphen	1, 3, 5
Graph 4 ist Teilgraph des Graphen	1, 4
Graph 5 ist Teilgraph des Graphen	1, 5

Aufgabe 19

In wie viele Komponenten zerfällt nebenstehender Graph, wenn die Ecke A gelöscht wird?

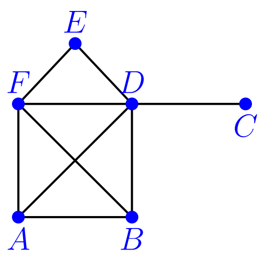
Antwort: In 3 Komponenten



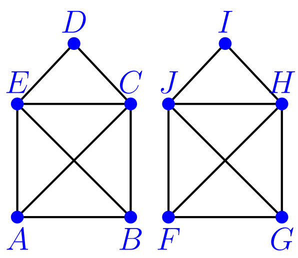
Aufgabe 20

Gib für jeden der Graphen unter Verwendung eines der letzten beiden Sätze eine Begründung dafür an, dass er nicht hamiltonsch ist.

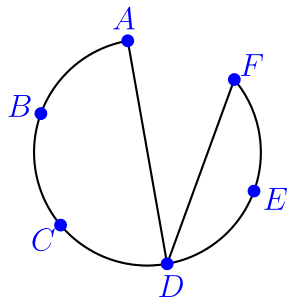
a)



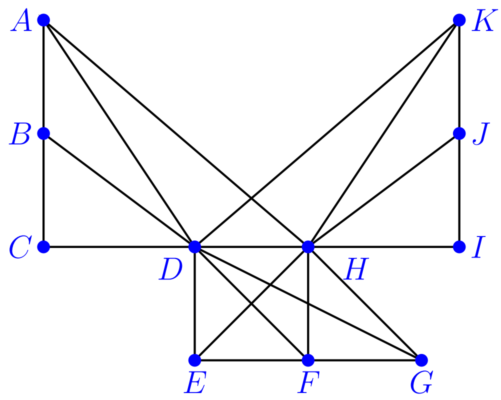
b)



c)



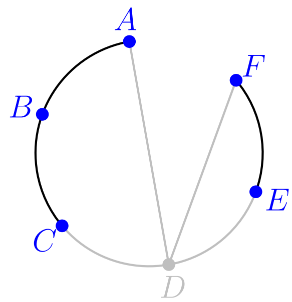
d)



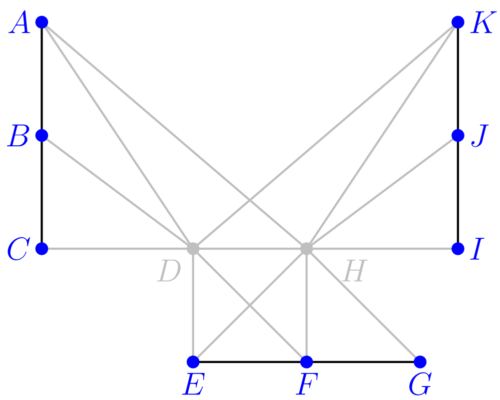
Lösung: **a)** $\mathrm{Grad}(C) = 1 \ \Rightarrow$ der Graph ist nicht hamiltonsch.

b) Der Graph ist nicht zusammenhängend $\Rightarrow$ der Graph ist nicht hamiltonsch.

c) Durch Löschen von D zerfällt der Graph in zwei Komponenten, er ist dann nicht mehr zusammenhängend.
$\Rightarrow$ der Graph ist nicht hamiltonsch.

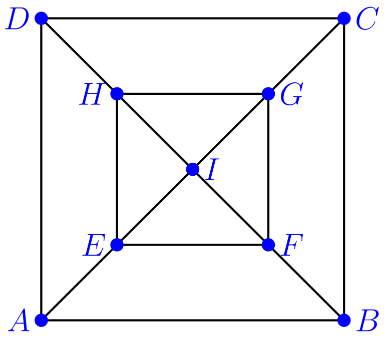


d) Durch Löschen von **zwei** Ecken D und H zerfällt der Graph in **drei** Komponenten.
$\Rightarrow$ der Graph ist nicht hamiltonsch.



Aufgabe 21

Gib im folgenden Graphen einen hamiltonschen Kreis und drei verschiedene nicht hamiltonsche Kreise an.



Hamiltonscher Kreis:

$A - B - C - D - H - J - G - F - E - A$

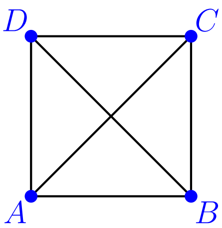
Nicht hamiltonsche Kreise:

$A - B - C - D - A$
$I - F - G - I$
$F - G - H - E - F$

Aufgabe 22

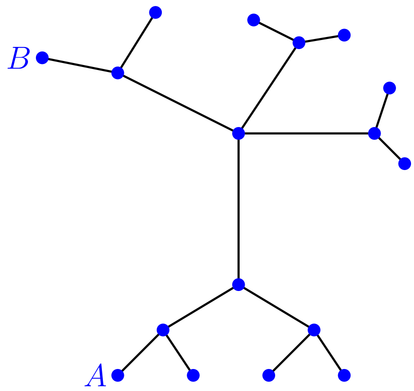
Wie viele verschiedene Wege gibt es jeweils, die A und B verbinden?

a)



Antwort: Es gibt $\boxed{5}$ Weg(e)

b)



Antwort: Es gibt $\boxed{1}$ Weg(e)

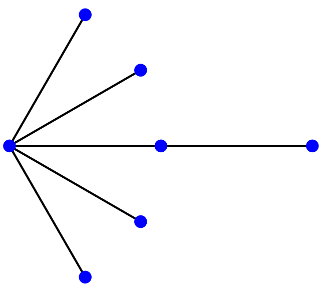
Aufgabe 23

Zeichne jeweils einen Graphen, der ein Baum ist und die angegebenen Eigenschaften besitzt.

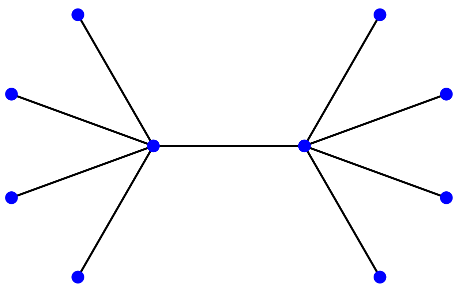
a) Der Baum besitzt 7 Ecken und eine davon hat Eckengrad 5.

b) Der Baum besitzt 10 Ecken und zwei davon haben Eckengrad 5.

Lösung: a)



b)

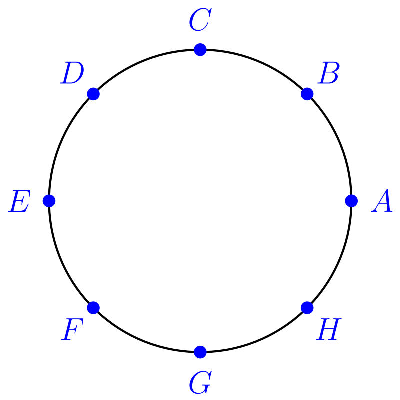


Aufgabe 24

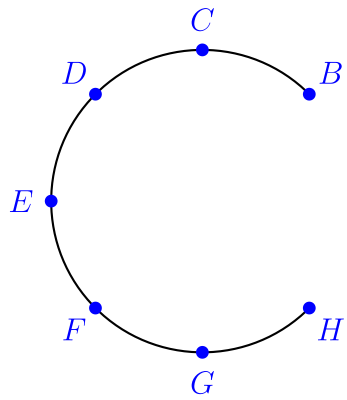
a) Zeichne einen einfachen Graphen mit 8 Ecken und 8 Kanten, der hamiltonsch ist und nach Löschen einer Ecke ein Baum ist.

b) Zeichne einen einfachen Graphen mit 8 Ecken und 13 Kanten, der hamiltonsch ist und nach Löschen einer Ecke ein Baum ist.

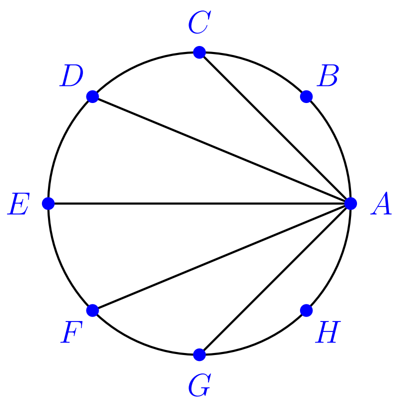
Lösung: **a)**



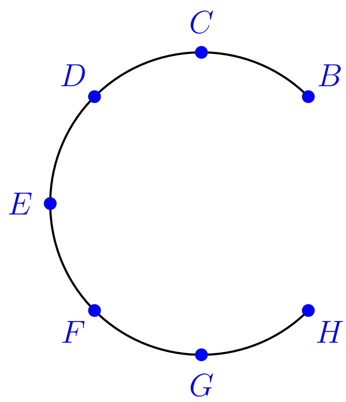
Löschen der Ecke A ergibt einen Baum.



b)



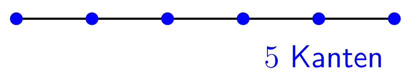
Löschen der Ecke A ergibt einen Baum.



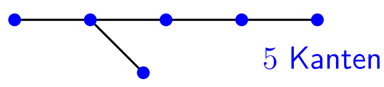
Aufgabe 25

Skizziere Bäume mit 6 Ecken und den jeweils angegebenen Eigenschaften. Wie viele Kanten haben die Bäume?

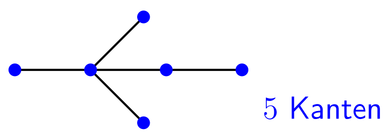
a) Der Baum hat genau zwei Ecken mit Eckengrad 1,



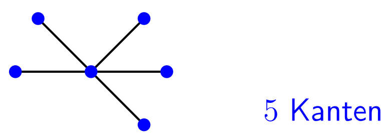
b) Der Baum hat genau drei Ecken mit Eckengrad 1,



c) Der Baum hat genau vier Ecken mit Eckengrad 1,



d) Der Baum hat genau fünf Ecken mit Eckengrad 1.

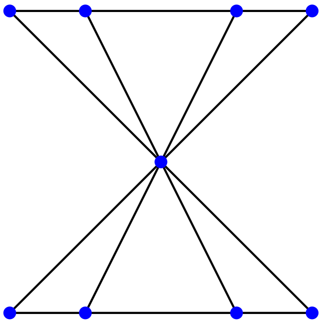


Lösung: Ist bereits im Aufgabentext enthalten.

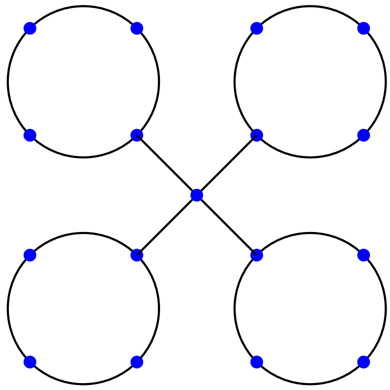
Aufgabe 26

Streiche in den angegebenen Graphen jeweils so viele Kanten, dass der entstehende Teilgraph ein Baum ist und alle Ecken des gegebenen Graphen enthält.

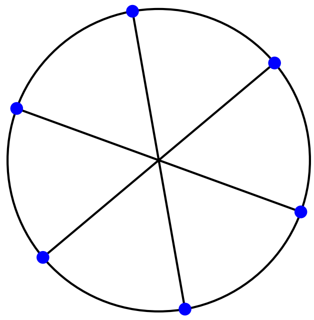
a)



b)



c)



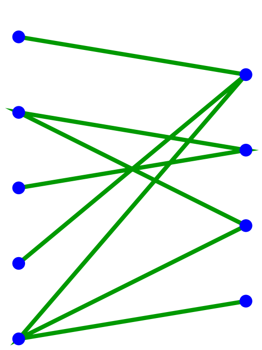
Weiter auf nächster Seite

Aufgabe 27

Zeichne in die beiden Graphen jeweils einen aufspannenden Baum ein.

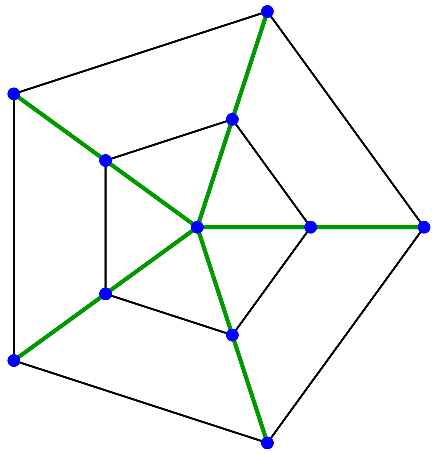
Lösung: *Hinweise:* Der Graph aus Teil a) ist zusammenhängend, besitzt 9 Ecken und 8 Kanten. Also ist er ein Baum.
In Teil b) hat der Graph 11 Ecken. Ein aufspannender Baum muss also 10 Kanten enthalten.

a)



Dieser Graph ist bereits ein Baum

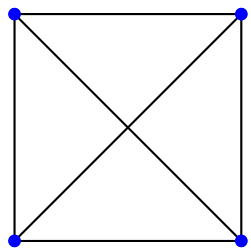
b)



Ein aufspannender Baum besteht aus allen Ecken und den grünen Kanten. Es gibt noch andere Lösungen.

Aufgabe 28

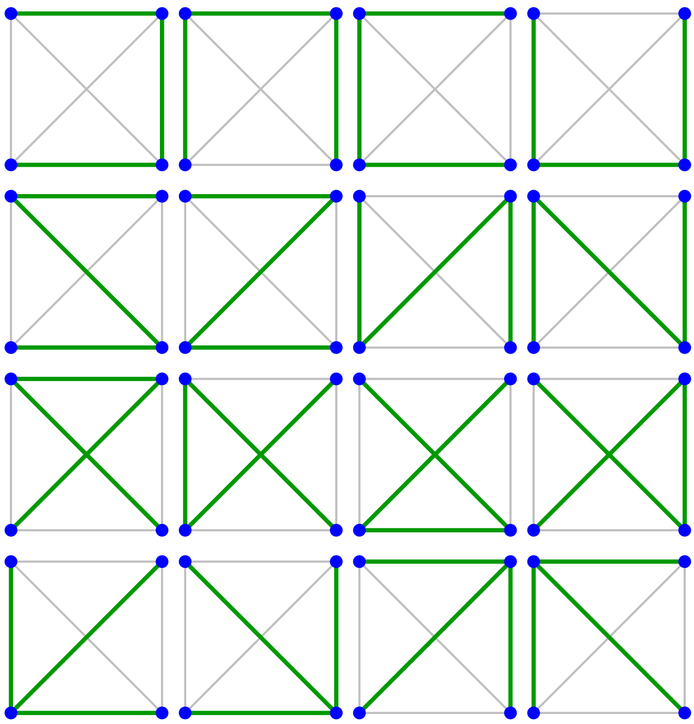
Gegeben ist ein vollständiges Viereck.



a) Der Graph besitzt 16 verschiedene aufspannende Bäume. Skizziere sie.

b) Wie viele nicht zueinander isomorphe aufspannende Bäume gibt es? Skizziere alle nicht zueinander isomorphen aufspannenden Bäume.

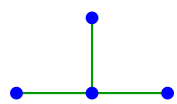
Lösung zu a):



Lösung zu b):

Alle aufspannenden Bäume der ersten drei Zeilen sind isomorph zu

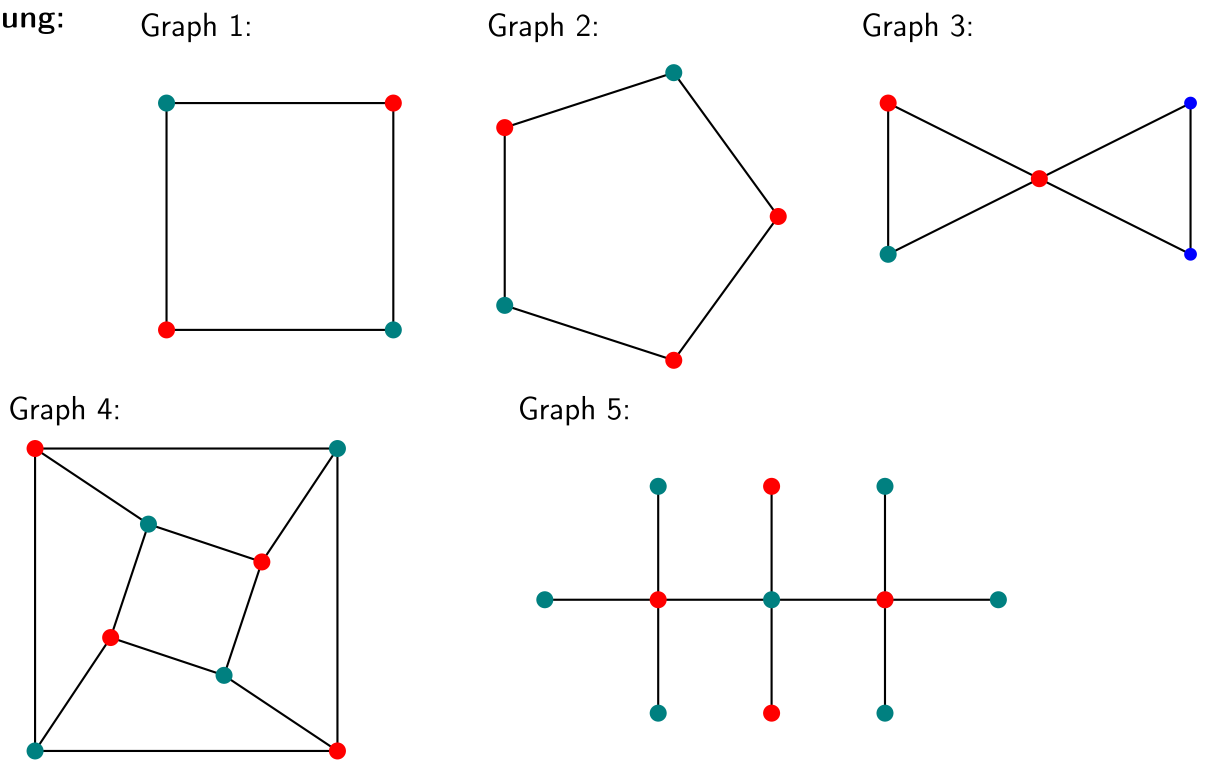
Alle aufspannenden Bäume der letzten Zeile sind isomorph zu



Aufgabe 29

Stelle mit Hilfe der Färbemethode fest, ob die Graphen bipartit sind oder nicht. Trage in die Tabelle J für Ja, N für Nein ein.

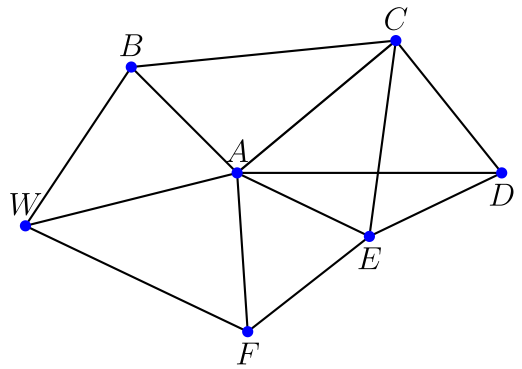
Lösung:

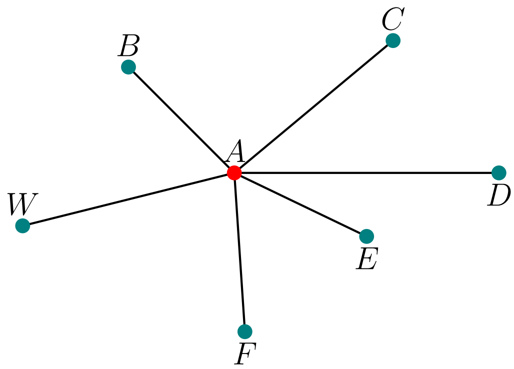


Graph	Graph 1	Graph 2	Graph 3	Graph 4	Graph 5
ist bipartit	J	N	N	J	J

Aufgabe 30

a) Neben einem kleinen Bergdorf wurde ein Wasserwerk W zur Versorgung der Häuser $A, \ldots, F$ gebaut. In der Graphik unten links siehst Du die Häuser und die möglichen Wasserleitungen. Aus Kostengründen sollen möglichst wenig Leitungen gebaut werden. Streiche aus dem Graphen möglichst viele Kanten, so dass noch alle Häuser mit Wasser versorgt werden können. Zeichne dann die Kanten des entstehenden Teilgraphen rechts ein.





Dies ist nur eine von vielen Lösungen

b) Wie heißt die Eigenschaft eines Graphen, die in unserem Beispiel garantiert, dass jedes Haus mit Wasser versorgt wird?

Antwort: Der Graph ist zusammenhängend.

c) Wie heißt der Teilgraph, den Du im Aufgabenteil a) gezeichnet hast, in Bezug auf den ursprünglichen Graphen?

Antwort:
Der Teilgraph ist ein $\boxed{\text{aufspannender Baum}}$ des linken Graphen.

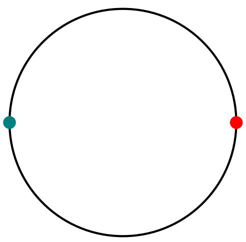
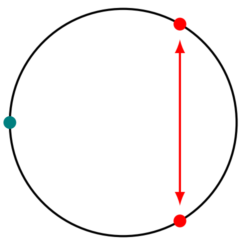
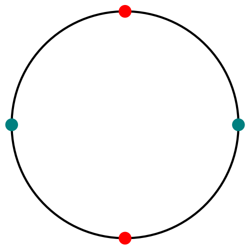
d) Die Wasserleitungsfirma hat nun Rohre geliefert, die zwei verschiedene Enden haben. Am einen Ende Anschlusstyp 1, am anderen den Anschlusstyp 2. Das bedeutet, dass nur Häuser mit verschiedenen Anschlüssen verbunden werden können. Außerdem ist vorgegeben, dass in jedem Haus nur einer der beiden Anschlusstypen verbaut werden kann. Zeige, dass die Wasserversorgung mit diesen Vorgaben gebaut werden kann. Färbe dazu die Häuser grün, die den Anschlusstyp 1 haben, und die anderen mit rot. Beachte, dass auch das Wasserwerk nur einen Anschlusstyp besitzen darf.

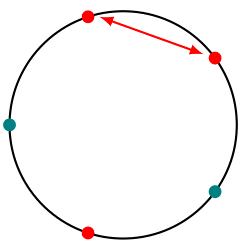
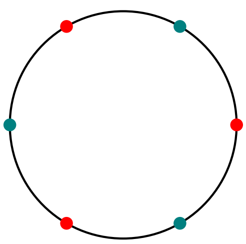
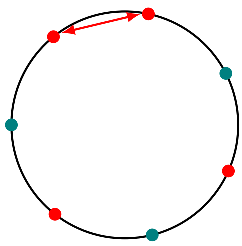
Die Ecken wurden oben entsprechend gefärbt.
Für andere Lösungen von Teil a) müssen die Färbungen entsprechend abgeändert werden.

Weiter auf nächster Seite

Wann sind Graphen, die nur aus Ecken auf einem Kreis bestehen, bipartit?
Wir untersuchen folgende Fragestellung: *Für welche natürlichen Zahlen n ist ein Graph, der nur aus n Ecken auf einem Kreis besteht, bipartit?*

Schritt 1: Untersuche Beispiele für „kleine“ n von 2 bis 7.

n	2	3	4
Graph			
bipartit?	Ja	Nein	Ja

n	5	6	7
Graph			
bipartit?	Nein	Ja	Nein

Schritt 2: Stelle eine Vermutung auf, wie die obige Frage beantwortet werden kann.

Vermutung:

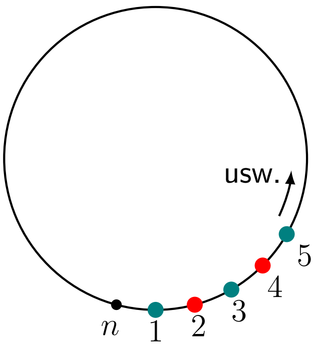
Gegeben ist ein Graph, der nur aus n Ecken auf einem Kreis besteht.

Falls n eine gerade Zahl ist, dann ist der Graph bipartit.

Falls n eine ungerade Zahl ist, dann ist der Graph nicht bipartit.

Schritt 3: Beweise deine Vermutung durch geeignetes Färben der Ecken.

Die Ecken benennen wir hierzu gegen den Uhrzeigersinn mit den Zahlen 1 bis n. Beginne nun mit dem Färben, indem du Ecke 1 grün färbst und gegen den Uhrzeigersinn fortfährst. Welche Farbe haben dann die Ecken 2, 3, 4 usw.?



Für die Ecke mit der Nummer k ergibt sich folgender Zusammenhang:

Falls k eine ungerade Zahl ist, dann ist die Ecke k grün.

Falls k eine gerade Zahl ist, dann ist die Ecke k rot.

Zwischen welchen beiden benachbarten Ecken kann überhaupt ein Konflikt bei der Färbung auftreten?

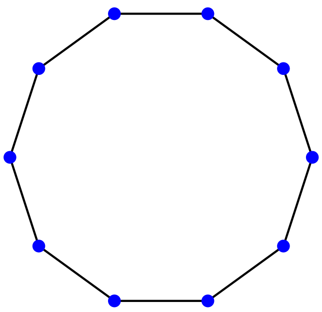
Zwischen der Ecke mit der Nummer $\boxed{1}$ und der Ecke mit der Nummer $\boxed{n}$.

Falls n $\boxed{\text{gerade}}$ ist, sind beide Ecken unterschiedlich gefärbt, und es gibt keinen Konflikt. In diesem Fall ist der Graph bipartit.

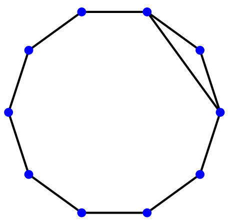
Falls n $\boxed{\text{ungerade}}$ ist, sind beide Ecken gleich gefärbt, und es gibt einen Konflikt. In diesem Fall ist der Graph nicht bipartit.

Aufgabe 31

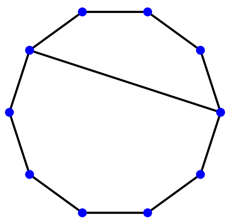
Gegeben ist der nebenstehende bipartite Graph. Ergänze eine Kante, so dass der Graph nicht mehr bipartit ist.



Lösung: Z.B.



oder



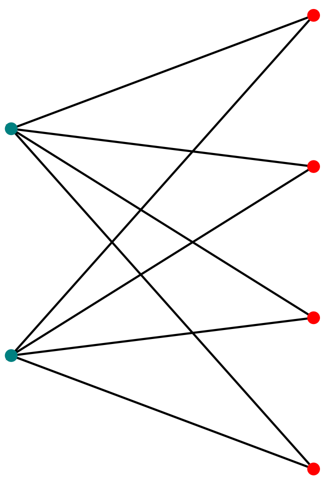
Aufgabe 32

a) Zeichne einen vollständigen 2–4–Graphen. Wie viele Kanten besitzt er?

b) Wie viele Kanten besitzt ein vollständiger m–n–Graph? Antwort: $m \cdot n$ Kanten

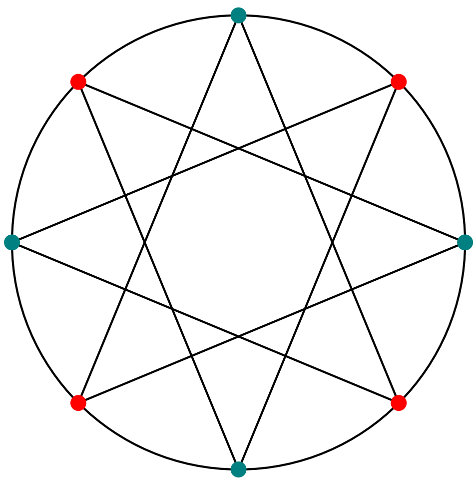
c) Ergänze im Achteck Kanten (keine Ecken), bis ein vollständiger bipartiter Graph ensteht. Welcher vollständige m–n–Graph entsteht hierdurch?

Lösung zu a)



Der Graph besitzt $\boxed{8}$ Kanten.

Lösung zu c)



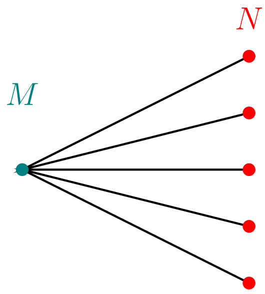
Vollständiger $\boxed{4}$ – $\boxed{4}$ –Graph.

Aufgabe 33

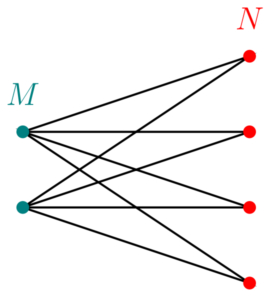
Zeichne alle vollständigen bipartiten Graphen mit 6 Ecken, die nicht zueinander isomorph sind.

Lösung:

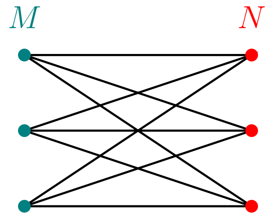
M mit 1 Ecke
N mit 5 Ecken



M mit 2 Ecken
N mit 4 Ecken



M mit 3 Ecken
N mit 3 Ecken

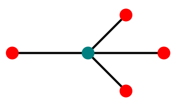


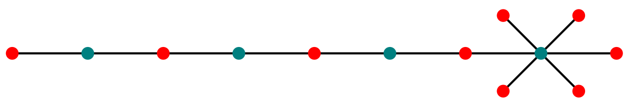
Alle vollständigen bipartiten Graphen mit 6 Ecken sind isomorph zu einem dieser Graphen. Es gibt nicht mehr mögliche Eckenverteilungen außer Vertauschung von M und N.

Aufgabe 34

Zeichne einen Baum, der ein

a) 2–3–Graph ist. Lösung:

b) 1–4–Graph ist. Lösung: 

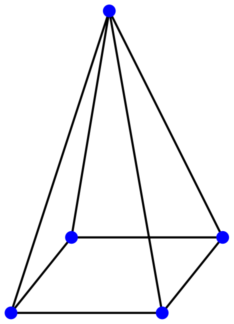
c) 4–9–Graph ist. Lösung: 

Weiter auf nächster Seite

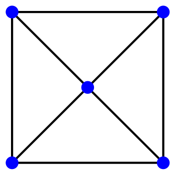
Aufgabe 35

Gegeben sind die folgenden Graphen, die Begrenzungen dreidimensionaler Körper darstellen. Zeige, dass die Graphen plättbar sind, indem Du jeweils einen isomorphen ebenen Graphen zeichnest.

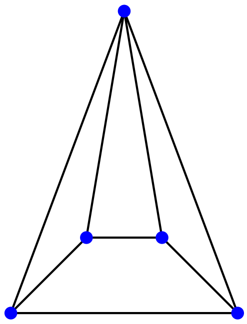
Lösung: **a)** In dieser Teilaufgabe gibt es zwei verschiedene Lösungen!



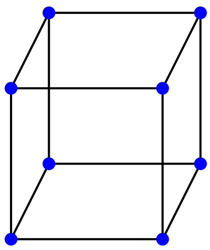
isomorphe Graphen:



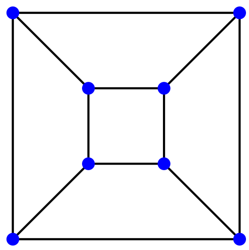
oder



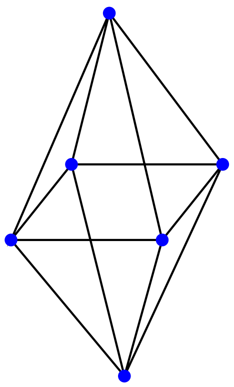
b)



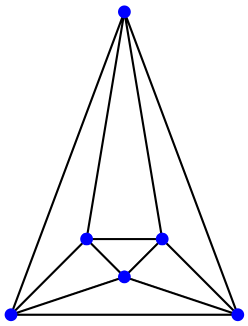
isomorpher Graph:



c)

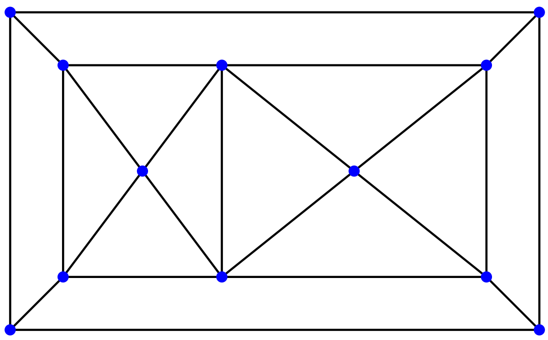


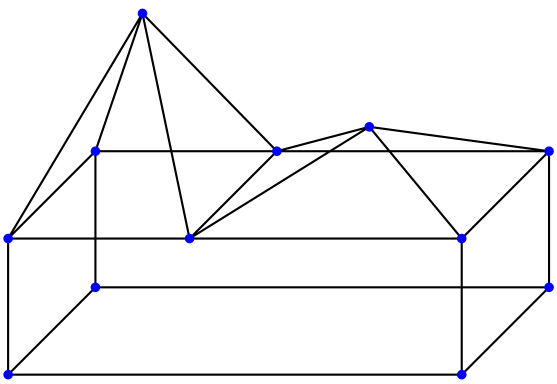
isomorpher Graph:



Aufgabe 36

Zeichne neben den ebenen Graphen ein Gebäude, das zu dem Graphen gehören könnte.



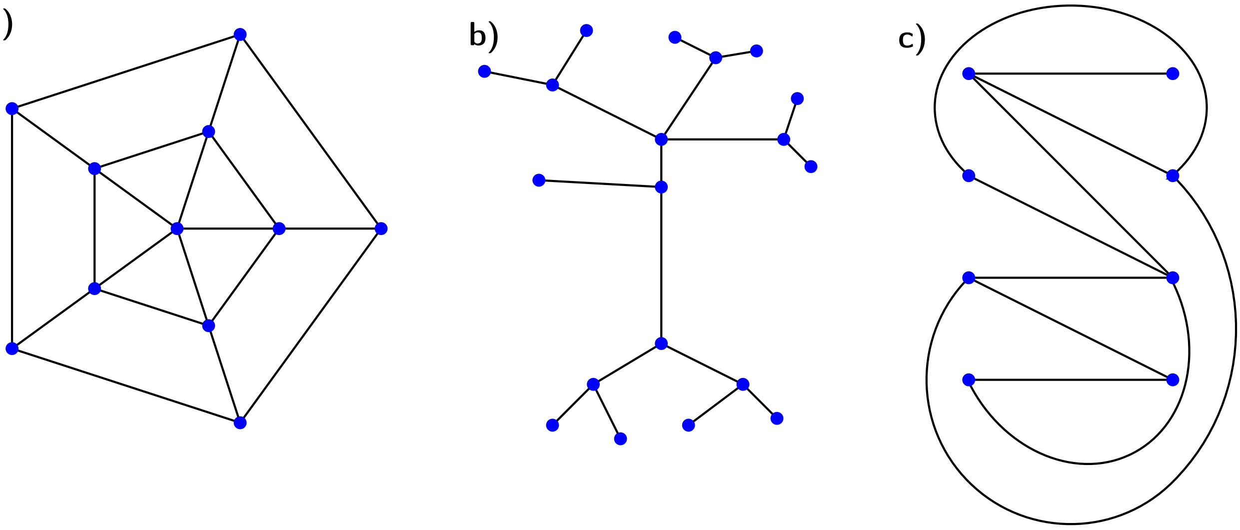


Weiter auf nächster Seite

Aufgabe 37

Trage in die Graphen eine Nummerierung der Flächen ein, in die die Ebene durch den Graphen unterteilt wird. Vergiss die Außenfläche nicht. Fülle dann die Tabelle aus.

a) b) c)

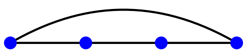


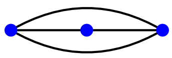
Graph	Anzahl Ecken	Anzahl Kanten	Anzahl Flächen	$e-k+f$
a)	$e =$ 11	$k =$ 20	$f =$ 11	2
b)	$e =$ 19	$k =$ 18	$f =$ 1	2
c)	$e =$ 8	$k =$ 10	$f =$ 4	2
Baum mit n Ecken	$e =$ n	$k =$ $n-1$	$f =$ 1	2

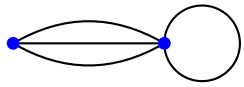
Aufgabe 38

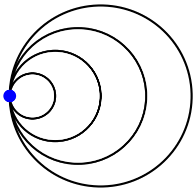
Zeichne zusammenhängende Graphen mit jeweils vier Kanten, die

a) eine Außenfläche und keine Innenfläche, Lösung:

b) eine Außenfläche und eine Innenfläche, Lösung: 

c) eine Außenfläche und zwei Innenflächen, Lösung: 

d) eine Außenfläche und drei Innenflächen, Lösung: 

e) eine Außenfläche und vier Innenflächen Lösung: 

besitzen.

Aufgabe 39

a) Ein zusammenhängender ebener Graph besitzt 13 Kanten und unterteilt die Ebene in 9 Flächen. Wie viele Ecken hat er?

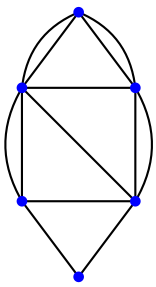
b) Ein zusammenhängender ebener Graph hat 5 Ecken und 7 Flächen. Wie viele Kanten hat er?

c) Zeichne jeweils für a) und b) einen ebenen Graphen, der diese Eigenschaften hat. Sind die Graphen, die Du gezeichnet hast, einfach?

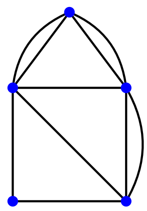
Lösung: **a)** $e-k+f=2 \;\Rightarrow\; e=2+k-f$. Hier ist $k=13$ und $f=9$, also ist $e=2+13-9=6$.

b) $e-k+f=2 \;\Rightarrow\; k=e+f-2$. Hier ist $e=5$ und $f=7$, also ist $k=5+7-2=10$.

c) Zu a):



Zu b):



Die Graphen sind nicht einfach, da sie parallele Kanten (oder je nach Lösung Schlingen) besitzen.

Hinweis: Ein einfacher ebener Graph kann höchstens $3e-6$ Kanten besitzen, siehe später.

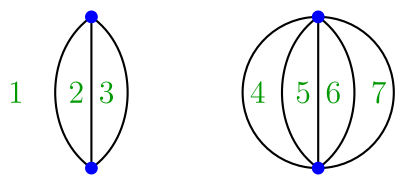
Aufgabe 40

a) Zeichne einen eben Graphen mit 7 Flächen, der nicht zusammenhängend ist und aus zwei Komponenten besteht. Berechne $e+k-f$.

b) Zeichne einen eben Graphen mit 6 Flächen, der nicht zusammenhängend ist und aus drei Komponenten besteht. Berechne $e+k-f$.

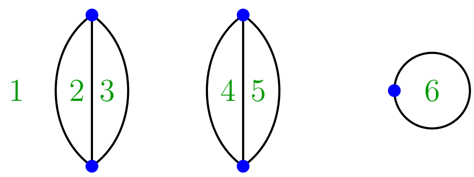
c) Sei ein ebener Graph mit e Ecken, k Kanten und f Flächen gegeben, der aus n Komponenten besteht. Stelle eine Vermutung für den Wert von $e+k-f$ in Abhängigkeit von n auf. Überprüfe, ob Deine Formel auch für $n=1$ stimmt. In diesem Fall ist der Graph zusammenhängend.

Lösung: **a)**



$e-k+f=4-8+7=3.$

b)



$e-k+f=5-7+6=4.$

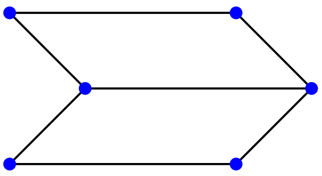
c) Es gilt $e-k+f=n+1$. Diese Formel ist für $n=1$ identisch mit der eulerschen Formel.

Man kann diese Formel beweisen, indem man die eulersche Formel auf jede Komponente anwendet und dann die Gleichungen addiert. Dabei wird die äußere Fläche n Mal gezählt anstelle von 1 Mal. Man muss also $(n-1)$ abziehen und erhält

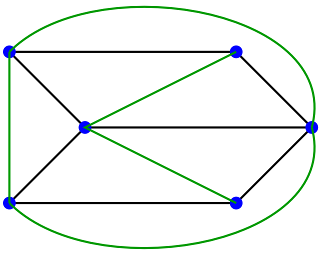
$$e-k+f \;=\; 2n-(n-1) \;=\; n+1.$$

Aufgabe 41

Gegeben ist der folgende Graph.



Lösung:



Ergänze möglichst viele Kanten, so dass der entstehende Graph einfach und eben ist. Wie viele Kanten kannst Du ergänzen?

Aufgabe 42

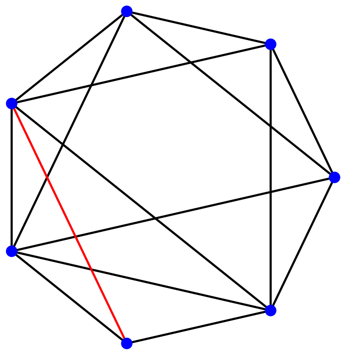
Gegeben ist der unten links gezeichnete Graph.

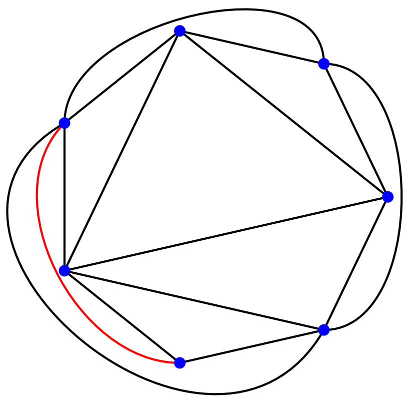
a) Beweise, dass der Graph plättbar ist, indem Du daneben einen isomorphen ebenen Graphen zeichnest.

b) Wie viele Ecken und Kanten besitzt der Graph? $e = \boxed{7}$, $k = \boxed{13}$.

c) Warum ist der Graph nicht vollständig eben?

d) Ergänze (zuerst im rechten, dann im linken Graphen) so viele Kanten (in rot), bis der Graph vollständig eben ist.

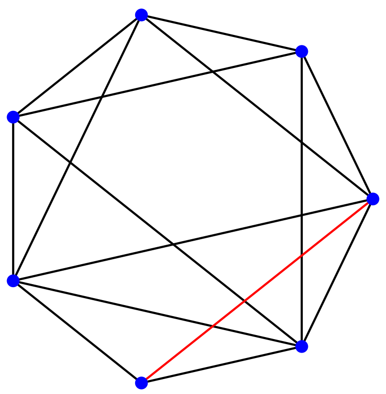


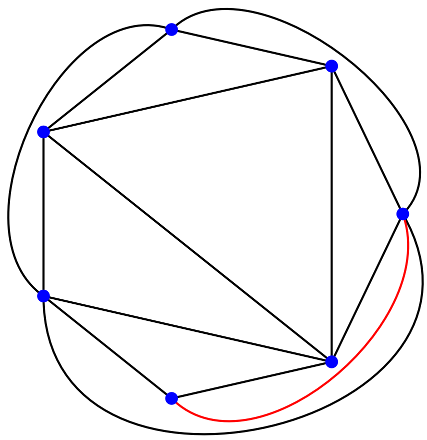


Lösung: **a)** und **b)** Siehe oben.

c) Ein vollständiger Graph mit 7 Ecken muss $k = 3 \cdot 7 - 6 = 15$ Kanten besitzen. Der gegebene Graph besitzt jedoch nur 14 Kanten.
Andere Antwort: In Teil c) kann eine Kante ergänzt werden, also ist der Graph nicht vollständig eben.

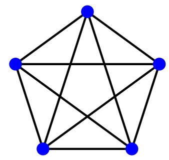
d) Aus der Formel des letzten Satzes folgt, dass genau eine Kante ergänzt werden muss. Eine Lösung siehe Graphik oben. Je nachdem, wie die Lösung von a) gezeichnet wurde, muss die rote Kante entsprechend gewählt werden. Hier eine andere Lösung:





Aufgabe 43

Gegeben ist das vollständige Fünfeck, siehe rechts.



a) Warum ist das vollständige Fünfeck einfach?

Antwort: Es besitzt keine Schlingen und keine parallelen Kanten.

b) Wie viele Ecken und Kanten hat das vollständige Fünfeck? $e = \boxed{5}$, $k = \boxed{10}$.

c) Angenommen, das vollständige Fünfeck wäre plättbar. Dann besitzt es einen isomorphen einfachen und ebenen Graphen. Wie viele Ecken und Kanten hat der isomorphe Graph?

Antwort: $e = \boxed{5}$, $k = \boxed{10}$.

d) Für diesen isomorphen einfachen und ebenen Graphen gilt $3e - 6 = \boxed{9}$,

e) Warum gibt es diesen isomorphen ebenen und einfachen Graphen nicht?

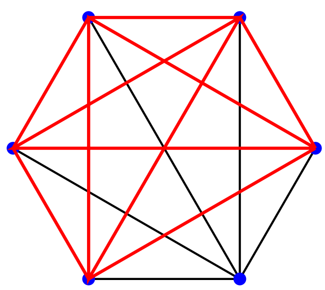
Antwort: Ein ebener einfacher Graph besitzt höchstens 9 Kanten.
Der isomorphe Graph besitzt jedoch 10 Kanten.
Also kann er nicht einfach und eben sein.

f) Also ist die Annahme, das vollständige Fünfeck wäre plättbar, falsch.

Aufgabe 44

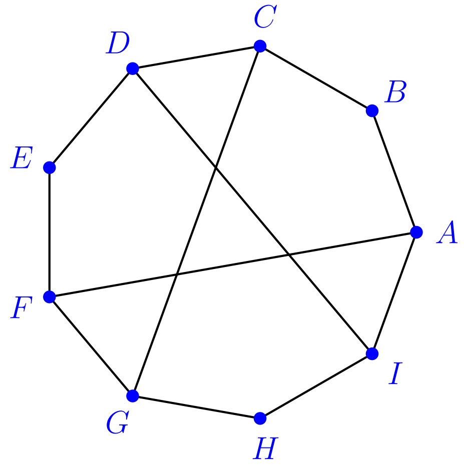
Gegeben ist das vollständige Sechseck, siehe rechts.

Beweise, dass das vollständige Sechseck nicht plättbar ist, indem Du einen Teilgraphen farbig markierst, der isomorph zu einem vollständigen Fünfeck ist.

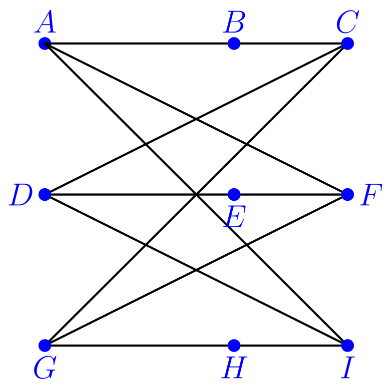


Aufgabe 45

Beweise, dass der unten gezeichnete Graph nicht plättbar ist. Weise dazu nach, dass er isomorph zu einer Unterteilung des vollständigen 3–3–Graphen ist. Zeichne dazu rechts den vollständigen 3–3–Graphen mit den vorgegebenen Ecken. Bezeichne dann die Ecken so, dass die Kanten des rechten Graphen denen im linken Graphen entsprechen. Dazu musst Du noch 3 Unterteilungsecken im rechten Graphen passend einfügen.
Hinweis: Die Ecke im rechten Graphen, die der Ecke A im linken Graphen entsprechen soll, ist bereits bezeichnet.



Lösung:



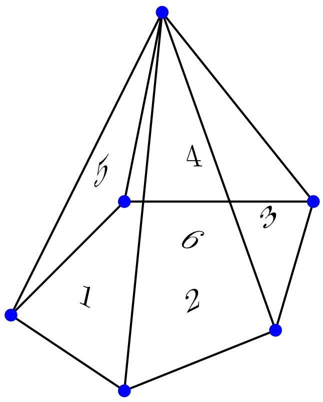
Weiter auf nächster Seite

Aufgabe 46

Gegeben ist das unten skizzierte Polyeder mit 6 Ecken, 10 Kanten und 6 Flächen. Die dreieckigen Seitenflächen sind der Reihe nach mit den Zahlen 1 bis 5 nummeriert, die fünfeckige Bodenfläche hat die Nummer 6.

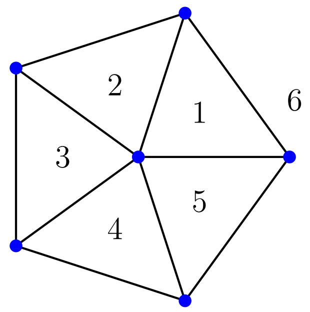
a) Warum ist der Graph des Polyeders einfach?

b) Zeichne einen isomorphen ebenen Graphen und nummeriere die Flächen des Graphen so, dass ihre Nummern denen der Flächen des Polyeders entsprechen.
Hinweis: Der ebene Graph besitzt auch eine äußere Fläche.



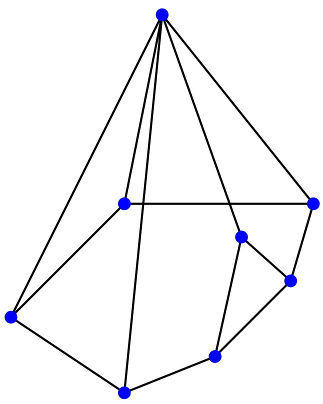
a) Der Graph ist einfach, denn:
Er hat keine Schlingen und keine parallelen Kanten

b) Isomorpher ebener Graph:

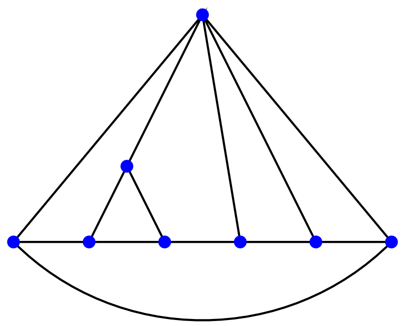


Aufgabe 47

Beim Polyeder aus der letzten Aufgabe wurde eine Ecke abgeschnitten, siehe unten stehende Graphik. Zeichne einen isomorphen ebenen Graphen. Wie viele Ecken, Kanten, Flächen hat der vorliegende Graph mehr als der aus der vorigen Aufgabe?



a) Isomorpher ebener Graph:



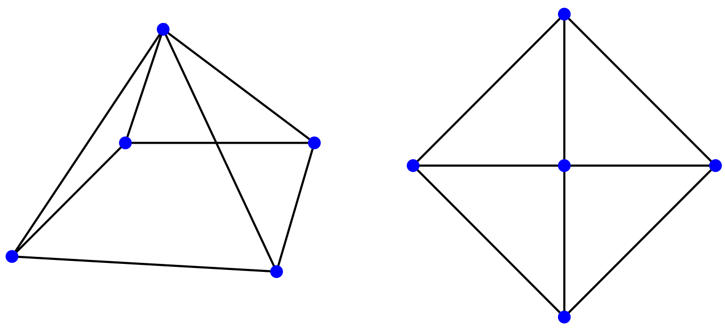
b) Im Vergleich zum Graphen aus der letzten Aufgabe erhöhte sich die Anzahl der Ecken um $\boxed{2}$,
die der Kanten um $\boxed{3}$ und
die der Flächen um $\boxed{1}$.

Aufgabe 48

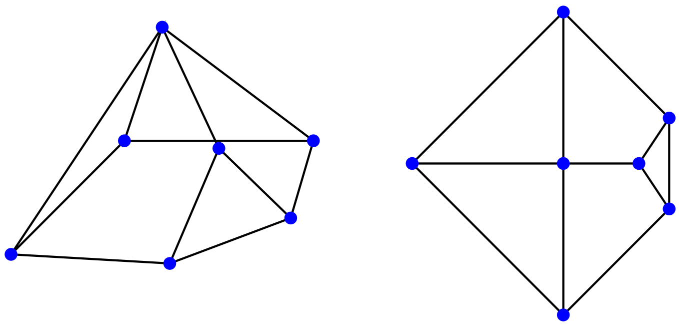
a) Konstruiere ein Polyeder mit $k = 8$ Kanten. Zeichne einen isomorphen ebenen Graphen.
Hinweis: Das Polyeder kann entsprechend zu dem aus Aufgabe 1 konstruiert werden. Wähle als Grundfläche ein Viereck.

b) Konstruiere ein Polyeder mit $k = 11$ Kanten. Zeichne einen isomorphen ebenen Graphen.
Hinweis: Verwende das Polyeder aus Teilaufgabe a) und schneide eine Ecke ab (vgl. die Konstruktion für Aufgabe 2).

Lösung: **a)**



b)

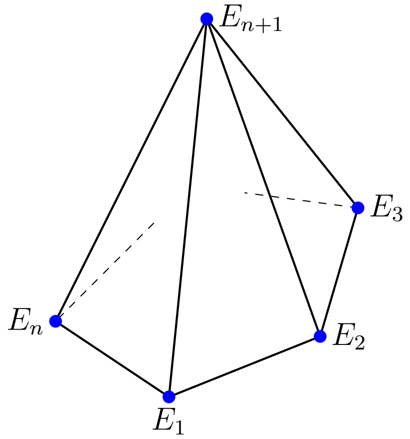


Aufgabe 49

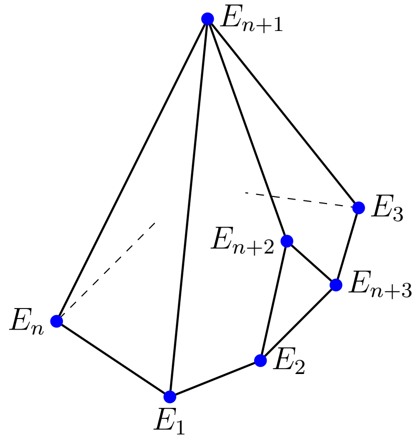
a) Sei k ein Element der Menge $\{6, 8, 10, \ldots\}$. Konstruiere ein Polyeder mit k Kanten, indem Du eine Grundfläche mit $n = \frac{k}{2}$ Ecken und eine Spitze wählst.

b) Sei k ein Element der Menge $\{9, 11, 13, \ldots\}$. Konstruiere ein Polyeder mit k Kanten, indem Du eine Grundfläche mit $n = \frac{k-3}{2}$ Ecken und eine Spitze wählst und dann eine Ecke abschneidest.

Lösung: **a)**



b)



Aufgabe 50

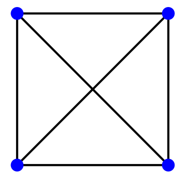
In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass es kein Polyeder mit 7 Kanten gibt. Fülle dazu die Lücken aus.

Betrachte den Graphen des Polyeders. Die Anzahl seiner Ecken wird mit e bezeichnet. Wir wissen, dass der Graph einfach ist.

Weiter wissen wir, dass $e \geq \boxed{4}$ gilt. Nun können wir eine Fallunterscheidung vornehmen.

<u>Fall $e = 4$:</u> Zeichne rechts ein vollständiges Viereck, d.h. einen einfachen Graphen mit 4 Ecken und möglichst vielen Kanten.

Vollständiges Viereck



Das vollständige Viereck besitzt $k = \boxed{6}$ Kanten. Ein einfacher Graph mit 4 Ecken kann nicht mehr Kanten besitzen.

$\Rightarrow$ Es gibt kein Polyeder mit $e = \boxed{4}$ Ecken und 7 Kanten.

<u>Fall $e \geq 5$:</u> Der Eckengrad jeder Ecke ist mindestens $\boxed{3}$.

$\Rightarrow$ Im Graphen gibt es mindestens $\boxed{15}$ Enden von Kanten.

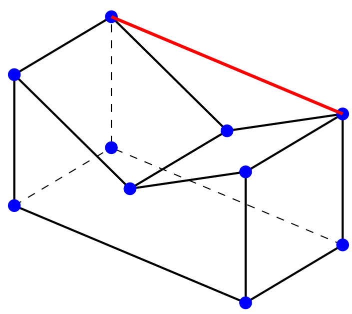
Jede Kante hat 2 Enden $\Rightarrow$ Für die Anzahl von Kanten folgt $k \geq \boxed{\frac{15}{2}}$.

$\Rightarrow$ Der Graph besitzt mindestens $\boxed{8}$ Kanten.

$\Rightarrow$ Es gibt kein Polyeder mit $e \geq \boxed{5}$ Ecken und 7 Kanten. □

Aufgabe 51

Gegeben ist das rechts dargestellte Polyeder.

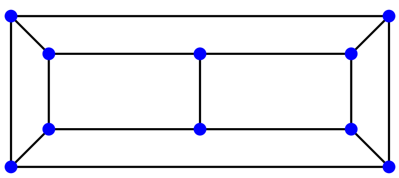


a) Weise nach, dass das Polyeder nicht konvex ist. Zeichne dazu eine Verbindungsstrecke zweier Punkte des Polyeders ein, die nicht ganz im Polyeder verläuft.

b) Weise nach, dass der Graph des Polyeders einen isomorphen ebenen Graphen besitzt, obwohl die Voraussetzung *konvex* nicht erfüllt ist. Zeichne dazu einen isomorphen ebenen Graphen.

Lösung: **a)** Siehe rote Linie in der Graphik im Aufgabentext.

b)

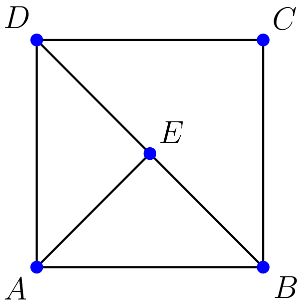


Aufgabe 52

Gegeben ist der unten stehende ebene Graph mit 7 Kanten.

a) Zeige, dass die eulersche Formel gilt.

b) Warum gibt es kein Polyeder, dessen Graph isomorph zum hier gezeigten Graphen ist?



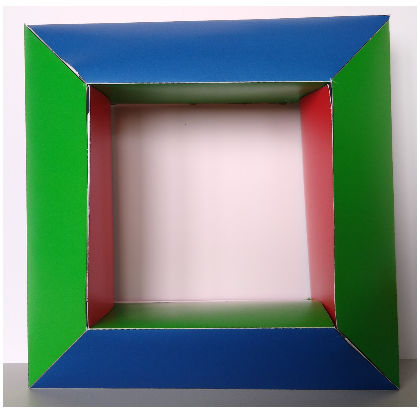
a) $\boxed{e = 5}$, $\boxed{k = 7}$, $\boxed{f = 4}$

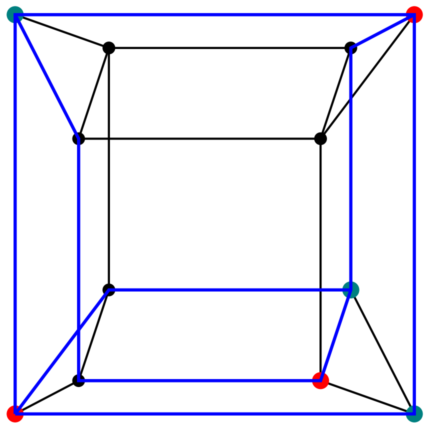
$\boxed{\Rightarrow\ e - k + f = 2}$

b) Es gibt kein Polyeder, dessen Graph isomorph zum nebenstehenden Graphen ist, denn
$\text{Grad}(C) = 2$,
der Eckengrad muss mindestens 3 sein.

Aufgabe 53

Gegeben ist das nicht konvexe Polyeder, dessen Photo und Graph abgebildet sind.





a) Bestimme die Anzahl der Flächen, Kanten und Ecken des Polyeders. Zeige, dass die eulersche Polyederformel nicht gilt. Beachte, dass die im Graphen als Dreiecke erscheinende Flächen keine Seiten des Polyeders sind.

$\boxed{e = 12}$, $\boxed{k = 24}$, $\boxed{f = 12}$, $\Rightarrow$ $\boxed{e - k + f = 12 - 24 + 12 = 0 \neq 2}$.

b) Zeige, dass der Graph des Polyeders nicht plättbar ist, indem Du einen Teilgraphen blau markierst, der isomorph zu einer Unterteilung des 3-3-Graphen ist.

Aufgabe 54

Trage in die Tabelle den Eckengrad g der Ecken und die Ecken-, Kanten- und Flächenzahl ein.

	Tetraeder	Hexaeder	Oktaeder	Dodekaeder	Ikosaeder
$g =$	3	3	4	3	5
$e =$	3	8	6	20	12
$k =$	6	12	12	30	30
$f =$	4	6	8	12	20

Aufgabe 55

In dieser Aufgabe zeigen wir: Jeder platonische Graph ist isomorph zu einem der Graphen von Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder, Ikosaeder. Fülle dazu die Lücken aus.

Wir betrachten einen platonischen Graphen mit e Ecken, k Kanten und f Flächen. Seien zusätzlich g der Eckengrad, den jede Ecke besitzt, und n die Anzahl der Kanten, die jede Fläche begrenzen.

Jede Ecke hat den Eckengrad g $\Rightarrow$ es gibt $\boxed{g \cdot e}$ Enden von Kanten.

Da jede Kante $\boxed{2}$ Enden besitzt, gibt es insgesamt $k = \boxed{\frac{1}{2} g \cdot e}$ Kanten.
Umformen nach der Anzahl der Ecken e liefert

$$e = \boxed{\frac{2k}{g}}. \qquad (*)$$

Addiert man die Anzahl der Kanten, die die Flächen begrenzen, so zählt man jede Kante doppelt $\Rightarrow$ Der Graph besitzt $k = \boxed{\frac{1}{2} \cdot n \cdot f}$ Kanten. Umformen nach der Anzahl der Flächen liefert

$$f = \boxed{\frac{2k}{n}}. \qquad (**)$$

Setzt man $(*)$ und $(**)$ für e und f in die eulersche Formel ein, so erhält man

$$2 = e - k + f \quad \Rightarrow \quad 2 = \boxed{\frac{2k}{g} - k + \frac{2k}{n}}.$$

Teilt man auf beiden Seiten durch $2k$, so erhält man die Gleichung $\boxed{\frac{1}{k} = \frac{1}{g} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n}}$.

Nach dem ersten Satz gilt $g \geq 3$ und $n \geq 3$. Deshalb müssen wir jetzt einfach durchprobieren, für welche Werte von g und n wir Lösungen für k finden. Starte dazu mit $g = 3$ und erhöhe n solange, bis du keine sinnvolle Lösung mehr für k findest. Fahre dann mit dem nächst größeren g fort.

g	n	$\frac{1}{g} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2}$	k	Name
3	3	$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{2+2-3}{6} = \frac{1}{6}$	6	Tetraeder
3	4	$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{4+3-6}{12} = \frac{1}{12}$	12	Würfel
3	5	$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} = \frac{10+6-15}{30} = \frac{1}{30}$	30	Dodekaeder
3	6	$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = \frac{2+1-3}{6} = 0$	–	
4	3	$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$	12	Oktaeder
4	4	$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 0$	–	
5	3	$\frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{30}$	30	Ikosaeder
5	4	$\frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{4+5-10}{20} < 0$	–	
6	3	$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = \frac{2+1-3}{6} = 0$	–	

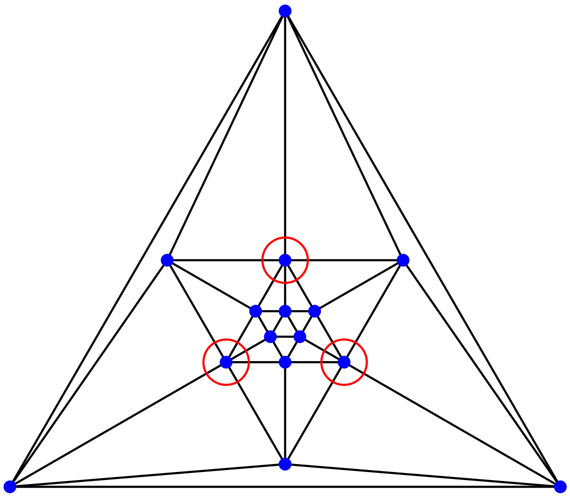
Warum sind wir mit den hier betrachtetet Werten für g und n fertig und müssen nicht alle möglichen Kombinationen durchgehen? Für höhere Werte von g, n ist die Summe der Brüche negativ, daher gibt es kein k und keinen platonischen Graphen.

Aufgabe 56

Gegeben ist der nebenstehende ebene Graph. Er ist isomorph zu dem Graphen eines Polyeders.

a) Aus was für n-Ecken bestehen die Seiten des Polyeders?

b) Warum kann das zugehörige Polyeder nicht platonisch sein?

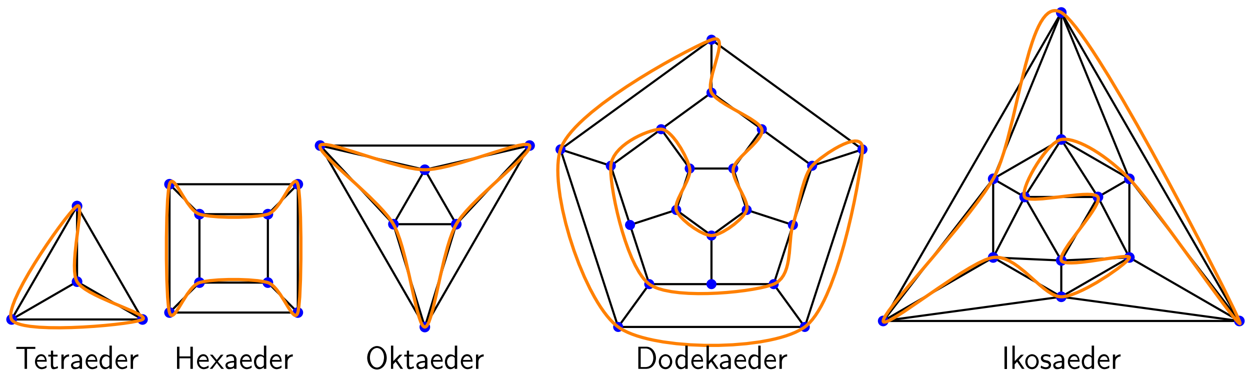


Lösung: **a)** Die Seiten bestehen aus Dreiecken, auch die äußere Fläche wird durch drei Kanten begrenzt.

b) Es gibt Ecken mit Eckengrad 5 (die meisten) und Ecken mit Eckengrad 6 (im Graphen rot markiert). Bei einem platonischen Körper müssten alle Eckengrade gleich sein.

Aufgabe 57

Untersuche ob die 5 platonischen Graphen eulersch und/oder hamiltonsch sind.



	Tetraeder	Hexaeder	Oktaeder	Dodekaeder	Ikosaeder
ist eulersch	Nein	Nein	Ja	Nein	Nein
ist hamiltonsch	Ja	Ja	Ja	Ja	Ja

Lösung: Damit ein Graph eulersch ist, müssen alle Eckengrade geradzahlig sein.

In den Graphiken sind hamiltonsche Kreise eingezeichnet.