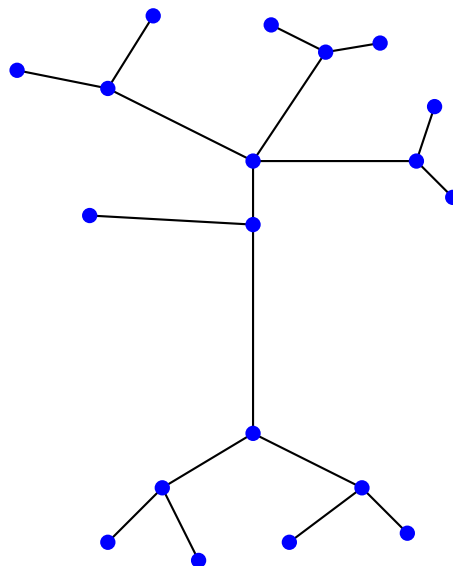


Graphentheorie

Peter Lesky

2025



Copyright:

© Schülerzirkel Mathematik, Universität Stuttgart, 2025



Dieses Dokument steht unter der der Creative Commons Lizenz **BY NC SA**,
siehe <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/legalcode>

Vorwort

Der vorliegende Text enthält Unterrichtsvorbereitungen für das *Schülerseminar Mathematik für Klasse 8-10*. Die Dichte des Materials ist sehr hoch, da hier Schülerinnen und Schüler unterrichtet werden, die mathematisch besonders interessiert sind.

Der größte Teil dieses Skripts richtet sich an Lehrer:innen. Es sind Tafelaufschriebe, Aufgaben mit Lösungen, didaktische Hinweise und manchmal zusätzliche Erklärungen enthalten.

Für Schüler:innen wurde parallel zum Kurs 2024 ein Selbstlernskript entwickelt, das im Online-Auftritt zur Verfügung gestellt wurde. Dieses findet sich als letztes Kapitel in diesem Buch.

Als Grundlage für diese Ausarbeitungen wurde das Buch *M. Nitzsche, Graphen für Einsteiger (2005)* verwendet.

Dieser Kurs wurde im Rahmen fachdidaktischer Übungen bereits mehrfach von verschiedenen Studierenden durchgeführt. Jedesmal wurden neue Ideen verwirklicht und in dieses Skript aufgenommen. Ich danke allen, die dabei beteiligt waren, für ihren Einsatz und die vielen Ideen.

Ich hoffe, dass dieses Material eine Erleichterung für die Unterrichtsvorbereitung bringt, und wünsche allen Leserinnen und Lesern viel Freude an der Mathematik.

Über Rückmeldungen und Verbesserungsvorschläge an zirkel@mathematik.uni-stuttgart.de freue ich mich.

März 2025

Peter Lesky

Inhaltsverzeichnis

1	Unterrichtseinheit 1: Graphen und Rundwege	6
1.1	Vorbemerkungen	6
1.2	Inhalt	6
1.3	Graphen und Bezeichnungen	6
1.4	Isomorphie	9
1.5	Eulersche Graphen	10
1.6	Schriftliche Aufgaben (ohne Lösungen)	15
1.7	Weitere Aufgaben	18
2	Unterrichtseinheit 2: Einfache und Hamiltonsche Graphen	22
2.1	Inhalt	22
2.2	Wiederholung	22
2.3	Einfache Graphen	23
2.4	Hamiltonsche Graphen	24
2.5	Schriftliche Aufgaben (ohne Lösungen)	30
2.6	Weitere Aufgaben	33
3	Unterrichtseinheit 3: Hamiltonsche Graphen, Kreise und Bäume	34
3.1	Inhalt	34
3.2	Wiederholung	34
3.3	Kriterien für hamiltonsche Graphen	34
3.4	Wege und Kreise	40
3.5	Bäume	41
3.6	Schriftliche Aufgaben (ohne Lösungen)	44
3.7	Weitere Aufgaben	46
4	Unterrichtseinheit 4: Bäume und bipartite Graphen	50
4.1	Inhalt	50
4.2	Wiederholung	50
4.3	Bäume	51
4.4	Bipartite Graphen	55
4.5	Schriftliche Aufgaben (ohne Lösungen)	57
4.6	Zusatzmaterial Matching	60
4.7	Weitere Aufgaben	65

5	Unterrichtseinheit 5: Bipartite und plättbare Graphen	69
5.1	Inhalt	69
5.2	Wiederholung	70
5.3	Bipartite Graphen	71
5.4	Ebene Graphen	76
5.5	Schriftliche Aufgaben (ohne Lösungen)	80
5.6	Weitere Aufgaben	82
6	Unterrichtseinheit 6: Plättbare und nicht plättbare Graphen	86
6.1	Inhalt	86
6.2	Wiederholung	86
6.3	Ebene Graphen	86
6.4	Nicht plättbare Graphen	91
6.5	Schriftliche Aufgaben (ohne Lösungen)	94
6.6	Weitere Aufgaben	97
7	Unterrichtseinheit 7: Graphen und Polyeder	101
7.1	Inhalt	101
7.2	Benötigte Vorkenntnisse	101
7.3	Polyeder	101
7.4	Platonische Körper und Graphen	109
7.5	Schriftliche Aufgaben (ohne Lösungen)	113
7.6	Weitere Aufgaben	115
8	Heftaufschrieb	120
1.	Was ist ein Graph?	120
2.	Graphen als Tabellen	120
3.	Rundwege	121
4.	Einfache Graphen	121
5.	Hamiltonsche Graphen	122
6.	Wege und Kreise	124
7.	Bäume	124
8.	Bipartite Graphen	126
9.	Ebene und plättbare Graphen	128
10.	Nicht plättbare Graphen	130
11.	Graphen und Polyeder	130
12.	Platonische Körper und Graphen	131

9 Ausarbeitung Unterrichtsstunde 1: Graphen und Rundwege	133
9.1 Stundenverlauf	133
9.2 Tafelanschriebe	134
9.3 Arbeitsblätter	136
10 Ausarbeitung Unterrichtsstunde 2: Einfache und Hamiltonsche Graphen	147
10.1 Stundenverlauf	147
10.2 Tafelanschriebe	148
10.3 Arbeitsblätter	149
11 Ausarbeitung Unterrichtsstunde 3: Hamiltonsche Graphen, Kreise und Bäume	162
11.1 Vorbemerkung	162
11.2 Tafelanschriebe	162
11.3 Arbeitsblätter	164
12 Ausarbeitung Unterrichtsstunde 4: Bäume und bipartite Graphen	177
12.1 Tafelanschriebe	177
12.2 Vorlagen und Arbeitsblätter	179
13 Ausarbeitung Unterrichtsstunde 5: Bipartite und plättbare Graphen	199
13.1 Tafelanschriebe	199
13.2 Arbeitsblätter	201
14 Ausarbeitung Unterrichtsstunde 6: Plättbare und nicht plättbare Graphen	214
14.1 Tafelanschriebe	214
14.2 Arbeitsblätter	216
15 Ausarbeitung Unterrichtsstunde 7: Graphen und Polyeder	227
15.1 Vorbemerkung	227
15.2 Tafelanschriebe	227
15.3 Vorlagen und Arbeitsblätter	228
16 Skript zum Selbststudium (Seitenzählung beginnt von vorne)	244

1 Unterrichtseinheit 1: Graphen und Rundwege

1.1 Vorbemerkungen

Wir haben uns für die Bezeichnungen *Ecken* entschieden und nicht den Begriff *Knoten* verwendet. Dies unterscheidet sich im Anfangsbuchstaben von *Kanten*.

Das Thema *Graphentheorie* interessiert viele Schüler:innen. Daher sind die Unterschiede in der Bearbeitungszeit sehr groß. Es ist wichtig, Zusatzaufgaben bereit zu halten.

1.2 Inhalt

- Graph, Ecke, Kante, parallele Kanten, isolierte Ecke, Schlinge, Grad einer Ecke, Isomorphie von Graphen;
- Kantenzug, geschlossener Kantenzug, Ecken verbinden durch Kantenzug, zusammenhängend, eulersche Tour, eulerscher Graph, Satz von Euler.

1.3 Graphen und Bezeichnungen

Vorgehen: Einstieg: S. zeichnet „Das ist das Haus vom Nikolaus“ an die Tafel. L. ergänzt die Ecken (bei Kreuzung keine Ecke) und teilt den Schüler:innen mit, dass so ein Gebilde *Graph* heißt. Das Haus vom Nikolaus an der Tafel stehen lassen.

Tafelanschrieb

1. Was ist ein Graph?

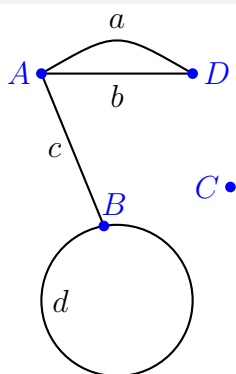
Definition: Ein Graph besteht aus Ecken und Kanten. Er muss mindestens eine Ecke besitzen. Jede Kante verbindet zwei verschiedene Ecken oder eine Ecke mit sich selber.

Mündlich: Der kleinste Graph besteht also aus einer Ecke.

Vorgehen: L. zeichnet den folgenden Graphen auf die Tafel, SuS zeichnen mit. Dann werden parallel die Begriffe neben der Zeichnung ergänzt und definiert. Reihenfolge: Zunächst die Bezeichnungen für Graphenelemente, dann erst der Eckengrad.

Tafelanschrieb

Bezeichnungen:



C: isolierte Ecke

d: Schlinge

a, b: parallele Kanten

Grad(A) = 3

Grad(B) = 3

Grad(C) = 0

Grad(D) = 2

Definition: Eine Ecke, an der keine Kante endet, heißt isoliert.

Eine Kante, die eine Ecke mit sich selbst verbindet, heißt Schlinge.

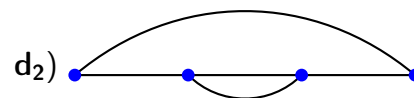
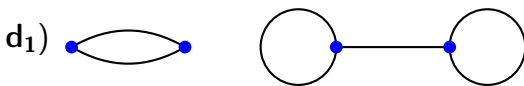
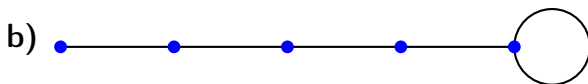
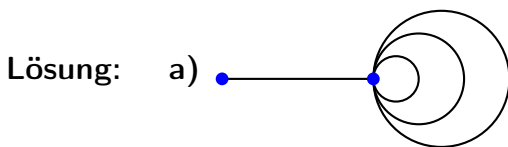
Zwei Kanten, die die selben Ecken verbinden, heißen parallel.

Der Grad einer Ecke ist die Anzahl der Endpunkte von Kanten in dieser Ecke.

Aufgabe 1.1 (Arbeitsblatt 1.1 (Graphen und Eckengrade), Aufgabe 1)

- a) Zeichne einen Graphen mit 2 Ecken mit Grad 1 und 7.
- b) Zeichne einen Graphen mit 5 Ecken mit Grad 1, 2, 2, 2, 3.
- c) Zeichne zwei verschiedene Graphen mit jeweils 4 Ecken, wovon zwei den Grad 2 und zwei den Grad 3 haben.
- d) Fülle die Tabelle aus:
- e) Wie hängen die Eckengrade und die Zahl der Kanten zusammen?
- f) Warum gibt es keinen Graphen mit drei Ecken mit den Graden 4, 5, 6?

Datei: Graphen10-Eckengrade



	a)	b)	c ₁)	c ₂)
d) Summe Eckengrade	8	10	10	10
Anzahl Kanten	4	5	5	5

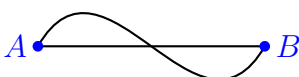
- e) Summe der Eckengrade = 2 Mal Anzahl der Kanten.
- f) Die Summe der Eckengrade kann nicht ungerade sein (vgl. vorige Teilaufgabe). Hier sollte sie $4 + 5 + 6 = 15$ sein, das geht nicht.

Anmerkung

Hier kann bereits darauf hingewiesen werden, dass es Graphen gibt, die aus „mehreren getrennten Teilen“ bestehen, und solche, die nur aus „einem Teil“ bestehen.

Tafelanschrieb

Vereinbarung: Kreuzen sich zwei Kanten, ohne dass dort eine Ecke eingezeichnet ist, so stellen wir uns vor, dass die Kanten übereinander verlaufen, ohne sich zu schneiden.



Graph mit zwei Ecken und zwei parallelen Kanten

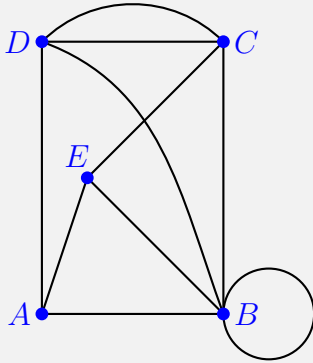
Vorgehen: Auf die Kreuzung beim Haus von Nikolaus hinweisen.

Tafelanschrieb**2. Graphen als Tabellen**

Methode: Zeichne eine Tabelle, die für jede Ecke sowohl eine Spalte als auch eine Zeile enthält. Trage in das Feld der Zeile B und Spalte C ein, wie viele Kanten B und C verbinden.

Aufgabe 1.2 (Arbeitsblatt 1.2 (Tabellen von Graphen), Aufgabe 2)

Trage in die Tabelle ein, wie viele Kanten die jeweiligen Ecken verbinden.



	A	B	C	D	E	Grad
A	0	1	0	1	1	3
B	1	1	1	1	1	6
C	0	1	0	2	1	4
D	1	1	2	0	0	4
E	1	1	1	0	0	3

Datei: Graphen11-Graph-als-Tabelle

Lösung: Ist bereits im Aufgabentext enthalten.

Mündlich: Die Tabelle ist symmetrisch, denn A und B verbinden gleich viele Kanten wie von B und A .

Bei der Besprechung der Aufgabe darauf hinweisen, dass man den Grad jeder Ecke aus der Tabelle ablesen kann durch $\text{Grad}(B) = 2 \cdot (\text{Zahl im Diagonalfeld } (B, B)) + \text{alle anderen Einträge der Zeile } B$.

Anmerkung

Durch die folgende Umkehraufgabe wird der Zusammenhang Tabelle-Graph noch deutlicher.

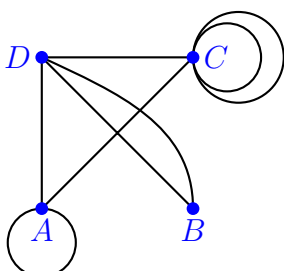
Aufgabe 1.3 (Arbeitsblatt 1.2 (Tabellen von Graphen), Aufgabe 3)

Zeichne einen Graphen, der die folgende Tabelle besitzt:

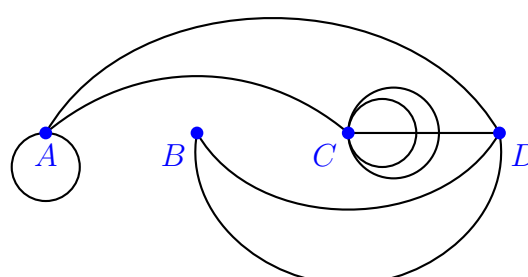
	A	B	C	D
A	1	0	1	1
B	0	0	0	2
C	1	0	2	1
D	1	2	1	0

Datei: Graphen12-Tabelle-Umkehraufgabe

Lösung: Eine Lösung:



Eine anders aussehende Lösung:



Anmerkung

Nach Präsentation verschiedener Lösungen kann bemerkt werden, dass die Graphen zwar verschieden aussehen, aber von den Verbindungen der Punkte her gesehen gleich sind.

1.4 Isomorphie**Tafelanschrieb**

Definition: Zwei Graphen heißen isomorph, wenn sie bei geeigneter Bezeichnung der Ecken dieselbe Tabelle besitzen.

Anschaulich: Der eine Graph kann so „verbogen“ werden, dass der andere entsteht.

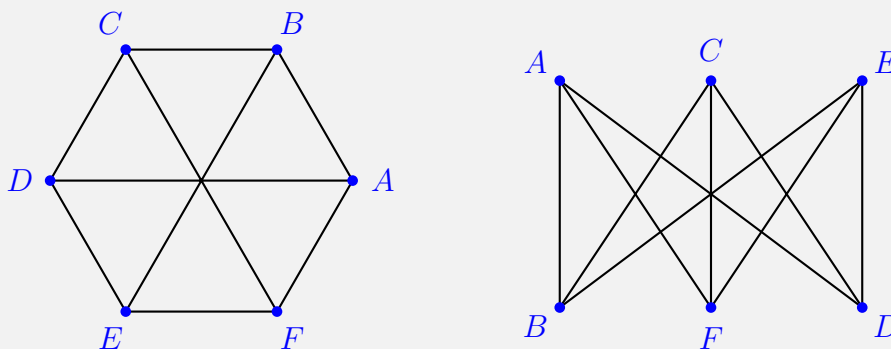
Satz: Sind zwei Graphen isomorph, so haben sie dieselbe

- Anzahl von Ecken
- Anzahl von Kanten
- Anzahl von Schlingen
- Anzahl paralleler Kanten
- Liste der Eckengrade bis auf Reihenfolge

Umgekehrt: Ist einer dieser Punkte nicht erfüllt, so sind die Graphen nicht isomorph.

Aufgabe 1.4 (Arbeitsblatt 1.3 (Isomorphe Graphen), Aufgabe 4)

Zeige, dass die folgenden Graphen isomorph sind:



Datei: Graphen13-isomorphe-Graphen

Lösung: Linker Graph:

	A	B	C	D	E	F
A		1		1		1
B	1		1		1	
C		1		1		1
D	1		1		1	
E		1		1		1
F	1		1		1	

Rechter Graph:

	A	B	C	D	E	F
A		1		1		1
B	1		1		1	
C		1		1		1
D	1		1		1	
E		1		1		1
F	1		1		1	

Die Graphen sind isomorph, denn **die Tabellen sind gleich**.

(Nullen wurden in den Tabellen weggelassen)

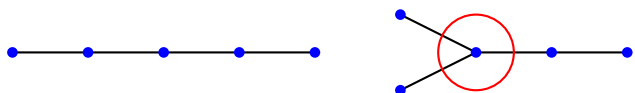
Anmerkung

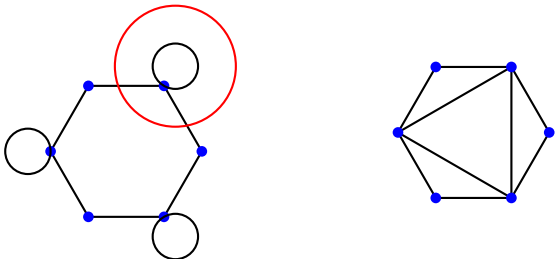
Der Satzsatz *Die Tabellen sind gleich, also sind die Graphen isomorph* gehört zur Lösung!

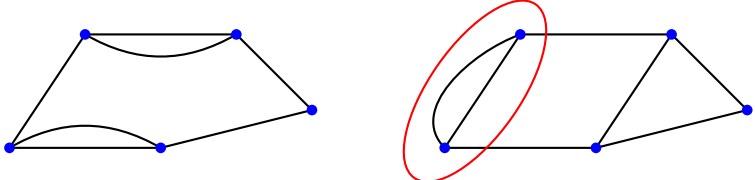
Aufgabe 1.5 (Arbeitsblatt 1.3 (Isomorphe Graphen), Aufgabe 5)

Warum sind die folgenden Graphen jeweils nicht isomorph?

Datei: Graphen14-nicht-isomorphe-Graphen

Lösung: a)  Eckengrad 3 kommt nur im rechten Graphen vor.

b)  Der linke Graph hat Schlingen, der rechte hat keine.

c)  Der linke Graph hat zwei Paare paralleler Kanten, der rechte hat nur ein Paar.

1.5 Eulersche Graphen

Tafelanschrieb

3. Rundwege

Definition: 1) Ein Kantenzug in einem Graphen ist eine Folge von Kanten, die nacheinander ohne Absetzen gezeichnet werden können.

Beim Nachfahren eines Kantenzugs wird die Ecke, in der die erste Kante beginnt, über den Kantenzug mit der Ecke, in der die letzte Kante endet, verbunden.

2) Ein Graph heißt zusammenhängend, wenn es zu je zwei beliebig gewählten Ecken immer einen Kantenzug gibt, der sie verbindet.

3) Ein Kantenzug heißt geschlossen, wenn Anfangsecke = Endercke.

4) Ein Kantenzug, der

- jede Kante genau ein Mal benützt und
- geschlossen ist,

heißt eulersche Tour.

5) Ein Graph, der eine eulersche Tour enthält, heißt eulerscher Graph.

Vorgehen: Die einzelnen Punkte am Haus von Nikolaus veranschaulichen.

Mündlich: Bei eulerschen Touren oder eulerschen Graphen geht es nur um die Kanten. Isolierte Ecken darf es geben.

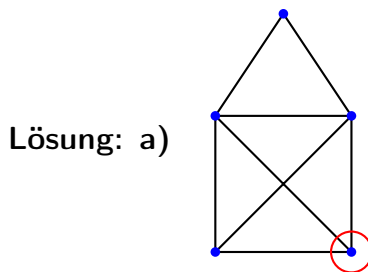
Tafelanschrieb

Anschaulich: Einen eulerschen Graphen ohne isolierte Ecke kann man zeichnen ohne abzusetzen, ohne eine Kante doppelt abzufahren und so, dass man bei der Anfangsecke endet.

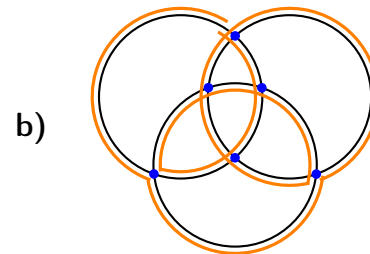
Aufgabe 1.6 (Arbeitsblatt 1.4 (Eulersche Touren), Aufgabe 6)

In welchem der Graphen gibt es eine eulersche Tour?

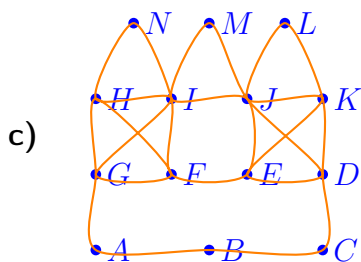
Datei: Graphen15-eulerscheTour



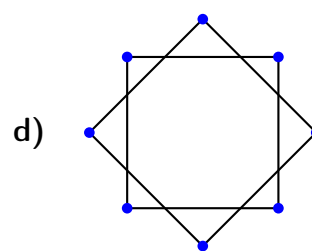
Es gibt keine eulersche Tour, denn wenn man rechts unten startet, endet man immer in der linken unteren Ecke.



Eine eulersche Tour ist eingezeichnet.



Es gibt eine eulersche Tour.



Es gibt keine eulersche Tour, denn man kommt nicht von dem einen Rechteck zum anderen.

Mündlich: Bei großen Graphen kann es aufwändig sein, eine eulersche Tour zu finden. Wir wollen Eigenschaften eines Graphen finden, die garantieren, dass er eulersch ist.

Tafelanschrieb

Satz: In einem eulerschen Graphen sind alle Eckengrade geradzahlig.

Beweis: Fall 1: E ist eine isolierte Ecke. Dann gilt $\text{Grad}(E) = 0$, und 0 ist gerade.

Fall 2: E ist eine nicht isolierte Ecke. Betrachte eine eulersche Tour. Diese geht durch E . Sei n die Zahl, wie oft die Tour durch E kommt. Dann gilt $\text{Grad}(E) = 2n$, da die Tour E immer auf einer Kante erreicht und auf einer anderen Kante verlässt und beim nächsten Durchgang neue Kanten verwendet werden. \square

Mündlich: Das selbe Argument stimmt auch, wenn E die Anfangsecke ist. Denn dann ist sie auch die Endecke. Diese beiden Kanten addieren 2 zum Eckengrad von E dazu. Und für die restlichen Durchgänge gilt das Argument wie auf der Tafel.

Tafelanschrieb

Satz von Euler: Ein Graph ohne isolierte Ecke ist genau dann eulersch, wenn er zusammenhängend ist und alle Eckengrade gerade sind.

Beweis: Ist der Graph eulersch, so gilt:

- Nach dem letzten Satz sind alle Eckengrade gerade.
- Sind zwei Ecken gegeben, dann kann man von der einen Ecke aus so lange eine eulersche Tour entlanggehen, bis man bei der anderen Ecke ankommt, da keine der Ecken isoliert ist. Dann hat man einen Kantenzug gefunden, der die beiden Ecken verbindet. Also ist der Graph zusammenhängend. (Da es keine isolierten Ecken gibt, geht jede eulersche Tour durch die beiden Ecken.)

Jetzt setze voraus: Alle Eckengrade sind gerade und der Graph ist zusammenhängend.

Beweis: Es gibt eine eulersche Tour. Siehe nächstes Arbeitsblatt.

Vorgehen: Das nächste Arbeitsblatt wird gemeinsam bearbeitet. L. zeichnet den gegebenen Graphen ohne Ecken- und Kantenbezeichnungen an die Tafel, wie er auf dem Arbeitsblatt ausgedruckt ist.

Dann erläutert L. das Vorgehen des Algorithmus an der Tafel, Schüler:innen schreiben auf dem Arbeitsblatt mit.

Zuerst wird die Anfangsecke A bezeichnet, dann der erste Kantenzug (rot) markiert und bezeichnet. Danach werden die Ecke E_1 und die erste Erweiterung eingezeichnet und bezeichnet usw.

Text auf Arbeitsblatt 1.5 (Eulersche Touren finden):

Sei ein zusammenhängender Graph gegeben, bei dem alle Eckengrade geradzahlig sind. Um eine Eulersche Tour zu finden, kann der folgende Algorithmus verwendet werden.

Schritt 1: Wähle irgendeine Ecke A als Anfangsecke. Bilde einen Kantenzug, bis die Anfangsecke wieder erreicht ist. Dies geht, da jede andere Ecke, die man erreicht, auch wieder auf einer anderen Kante verlassen werden kann (gerader Eckengrad).

Schritt 2: Falls noch nicht alle Kanten benützt wurden, gehe auf dem bisherigen Kantenzug bis zur ersten Ecke E_1 , von der eine nicht benutzte Kante abzweigt. Da der Eckengrad eine gerade Zahl ist, müssen sogar zwei Kanten abzweigen. Gehe eine dieser Kanten entlang und bilde einen Kantenzug aus lauter noch nicht verwendeten Kanten, bis wieder E_1 erreicht wird. Füge diesen neuen Kantenzug in den alten ein.

Wiederhole nun Schritt 2 so oft, bis alle Kanten verbraucht sind. Da der Graph zusammenhängend ist, bleibt keine Kante übrig. \square

Der Algorithmus am Beispiel (Graph ist auf dem Arbeitsblatt vorgezeichnet):

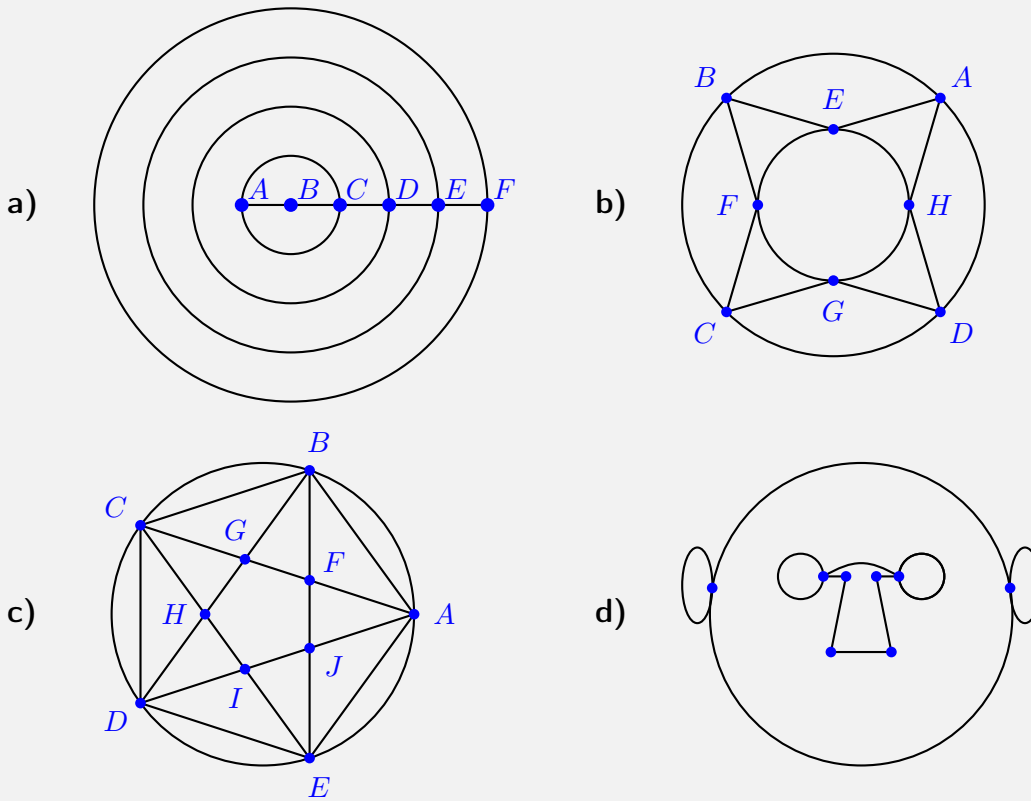
Tafelanschrift	
	Erster Kantenzug:
	$A-k_1-k_2-k_3-A$
	Erste Erweiterung:
	$A-k_1-k_2-E_1-k_4-k_5-k_6-k_7-E_1-k_3-A$
	Zweite Erweiterung:
$A-k_1-k_2-E_1-k_4-k_5-k_6-E_2-k_8-k_9-k_{10}-E_2-k_7-E_1-k_3-A$	
Nun sind alle Kanten verbraucht und wir haben eine eulersche Tour gefunden.	

Anmerkung

Der in diesem Beweis verwendete Algorithmus heißt *Algorithmus von Hierholzer*.

Aufgabe 1.7 (Arbeitsblatt 1.6 (Eulersche Graphen), Aufgabe 7)

Welcher der folgenden Graphen ist eulersch? Trage Deine Antwort in die Tabelle ein.

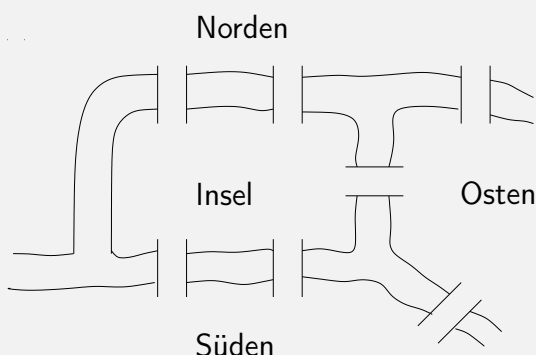


Datei: Graphen16-eulerscheGraphen

Lösung:

	eulersch	nicht eulersch weil
Graph a)		$\text{Grad}(F) = 3$ ist ungerade
Graph b)	Ja	
Graph c)	Ja	
Graph d)		nicht zusammenhängend

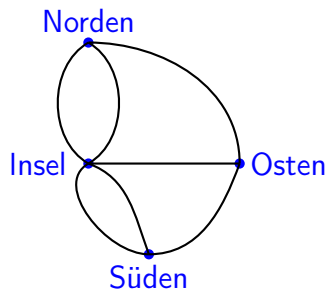
Aufgabe 1.8 (Arbeitsblatt 1.6 (Eulersche Graphen), Aufgabe 8)



Das Königsberger Brückenproblem: In Königsberg gibt es 7 Brücken über die Pregel, wie im nebenstehenden Stadtplan dargestellt. Die Frage ist nun, ob es einen Rundweg durch Königsberg gibt, so dass jede der Brücken genau ein Mal überquert wird. Zeichne einen Graphen, der zu diesem Problem passt: Die Brücken sollen als Kanten dargestellt werden, da man sie genau einmal überqueren soll. Entscheide dann, ob ein solcher Rundweg möglich ist.

Datei: Graphen17-KoenigsbergerBrueckenproblem

Lösung:



Ein solcher Rundweg wäre eine eulersche Tour. Es gibt aber keine eulersche Tour zu dem Graphen, da es ungerade Eckengrade gibt (es sind sogar alle Eckengrade ungerade).

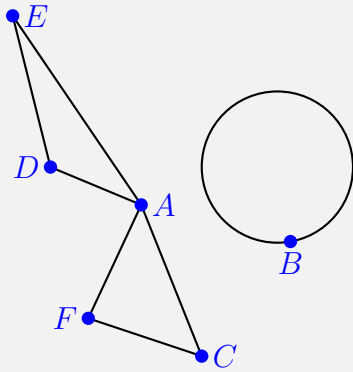
Also gibt es keinen Rundweg durch Königsberg, bei dem jede Brücke genau ein Mal überquert wird.

Weiter auf nächster Seite

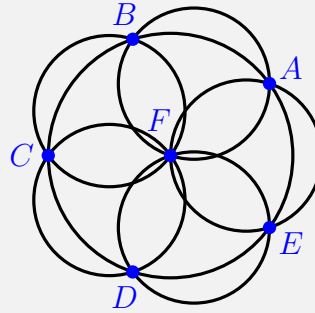
1.6 Schriftliche Aufgaben (ohne Lösungen)

Aufgabe 1.9 (Arbeitsblatt 1.7 (Schriftliche Aufgaben), Aufgabe 9)

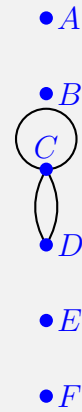
Trage die Anzahl an Schlingen, isolierten Ecken, parallelen Kanten, Komponenten und die Grade der Ecken der abgebildeten Graphen in die Tabelle ein. Kreuze außerdem die entsprechenden Felder in der Tabelle an, wenn die abgebildeten Graphen zusammenhängend oder eulersch sind.



Graph 1



Graph 2



Graph 3

	Graph 1	Graph 2	Graph 3
Anzahl Schlingen			
Anzahl isolierter Ecken			
Anzahl paralleler Kanten			
zusammenhängend?			
Grad von A			
Grad von B			
Grad von C			
Grad von D			
Grad von E			
Grad von F			
eulersch?			

Datei: Graphen190-Grapheigenschaften

Aufgabe 1.10 (Arbeitsblatt 1.7 (Schriftliche Aufgaben), Aufgabe 10)

Wahr oder falsch? Kreuze an!

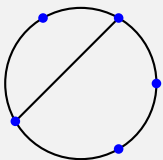
	wahr	falsch
In jedem Graphen ist die Summe der Eckengrade eine gerade Zahl.		
Ein zusammenhängender Graph kann eine isolierte Ecke besitzen.		
In jedem zusammenhängenden Graphen, dessen Ecken alle geraden Grad haben, gibt es eine eulersche Tour.		
In einer eulerschen Tour darf eine Ecke auch mehrmals überfahren werden.		
In einer eulerschen Tour darf eine Kante auch mehrmals benutzt werden.		
Ein eulerscher Graph kann eine Schlinge besitzen.		
Ein eulerscher Graph kann eine isolierte Ecke besitzen.		
In einem eulerschen Graphen ist es in jeder Ecke möglich, eine eulersche Tour zu starten.		

Datei: Graphen191-Eigenschaften-wahr-falsch

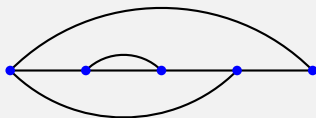
Aufgabe 1.11 (Arbeitsblatt 1.7 (Schriftliche Aufgaben), Aufgabe 11)

Gegeben sind fünf Graphen. Untersuche, welche der Graphen isomorph zueinander sind. Trage Deine Ergebnisse in die Tabelle ein bzw. kreuze an, falls der angegebene Graph zu keinem der anderen isomorph ist.

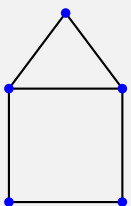
Graph 1:



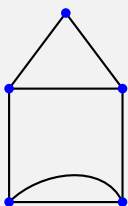
Graph 2:



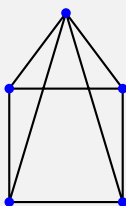
Graph 3:



Graph 4:



Graph 5:



	ist isomorph zu	ist zu keinem der anderen Graphen isomorph
Graph 1		
Graph 2		
Graph 3		
Graph 4		
Graph 5		

Datei: Graphen193-IsomorpheGraphen

Aufgabe 1.12 (*Arbeitsblatt 1.7 (Schriftliche Aufgaben), Aufgabe 12*)

Zeichne jeweils einen Graphen, der die angegebenen Eigenschaften besitzt.

Hinweis: Die Graphen sind durch die angegebenen Eigenschaften nicht unbedingt eindeutig bestimmt.

- a) Zusammenhängender Graph mit 5 Ecken, 4 Kanten, und ein Eckengrad soll 3 sein.
- b) Nicht zusammenhängender Graph mit 5 Ecken, 4 Kanten, und ein Eckengrad soll 3 sein.
- c) Eulerscher Graph mit 5 Ecken und möglichst wenig Kanten, ohne isolierte Ecke.
- d) Eulerscher Graph mit 5 Ecken und möglichst vielen Kanten, ohne parallele Kanten.

Graph zu a)

Graph zu b)

Graph zu c)

Graph zu d)

Datei: Graphen192-Graphen-konstruieren

Anmerkung

Bei der Aufgabenstellung *Konstruktion von Graphen* wurde darauf geachtet, dass es nicht zu viele verschiedene Lösungen gibt. Außerdem bieten sich die Fragen *möglichst viele/wenige* als interessante Aufgabenstellung an.

Weiter auf nächster Seite

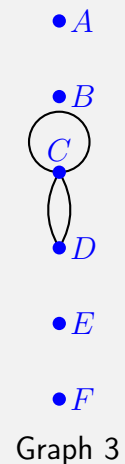
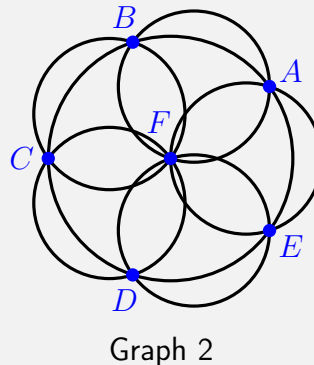
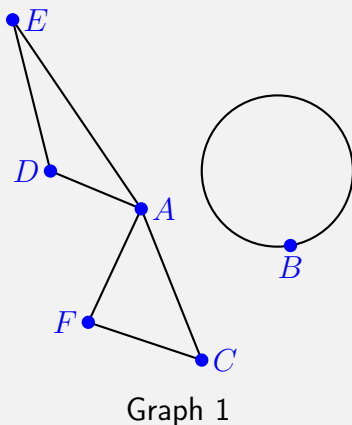
1.7 Weitere Aufgaben

Zunächst folgen Vorschläge für Zusatzaufgaben, die zum Teil den schriftlichen Aufgaben entnommen sind und notfalls etwas variiert wurden.

Zu Blatt 1.1:

Aufgabe 1.13 (Arbeitsblatt 1.8 (Weitere Aufgaben), Zusatzaufgabe 1)

Trage die Anzahl an Schlingen, isolierten Ecken, parallelen Kanten und die Grade der Ecken der abgebildeten Graphen in die Tabelle ein.



	Graph 1	Graph 2	Graph 3
Anzahl Schlingen	1	0	1
Anzahl isolierter Ecken	0	0	4
Anzahl paralleler Kanten	0	20	2
Grad von A	4	6	0
Grad von B	2	6	0
Grad von C	2	6	4
Grad von D	2	6	2
Grad von E	2	6	0
Grad von F	2	10	0

Hinweise: Graph 1 ist nicht eulersch, denn es gibt keine Verbindung der Schlinge mit den anderen Kanten.

Graph 3 ist eulersch, denn für eine eulersche Tour ist nur verlangt, dass alle Kanten in einem Kantenzug durchlaufen werden können. Isolierte Punkte spielen dafür keine Rolle.

Datei: Graphen190-Grapheigenschaften-Z

Lösung: Ist bereits im Aufgabentext enthalten.

Weiter auf nächster Seite

Zu Blatt 1.2:

Aufgabe 1.14 (*Arbeitsblatt 1.8 (Weitere Aufgaben), Zusatzaufgabe 2*)

Ein Graph heißt **vollständig**, wenn jede Ecke des Graphen mit jeder anderen durch genau eine Kante verbunden ist und er keine Schlinge enthält.

- a) Zeichne vollständige Graphen mit 2, mit 3 und mit 4 Ecken.
- b) Stelle die Tabellen zu den Graphen aus Teil a) auf.
- c) Beschreibe, wie die Tabelle eines vollständigen Graphen mit n Ecken aussieht und welchen Grad seine Ecken besitzen.

Datei: Graphen18-VollstaendigeGraphen

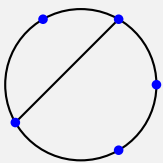
Lösung: Ist bereits im Aufgabentext enthalten.

Zu Blatt 1.3:

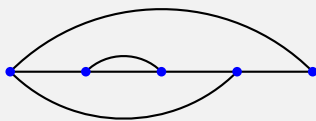
Aufgabe 1.15 (*Arbeitsblatt 1.8 (Weitere Aufgaben), Zusatzaufgabe 3*)

Gegeben sind fünf Graphen. Untersuche, welche der Graphen isomorph zueinander sind. Trage Deine Ergebnisse in die Tabelle ein bzw. kreuze an, falls der angegebene Graph zu keinem der anderen isomorph ist.

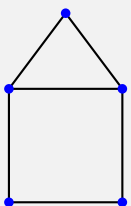
Graph 1:



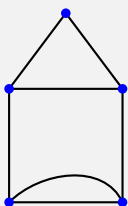
Graph 2:



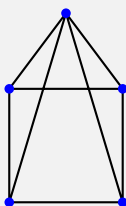
Graph 3:



Graph 4:



Graph 5:



	ist isomorph zu	ist zu keinem der anderen Graphen isomorph
Graph 1	Graph 3	
Graph 2	Graph 4	
Graph 3	Graph 1	
Graph 4	Graph 2	
Graph 5		×

Datei: Graphen193-IsomorpheGraphen

Lösung: Ist bereits im Aufgabentext enthalten.

Weiter auf nächster Seite

Zu Blatt 1.4:

Aufgabe 1.16 (Arbeitsblatt 1.8 (Weitere Aufgaben), Zusatzaufgabe 4)

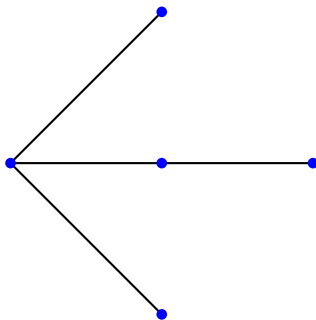
Zeichne jeweils einen Graphen, der die angegebenen Eigenschaften besitzt.

Hinweis: Die Graphen sind durch die angegebenen Eigenschaften nicht unbedingt eindeutig bestimmt.

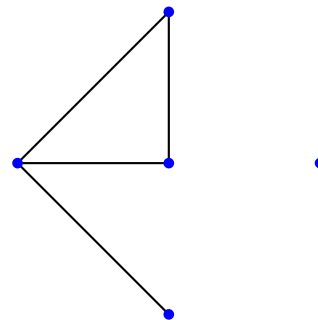
- Zusammenhängender Graph mit 5 Ecken, 4 Kanten, und ein Eckengrad soll 3 sein.
- Nicht zusammenhängender Graph mit 5 Ecken, 4 Kanten, und ein Eckengrad soll 3 sein.
- Eulerscher Graph mit 5 Ecken und möglichst wenig Kanten, ohne isolierte Ecke.
- Eulerscher Graph mit 5 Ecken und möglichst vielen Kanten, ohne parallele Kanten.

Datei: Graphen192-Graphen-konstruieren-Z

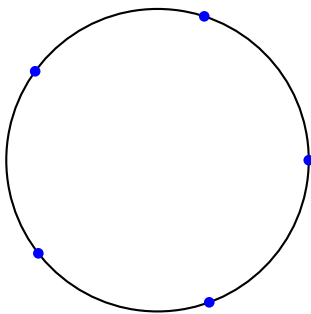
Graph zu a)



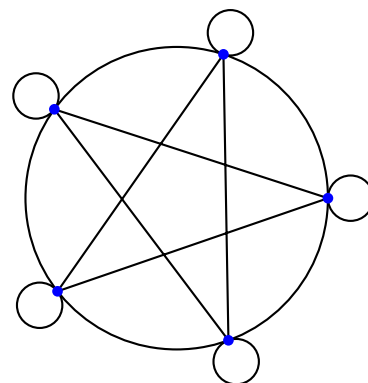
Graph zu b)



Lösung: Graph zu c)



Graph zu d)

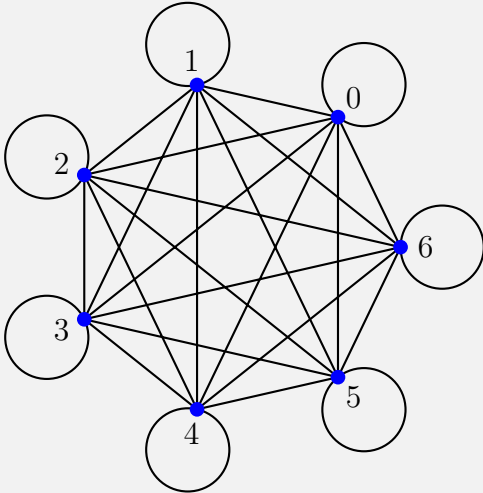


Weiter auf nächster Seite

Weitere Ideen:

Aufgabe 1.17 (Arbeitsblatt 1.8 (Weitere Aufgaben), Zusatzaufgabe 5)

Alle Steine eines Dominospiels sollen nach den Dominoregeln hintereinander gelegt werden. Der Anfang und das Ende der Kette sollen wieder zusammenpassen. Diese Problemstellung ist zeichnerisch in den folgenden Graphen übersetzt:



Die Kante von der Ecke 0 nach der Ecke 1 entspricht dem Dominostein mit der Augenzahl 0 auf der einen Hälfte und der Augenzahl 1 auf der anderen Hälfte.

Somit erfüllt jeder Kantenzug in diesem Graph die Dominoregeln. Damit der Anfang und das Ende auch übereinstimmen, muss der Kantenzug eine Eulersche Tour sein.

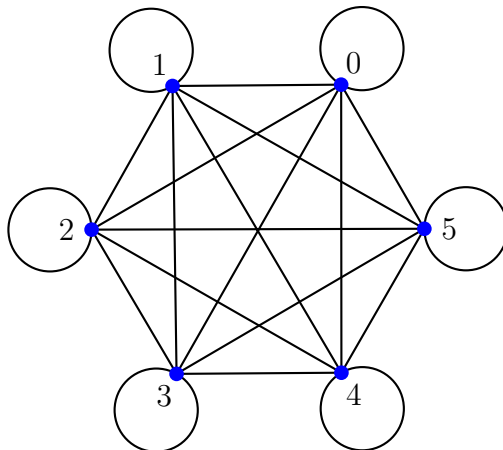
Datei: Graphen194-Domino

Lösung: a) Gibt es eine Eulersche Tour?

Antwort: Ja, denn der Graph ist zusammenhängend und alle Eckengrade sind geradzahlig.

b) Wie sieht der Graph aus, wenn nur Dominosteine mit Augenzahlen von 0 bis 5 verwendet werden? Gibt es dann auch eine Eulersche Tour?

Antwort:



Es gibt keine eulersche Tour, da es ungerade Eckengrade gibt (alle Eckengrade sind 7).

Mann-Wolf-Ziege-Kohlkopf-Problem: Bestimme alle zulässigen Zusammenstellungen, so dass niemand gefressen wird. Zeichne diese als Ecken eines Graphen. Zeichne als Kanten alle möglichen Fahrten ein. Gib alle Lösungen des Problems an.

Zeichne Graphen für die die folgenden Punkte übereinstimmen, die aber trotzdem nicht isomorph sind:

- a) Anzahl von Ecken, Anzahl von Kanten, Anzahl von Schlingen, Anzahl paralleler Kanten
- b) Anzahl von Ecken, Anzahl von Kanten, Anzahl von Schlingen, Anzahl paralleler Kanten, Liste der Eckengrade bis auf Reihenfolge

2 Unterrichtseinheit 2: Einfache und Hamiltonsche Graphen

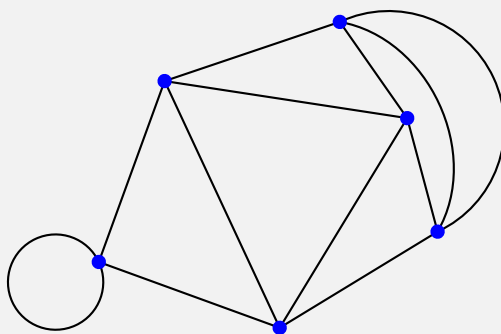
2.1 Inhalt

- Einfache Graphen, vollständige Vielecke
- Hamiltonscher Kreis (im Unterschied zu eulerscher Tour), Hamiltonscher Graph (*Kreis* wird erst in der nächsten Einheit definiert)
- Teilgraphen und Ecke löschen, Satz über Eckenlöschen als Negativkriterium

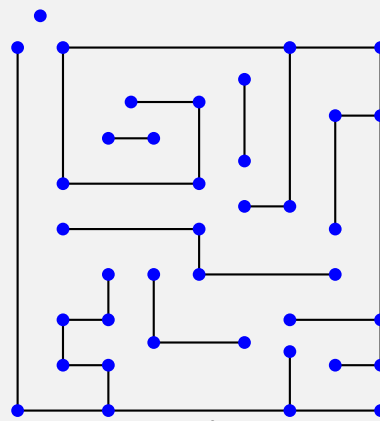
2.2 Wiederholung

Aufgabe 2.1 (Arbeitsblatt 2.1 (Eigenschaften von Graphen), Aufgabe 1)

Welche Eigenschaften haben die beiden Graphen? Trage in die Tabelle „j“ für ja, „n“ für nein ein.



Graph 1



Graph 2

Datei: Graphen20-Wiederholung

Lösung:

	Graph 1	Graph 2
enthält parallele Kanten	J	N
enthält mindestens eine Schlinge	J	N
hat mindestens eine isolierte Ecke	N	J
ist zusammenhängend	J	N
hat lauter Ecken mit dem selben Grad	J	N
enthält eine Eulersche Tour	J	N

Anmerkung

Diese Aufgabe eignet sich gut als Tandem-Aufgabe: Es werden zwei Versionen erstellt, in denen jeweils die Hälfte der Antworten eingetragen und die andere Hälfte frei ist. Und zwar komplementär. Je zwei Schüler:innen tun sich zusammen, erhalten jede(r) eine andere Version und fragen sich gegenseitig ab, ob sie die richtigen Antworten wissen. Die Schüler:innen sollen dann darüber sprechen, warum die jeweilige Antwort richtig ist.

Auch Aufgabe 2.5 eignet sich für diese Methode.

2.3 Einfache Graphen

Tafelanschrieb

4. Einfache Graphen

Definition: 1) Ein Graph heißt einfach, wenn er keine Schlingen und keine parallelen Kanten besitzt.

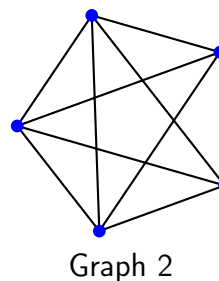
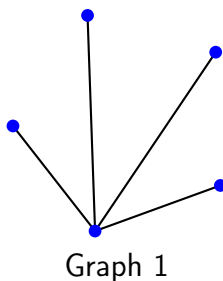
Aufgabe 2.2 (Arbeitsblatt 2.2 (Einfache Graphen), Aufgabe 2)

- a) Ergänze den Graphen 1, so dass er einfach ist und genau vier Kanten besitzt (Lösung ist nicht eindeutig).
- b) Ergänze den Graphen 2, so dass er einfach ist und möglichst viele Kanten besitzt.



Datei: Graphen21-einfache-Graphen

Lösung:



Mündlich: Graph 2 heißt vollständiges Vieleck, denn wenn man eine Kante ergänzt, ist der Graph nicht mehr einfach.

Tafelanschrieb

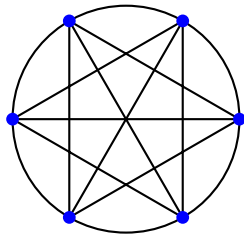
2) Ein Graph heißt vollständiges Vieleck, wenn er einfach ist und jede Ecke mit jeder anderen durch eine Kante verbunden ist.

Aufgabe 2.3 (Arbeitsblatt 2.3 (Vollständige Vielecke), Aufgabe 3)

- a) Zeichne ein vollständiges 6-Eck, also einen vollständigen Graphen mit 6 Ecken. Wie viele Kanten besitzt es?
- b) Wie viele Kanten besitzt ein vollständiges 10-Eck?

Datei: Graphen22-vollstaendige-Vielecke

Lösung: a)



15 Kanten

b) $9 + 8 + 7 + \dots + 1 = 45$ Kanten**Aufgabe 2.4** (Arbeitsblatt 2.3 (Vollständige Vielecke), Zusatzaufgabe 1)Welche vollständigen n -Ecke sind eulersch?

Datei: Graphen280-Vollstaendig-eulersch

Lösung: Beim vollständigen n -Eck ist der Eckengrad jeder Ecke $\text{Grad}(E) = n - 1$. Außerdem ist jedes vollständige n -Eck zusammenhängend. Nach dem Satz von Euler gilt also:

- Ist $n \geq 2$ ungerade, dann ist das vollständige n -Eck ein eulerscher Graph,
- Ist $n \geq 2$ gerade, dann ist das vollständige n -Eck nicht eulersch.

Tafelanschrieb

Satz: Ein vollständiges Vieleck mit n Ecken besitzt $\frac{1}{2}n(n-1)$ Kanten.

Beweis: Jede Ecke ist mit jeder der anderen $n - 1$ Ecken durch eine Kante verbunden.

$\Rightarrow \text{Grad}(E) = n - 1$ für jede Ecke E im Graphen

\Rightarrow Summe der Eckengrade ist $n \cdot (n - 1)$

Hierbei wird jede Kante zwei Mal gezählt

\Rightarrow der Graph besitzt $\frac{1}{2}n(n-1)$ Kanten. \square

Mündlich: Ein vollständiges n -Eck heißt *vollständig*, weil ein einfacher Graph mit n Ecken nicht mehr Kanten besitzen kann. Daher liefert uns der letzte Satz eine Aussage über die Maximalzahl an Kanten, die ein einfacher Graph besitzen kann. Dies schreiben wir nun auf.

Tafelanschrieb

Folgerung: Ein einfacher Graph mit n Ecken besitzt höchstens $\frac{1}{2}n(n-1)$ Kanten.

2.4 Hamiltonsche Graphen

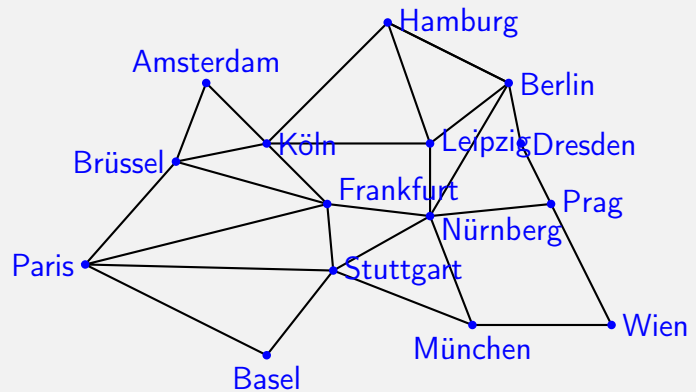
Anmerkung

Der Unterschied zwischen *eulerschen* und *hamiltonschen* Graphen ist zwar klar, aber trotzdem schwierig zu merken. Daher gibt es immer wieder Aufgaben, die den Unterschied thematisieren.

Die erste Aufgabe kam bei den Schüler:innen sehr gut an, so dass sogar noch nach Ende der Veranstaltung darüber diskutiert wurde.

Aufgabe 2.5 (Arbeitsblatt 2.4 (Rundreisen), Aufgabe 4)

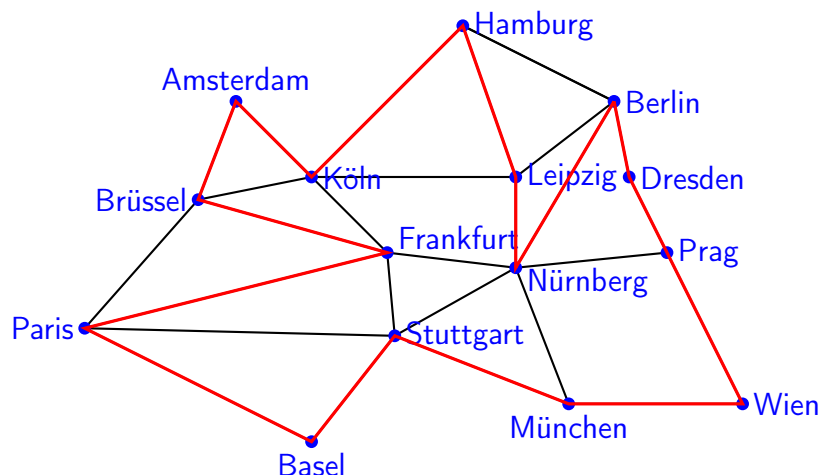
Eine Freundesgruppe möchte eine Rundreise durch die in der Karte eingezeichneten Städte machen. Dabei wollen sie durch jede Stadt nur ein Mal reisen. Sie können nur die eingezeichneten Verbindungen benutzen.



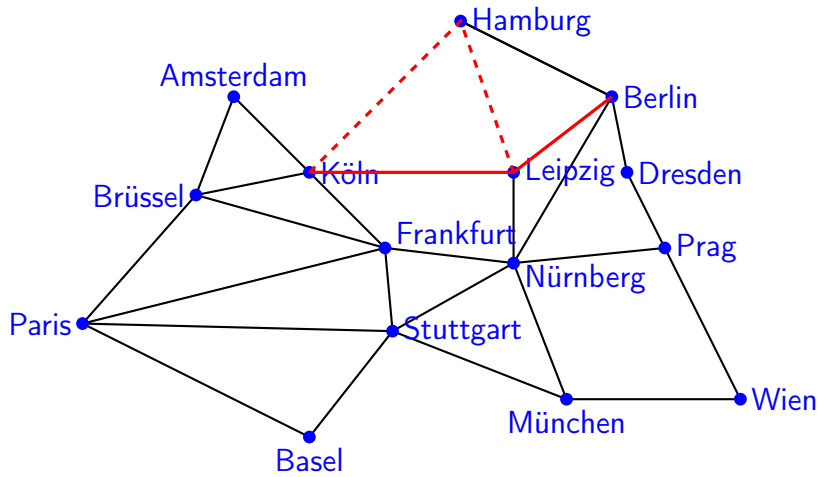
- Gib es eine Rundreise, die in Berlin startet und anschließend durch Nürnberg und dann durch Leipzig geht?
- Gibt es eine Rundreise, die in Berlin startet und anschließend durch Leipzig und dann durch Köln geht?
- Gibt es eine Rundreise, die in Stuttgart losgeht, dann nach Basel, nach Paris und anschließend nach Brüssel?
- Gibt es eine Rundreise, die in Berlin startet und anschließend nach Nürnberg und dann nach München geht?

Datei: Graphen25-Rundreise

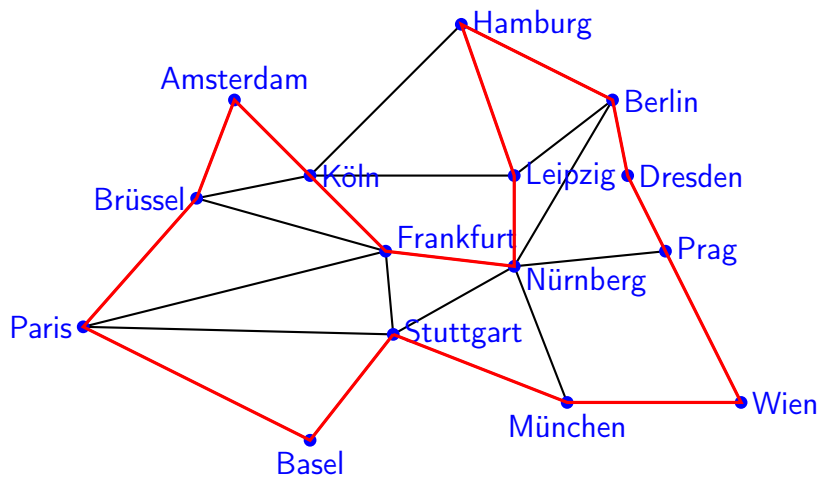
Lösung: a) Ja:



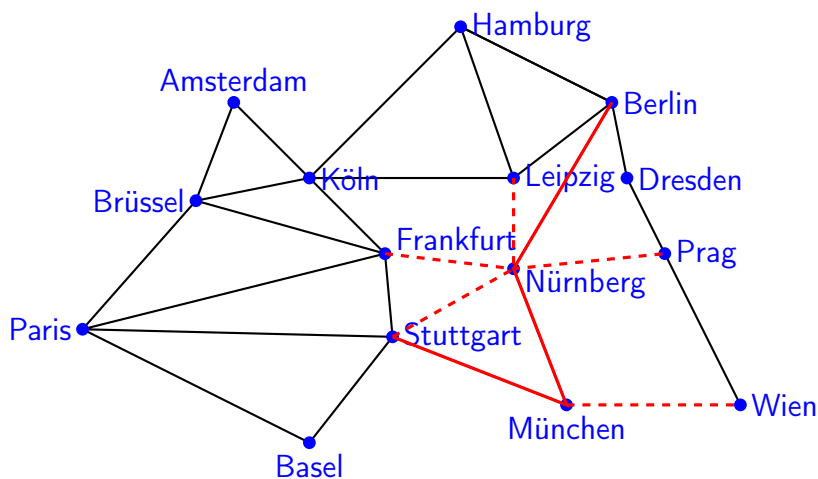
- Nein. Man kann nicht von Köln nach Hamburg fahren, denn dann bleibt nur noch der Rückweg nach Berlin übrig. Fährt man von Köln zu einer anderen Stadt, so können die Verbindungen Köln-Hamburg und Leipzig-Hamburg nicht mehr verwendet werden, so dass Hamburg nicht mehr in der Rundreise vorkommen kann.



c) Ja:

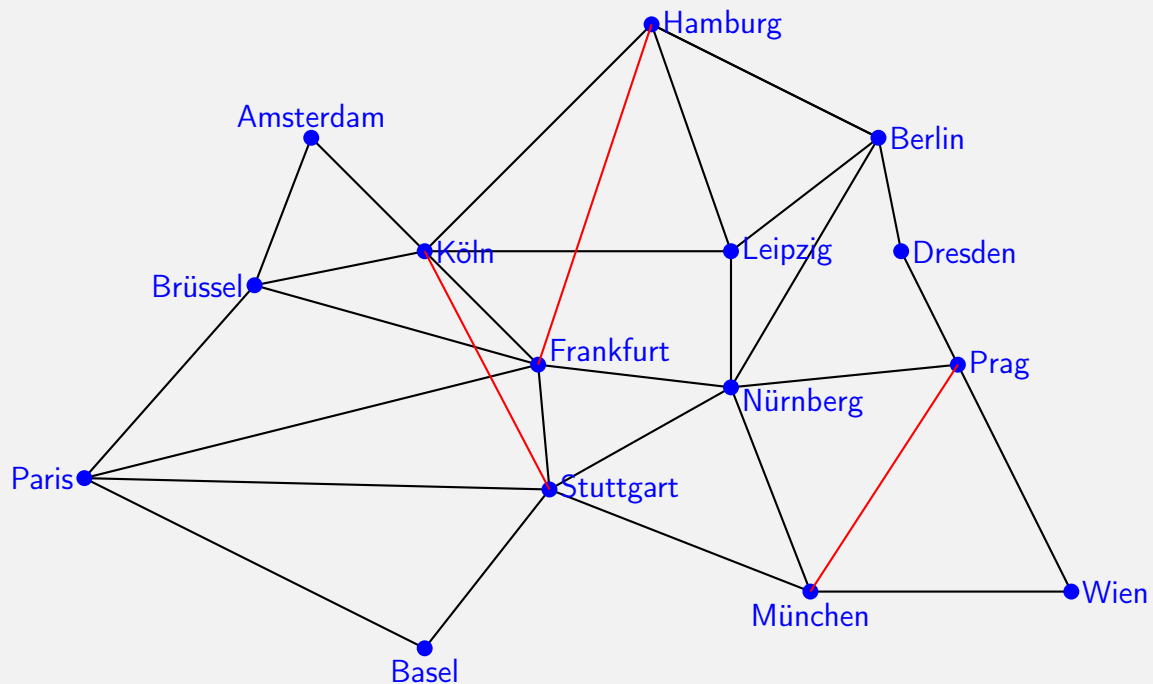


d) Nein. Von München aus kann man entweder nach Wien fahren. Dann kann die Reise nur noch durch Prag und Dresden nach Berlin zurück gehen. Oder man fährt von München nach Stuttgart. Dann kommt man nicht mehr nach Wien, siehe Bild.



Aufgabe 2.6 (Arbeitsblatt 2.4 (Rundreisen), Zusatzaufgabe 2)

Wie viele Kanten muss man im unten stehenden Graphen mindestens ergänzen, damit der Graph eulersch wird? Zeichne diese Kanten ein.



Datei: Graphen281-EulerschErgaenzen

Lösung: Man muss mindestens drei Kanten ergänzen, siehe rot ergänzte Kanten. Dann haben alle Knoten einen geraden Eckengrad. Und der Graph ist zusammenhängend. Also ist er eulersch.

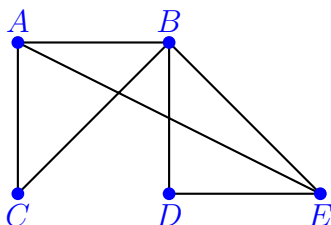
Mündlich: Im folgenden Kapitel geht es um Rundreisen in Graphen.

Tafelanschrieb5. Hamiltonsche Graphen

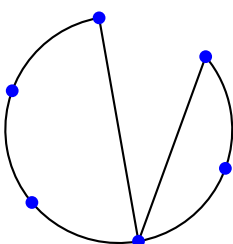
Definition: Ein geschlossener Kantenzug, der jede Ecke des Graphen genau ein Mal durchläuft und keine Kante zwei Mal benützt, heißt Hamiltonscher Kreis

Ein Graph, der einen Hamiltonschen Kreis enthält, heißt Hamiltonscher Graph.

Beispiele:



Graph 1:
Hamiltonscher Kreis:
 $A - C - B - D - E - A$
 \Rightarrow hamiltonsch



Graph 2: nicht hamiltonsch

Anmerkung

Die Bedingung, dass keine Kante zwei Mal benützt werden darf, schließt den Fall $E_1 - E_2 - E_1$ mit Benützung von nur einer Kante aus.

Mündlich: Graph 1: Zum Nachweis, dass ein Graph hamiltonsch ist, reicht die Angabe eines hamiltonschen Kreises. Man gibt den hamiltonschen Kreis immer mit Anfangs- und Endpunkt an, damit man sieht, dass der Kantenzug geschlossen ist.

Graph 2: Angenommen, es gäbe einen hamiltonschen Kreis in Graph 2. Dann käme dieser irgendwann durch die untere Ecke, z.B. von links, und ginge nach rechts weg. Um wieder in den linken Teil des Graphen zu kommen, müsste der hamiltonsche Kreis nochmal durch die untere Ecke gehen, was nicht erlaubt ist.

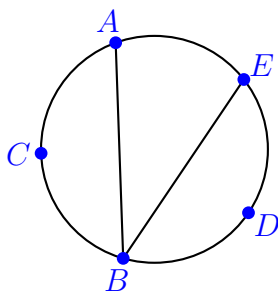
Mündlich: Beim hamiltonschen Kreis kommt es auf die Ecken an. Es müssen nicht alle Kanten benützt werden wie bei einer eulerschen Tour.

Mündlich: Was sind isomorphe Graphen? Ist ein Graph isomorph zu einem zweiten Graphen, so kann man ihn durch Verbiegen so umformen, dass der zweite Graph entsteht.

Tafelanschrieb

Satz: Jeder hamiltonsche Graph ist isomorph zu einem Graphen, dessen Ecken auf einem Kreis liegen, und der die Kreislinie als Kantenzug enthält.

Beispiel:



Graph 3: isomorph zu Graph 1

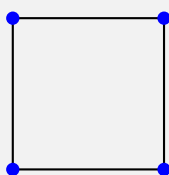
Vorgehen: Erklären, dass man den gefundenen Hamiltonschen Kreis benützt und die Ecken in der dadurch gegebenen Reihenfolge auf einem Kreis anordnet. Nachdem dies durchgeführt wurde, die zusätzlichen Kanten des Graphen ergänzen.

Anmerkung

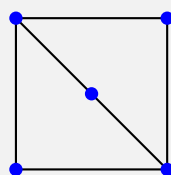
Ein hamiltonscher Graph mit n Ecken besitzt also mindestens n Kanten, auch im Fall $n = 2$ (vgl. vorige Anmerkung).

Aufgabe 2.7 (Arbeitsblatt 2.5 (Hamiltonsche Graphen), Aufgabe 5)

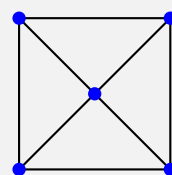
Untersuche, welcher der folgenden Graphen eulersch oder hamiltonsch ist. Trage in die Tabelle „j“ für ja, „n“ für nein ein.



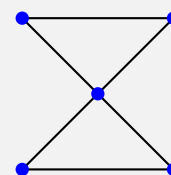
Graph 1



Graph 2



Graph 3



Graph 4

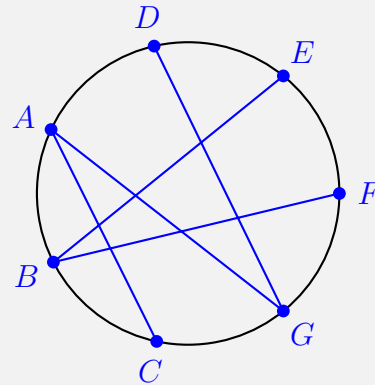
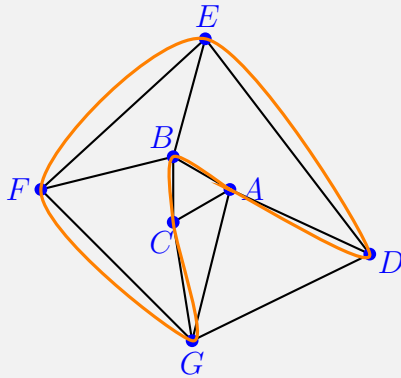
Datei: Graphen23-hamiltonsch-und-eulersch

Lösung:

	Graph 1	Graph 2	Graph 3	Graph 4
ist eulersch	J	N	N	J
ist hamiltonsch	J	N	J	N

Aufgabe 2.8 (Arbeitsblatt 2.5 (Hamiltonsche Graphen), Aufgabe 6)

Gegeben sind die folgenden zwei Graphen.



- a) Finde im linken Graphen einen hamiltonschen Kreis.

Hamiltonscher Kreis:

$A - B - C - G - F - E - D - A$

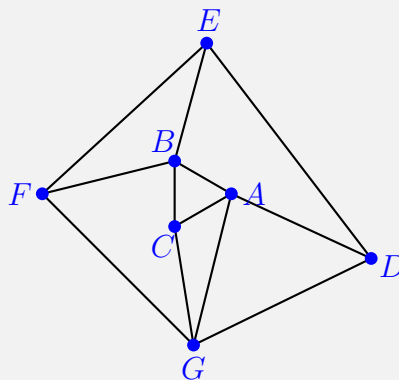
- b) Zeichne im rechten Graphen geeignete Bezeichnungen für die Ecken und weitere Kanten ein, so dass der fertige Graph isomorph zum linken Graphen ist.

Datei: Graphen24-hamilton-Kreisgraph

Lösung: Ist bereits im Aufgabentext enthalten.

Aufgabe 2.9 (Arbeitsblatt 2.5 (Hamiltonsche Graphen), Zusatzaufgabe 3)

Gegeben ist nochmals der Graph aus der letzten Aufgabe.



Gib möglichst viele verschiedene hamiltonsche Kreise des Graphen an. Hierbei bedeutet *verschieden*, dass die Reihenfolge unterschiedlich ist und nicht nur der Anfangspunkt im Kreis verschoben wurde.

Datei: Graphen282-AlleHamiltonschenKreise

Lösung: Da jeder hamiltonsche Kreis durch A geht, reicht es, nur hamiltonsche Kreise anzugeben, die in A starten und enden.

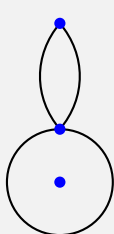
Alle möglichen verschiedenen hamiltonschen Kreise sind:

eine Richtung	umgekehrt
$A - B - C - G - F - E - D - A$	$A - D - E - F - G - C - B - A$
$A - B - F - E - D - G - C - A$	$A - C - G - D - E - F - B - A$
$A - C - B - E - F - G - D - A$	$A - D - G - F - E - B - C - A$
$A - C - B - F - E - D - G - A$	$A - G - D - E - F - B - C - A$
$A - C - G - F - B - E - D - A$	$A - D - E - B - F - G - C - A$
$A - D - E - F - B - C - G - A$	$A - G - C - B - F - E - D - A$

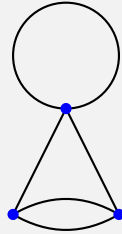
2.5 Schriftliche Aufgaben (ohne Lösungen)

Aufgabe 2.10 (Arbeitsblatt 2.6 (Schriftliche Aufgaben), Aufgabe 7)

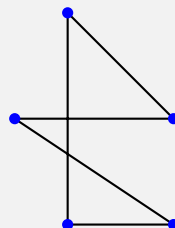
Welche Eigenschaften haben die Graphen? Trage in die Tabelle „j“ für ja, „n“ für nein ein.



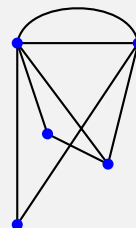
Graph 1



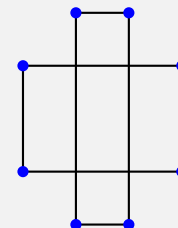
Graph 2



Graph 3



Graph 4



Graph 5

	Graph 1	Graph 2	Graph 3	Graph 4	Graph 5
ist zusammenhängend					
ist eulersch					
ist hamiltonsch					
ist einfach					

Datei: Graphen291-Grapheigenschaften

Weiter auf nächster Seite

Aufgabe 2.11 (Arbeitsblatt 2.6 (Schriftliche Aufgaben), Aufgabe 8)

Bei Antons Geburtstagsfeier soll die Sitzordnung von der Gestalt sein, dass eine Person immer zwischen zwei Personen sitzt, die sie bereits kennt. Anton lädt insgesamt sechs Personen aus verschiedenen Freundesgruppen ein.

In folgenden Gruppen kennt jeder jeden:

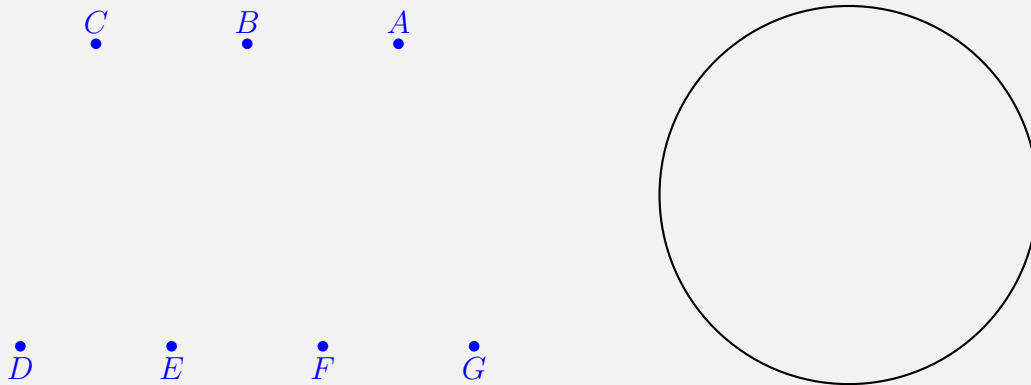
(Anton, Charlie, Emil, Florian);

(Anton, Charlie, Daniela, Gabriel);

(Anton, Beate, Gabriel);

(Anton, Daniela, Emil).

Übersetze die Problemstellung zeichnerisch in einen Graphen. Die Ecken stellen die Freunde mit gleichnamigem Anfangsbuchstaben dar.



- a) Verbinde zuerst im linken Graphen alle befreundeten Ecken mit einer Kante.
 b) Gib einen hamiltonschen Kreis im linken Graphen an.

Hamiltonscher Kreis: —

- c) Zeichne die Ecken A, B, C, D, E, F, G gemäß der Reihenfolge im hamiltonschen Kreis auf dem rechts gezeichneten Kreis ein. Ergänze weitere Kanten, bis der rechte Graph isomorph zum links gezeichneten Graphen ist.
 d) Gib die Reihenfolge an, in der Anton seine Freunde um den Tisch setzen kann.

Sitzreihenfolge:

—

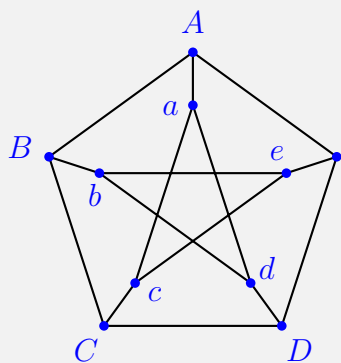
Datei: Graphen293-Geburtstag-hamiltonsch

Aufgabe 2.12 (Arbeitsblatt 2.6 (Schriftliche Aufgaben), Aufgabe 9)

- a) Der in den beiden Teilaufgaben gezeichnete *Petersen-Graph* ist nicht hamiltonsch. Was bedeutet dies?

Antwort:

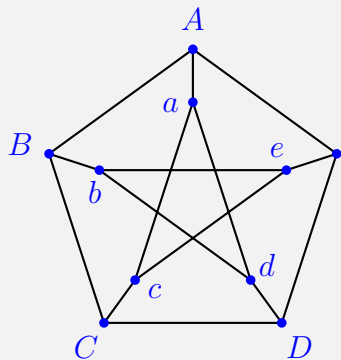
- b) Ergänze im Graphen eine Kante, so dass der Kantenzug $A - B - C - D - E$ zu einem Hamiltonkreis ergänzt werden kann. Zeichne die Kante farbig ein und gib den Hamiltonkreis an.



Ergänzte Kante:

Hamilton-Kreis:

- c) Ergänze im Graphen eine Kante, so dass der Kantenzug $a - c - e - b - d$ zu einem Hamiltonkreis ergänzt werden kann. Zeichne die Kante farbig ein und gib den Hamiltonkreis an.



Ergänzte Kante:

Hamilton-Kreis:

Datei: Graphen294-PetersenGraph

Weiter auf nächster Seite

2.6 Weitere Aufgaben

Aufgabe 2.13 (*Arbeitsblatt 2.7 (Weitere Aufgaben), Zusatzaufgabe 4*)

Kreuze die wahren Aussagen an.

Datei: Graphen292-Eigenschaften-hamilton-Graphen

Lösung:

- Ein hamiltonscher Graph ist immer zusammenhängend.
- In einem hamiltonschen Graphen ist es in jeder Ecke möglich, einen hamiltonschen Kreis zu starten.
- Jeder einfache Graph ist auch ein hamiltonscher Graph.
- In einem hamiltonschen Kreis darf eine Kante auch mehrmals verwendet werden.
- Jedes vollständige n -Eck ist auch hamiltonsch.
- Ein hamiltonscher Kreis kann in der Form eines Kreises gezeichnet werden.

3 Unterrichtseinheit 3: Hamiltonsche Graphen, Kreise und Bäume

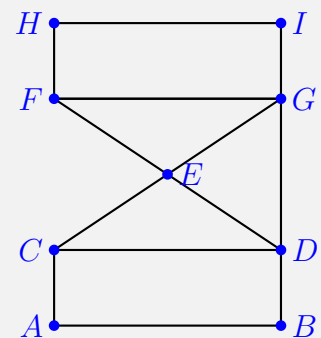
3.1 Inhalt

- Eigenschaften hamiltonscher Graphen.
- Weg, Kreis, Baum.

3.2 Wiederholung

Aufgabe 3.1 (Arbeitsblatt 3.1 (Kantenzüge), Aufgabe 1)

Gegeben ist der nebenstehende einfache Graph.



- a) Gib einen Kantenzug an, der A und F verbindet.

Antwort: $A - C - E - F$

- b) Warum ist der Graph hamiltonsch?

Antwort: Er enthält einen hamiltonschen Kreis:
 $A - B - D - G - I - H - F - E - C - A$

- c) Gib einen geschlossenen Kantenzug an, der durch alle Ecken des Graphen verläuft, keine Kante zwei Mal benützt und trotzdem kein hamiltonscher Kreis ist.

Antwort: Z.B. $A - B - D - E - G - I - H - F - E - C - A$

Datei: Graphen31-Kantenzuege

Lösung: Ist bereits im Aufgabentext enthalten.

Anmerkung

An Stelle dieser Aufgabe kann zum Einstieg die Aufgabe mit der Sitzordnung aus den letzten schriftlichen Aufgaben verwendet werden.

3.3 Kriterien für hamiltonsche Graphen

Mündlich: Es ist nicht immer einfach, einen hamiltonschen Kreis zu finden. Aber der folgende Satz besagt, dass ein Graph hamiltonsch ist, wenn er genügend viele Kanten besitzt.

Tafelanschrieb

Satz von Dirac: Ein Graph mit $n \geq 3$ Ecken, der einfach und zusammenhängend ist und bei dem $\text{Grad}(E) \geq \frac{n}{2}$ für jede Ecke E gilt, ist hamiltonsch.

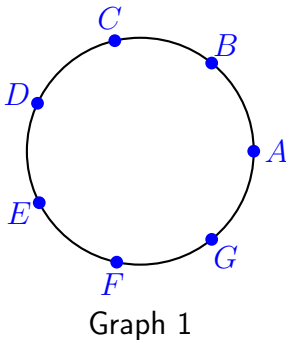
Ohne Beweis.

Mündlich: Auf den Beweis verzichten wir. Wir benötigen diesen Satz im Weiteren nicht.

Dieser Satz gibt eine hinreichende Bedingung: Wenn $n \geq 3$, der Graph zusammenhängend und die Eckengrade genügend groß sind, dann ist der Graph hamiltonsch. Die Bedingung ist nicht notwendig, denn es gibt Graphen, die diese Bedingung nicht erfüllen und trotzdem hamiltonsch sind.

Tafelanschrieb

Beispiel: Hamiltonscher Graph mit 7 Ecken und möglichst wenig Kanten



Mündlich: Wir sehen: Jeder Eckengrad ist 2, und das ist kleiner als $\frac{7}{2}$. Der Graph ist zusammenhängend.

Tafelanschrieb

Satz: 1) Ein hamiltonscher Graph ist zusammenhängend.

2) Für jede Ecke E in einem hamiltonschen Graphen gilt $\text{Grad}(E) \geq 2$.

Beweis: 1) Seien E, E' zwei beliebige Ecken des Graphen. Da sie auf einem hamiltonschen Kreis liegen, gibt es einen Kantenzug, der die beiden Ecken verbindet.

2) E liegt auf einem hamiltonschen Kreis, also folgt $\text{Grad}(E) \geq 2$. \square

Vorgehen: Man kann auf den Beweis verzichten und den Satz am letzten Graphen erläutern.

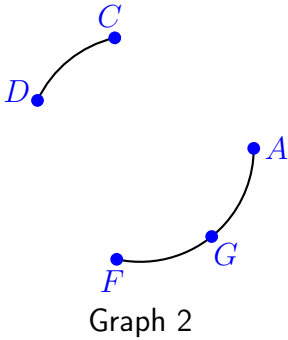
Mündlich: Umgekehrt bedeutet dieser Satz: Ist ein Graph nicht zusammenhängend, so ist er nicht hamiltonsch. Oder gibt es eine Ecke E mit $\text{Grad}(E) \leq 1$, so ist der Graph nicht hamiltonsch. Die Bedingungen *der Graph ist zusammenhängend* und $\text{Grad}(E) \geq 2$ für *jede Ecke E* sind notwendige Bedingungen dafür, dass ein Graph hamiltonsch ist.

Mündlich: Diese beiden Eigenschaften im letzten Satz sind nicht sehr kraftvoll. Um bessere Kriterien dafür zu formulieren, dass ein Graph nicht hamiltonsch ist, müssen wir den Begriff *Löschen von Ecken* definieren.

Tafelanschrieb

Definition: 1) Sei E eine Ecke in einem Graphen. E wird aus dem Graphen gelöscht, indem man E und alle Kanten, die E mit sich oder anderen Ecken verbinden, aus dem Graphen entfernt.
 2) Ein Graph H heißt Teilgraph eines Graphen G , wenn alle Ecken und Kanten von H auch Ecken und Kanten von G sind.

Beispiel: Lösche aus Graph 1 die Ecken B und E .



Graph 2 ist ein Teilgraph von Graph 1. Graph 2 besteht aus zwei Teilgraphen, die jeder für sich zusammenhängend sind.

Mündlich: Weil dieses Zerfallen in Teilgraphen wichtig ist, gibt es dafür einen Fachbegriff. Man spricht von *Komponenten* des Graphen. Diesen Begriff definieren wir nun.

Tafelanschrieb

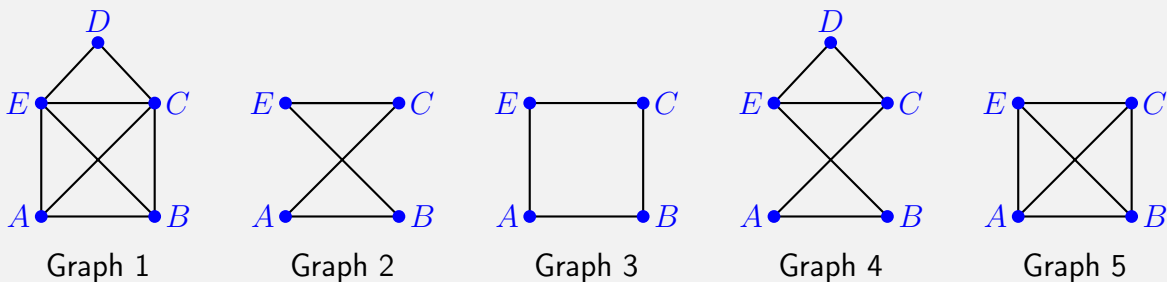
Definition: Die maximal großen zusammenhängenden Teilgraphen eines Graphen heißen die Komponenten des Graphen. Ist ein Graph zusammenhängend, so besteht er aus einer Komponente.

Mündlich: Am Graph 2 und dann auch am Graph 1 erklären, welches die Komponenten sind.

Vorgehen: Die Komponenten verschiedenfarbig markieren, mit *Komponente K_1* bzw. *Komponente K_2* bezeichnen.

Aufgabe 3.2 (Arbeitsblatt 3.2 (Teilgraphen und Komponenten), Aufgabe 2)

Welcher der Graphen ist Teilgraph von einem oder von mehreren der skizzierten Graphen? Trage Deine Antworten in die Tabelle ein. Überlege Dir, ob ein Graph Teilgraph von sich selber sein kann (eventuell Definition nachsehen).



Datei: Graphen34-Teilgraph

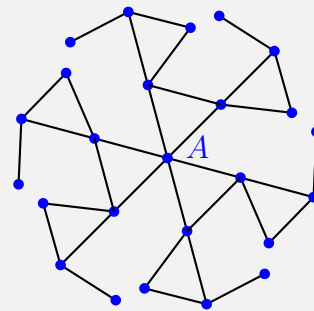
Lösung:

Graph 1 ist Teilgraph des Graphen	1
Graph 2 ist Teilgraph des Graphen	1, 2, 4, 5
Graph 3 ist Teilgraph des Graphen	1, 3, 5
Graph 4 ist Teilgraph des Graphen	1, 4
Graph 5 ist Teilgraph des Graphen	1, 5

Aufgabe 3.3 (Arbeitsblatt 3.2 (Teilgraphen und Komponenten), Aufgabe 3)

In wie viele Komponenten zerfällt nebenstehender Graph, wenn die Ecke A gelöscht wird?

Antwort: In Komponenten



Datei: Graphen30-Komponenten

Lösung: Ist bereits im Aufgabentext enthalten.

Mündlich: Wir sehen oben, dass der hamiltonsche Graph 1 nach dem Löschen zweier Ecken in zwei Komponenten zerfällt. Wir verallgemeinern diese Beobachtung im folgenden Satz.

Tafelanschrieb

Satz: In einem hamiltonschen Graphen mit n Ecken gelten:

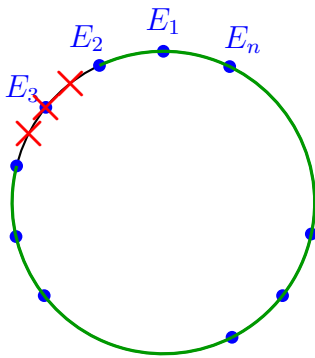
- 1) Löscht man eine Ecke, so ist der entstehende Teilgraph zusammenhängend.
- 2) Löscht man zwei Ecken, so zerfällt der entstehende Teilgraph in höchstens zwei Komponenten.
- 3) Löscht man m Ecken ($m < n$), so zerfällt der entstehende Teilgraph in höchstens m Komponenten.

Zum Beweis siehe Arbeitsblatt 3.

Weiter auf nächster Seite

Vorgefertigte Kreise auf Arbeitsblatt 3 (Graphiken zu Beweisen)

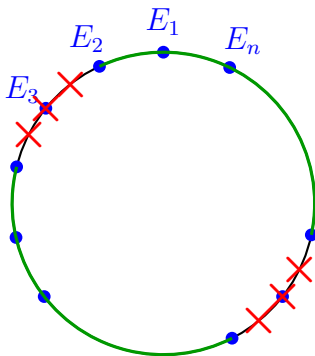
Beweisidee für den Satz über Eckenlöcher in hamiltonschen Graphen:



Löschen **einer** Ecke:

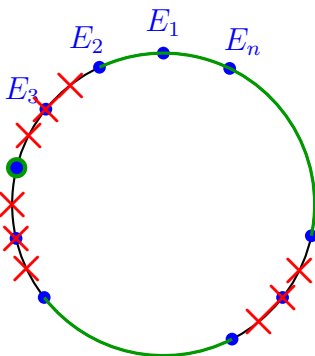
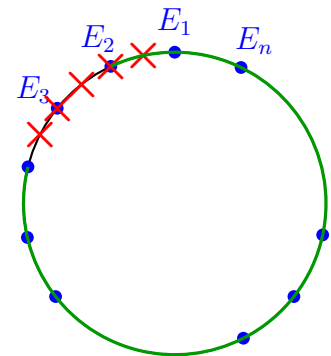
Der entstehende Graph

ist **zusammenhängend**



Löschen von **zwei** Ecken:

Der entstehende Graph
zerfällt in **zwei Komponenten**
oder **bleibt zusammenhängend**



Löschen von **drei** Ecken:

Der entstehende Graph
zerfällt in **drei Komponenten**
oder **zerfällt in zwei Komponenten**
oder **bleibt zusammenhängend**

Vorgehen: L zeichnet und schreibt am Visualizer, Schüler:innen schreiben auf dem Arbeitsblatt mit.

L löscht die erste Ecke, markiert die Komponente farbig und erklärt, dass Graph immer noch zusammenhängend. Löscht zweite Ecke, markiert die Komponenten und erklärt, dass der so entstandene Teilgraph je nach Lage der neu gelöschten Ecke zusammenhängend bleibt oder in zwei Komponenten zerfällt. Löscht dritte Ecke und erklärt nochmal. Die dritte Komponente besteht nur aus einer Ecke.

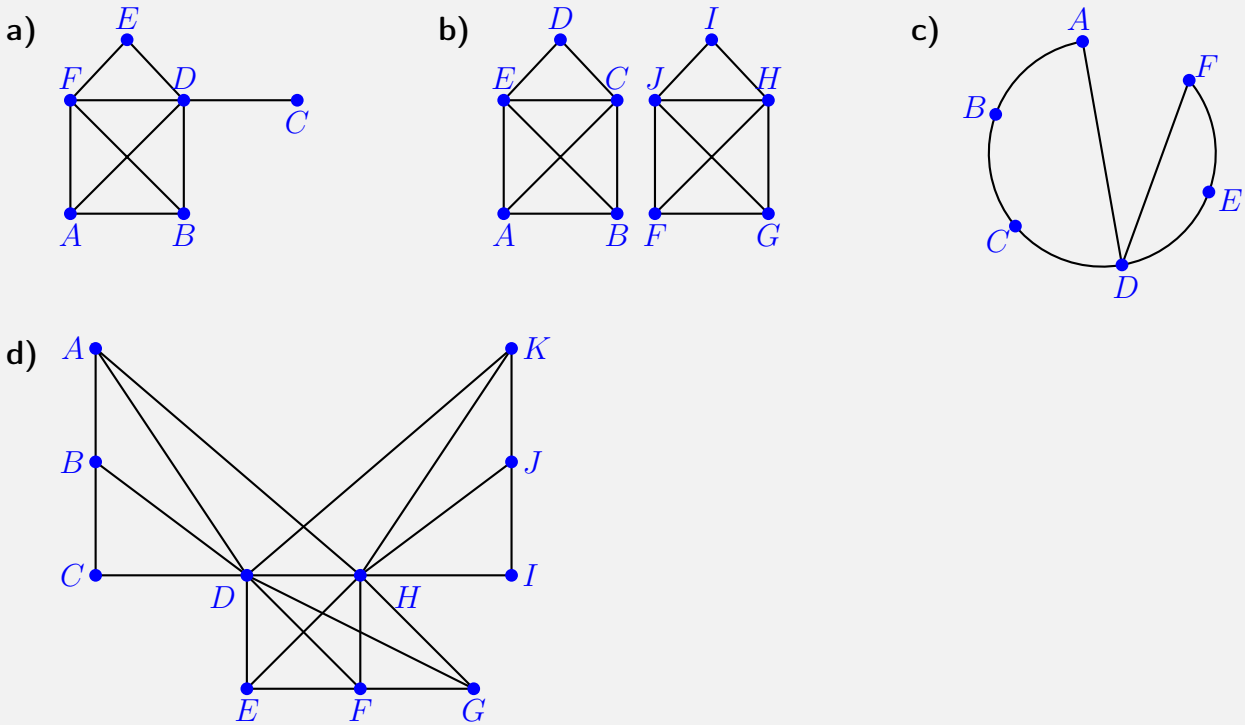
Mündlich: Wir sehen, dass beim Löschen einer Ecke höchstens eine Komponente in zwei Komponenten aufgeteilt werden kann. Beim Löschen einer Ecke erhöht sich also die Anzahl der Komponenten höchstens um 1. Damit folgt die Aussage des Satzes (eigentlich per vollständiger Induktion).

Ein hamiltonscher Graph kann mehr Kanten besitzen. Dann zerfällt er beim Löschen von Ecken eventuell in weniger Komponenten.

Umgekehrt bedeutet dieser Satz z.B.: Zerfällt ein Graph nach dem Löschen von 2 Ecken in drei Komponenten, dann ist er nicht hamiltonsch.

Aufgabe 3.4 (Arbeitsblatt 3.4 (Nicht hamiltonsche Graphen), Aufgabe 4)

Gib für jeden der Graphen unter Verwendung eines der letzten beiden Sätze eine Begründung dafür an, dass er nicht hamiltonsch ist.

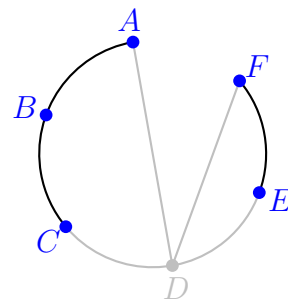


Datei: Graphen387-Nicht-hamiltonsch

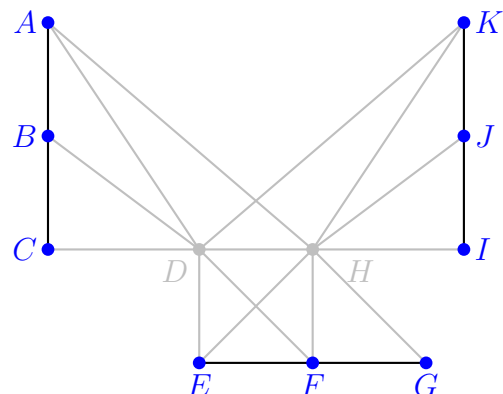
Lösung: a) $\text{Grad}(C) = 1 \Rightarrow$ der Graph ist nicht hamiltonsch.

b) Der Graph ist nicht zusammenhängend \Rightarrow der Graph ist nicht hamiltonsch.

c) Durch Löschen von D zerfällt der Graph in zwei Komponenten, er ist dann nicht mehr zusammenhängend.
 \Rightarrow der Graph ist nicht hamiltonsch.



d) Durch Löschen von **zwei** Ecken D und H zerfällt der Graph in **drei** Komponenten.
 \Rightarrow der Graph ist nicht hamiltonsch.



Mündlich: Wir sehen besonders bei c), dass die Begründung viel einfacher geworden ist.

3.4 Wege und Kreise

Tafelanschrieb

6. Wege und Kreise

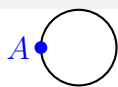
Definition: Ein Kantenzug heißt Weg, wenn er jede Ecke des Graphen höchstens ein Mal durchläuft und jede Kante höchstens ein Mal benützt. Anfangs- und End-Ecke dürfen übereinstimmen (diese Ecke wird auch nur ein Mal durchlaufen).

Definition: Ein Kreis ist ein Weg, der geschlossen ist.

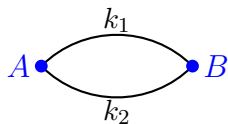
Mündlich: Was bedeutet geschlossen? - Anfangsecke = Edecke.

Tafelanschrieb

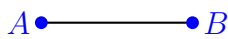
Beispiele:



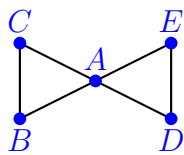
$A - A$: kleinst möglicher Kreis



$A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} A$: Kreis mit zwei Ecken



$A - B - A$: Kein Weg, kein Kreis

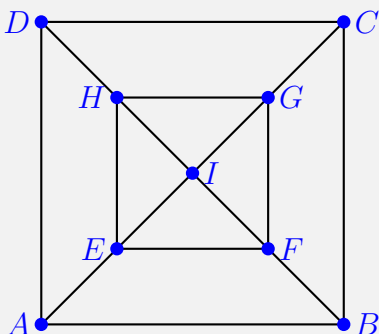


$A - B - C - A - D - E - A$: kein Weg und kein Kreis

Mündlich: Jeder hamiltonsche Kreis ist ein Kreis, aber nicht jeder Kreis ist ein hamiltonscher Kreis. Warum?

Aufgabe 3.5 (Arbeitsblatt 3.5 (Wege und Kreise), Aufgabe 5)

Gib im folgenden Graphen einen hamiltonschen Kreis und drei verschiedene nicht hamiltonsche Kreise an.



Hamiltonscher Kreis:

$A - B - C - D - H - J - G - F - E - A$

Nicht hamiltonsche Kreise:

$A - B - C - D - A$

$I - F - G - I$

$F - G - H - E - F$

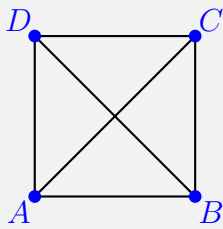
Datei: Graphen36-Kreise

Lösung: Ist bereits im Aufgabentext enthalten.

Aufgabe 3.6 (Arbeitsblatt 3.5 (Wege und Kreise), Aufgabe 6)

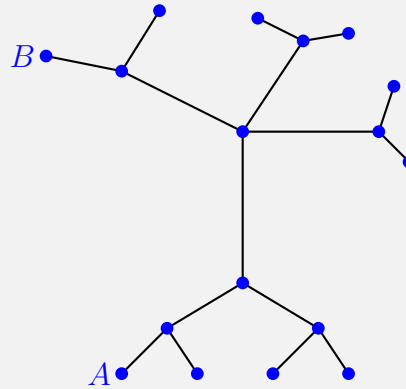
Wie viele verschiedene Wege gibt es jeweils, die A und B verbinden?

a)



Antwort: Es gibt Weg(e)

b)



Antwort: Es gibt Weg(e)

Datei: Graphen35-Wege-im-Fuenfeck

Lösung: Ist bereits im Aufgabentext enthalten.

Mündlich: Der Graph in Aufgabe 6b sieht ein bisschen aus wie ein Baum. Er hat Wurzeln, einen Stamm, Äste und Zweige. Wir werden gleich definieren, wann ein Graph ein Baum ist.

3.5 Bäume

Tafelanschrieb

7. Bäume

Definition: Ein Graph, der zusammenhängend ist und keinen Kreis enthält, heißt Baum

Folgerung: Ein Baum enthält keine Schlingen und keine parallelen Kanten.

Mündlich: Warum ergibt sich die Folgerung direkt aus dem Beweis?

Schlingen sind Kreise, parallele Kanten ergeben einen Kreis.

Tafelanschrieb

Satz: In einem Baum gibt es von jeder Ecke zu jeder anderen Ecke genau einen Weg.

Anmerkung

Beim Beweis wichtig sind die zwei folgenden Dinge. Der Beweis besteht aus zwei Teilen, und im zweiten Teil wird ein Widerspruchsbeweis geführt. Das Prinzip des Widerspruchsbeweises sollte klar herausgearbeitet werden. Dazu wird der formale Text möglichst reduziert.

Vorgehen: L. veranschaulicht die Vorgehensweise im Beweis parallel zum Aufschreiben des Beweises am Visualizer. Schüler:innen haben den Beispielgraphen auf dem Arbeitsblatt 3.3.

Tafelanschrieb

Beweis: Betrachte einen Baum.

1) Da der Baum zusammenhängend ist, gibt es von jeder Ecke zu jeder anderen mindestens einen Weg.

2) Nun beweisen wir, dass es von jeder Ecke zu jeder anderen höchstens einen Weg gibt. Dazu führen wir einen Widerspruchsbeweis.

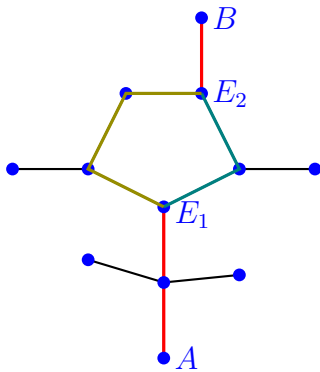
Mündlich: L erklärt das Prinzip des Widerspruchsbeweises. Wir nehmen an, dass die Behauptung von jeder Ecke zu jeder anderen gibt es höchstens einen Weg falsch ist. Dann beweisen wir, dass diese Annahme falsch ist. Also ist die Behauptung richtig.

Tafelanschrieb

Annahme: Es gibt im Baum zwei Ecken A und B , so dass mindestens zwei verschiedene Wege von A nach B existieren.

Vorgefertigter Graph auf Arbeitsblatt 3 (Graphiken zu Beweisen)

Graph zum Beweis des Satzes über Wege in einem Baum:



Wenn es von A nach B zwei verschiedene Wege gibt, dann gibt es im Graphen einen Kreis.

Mündlich: Wir gehen von A aus beide Wege so lange entlang, bis wir die erste Ecke erreicht haben, bei der sich die Wege trennen. Diese nennen wir E_1 . Falls sich die Wege bereits in der ersten Kante unterscheiden, nennen wir A um in E_1 . Dann gehen wir beide Wege so lange entlang, bis wir auf der erste Ecke stoßen, die sie wieder gemeinsam haben. Wir nennen diese Ecke E_2 .

\Rightarrow Der zusammengesetzte Weg von E_1 nach E_2 entlang des einen Weges und von E_2 nach E_1 entlang des anderen Weges ist ein Kreis.

Tafelanschrieb

Mit der Graphik auf Arbeitsblatt 3 folgt, dass es im Baum einen Kreis gibt \downarrow

Also war die Annahme falsch, und für beliebige Ecken A, B gibt es nicht mehr als einen Weg von A nach B . \square

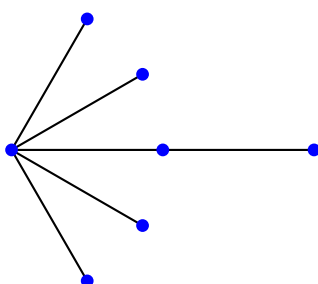
Aufgabe 3.7 (Arbeitsblatt 3.6 (Bäume), Aufgabe 7)

Zeichne jeweils einen Graphen, der ein Baum ist und die angegebenen Eigenschaften besitzt.

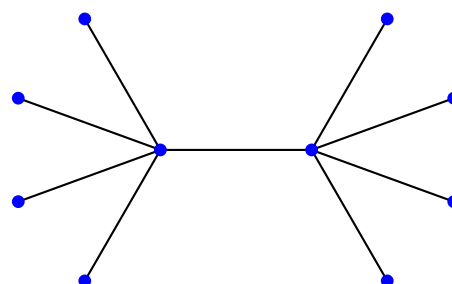
- Der Baum besitzt 7 Ecken und eine davon hat Eckengrad 5.
- Der Baum besitzt 10 Ecken und zwei davon haben Eckengrad 5.

Datei: Graphen388-Baeume-zeichnen

Lösung: a)



b)



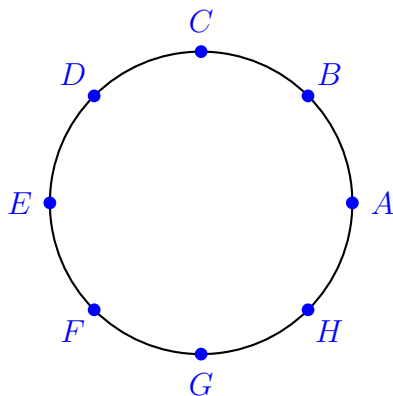
Aufgabe 3.8 (Arbeitsblatt 3.6 (Bäume), Aufgabe 8)

- a) Zeichne einen einfachen Graphen mit 8 Ecken und 8 Kanten, der hamiltonsch ist und nach Löschen einer Ecke ein Baum ist.
- b) Zeichne einen einfachen Graphen mit 8 Ecken und 13 Kanten, der hamiltonsch ist und nach Löschen einer Ecke ein Baum ist.

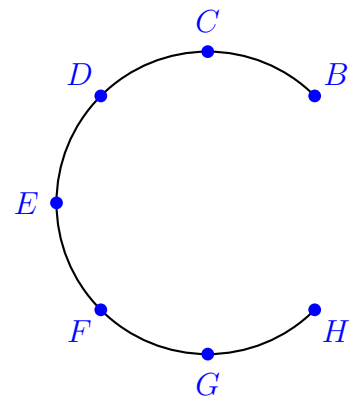
Datei: Graphen386-hamiltonschEckenloeschen

Lösung:

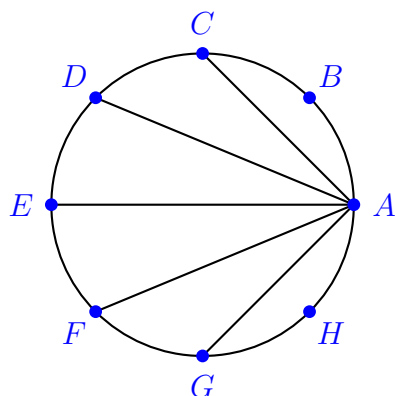
a)



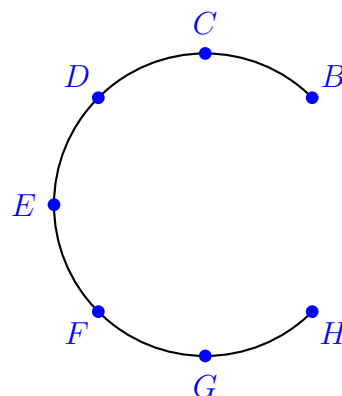
Löschen der Ecke
A ergibt einen
Baum.



b)



Löschen der Ecke
A ergibt einen
Baum.



Weiter auf nächster Seite

3.6 Schriftliche Aufgaben (ohne Lösungen)

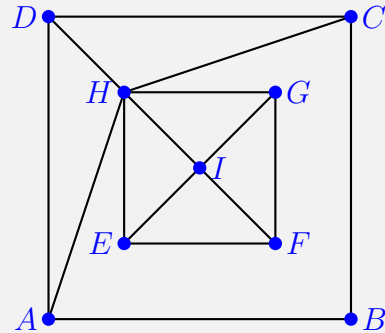
Aufgabe 3.9 (Arbeitsblatt 3.7 (Schriftliche Aufgaben), Aufgabe 9)

Im rechts gezeichnete Graph wird die Ecke H gelöscht.

- a) In wieviele Komponenten zerfällt der entstehende Graph?

In Komponenten.

- b) Markiere die Komponenten im entstehenden Graphen mit verschiedenen Farben.

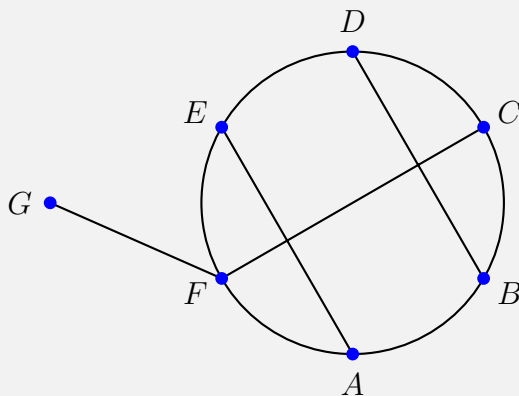


Datei: Graphen392-Komponenten-nachLoeschen

Aufgabe 3.10 (Arbeitsblatt 3.7 (Schriftliche Aufgaben), Aufgabe 10)

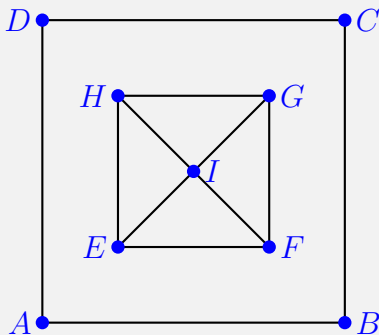
Warum ist der jeweils gegebene Graph nicht hamiltonsch?

a)



Begründung:

b)



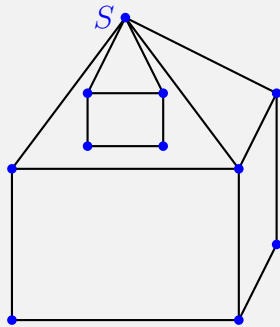
Begründung:

Datei: Graphen390-nicht-hamiltonsch

Weiter auf nächster Seite

Aufgabe 3.11 (Arbeitsblatt 3.7 (Schriftliche Aufgaben), Aufgabe 11)

Gegeben ist der folgende einfache Graph 1.



Graph 1

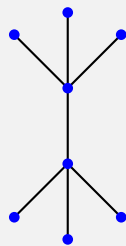
Graph 1 nach Löschen der Ecke S

- a) Zeichne daneben den Graphen, der entsteht, wenn man die Ecke S löscht.
- b) Begründe, dass Graph 1 nicht hamiltonsch ist:

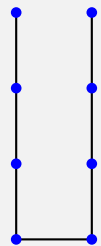
Datei: Graphen397-Ecken-loeschen

Aufgabe 3.12 (Arbeitsblatt 3.7 (Schriftliche Aufgaben), Aufgabe 12)

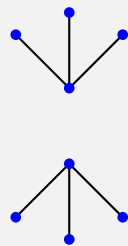
Gegeben sind die folgenden vier Graphen.



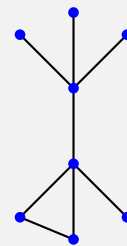
Graph 1



Graph 2



Graph 3



Graph 4

Welcher der Graphen ist ein Baum? Kreuze an!

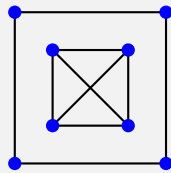
	Graph 1	Graph 2	Graph 3	Graph 4
Baum	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Kein Baum	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Datei: Graphen393-Baum-oder-nicht

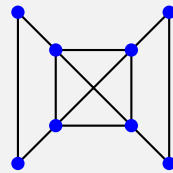
3.7 Weitere Aufgaben

Aufgabe 3.13 (Arbeitsblatt 3.7 (Weitere Aufgaben), Zusatzaufgabe 1)

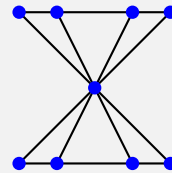
Untersuche, welcher der folgenden Graphen zusammenhängend, eulersch oder hamiltonsch ist. Trage in die Tabelle „j“ für ja, „n“ für nein ein.



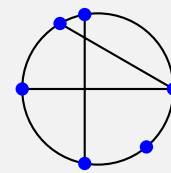
Graph 1



Graph 2



Graph 3



Graph 4

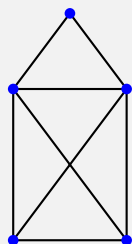
Datei: Graphen32-hamiltonsch-und-eulersch

Lösung:

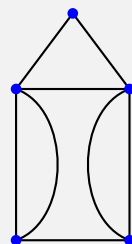
	Graph 1	Graph 2	Graph 3	Graph 4
ist zusammenhängend	N	J	J	J
ist eulersch	N	J	N	N
ist hamiltonsch	N	J	N	J

Aufgabe 3.14 (Arbeitsblatt 3.7 (Weitere Aufgaben), Zusatzaufgabe 2)

Warum sind die beiden Graphen nicht isomorph?



Graph 1



Graph 2

Antwort:

Graph 2 enthält parallele Kanten,
Graph 1 enthält keine parallelen
Kanten.

Datei: Graphen33-nicht-isomorph

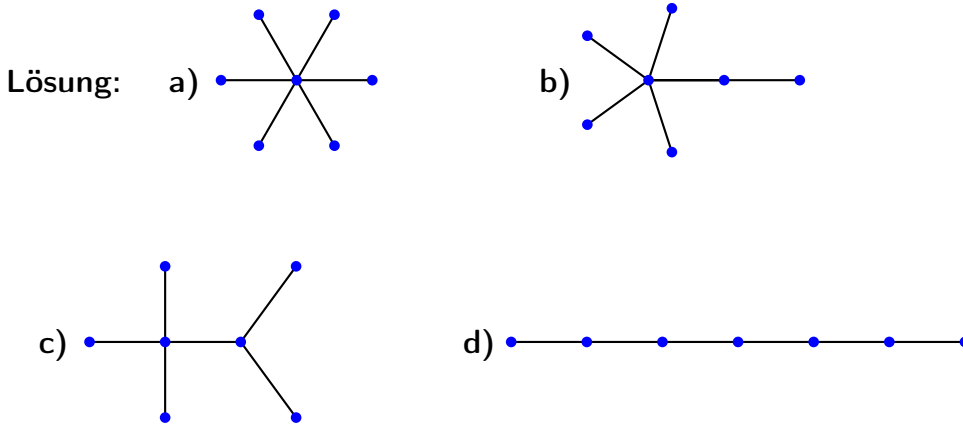
Lösung: Ist bereits im Aufgabentext enthalten.

Aufgabe 3.15 (Arbeitsblatt 3.7 (Weitere Aufgaben), Zusatzaufgabe 3)

Zeichne jeweils einen zusammenhängenden Graphen mit 7 Ecken und 6 Kanten, der zusätzlich die angegebenen Eigenschaften besitzt. Ist der Graph einfach?

- Der Graph besitzt eine Ecke mit Grad 6.
- Der Graph besitzt eine Ecke mit Grad 5.
- Der Graph besitzt eine Ecke mit Grad 4 und eine Ecke mit Grad 3.
- Alle Eckengrade sind höchstens 2.

Datei: Graphen381-Graphenzeichnen



Alle vier Graphen sind einfach.

Aufgabe 3.16 (Arbeitsblatt 3.7 (Weitere Aufgaben), Zusatzaufgabe 4)

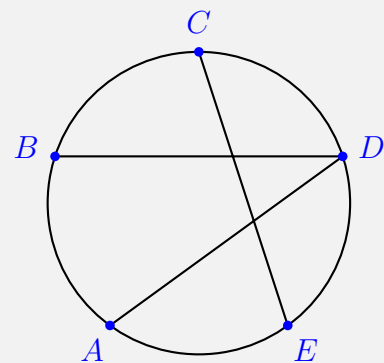
Zeichne einen zusammenhängenden Graphen mit 7 Ecken und 7 Kanten, der nicht einfach ist. Ist der Graph hamiltonsch?

Datei: Graphen382-Graphzeichnen-Nichteinfach

Lösung: Z.B. Der Graph ist nicht hamiltonsch.

Aufgabe 3.17 (Arbeitsblatt 3.7 (Weitere Aufgaben), Zusatzaufgabe 5)

Gegeben ist der rechts skizzierte einfache Graph. Gib möglichst viele verschiedene hamiltonsche Kreise des Graphen an. Alle sollen mit der Ecke A beginnen.



Hamiltonsche Kreise:

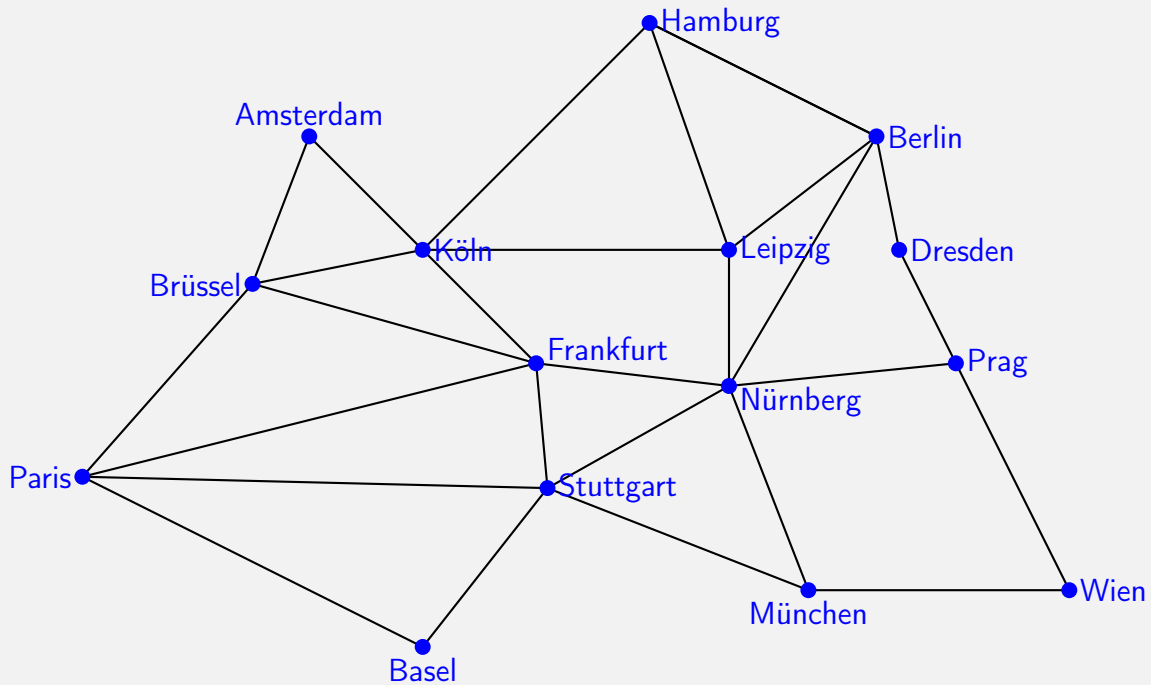
- $A - B - C - D - E - A$
- $A - B - D - C - E - A$
- $A - B - C - E - D - A$
- $A - D - B - C - E - A$
- $A - E - D - C - B - A$ (Kreis 1 rückwärts)
- $A - E - C - D - B - A$ (Kreis 2 rückwärts)
- $A - E - C - B - D - A$ (Kreis 4 rückwärts)
- $A - D - E - C - B - A$ (Kreis 3 rückwärts)

Datei: Graphen383-hamiltonscheKreise

Lösung: Ist bereits im Aufgabentext enthalten.

Aufgabe 3.18 (Arbeitsblatt 3.7 (Weitere Aufgaben), Zusatzaufgabe 6)

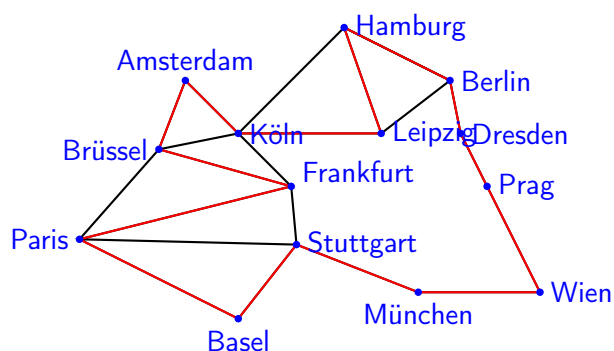
Eine Freundesgruppe möchte eine Rundreise mit der Bahn durch die in der Karte eingezeichneten Städte machen. Dabei wollen sie durch jede Stadt nur ein Mal reisen. Sie können nur die eingezeichneten Verbindungen benützen.



- a) Leider müssen sie feststellen, dass die Bahn in Nürnberg den Bahnhof umbaut und daher alle Verbindungen mit Nürnberg nicht benützt werden können. Also streichen sie Nürnberg und alle Verbindungen nach Nürnberg aus ihrem Plan.
Zeichne den reduzierten Plan. Gibt es eine Rundreise?
- b) Nachdem in Nürnberg der Bahnhof fertig gestellt ist, wird der Bahnhof in Köln für einen Umbau gesperrt.
Zeichne den reduzierten Plan. Gibt es eine Rundreise?
- c) Nachdem auch in Köln der Bahnverkehr wieder läuft, muss die Bahn aufgrund des maroden Schienennetzes in drei deutschen Städten zugleich den Bahnhof sperren. Welche drei Städte können gesperrt werden, so dass eine Rundreise durch die restlichen europäischen Städte möglich ist? Zeichne den reduzierten Plan und eine Rundreise (Lösung ist nicht eindeutig).

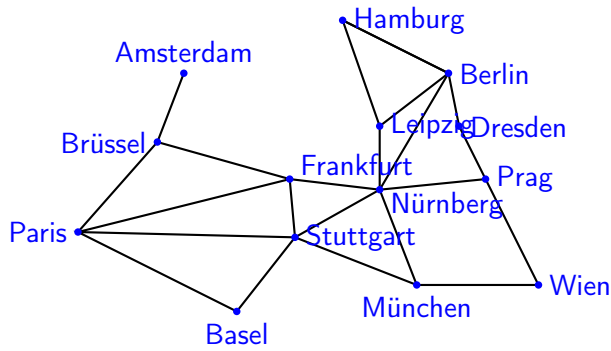
Datei: Graphen385-RundreiseEckenloeschen

Lösung: a)



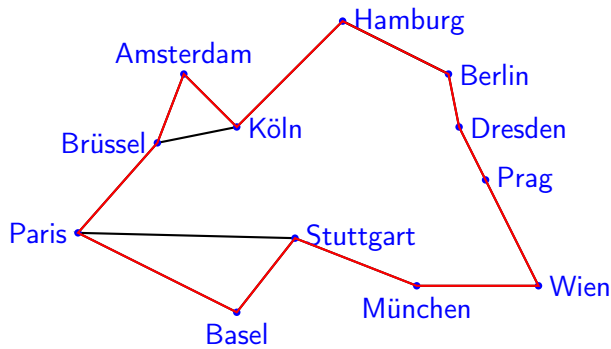
Eine mögliche Rundreise ist rot eingezeichnet.

b)



Es gibt keine Rundreise, da Amsterdam am Ende einer Strecke liegt.

c)



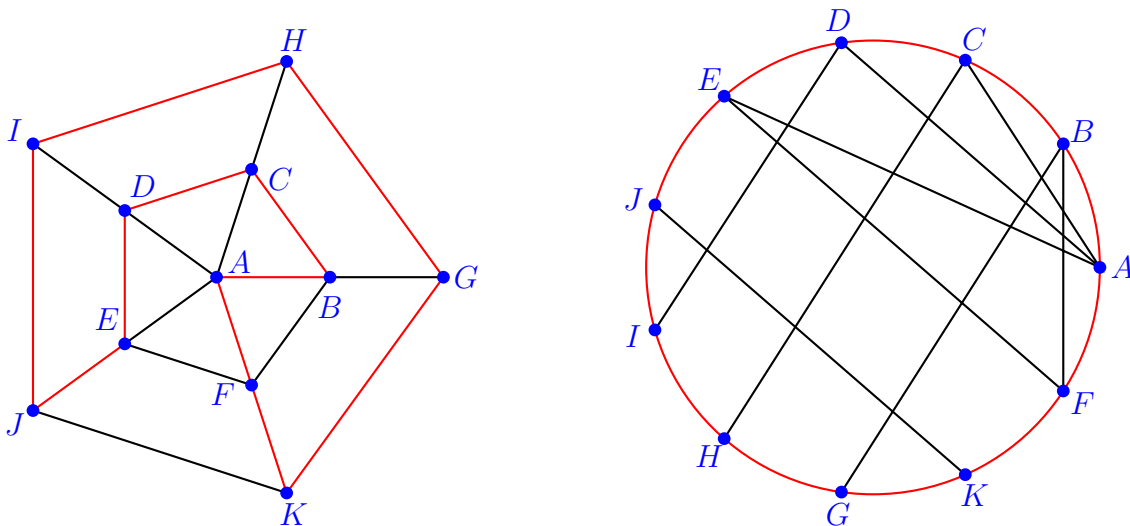
Löscht man Frankfurt und Nürnberg, so sieht man, dass als dritte Stadt entweder Leipzig oder Hamburg weggelassen werden können. Die Rundreise ist dann eindeutig.

Aufgabe 3.19 (Arbeitsblatt 3.7 (Weitere Aufgaben), Zusatzaufgabe 7)

Zeichne im Graphen einen hamiltonschen Kreis (rot) ein. Zeichne einen isomorphen Graphen rechts ein, bei dem der hamiltonsche Kreis als Kreis zu sehen ist.

Datei: Graphen37-Hamiltonsch-isomorpheDarstellung

Lösung: Die Kanten, die im rechten Graphen rot gefärbt sind, entsprechen denen, die im linken Graphen rot gefärbt sind.



4 Unterrichtseinheit 4: Bäume und bipartite Graphen

4.1 Inhalt

- Färben als Beweismethode bzw. Beweishilfe.
- Anzahl Kanten/Ecken in einem Baum, aufspannender Baum.
- Bipartite Graphen, isomorphe Darstellung, Ecken färben.
- Zusatzmaterial: Matching, perfektes Matching, maximales Matching.

4.2 Wiederholung

Aufgabe 4.1 (Arbeitsblatt 4.1 (Bäume), Aufgabe 1)

Ergänze jeweils die Sätze.

a) Ein Graph, der

zusammenhängend

ist und

keinen Kreis enthält

heißt Baum.

b) In einem Baum gibt es von jeder Ecke zu jeder anderen Ecke

genau einen Weg

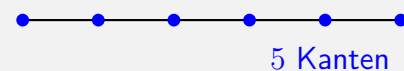
Datei: Graphen40-WiederholungDefSatzBaum

Lösung: Ist bereits im Aufgabentext enthalten.

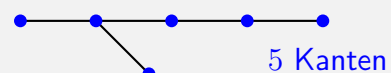
Aufgabe 4.2 (Arbeitsblatt 4.1 (Bäume), Aufgabe 2)

Skizziere Bäume mit 6 Ecken und den jeweils angegebenen Eigenschaften. Wie viele Kanten haben die Bäume?

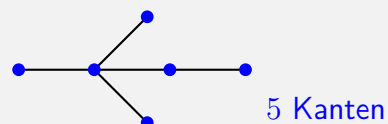
a) Der Baum hat genau zwei Ecken mit Eckengrad 1,



b) Der Baum hat genau drei Ecken mit Eckengrad 1,



c) Der Baum hat genau vier Ecken mit Eckengrad 1,



d) Der Baum hat genau fünf Ecken mit Eckengrad 1.



Datei: Graphen41-Baeume

Lösung: Ist bereits im Aufgabentext enthalten.

Anmerkung

Diese Aufgaben beschränken sich auf die Wiederholung der Eigenschaften von Bäumen, da wir mit dem Thema *Bäume* fortfahren.

Eigentlich sollten auch die Begriffe Isomorphie, Teilgraph, Kreis, Eulersche Tour, hamiltonscher Kreis, Eckengrad wiederholt werden. Dazu gibt es im Kapitel 12 Vorlagen für Karten, mit denen das Spiel 1-2-3 gespielt werden kann. Im Unterschied zur üblichen Spielweise sollte jeweils eine Schülerin/ein Schüler erklären, warum die Position 1,2,3 gewählt wurde.

4.3 Bäume

Mündlich: In Aufgabe 4.1 haben wir den Satz *In einem Baum gibt es von jeder Ecke zu jeder anderen genau einen Weg* wiederholt. Wir formulieren und beweisen nun einen Umkehrsatz.

Tafelanschrieb

Umkehrsatz: Gibt es in einem Graphen von jeder Ecke zu jeder anderen Ecke genau einen Weg, und enthält der Graph keine Schlinge, dann ist dieser Graph ein Baum.

Beweis: Der Graph ist zusammenhängend, da es von jeder Ecke zu jeder anderen einen Weg gibt. Der Graph enthält keinen Kreis mit 1 Ecke, da er keine Schlinge besitzt.

Er enthält auch keinen Kreis mit mindestens 2 Ecken, denn andernfalls gäbe es zu zwei verschiedenen Ecken dieses Kreises zwei verschiedene Wege, die sie verbinden.

⇒ der Graph ist ein Baum. □

Mündlich: In Aufgabe 4.2 haben wir gesehen, dass ein Baum mit 6 Ecken immer 5 Kanten hat. Im folgenden Satz verallgemeinern wir diese Aussage.

Tafelanschrieb

Satz: Ein Baum mit n Ecken besitzt genau $n - 1$ Kanten

Beweis: Es sei ein Graph mit n Ecken gegeben. Wir färben seine Ecken und Kanten, während wir sie zählen.

1) Wähle eine beliebige Ecke E_1 und färbe sie.

2) Wähle eine beliebige Kante, die E_1 mit einer Ecke E_2 verbindet. Da keine Schlinge erlaubt ist, folgt $E_1 \neq E_2$. Färbe die gewählte Kante und E_1 . **Bisher gezählt: 2 Ecken und 1 Kante.**

3) Wähle eine noch nicht gefärbte Kante, die E_1 oder E_2 mit einer Ecke E_3 verbindet. Da der Baum keinen Kreis enthält, gilt $E_3 \neq E_2$ und $E_3 \neq E_1$. Färbe die neue Kante und E_3 . **Bisher gezählt: 3 Ecken und 2 Kanten.**

Setze entsprechend fort: In jedem Schritt wird eine neue Kante gefärbt, die eine der bereits gefärbten Ecken mit einer Ecke verbindet. Diese Ecke ist noch nicht gefärbt, da es im Baum keinen Kreis gibt, und wird jetzt gefärbt. Es kommt 1 Kante und 1 Ecke dazu.

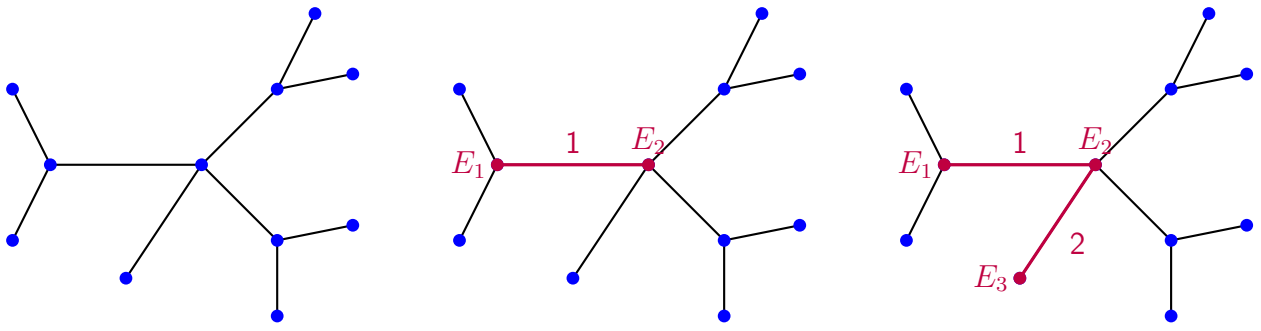
Mit dieser Methode wird jede Ecke des Baumes gefärbt, da er zusammenhängend ist.

Nach n Schritten haben wir n Ecken und $n - 1$ Kanten gezählt. Der Graph besitzt keine weiteren Kanten, denn jede weitere Kante müsste eine der bereits gefärbten Ecken mit einer neuen Ecke verbinden. Weitere Ecken besitzt der Graph nicht, also haben wir alle Ecken und Kanten des Graphen gezählt. □

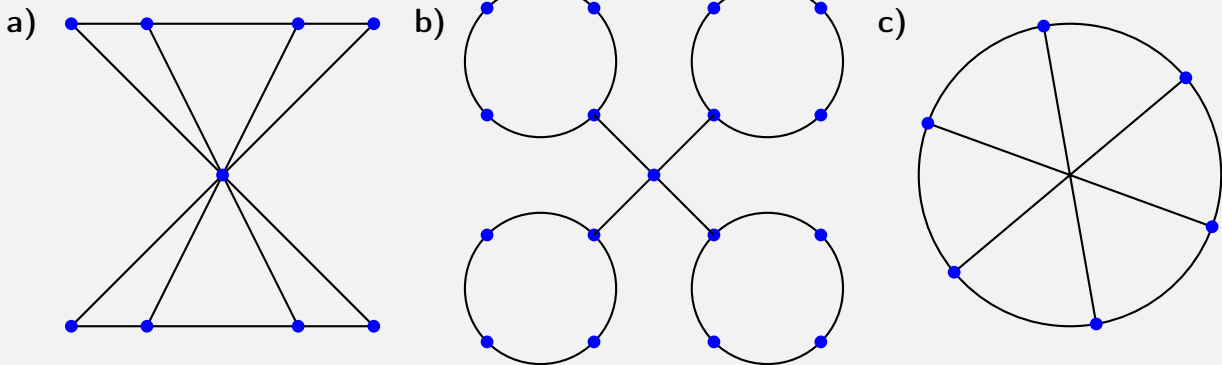
Vorgehen: L schreibt den Beweis und erklärt das Vorgehen am Visualizer. Die Schüler:innen können auf dem Arbeitsblatt mitzeichnen. Dieselbe Farbe im Text und beim Färben der Ecken und Kanten verwenden.

Graphik auf Arbeitsblatt 4.1

Skizze zum Beweis eines Satzes:

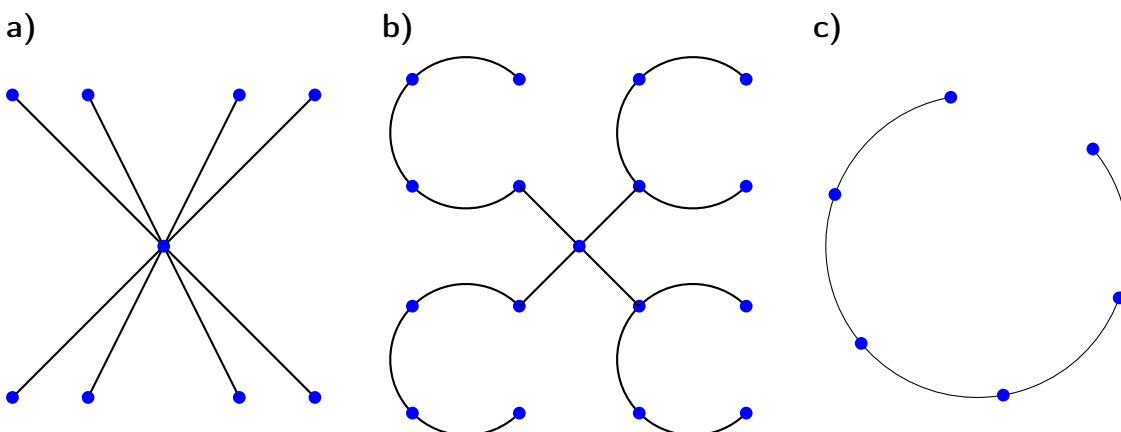
**Aufgabe 4.3 (Arbeitsblatt 4.2 (Bäume in Graphen), Aufgabe 3)**

Streiche in den angegebenen Graphen jeweils so viele Kanten, dass der entstehende Teilgraph ein Baum ist und alle Ecken des gegebenen Graphen enthält.



Datei: Graphen42-Zum-Baum-abmagern

Lösung: Es gibt viele Lösungen, hier ist jeweils eine:

**Tafelanschrieb**

Definition: Ist ein Teilgraph eines Graphen ein Baum, der alle Ecken des Graphen enthält, so heißt er aufspannender Baum des Graphen.

Satz: Jeder zusammenhängende Graph besitzt einen aufspannenden Baum.

Mündlich: Für den Beweis des Satzes entfernen wir Kanten aus dem Baum, aber keine Ecken.

Tafelanschrieb

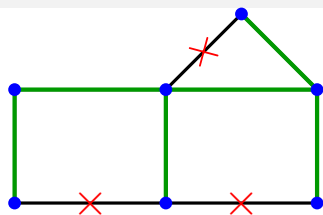
Beweis: Sei ein zusammenhängender Graph gegeben. Wenn er keinen Kreis enthält, ist er ein Baum und sein eigener aufspannender Baum.

Enthält er einen Kreis, so entferne eine Kante des Kreises aus dem Graphen. Der entstehende Teilgraph ist weiterhin zusammenhängend, da der Kreis zusammenhängend bleibt. Wiederhole diesen Schritt so oft, bis der entstehende Teilgraph keinen Kreis mehr enthält. Dieser ist ein aufspannender Baum des Graphen. \square

Vorgehen: Der Beweis wird anhand des folgenden Graphen erläutert. Nachdem Kanten gestrichen wurden, wird der verbliebene Baum farbig markiert. Eine andere Farbe als beim letzten Färben und Zählen verwenden. Diese Farbe möglichst durchgängig zur Markierung aller aufspannenden Bäume verwenden.

Tafelanschrieb

Skizze zum Beweis:

**Tafelanschrieb**

Folgerung: Jeder zusammenhängende Graph mit n Ecken besitzt mindestens $n - 1$ Kanten.

Beweis: Der Graph besitzt einen aufspannenden Baum mit n Ecken. Dieser hat $n - 1$ Kanten, die alle im Graphen enthalten sind. \square

Folgerung: Entfernt man aus einem Baum eine Kante, so ist er nicht mehr zusammenhängend.

Beweis: Betrachte einen Baum mit n Ecken. Er hat $n - 1$ Kanten. Entfernt man eine Kante, so hat der entstehende Teilgraph n Ecken und $n - 2$ Kanten. Der Teilgraph kann nicht zusammenhängend sein, denn sonst müsste er mindestens $n - 1$ Kanten besitzen. \square

Folgerung: Besitzt ein zusammenhängender Graph mit n Ecken genau $n - 1$ Kanten, so ist der Graph ein Baum.

Beweis: Sei ein zusammenhängender Graph mit n Ecken und $n - 1$ Kanten gegeben.

Letzter Satz \Rightarrow Er enthält einen aufspannenden Baum. Dieser hat $n - 1$ Kanten.

\Rightarrow Der Graph ist gleich seinem aufspannenden Baum, ist also selber ein Baum. \square

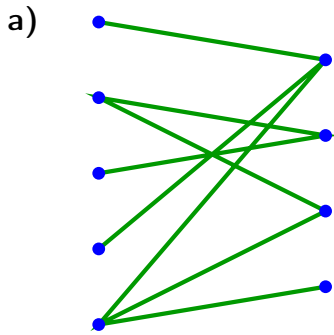
Aufgabe 4.4 (Arbeitsblatt 4.3 (Aufspannende Bäume), Aufgabe 4)

Zeichne in die beiden Graphen jeweils einen aufspannenden Baum ein.

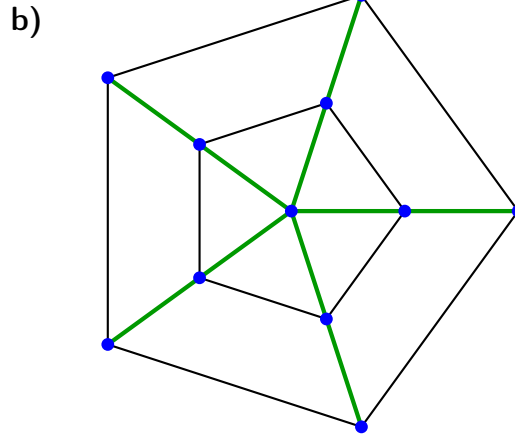
Datei: Graphen43-AufspannendeBaeume

Lösung: *Hinweise:* Der Graph aus Teil a) ist zusammenhängend, besitzt 9 Ecken und 8 Kanten. Also ist er ein Baum.

In Teil b) hat der Graph 11 Ecken. Ein aufspannender Baum muss also 10 Kanten enthalten.



Dieser Graph ist bereits ein Baum

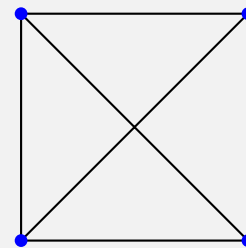


Ein aufspannender Baum besteht aus allen Ecken und den grünen Kanten. Es gibt noch andere Lösungen.

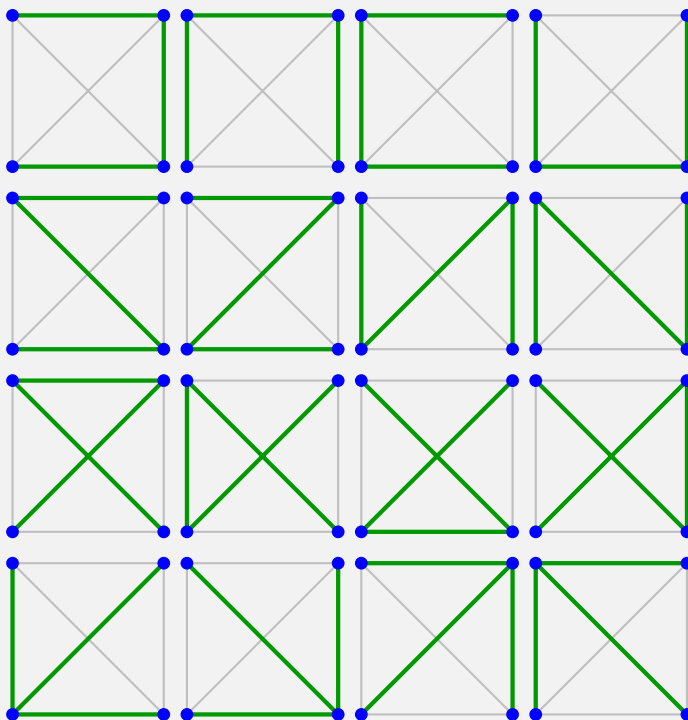
Aufgabe 4.5 (Arbeitsblatt 4.3 (Aufspannende Bäume), Aufgabe 5)

Gegeben ist ein vollständiges Viereck.

- a) Der Graph besitzt 16 verschiedene aufspannende Bäume. Skizziere sie.
- b) Wie viele nicht zueinander isomorphe aufspannende Bäume gibt es? Skizziere alle nicht zueinander isomorphen aufspannenden Bäume.

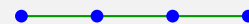


Lösung zu a):

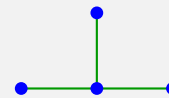


Lösung zu b):

Alle aufspannenden Bäume der ersten drei Zeilen sind isomorph zu



Alle aufspannenden Bäume der letzten Zeile sind isomorph zu



Datei: Graphen44-aufspannende-Baeume-4-Eck

Lösung: Ist bereits im Aufgabentext enthalten.

Aufgabe 4.6 (Arbeitsblatt 4.3 (Aufspannende Bäume), Aufgabe 6)

Diese Aufgabe soll einen neuen Typ von Graphen einführen. Deshalb besteht die Aufgabenstellung nur darin, die Kanten eines Graphen zu zeichnen.

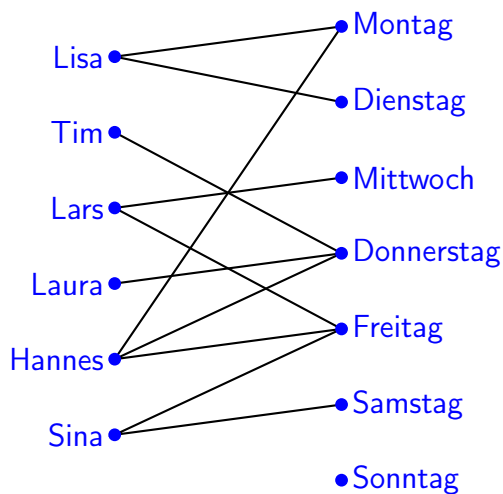
Lisas Freundes-Clique möchte diese Woche ein Treffen vereinbaren. Da sich die Terminfindung in der Vergangenheit als sehr schwierig erwiesen hat, beschließen sie, dass jede(r) in eine Liste einträgt, an welchen Tagen sie/er Zeit hat. Anhand der Ergebnisse wollen sie dann einen Tag für das Treffen festlegen.

Lisa	Montag, Dienstag
Tim	Donnerstag
Lars	Mittwoch, Freitag
Laura	Donnerstag
Hannes	Montag, Donnerstag, Freitag
Sina	Freitag, Samstag

Sonntags hat keiner der Freunde Zeit. Aus der Tabelle kann man nicht direkt ablesen, welcher Tag gewählt werden sollte. Ergänze den unten stehenden Graphen durch Kanten zwischen den Personen und den angegebenen Tagen. Gibt es einen Tag, an dem alle Zeit haben? An welchen Tagen haben die meisten Zeit?

Datei: Graphen45-Bipartit

Lösung:



Diese Aufgabe ist sehr einfach. Am Graphen ist leicht zu sehen, dass es keinen Tag gibt, an dem alle aus der Clique Zeit haben. Am Donnerstag oder am Freitag haben jeweils drei zugleich Zeit.

Für uns ist wichtig: Dies ist ein Graph, dessen Ecken aus zwei Gruppen bestehen, und in dem es nur Kanten zwischen Ecken gibt, die in verschiedenen Gruppen liegen. Es gibt keine Kante zwischen Personen. Mit solchen Graphen werden wir uns nun beschäftigen.

4.4 Bipartite Graphen

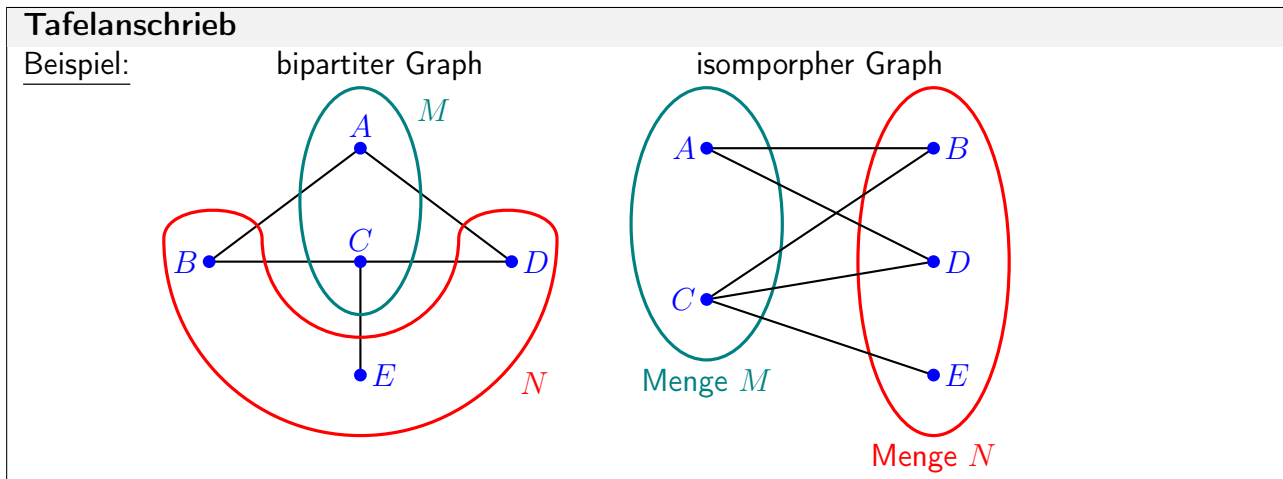
Tafelanschrieb

8. Bipartite Graphen

Definition: 1) In einem Graphen heißen zwei Ecken benachbart, falls sie durch mindestens eine Kante verbunden sind.

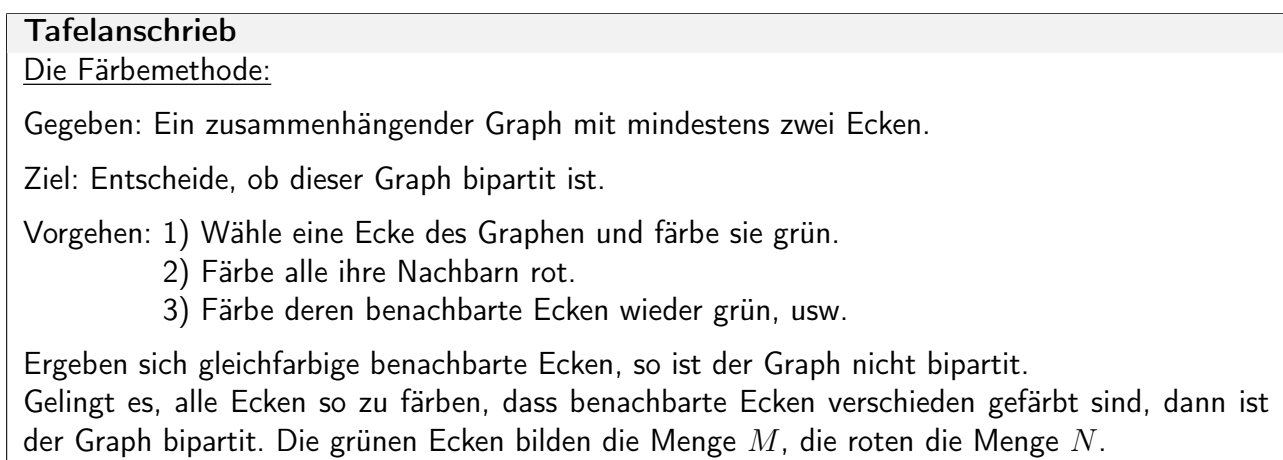
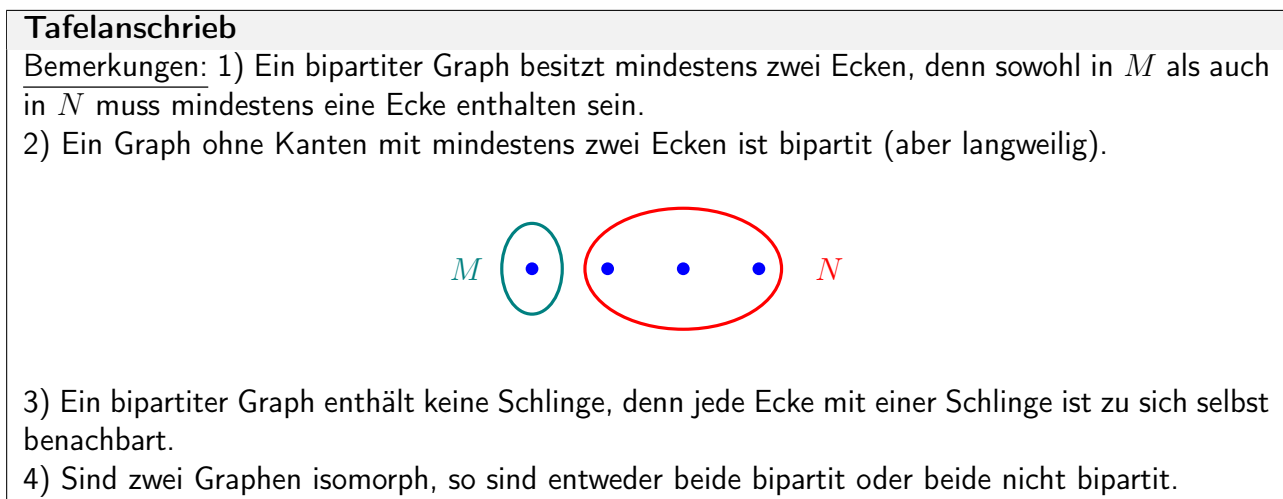
2) Ein einfacher Graph heißt bipartit, wenn die Menge seiner Ecken in zwei nichtleere Teilmengen M und N aufgeteilt werden kann, so dass nur Ecken aus verschiedenen Mengen benachbart sind. Kanten, die zwei Ecken derselben Teilmenge verbinden, gibt es nicht.

Mündlich: In der letzten Aufgabe könnte M die Menge der Personen und N die Menge der Tage sein. Oder umgekehrt. Auch der Graph in Aufgabe 4.4 a) ist bipartit.



Vorgehen: Die Mengen M und N im linken Graphen werden erst nachträglich eingezeichnet. Dann wird der isomorphe Graph gezeichnet.

Mündlich: Bipartite Graphen können immer isomorph so gezeichnet werden, dass links die Ecken aus M und rechts die Ecken aus N stehen.



Anmerkung

Bei nicht zusammenhängenden Graphen kann die Färbemethode auf jede Komponente des Graphen angewandt werden. Isolierte Ecken können irgendeiner der Mengen M oder N zugeordnet werden.

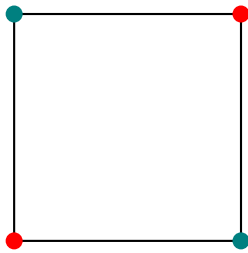
Aufgabe 4.7 (Arbeitsblatt 4.4 (Bipartite Graphen), Aufgabe 7)

Stelle mit Hilfe der Färbemethode fest, ob die Graphen bipartit sind oder nicht. Trage in die Tabelle J für Ja, N für Nein ein.

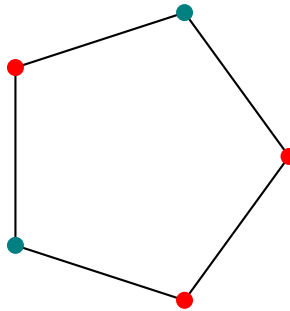
Datei: Graphen46-BipartitFaerbemethode

Lösung:

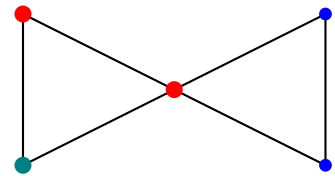
Graph 1:



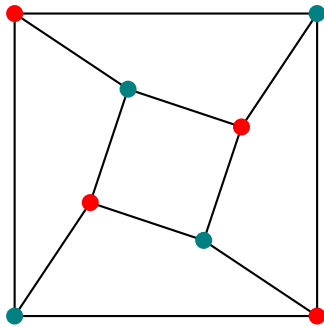
Graph 2:



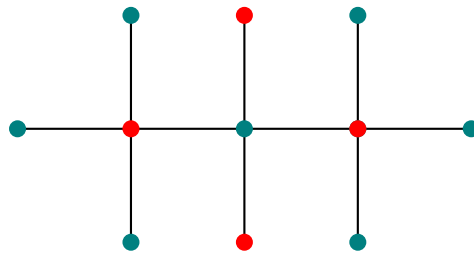
Graph 3:



Graph 4:



Graph 5:



Graph	Graph 1	Graph 2	Graph 3	Graph 4	Graph 5
ist bipartit	J	N	N	J	J

4.5 Schriftliche Aufgaben (ohne Lösungen)

Aufgabe 4.8 (Arbeitsblatt 4.5 (Schriftliche Aufgaben), Aufgabe 8)

Gegeben ist ein vollständiges Sechseck (linker Graph). Skizziere zwei aufspannende Bäume, die deutlich verschieden und insbesondere nicht isomorph sind.

Hinweis: Graphen sind nicht z.B. isomorph, wenn sie sich in ihren Eckengraden unterscheiden.

Ausgangsgraph	Lösung 1	Lösung 2

Datei: Graphen499-aufspannende-Baeume-6-Eck

Aufgabe 4.9 (Arbeitsblatt 4.5 (Schriftliche Aufgaben), Aufgabe 9)

Eine Freundes-Clique organisiert eine Grillparty. Jede/jeder soll etwas beisteuern und trägt dazu in eine Liste ein, was sie/er mitbringen könnte:

Lisa	Stockbrotteig, Würstchen
Tim	Grillkohle, Salate
Lars	Stockbrotteig, Outdoor-Spiele
Laura	Grillkohle, Outdoor-Spiele
Hannes	Stockbrotteig, Marshmallows
Sina	Outdoor-Spiele, Marshmallows

- a) Zeichne einen bipartiten Graphen zur Liste.
- b) Gibt es eine Möglichkeit, dass jede Person genau eine Sache mitbringt und alles, was in die Liste eingetragen wurde, für die Grillparty vorhanden ist? Wenn ja, dann markiere die zugehörigen Kanten in Deinem Graphen farbig und mach einen Vorschlag, wer was mitbringen soll.

Zu a): Bipartiter Graph

Zu b): Wer bringt was mit?

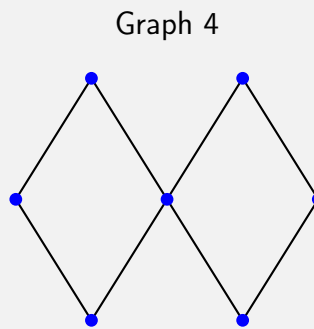
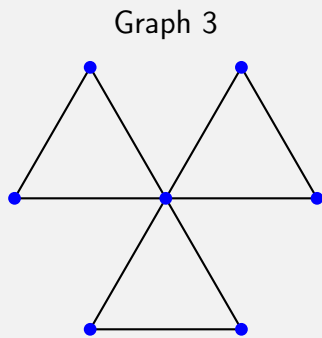
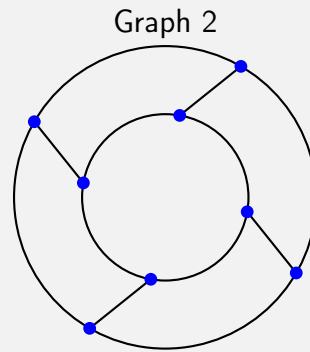
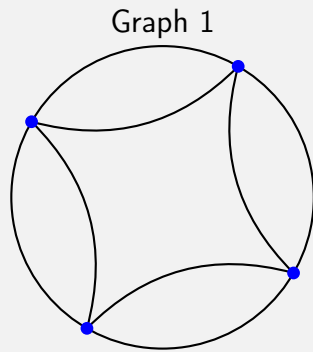
Lisa	
Tim	
Lars	
Laura	
Hannes	
Sina	

Datei: Graphen493-Grillparty

Weiter auf nächster Seite

Aufgabe 4.10 (Arbeitsblatt 4.5 (Schriftliche Aufgaben), Aufgabe 10)

Untersuche die vier Graphen und entscheide, welcher bipartit, eulersch oder hamiltonsch ist.



Graph	Graph 1	Graph 2	Graph 3	Graph 4
ist eulersch				
ist hamiltonsch				
ist bipartit				

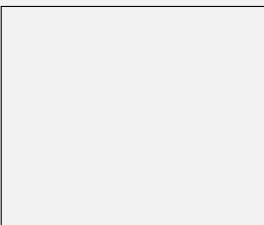
Datei: Graphen44-bipartit-eulersch-hamiltonsch

Aufgabe 4.11 (Arbeitsblatt 4.5 (Schriftliche Aufgaben), Aufgabe 11)

Konstruiere jeweils mindestens einen Graphen, der

- a) bipartit, aber weder eulersch noch hamiltonsch ist,
- b) hamiltonsch, aber weder eulersch noch bipartit ist,
- c) eulersch und hamiltonsch, aber nicht bipartit ist.

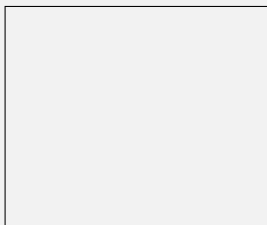
Lösung: a)



b)



c)



Datei: Graphen45-bipartit-eulersch-hamiltonsch

4.6 Zusatzmaterial Matching

Text auf Arbeitsblatt 4.Z (Matching)

Definition: Ein Teilgraph eines Graphen heißt Matching, falls er alle Ecken des Graphen enthält und jede Ecke Grad 1 oder Grad 0 hat. Das bedeutet: Jede Ecke hat maximal eine benachbarte Ecke.

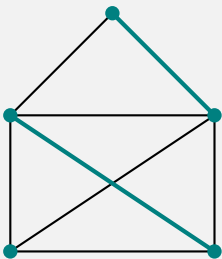
Definition: Ein Matching heißt perfekt, wenn alle Ecken des Teilgraphen Grad 1 haben. Das bedeutet: Jede Ecke hat genau eine benachbarte Ecke.

Definition: Ein Matching heißt maximal, wenn man keine Kante des Graphen dazunehmen kann, ohne dass der Teilgraph die Eigenschaft, ein Matching zu sein, verliert.

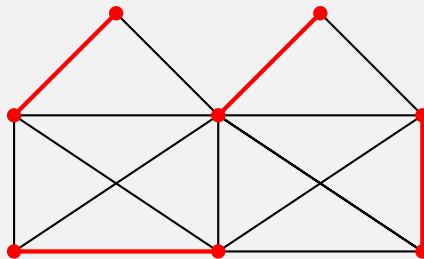
Aufgabe 4.12 (Arbeitsblatt 4.Z (Matching), Zusatzaufgabe 1)

Untersuche die folgenden Graphen. In welchen Graphen wurde ein Matching farbig markiert? In welchem Graphen ist das Matching perfekt oder maximal? Kreuze in der Tabelle an, welche der Aussagen richtig ist.

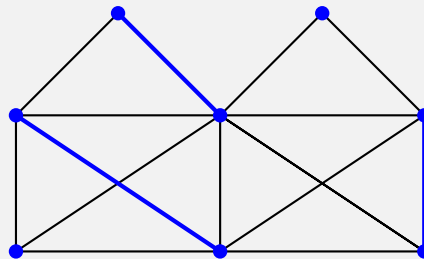
Graph 1:



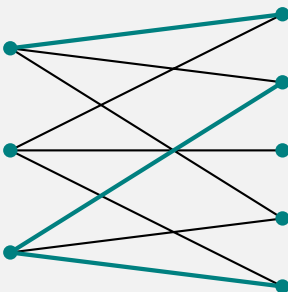
Graph 2:



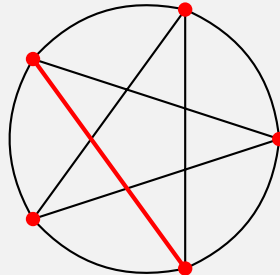
Graph 3:



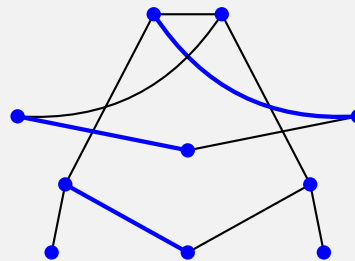
Graph 4:



Graph 5:



Graph 6:



Datei: Graphen46-Matching

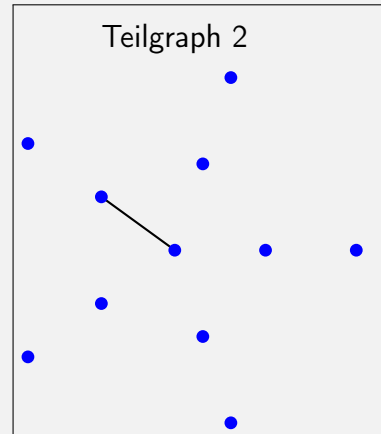
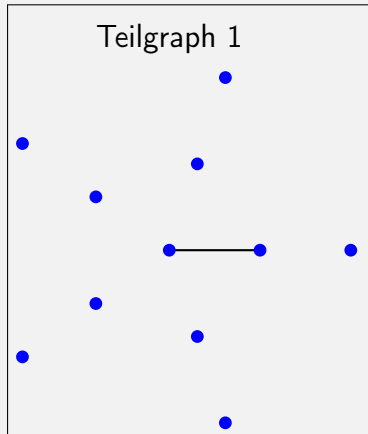
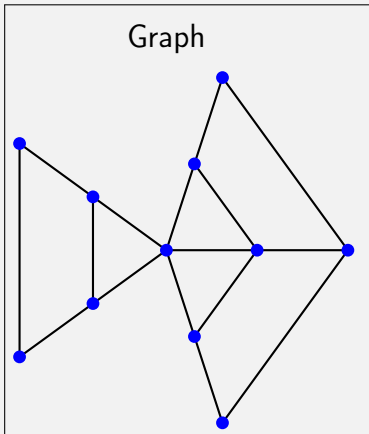
Lösung:

	Graph 1	Graph 2	Graph 3	Graph 4	Graph 5	Graph 6
Der markierte Teilgraph ist ein Matching	X	X	X		X	X
Das markierte Matching ist maximal	X	X	X			
Das markierte Matching ist perfekt		X				

Weiter auf nächster Seite

Aufgabe 4.13 (Arbeitsblatt 4.Z (Matching), Zusatzaufgabe 2)

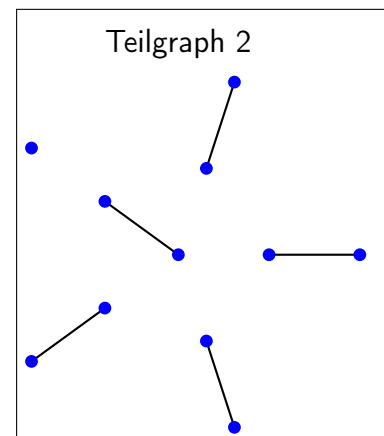
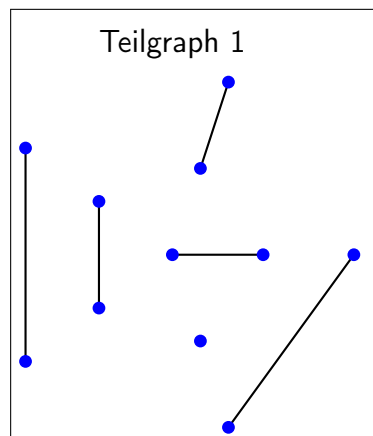
Gegeben ist der links stehende Graph mit zwei Teilgraphen.



- a) Ergänze die Teilgraphen, so dass jeder ein maximales Matching ist.
- b) Warum gibt es in dem gegebenen Graphen kein perfektes Matching?

Datei: Graphen47-maximales-Matching

Lösung: a)



- b) Da die Anzahl der Ecken ungerade ist, kann es kein perfektes Matching geben.

Aufgabe 4.14 (Arbeitsblatt 4.Z (Matching), Zusatzaufgabe 3)

- a) Gegeben ist ein perfektes Matching mit n Kanten. Was kann man über die Anzahl der Ecken des Matchings sagen?
- b) Gegeben ist ein Matching mit n Kanten. Was kann man über die Anzahl der Ecken des Matchings sagen?
- c) Gegeben ist ein Matching mit n Ecken. Was kann man über die Anzahl der Kanten des Matchings sagen?

Datei: Graphen48-Kantenzahl-Matching

Lösung: a) Anzahl der Ecken = $2n$

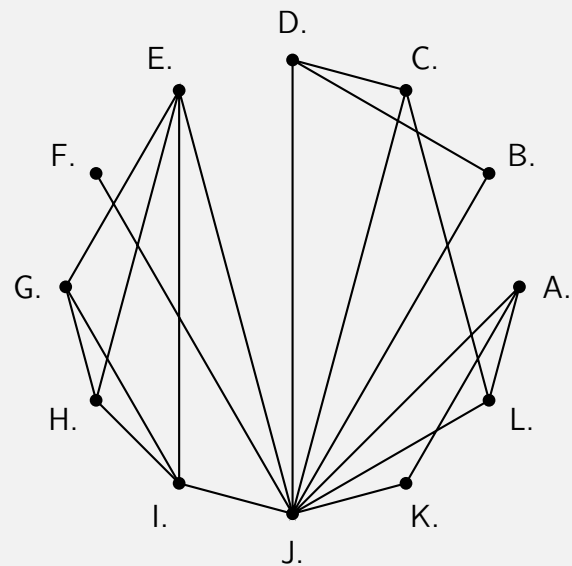
b) Anzahl der Ecken $\geq 2n$

c) Anzahl der Kanten $\leq \frac{n}{2}$

Aufgabe 4.15 (Arbeitsblatt 4.Z (Matching), Zusatzaufgabe 4)

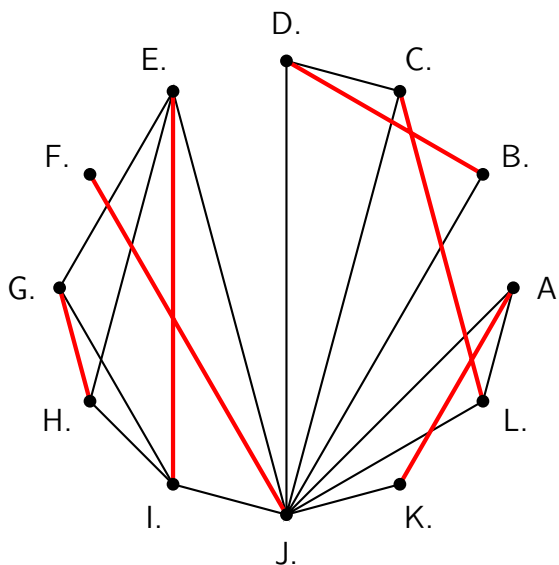
In einer Schulklasse soll ein Spiel gespielt werden, für das Paare gebildet werden müssen. Jeder und jede will natürlich nur mit jemandem ein Paar bilden, mit der oder dem man befreundet ist. Ist das möglich?

Rechts siehst Du die Darstellung der Freundschaften als Graph. Eine Kante zwischen zwei Ecken bedeutet, dass die Personen, die zu den Ecken gehören, befreundet sind. Markiere farbig ein perfektes Matching.



Datei: Graphen49-Paare-bilden

Lösung:

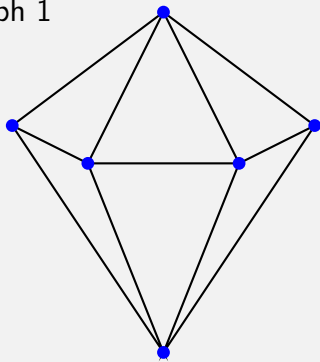


Die Lösung ist nicht eindeutig. Im linken Teil des Graphen kann das Matching auf drei verschiedene Arten gebildet werden.

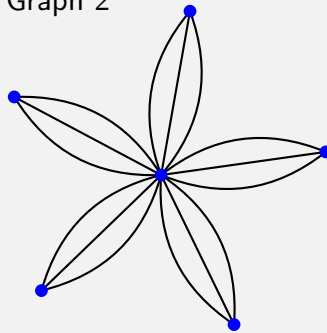
Hier folgen weitere Aufgaben, in denen Wissen über Matching abgefragt wird.

Aufgabe 4.16 (Arbeitsblatt 4.Z (Matching), Zusatzaufgabe 5)

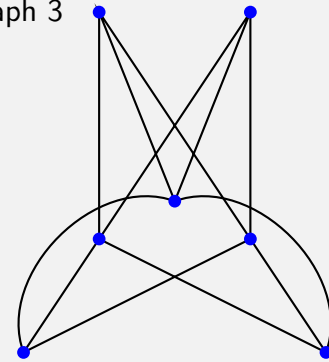
Graph 1



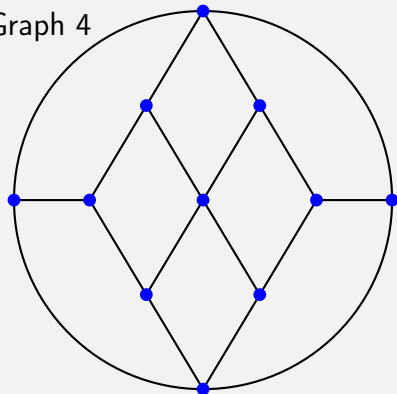
Graph 2



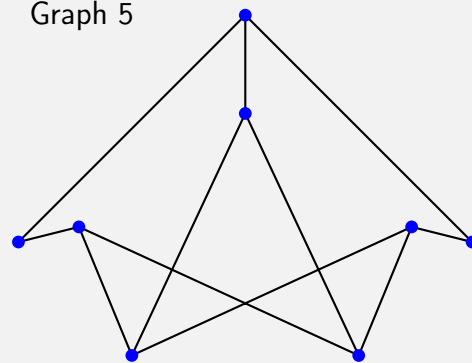
Graph 3



Graph 4



Graph 5



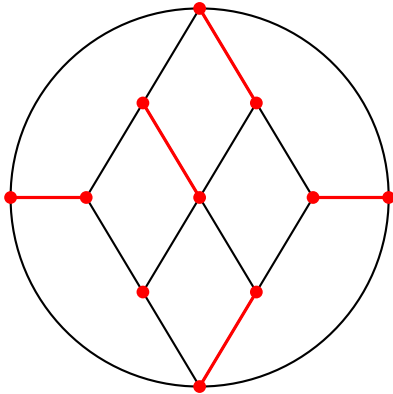
- a) Welcher der Graphen ist bipartit? Kreuze an.
- b) Ist einer der Graphen sogar vollständig bipartit? Wenn ja, welcher Graph?
- c) Markiere in Graph 4 ein maximales Matching farbig.
- d) Markiere, wenn möglich, in Graph 5 ein perfektes Matching farbig.

Datei: Graphen497-bipartit-matching-graphen

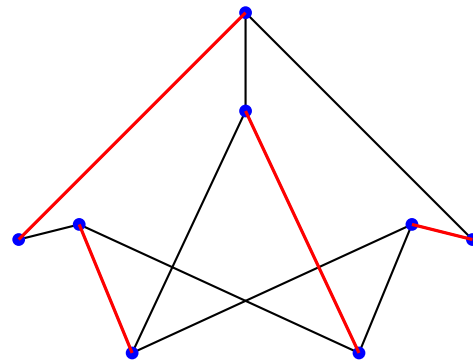
Lösung: a) Graph 1 Graph 2 Graph 3 Graph 4 Graph 5

b) Graph 3 ist ein vollständiger 2-4-Graph. Alle anderen Graphen sind keine vollständig bipartiten Graphen.

c) Da die Anzahl der Ecken ungerade ist, bleibt eine Ecke übrig. Es gibt viele richtige Lösungen. Hier ist eine:



d) Es gibt (bis auf Symmetrie) zwei verschiedene richtige Lösungen. Eine davon ist diese:



Aufgabe 4.17 (Arbeitsblatt 4.Z (Matching), Zusatzaufgabe 6)

Kreuze alle Aussagen an, die wahr sind:

- Jeder Kreis ist bipartit.
- Ein bipartiter Graph darf parallele Kanten enthalten.
- Ein vollständiger bipartiter Graph darf parallele Kanten enthalten.
- Ein Matching darf isolierte Ecken enthalten.
- Jedes perfekte Matching ist maximal.
- Ein bipartiter Graph darf Schlingen enthalten.
- Zwei beliebige Bäume mit 10 Ecken können unterschiedlich viele Kanten haben.

Datei: Graphen498-bipartit-matching-aussagen

Lösung: Jeder Kreis ist bipartit.

Ein bipartiter Graph darf parallele Kanten enthalten.

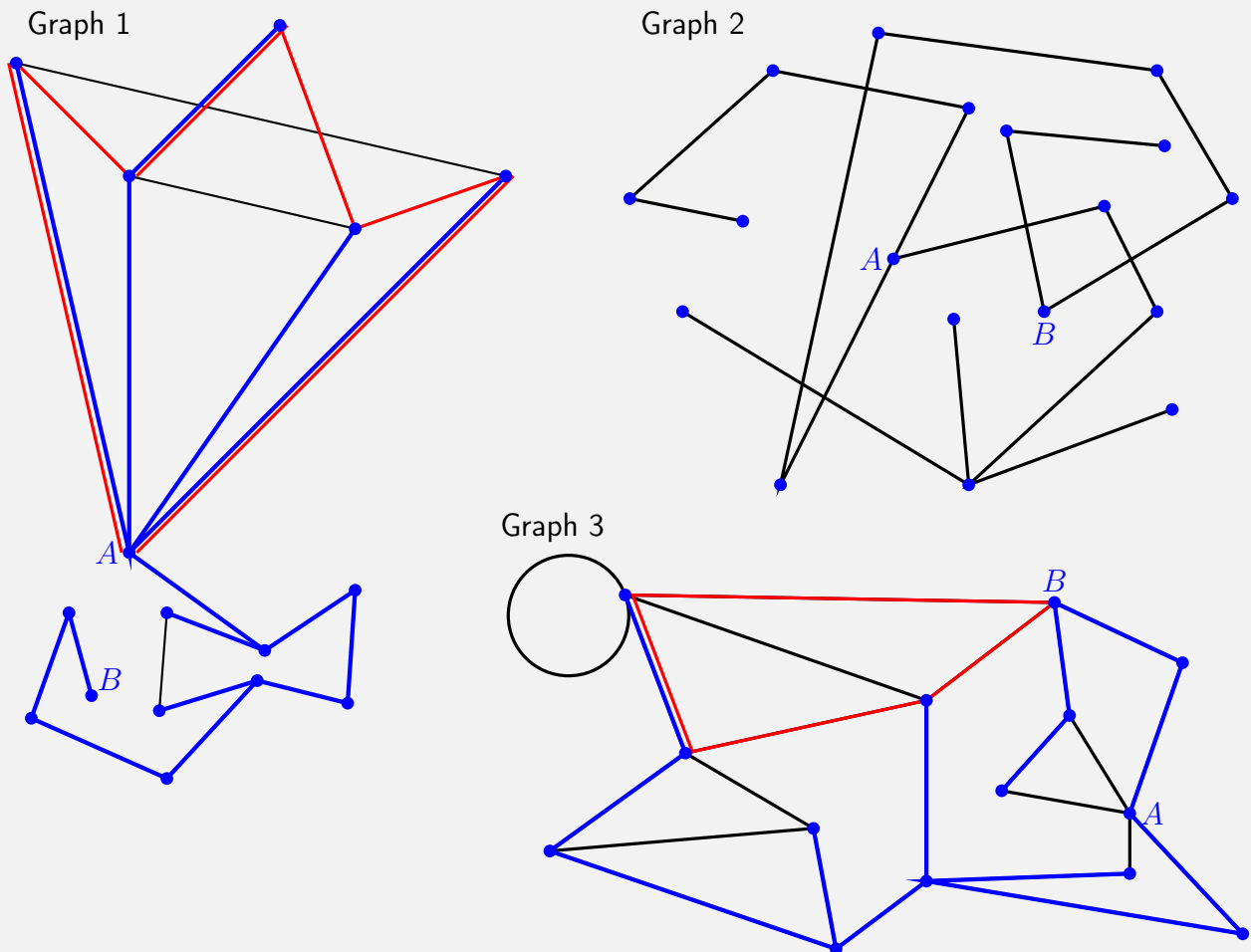
Ein vollständiger bipartiter Graph darf parallele Kanten enthalten.

Ein Matching darf isolierte Ecken enthalten.

Jedes perfekte Matching ist maximal.

4.7 Weitere Aufgaben

Aufgabe 4.18 (Arbeitsblatt 4.6 (Weitere Aufgaben), Zusatzaufgabe 7)



- a) Wie viele verschiedene Wege führen von A nach B ? Trage die Anzahl in die Tabelle ein.
- b) Markiere mit einem farbigen Stift (rot) einen Kreis mit sechs Ecken im Graph 1 und einen Kreis mit vier Ecken im Graph 3.
- c) Begründe anhand der Anzahl der Ecken und Kanten: Kann Graph 1 ein Baum sein?
- d) Finde für die Graphen, die keine Bäume sind, einen aufspannenden Baum. Markiere einen aufspannenden Baum farbig (blau) im Graphen.

Datei: Graphen494-Wege-Kreise-Baeume

Lösung:

a)		Graph 1	Graph 2	Graph 3
	Anzahl Wege von A nach B	2	1	41

b) Siehe oben.

c)	Anzahl Ecken:16	Anzahl Kanten: 22	Baum Ja/Nein: Nein
Begründung: Ein Baum mit 16 Ecken hat 15 Kanten.			
Da der vorliegende Graph mehr Kanten besitzt, kann er kein Baum sein.			

d) Siehe oben.

Aufgabe 4.19 (*Arbeitsblatt 4.6 (Weitere Aufgaben), Zusatzaufgabe 8*)

Kreuze alle Aussagen an, die wahr sind:

Datei: Graphen495-Kreise-Baeume-Ankreuzen

Lösung:

- In einem Kreis kann man von einer beliebigen Ecke auf zwei verschiedenen Wegen zu einer anderen Ecke des Kreises gelangen.
- Ein geschlossener Weg ist ein Kreis.
- In einem Baum dürfen parallele Kanten vorkommen.
- Zwei beliebige Bäume mit 10 Ecken können unterschiedlich viele Kanten haben.
- Löscht man in einem Baum eine beliebige Kante, so entsteht ein nicht zusammenhängender Teilgraph, der aus zwei Komponenten besteht.

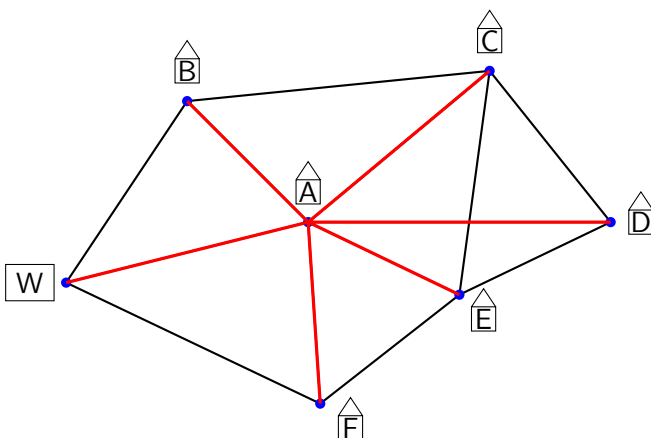
Anmerkung

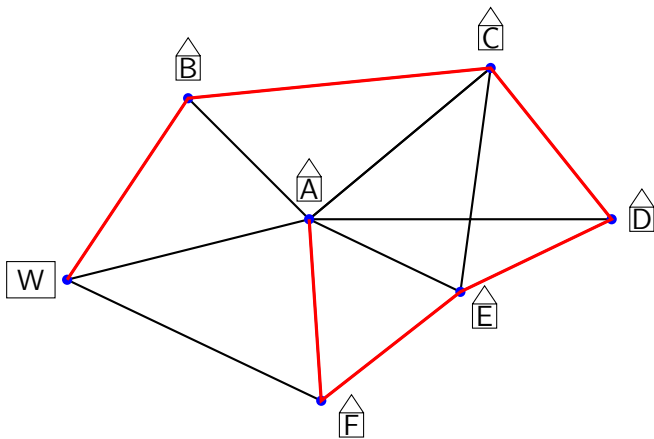
Die folgende Aufgabe wird in abgänderter Form als Einstiegsaufgabe für die nächste Einheit verwendet.

Aufgabe 4.20 (*Arbeitsblatt 4.6 (Weitere Aufgaben), Zusatzaufgabe 9*)

Die Abbildung zeigt das Wasserversorgungssystem zwischen einem Wasserwerk W und den Häusern A, B, C, D, E und F. Da die Leitungen schon sehr alt sind und häufig kaputt gehen, soll Bauleiter Kraus Leitungen erneuern. Da nur wenig Geld zur Verfügung steht, darf er nur so viele Leitungen erneuern, dass gerade alle Häuser mit Wasser versorgt werden. Welche Leitungen könnte Herr Kraus erneuern? Markiere eine möglich Lösung farbig.

Datei: Graphen496-Wasserwerk

Lösung: Es gibt viele verschiedene Lösungen. Hier zwei Möglichkeiten:



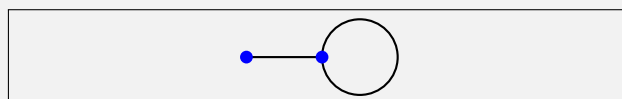
Aufgabe 4.21 (Arbeitsblatt 4.6 (Weitere Aufgaben), Zusatzaufgabe 10)

Ein Umkehrsatz zum letzten Satz könnte folgendermaßen lauten:

Behauptung: Gibt es in einem Graphen von jeder Ecke zu jeder anderen Ecke genau einen Weg, so ist der Graph ein Baum.

Warum ist diese Behauptung falsch? Zeichne einen Graphen, der ein Gegenbeispiel darstellt.

Gegenbeispiel:



Datei: Graphen48-Umkehrung-Baum-genau-ein-Weg

Lösung: Ist bereits im Aufgabentext enthalten.

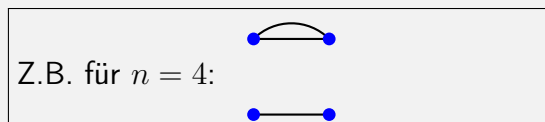
Aufgabe 4.22 (Arbeitsblatt 4.6 (Weitere Aufgaben), Zusatzaufgabe 11)

Ein Umkehrsatz zum letzten Satz könnte lauten:

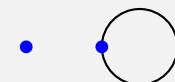
Behauptung: Besitzt ein Graph mit n Ecken genau $n - 1$ Kanten, so ist der Graph ein Baum.

Warum ist diese Behauptung falsch? Konstruiere ein Gegenbeispiel.

Gegenbeispiel:



oder für $n = 2$:



Datei: Graphen491-Umkehrung-Baum-n-1-Kanten

Lösung: Ist bereits im Aufgabentext enthalten.

Mündlich: Der richtige Umkehrsatz wird nachher formuliert, wenn wir ihn einfach beweisen können.

Aufgabe 4.23 (*Arbeitsblatt 4.6 (Weitere Aufgaben), Zusatzaufgabe 12*)

- a) Gegeben ist ein zusammenhängender Graph mit n Ecken und m Kanten. Laut Satz gilt $m \geq n - 1$. Wie viele Kanten müssen aus dem Graphen entfernt werden, um einen aufspannenden Baum zu erhalten?

Antwort: $Es\ müssen\ m - (n - 1) = m + 1 - n\ Kanten\ entfernt\ werden.$

- b) Gegeben ist ein vollständiges Vieleck mit n Ecken, $n \geq 3$. Wie viele Kanten müssen entfernt werden, um einen aufspannenden Baum zu erhalten?

Antwort: $Es\ müssen\ \frac{1}{2}n(n - 1) - (n - 1) = \frac{1}{2}(n - 1)(n - 2) = (n - 1)\left(\frac{n}{2} - 1\right)\ Kanten\ entfernt\ werden.$

Datei: Graphen492-Anzahl-Kanten-entfernen

Lösung: Ist bereits im Aufgabentext enthalten.

5 Unterrichtseinheit 5: Bipartite und plättbare Graphen

5.1 Inhalt

- Bipartite Bäume, bipartite Kreise
- Teilgraphen bipartiter Graphen
- m - n -Graphen, vollständige bipartite Graphen
- Ebene Graphen, Plättbare Graphen
- Ebene Graphen und Flächen

Weiter auf nächster Seite

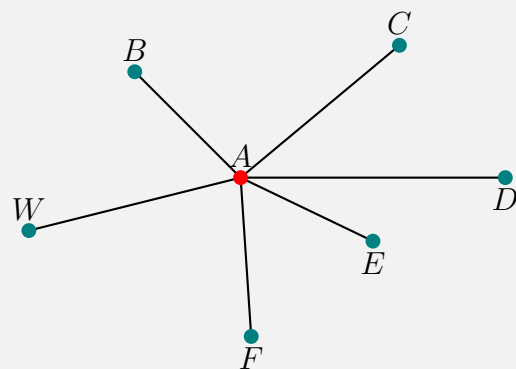
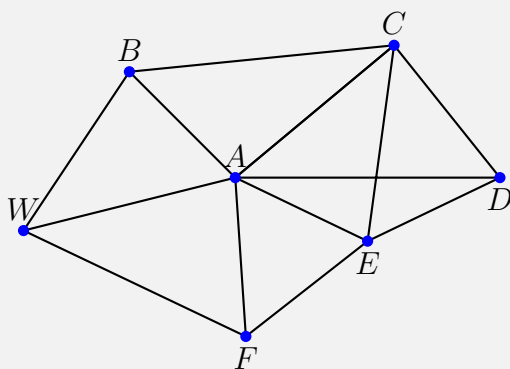
5.2 Wiederholung

Anmerkung

An Stelle des Wiederholungsblattes kann man den Graphen an die Tafel zeichnen und mit den Schüler:innen die Fragen besprechen.

Aufgabe 5.1 (Arbeitsblatt 5.1 (Wasserversorgung), Aufgabe 1)

- a) Neben einem kleinen Bergdorf wurde ein Wasserwerk W zur Versorgung der Häuser A, \dots, F gebaut. In der Graphik unten links siehst Du die Häuser und die möglichen Wasserleitungen. Aus Kostengründen sollen möglichst wenig Leitungen gebaut werden. Streiche aus dem Graphen möglichst viele Kanten, so dass noch alle Häuser mit Wasser versorgt werden können. Zeichne dann die Kanten des entstehenden Teilgraphen rechts ein.



Dies ist nur eine von vielen Lösungen

- b) Wie heißt die Eigenschaft eines Graphen, die in unserem Beispiel garantiert, dass jedes Haus mit Wasser versorgt wird?

Antwort: Der Graph ist .

- c) Wie heißt der Teilgraph, den Du im Aufgabenteil a) gezeichnet hast, in Bezug auf den ursprünglichen Graphen?

Antwort:

Der Teilgraph ist ein des linken Graphen.

- d) Die Wasserleitungsfirma hat nun Rohre geliefert, die zwei verschiedene Enden haben. Am einen Ende Anschlusstyp 1, am anderen den Anschlusstyp 2. Das bedeutet, dass nur Häuser mit verschiedenen Anschlüssen verbunden werden können. Außerdem ist vorgegeben, dass in jedem Haus nur einer der beiden Anschlusstypen verbaut werden kann. Zeige, dass die Wasserversorgung mit diesen Vorgaben gebaut werden kann. Färbe dazu die Häuser grün, die den Anschlusstyp 1 haben, und die anderen mit rot. Beachte, dass auch das Wasserwerk nur einen Anschlusstyp besitzen darf.

Die Ecken wurden oben entsprechend gefärbt.

Für andere Lösungen von Teil a) müssen die Färbungen entsprechend abgeändert werden.

Datei: Graphen50-Wasserversorgung

Lösung: Ist bereits im Aufgabentext enthalten.

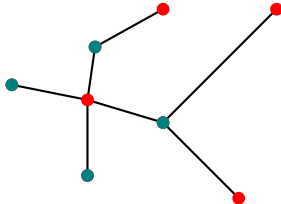
Mündlich: Bei der Besprechung der Aufgabe anmerken, dass der aufspannende Baum nach Aufgabenteil d) ein bipartiter Graph ist.

5.3 Bipartite Graphen

Tafelanschrieb

Satz: Jeder Baum mit mindestens zwei Ecken ist bipartit.

Beweisidee:



Vorgehen: L wählt eine Ecke und färbt sie grün. Geht dann durch den Baum und färbt die Ecken abwechselnd.

Tafelanschrieb

Beweis: Betrachte einen beliebigen Baum mit mindestens zwei Ecken.

Färbe eine beliebige Ecke grün. Laufe von dieser Ecke aus den Baum entlang und färbe die Ecken abwechselnd rot und grün.

Man erreicht jede Ecke, da der Baum zusammenhängend ist.

Jede Ecke wird nur über einen Weg erreicht. Daher treten keine Konflikte auf.

⇒ Der Baum ist bipartit. □

Mündlich: Wir untersuchen nun, welche Graphen, die nur aus einem Kreis bestehen, bipartit sind.

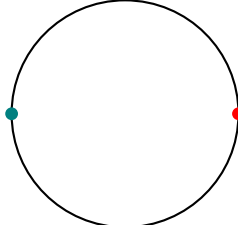
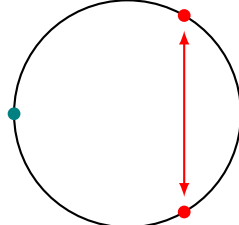
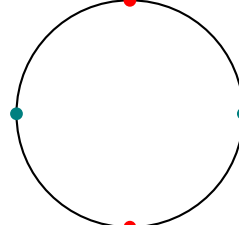
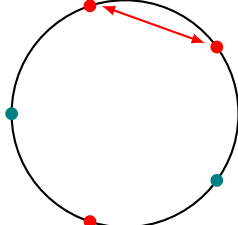
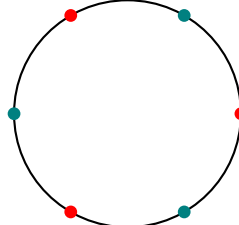
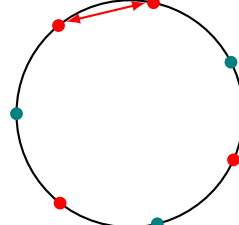
Weiter auf nächster Seite

Arbeitsblatt 5.2 (Bipartite Kreise)

Wann sind Graphen, die nur aus Ecken auf einem Kreis bestehen, bipartit?

Wir untersuchen folgende Fragestellung: Für welche natürlichen Zahlen n ist ein Graph, der nur aus n Ecken auf einem Kreis besteht, bipartit?

Schritt 1: Untersuche Beispiele für „kleine“ n von 2 bis 7.

n	2	3	4
Graph			
bipartit?	Ja	Nein	Ja
n	5	6	7
Graph			
bipartit?	Nein	Ja	Nein

Schritt 2: Stelle eine Vermutung auf, wie die obige Frage beantwortet werden kann.

Vermutung:

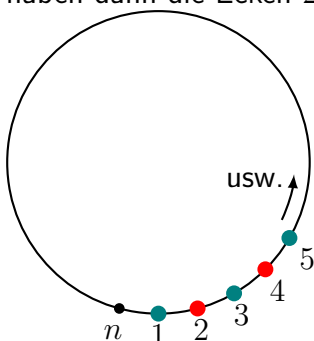
Gegeben ist ein Graph, der nur aus n Ecken auf einem Kreis besteht.

Falls n eine Zahl ist, dann ist der Graph bipartit.

Falls n eine Zahl ist, dann ist der Graph nicht bipartit.

Schritt 3: Beweise deine Vermutung durch geeignetes Färben der Ecken.

Die Ecken benennen wir hierzu gegen den Uhrzeigersinn mit den Zahlen 1 bis n . Beginne nun mit dem Färben, indem du Ecke 1 grün färbst und gegen den Uhrzeigersinn fortfährst. Welche Farbe haben dann die Ecken 2, 3, 4 usw.?



Für die Ecke mit der Nummer k ergibt sich folgender Zusammenhang:

Falls k eine Zahl ist, dann ist die Ecke k grün.

Falls k eine Zahl ist, dann ist die Ecke k rot.

Arbeitsblatt 5.2 (Bipartite Kreise)

Zwischen welchen beiden benachbarten Ecken kann überhaupt ein Konflikt bei der Färbung auftreten?

Zwischen der Ecke mit der Nummer und der Ecke mit der Nummer .

Falls n ist, sind beide Ecken unterschiedlich gefärbt, und es gibt keinen Konflikt. In diesem Fall ist der Graph bipartit.

Falls n ist, sind beide Ecken gleich gefärbt, und es gibt einen Konflikt. In diesem Fall ist der Graph nicht bipartit.

Anmerkung

Der eben bewiesene Satz sollte nun noch formuliert werden.

Tafelanschrieb

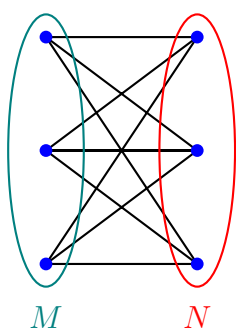
Satz: Ein Graph mit n Ecken, der nur aus einem Kreis besteht, ist genau dann bipartit, wenn n gerade ist.

(vgl. Arbeitsblatt 5.2)

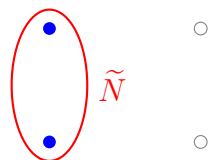
Satz: Jeder Teilgraph eines bipartiten Graphen, der mindestens zwei Ecken enthält, ist bipartit.

Beweis:

bipartiter Graph:

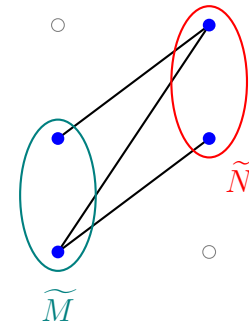


Fall 1: Nur Ecken aus M



Fall 2: Nur Ecken aus N
Analog

Fall 3: Aus M und N mindestens eine Ecke

**Anmerkung**

Hier genügt der Beweis durch die Zeichnung und mündliche Erklärung.

Für den bipartiten Graph wurde ein vollständiger bipartiter Graph gezeichnet, da er am einfachsten beschrieben werden kann: Von jeder Ecke der Menge M eine Kante zu jeder Ecke der Menge N .

Für den Fall 3 sollten nur so viele Kanten weggelassen werden, dass die Wahl der Mengen \tilde{M}, \tilde{N} eindeutig bleibt.

Mündlich: Wir formulieren diesen Satz um, damit wir ihn besser benutzen können.

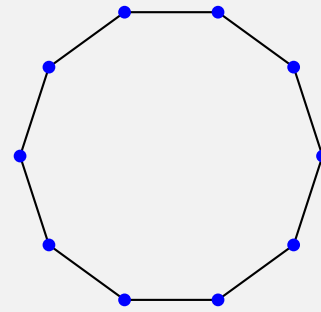
Tafelanschrieb

Folgerung: Enthält ein Graph einen Teilgraphen mit mindestens zwei Ecken, der nicht bipartit ist, dann ist der Graph auch nicht bipartit.

Spezialfall: Enthält ein Graph einen Kreis mit einer ungeraden Anzahl von Ecken, so ist er nicht bipartit.

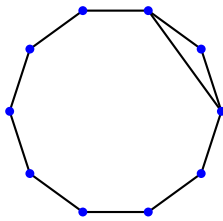
Aufgabe 5.2 (Arbeitsblatt 5.3 (Bipartit und nicht bipartit), Aufgabe 2)

Gegeben ist der nebenstehende bipartite Graph. Ergänze eine Kante, so dass der Graph nicht mehr bipartit ist.

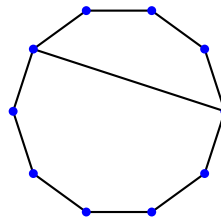


Datei: Graphen50-nicht-bipartit

Lösung: Z.B.



oder

**Anmerkung**

Der folgende Satz und Beweis wurde in der Durchführung 2024 weggelassen.

Tafelanschrieb

Satz: Ein einfacher Graph mit mindestens zwei Ecken ist genau dann bipartit, wenn er keinen Kreis mit ungerader Eckenzahl enthält.

Beweis: Aus Spezialfall: Ist ein Graph bipartit, so enthält er keinen Kreis mit ungerader Eckenzahl.

Betrachte einen einfachen Graphen, der keinen Kreis mit ungerader Eckenzahl enthält. Zeige: Der Graph ist bipartit.

Wir nehmen an, dass der Graph zusammenhängend ist.

Schritt 1: Konstruiere einen aufspannenden Baum. Der Baum ist bipartit. Färbe die Ecken, um sie den Mengen M und N zuzuordnen. Damit sind alle Ecken des Graphen gefärbt!

Schritt 2: Ergänze nun die restlichen Kanten des Graphen. Es gibt keine Kante, die gleich gefärbte Ecken verbindet, denn:

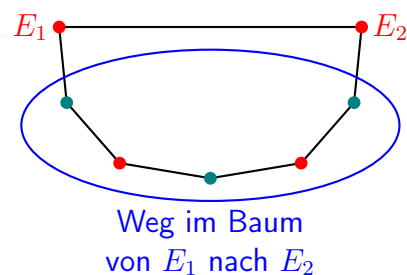
Annahme: Eine Kante verbindet zwei rote Ecken E_1, E_2 .

Im Baum gibt es einen Weg, der E_1 und E_2 verbindet.

E_1, E_2 haben dieselbe Farbe und der Baum ist bipartit

\Rightarrow der Weg hat eine ungerade Anzahl an Ecken.

Durch die Kante, die E_1 mit E_2 verbindet, entsteht ein Kreis mit ungerader Eckenzahl \downarrow \square



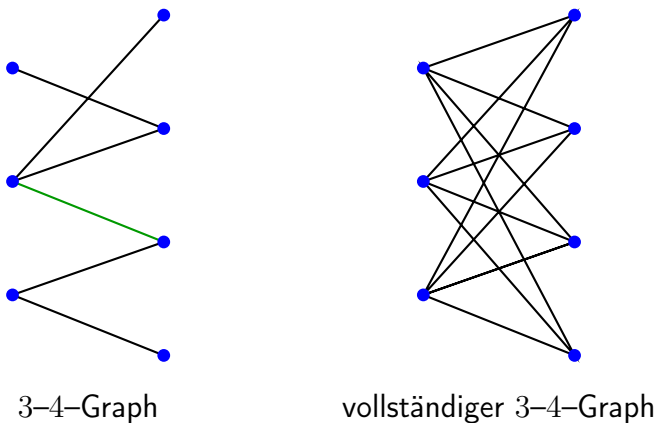
Weiter auf nächster Seite

Tafelanschrieb

Definition: 1) Ein zusammenhängender bipartiter Graph heißt m - n -Graph, wenn seine zwei Eckenteilmengen M und N m Ecken bzw. n Ecken enthalten.

2) Ein bipartiter Graph ohne parallele Kanten, bei dem jede Ecke aus M mit jeder Ecke aus N benachbart ist, heißt vollständiger bipartiter Graph.

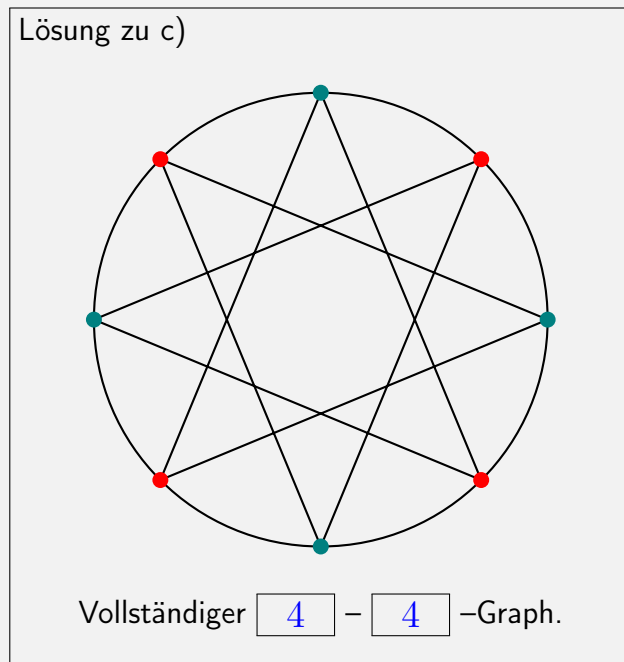
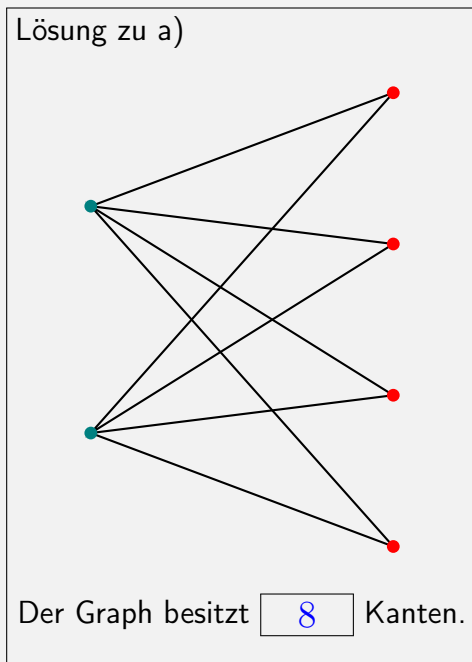
Veranschaulichung:



Vorgehen: Beim Hinzeichnen des linken Graphen zunächst Kanten weglassen, so dass er noch nicht zusammenhängend ist. Dann die Schüler:innen fragen, ob dies ein 3-4-Graph ist. Erst dann die restlichen Kanten (farbig?) ergänzen.

Aufgabe 5.3 (Arbeitsblatt 5.4 (Vollständige m - n -Graphen), Aufgabe 3)

- a) Zeichne einen vollständigen 2-4-Graphen. Wie viele Kanten besitzt er?
- b) Wie viele Kanten besitzt ein vollständiger m - n -Graph? **Antwort: $m \cdot n$ Kanten**
- c) Ergänze im Achteck Kanten (keine Ecken), bis ein vollständiger bipartiter Graph entsteht. Welcher vollständige m - n -Graph entsteht hierdurch?



Datei: Graphen50-m-n-Graphen

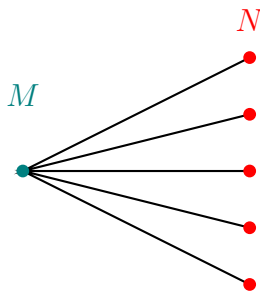
Lösung: Ist bereits im Aufgabentext enthalten.

Aufgabe 5.4 (Arbeitsblatt 5.4 (Vollständige m - n -Graphen), Zusatzaufgabe 1)

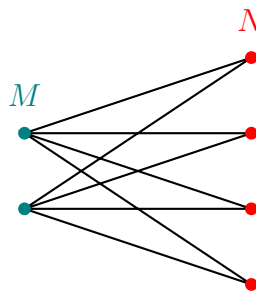
Zeichne alle vollständigen bipartiten Graphen mit 6 Ecken, die nicht zueinander isomorph sind.

Datei: Graphen50-vollstaendige-Graphen

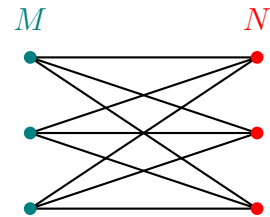
Lösung: M mit 1 Ecke
 N mit 5 Ecken



M mit 2 Ecken
 N mit 4 Ecken



M mit 3 Ecken
 N mit 3 Ecken



Alle vollständigen bipartiten Graphen mit 6 Ecken sind isomorph zu einem dieser Graphen. Es gibt nicht mehr mögliche Eckenverteilungen außer Vertauschung von M und N .

Aufgabe 5.5 (Arbeitsblatt 5.4 (Vollständige m - n -Graphen), Zusatzaufgabe 2)

Zeichne einen Baum, der ein

a) 2-3-Graph ist. **Lösung:** 

b) 1-4-Graph ist. **Lösung:** 

c) 4-9-Graph ist. **Lösung:** 

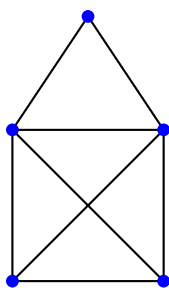
Datei: Graphen50-Baeume-m-n-Graphen

Lösung: Ist bereits im Aufgabentext enthalten.

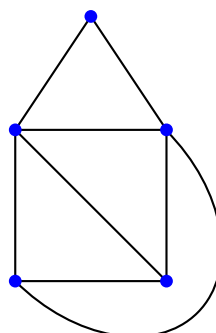
5.4 Ebene Graphen

Tafelanschrieb

9. Ebene und plättbare Graphen



nicht eben, aber plättbar



eben und plättbar

Vorgehen: Die Textzeilen unter den Graphen werden erst nach der Definition ergänzt.

Mündlich: Im *Haus vom Nikolaus* kreuzen sich zwei Kanten, ohne dass der Kreuzungspunkt eine Ecke ist. Wir stellen uns vor, dass die eine Kante über der anderen verläuft. Das bedeutet, dass der Graph nicht ganz in der Zeichenebene enthalten ist, sondern in die dritte Dimension geht. Man kann den Graphen jedoch isomorph umzeichnen, so dass kein Kreuzungspunkt vorkommt, der keine Ecke ist. Heute wollen wir uns mit Graphen beschäftigen, die sich so umzeichnen lassen.

Anmerkung

Hier wird *Isomorphie* wiederholt.

Tafelanschrieb

Definition: 1) Ein in der Ebene gezeichneter Graph heißt eben, wenn seine Kanten keine Punkte gemeinsam haben außer Ecken.

2) Ein Graph heißt plättbar, wenn er isomorph zu einem ebenen Graphen ist.

Anmerkung

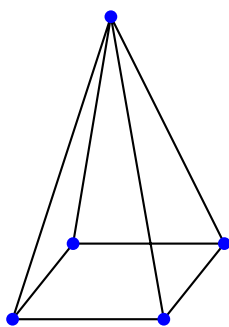
Ein *planarer Graph* ist isomorph zu einem ebenen Graphen, das ist dasselbe wie *plättbar*.

Aufgabe 5.6 (Arbeitsblatt 5.5 (Ebene Graphen), Aufgabe 4)

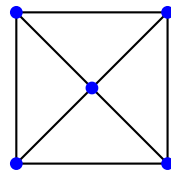
Gegeben sind die folgenden Graphen, die Begrenzungen dreidimensionaler Körper darstellen. Zeige, dass die Graphen plättbar sind, indem Du jeweils einen isomorphen ebenen Graphen zeichnest.

Datei: Graphen50-Graphen-eben-machen

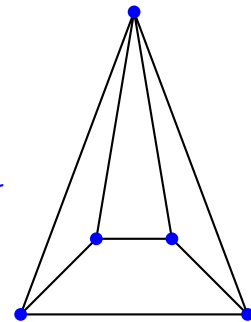
Lösung: a) In dieser Teilaufgabe gibt es zwei verschiedene Lösungen!



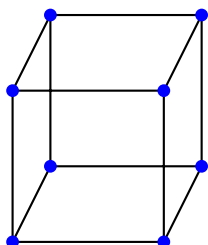
isomorphe Graphen:



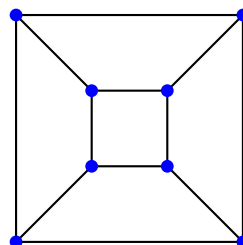
oder

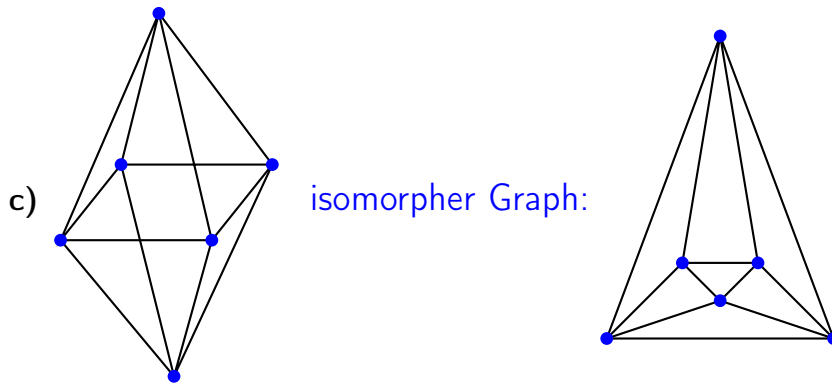


b)



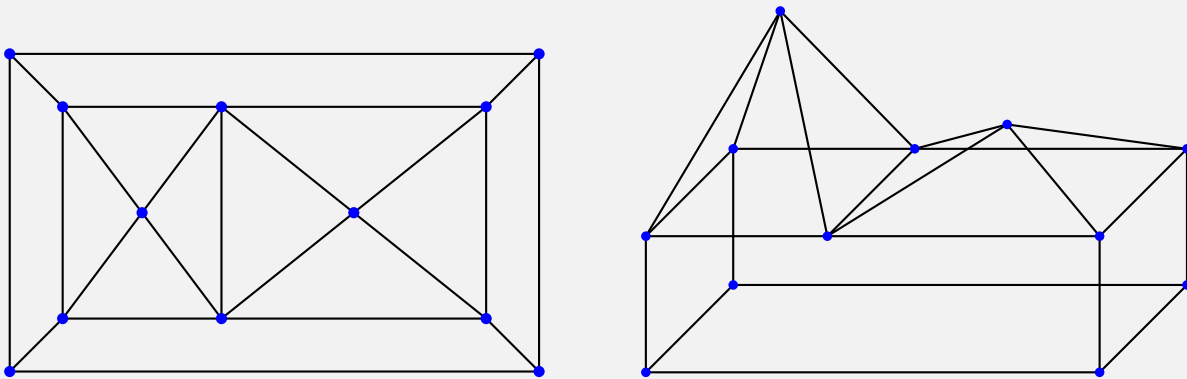
isomorpher Graph:





Aufgabe 5.7 (Arbeitsblatt 5.5 (Ebene Graphen), Zusatzaufgabe 3)

Zeichne neben den ebenen Graphen ein Gebäude, das zu dem Graphen gehören könnte.



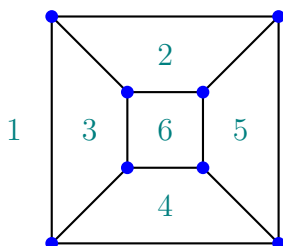
Datei: Graphen51-Kirche-eben

Lösung: Ist bereits im Aufgabentext enthaltenn

Tafelanschrift

Beobachtung: Ein ebener Graph unterteilt die Zeichenebene in Flächen, eine Außenfläche und keine, eine oder mehrere Innenflächen.

Beispiel:

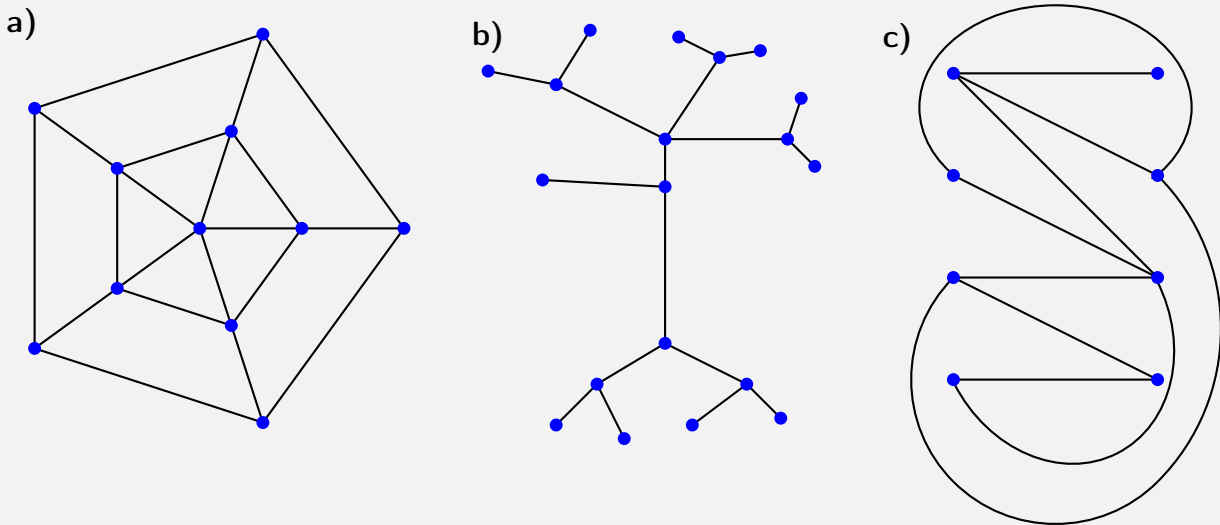


Vorgehen: L. zeichnet an Tafel, SuS tragen die Nummern auf dem Arbeitsblatt in die Zeichnung ein.

Weiter auf nächster Seite

Aufgabe 5.8 (Arbeitsblatt 5.6 (Ecken, Kanten und Flächen), Aufgabe 5)

Trage in die Graphen eine Nummerierung der Flächen ein, in die die Ebene durch den Graphen unterteilt wird. Vergiss die Außenfläche nicht. Fülle dann die Tabelle aus.



Graph	Anzahl Ecken	Anzahl Kanten	Anzahl Flächen	$e - k + f$
a)	$e = 11$	$k = 20$	$f = 11$	2
b)	$e = 19$	$k = 18$	$f = 1$	2
c)	$e = 8$	$k = 10$	$f = 4$	2
Baum mit n Ecken	$e = n$	$k = n - 1$	$f = 1$	2

Datei: Graphen52-Unterteilung-Ebene

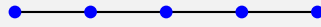
Lösung: Ist bereits im Aufgabentext enthalten.

Weiter auf nächster Seite

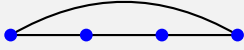
Aufgabe 5.9 (Arbeitsblatt 5.6 (Ecken, Kanten und Flächen), Zusatzaufgabe 4)

Zeichne zusammenhängende Graphen mit jeweils vier Kanten, die

a) eine Außenfläche und keine Innenfläche,

Lösung: 

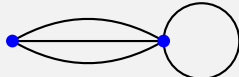
b) eine Außenfläche und eine Innenfläche,

Lösung: 

c) eine Außenfläche und zwei Innenflächen,

Lösung: 

d) eine Außenfläche und drei Innenflächen,

Lösung: 

e) eine Außenfläche und vier Innenflächen

Lösung: 

besitzen.

Datei: Graphen53-Unterteilung-vier-Kanten

Lösung: Ist bereits im Aufgabentext enthalten.

5.5 Schriftliche Aufgaben (ohne Lösungen)

Aufgabe 5.10 (Arbeitsblatt 5.7 (Schriftliche Aufgaben), Aufgabe 6)

Gegeben ist der nebenstehende Graph.

a) Wie viele Ecken hat der längste Kreis im Graphen?

Antwort: Ecken.

b) Markiere farbig einen Kreis mit 4 Ecken (grün).

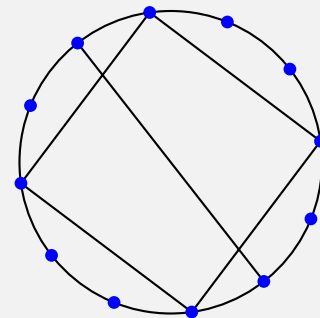
c) Markiere farbig einen Kreis mit 5 Ecken (rot).

d) Ist der Graph bipartit?

Antwort (Ja/Nein): .

e) Begründe Deine Antwort der letzten Teilaufgabe.

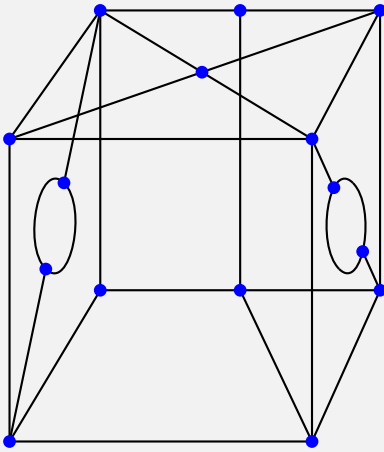
Begründung:



Datei: Graphen597-Kreise-und-plaettbar

Aufgabe 5.11 (*Arbeitsblatt 5.7 (Schriftliche Aufgaben), Aufgabe 7*)

Gegeben ist untenstehender Graph eines Würfels, bei dem auf den Seiten zusätzliche Kanten und Ecken ergänzt wurden. Zeichne einen isomorphen ebenen Graphen daneben.

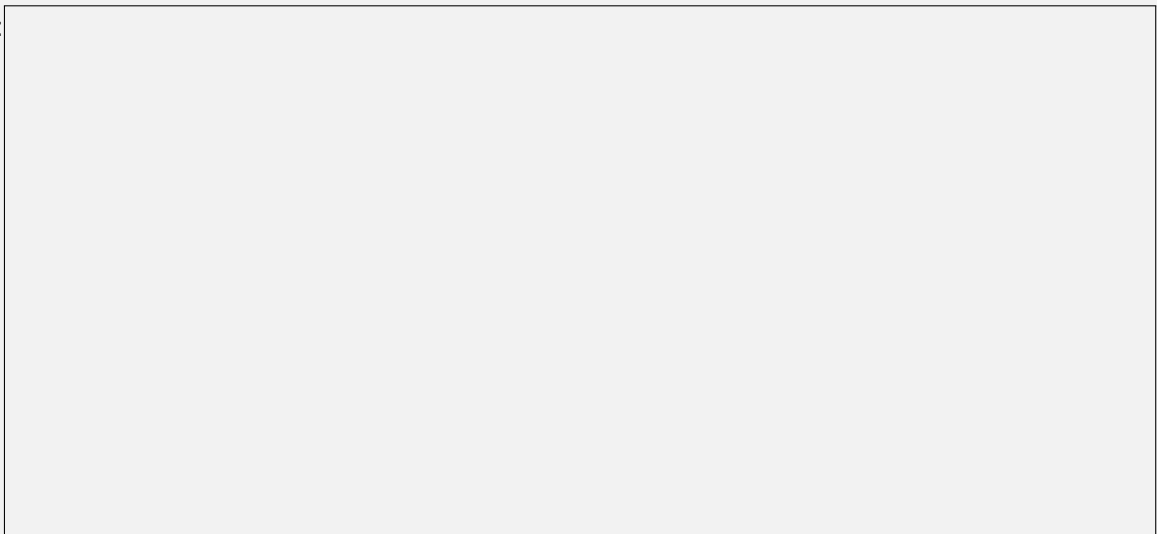


Datei: Graphen593-Graphen-plaetten

Aufgabe 5.12 (*Arbeitsblatt 5.7 (Schriftliche Aufgaben), Aufgabe 8*)

Zeichne einen ebenen Graphen, der $e = 4$ Ecken und $k = 10$ Kanten besitzt und die Ebene in $f = 8$ Flächen unterteilt. Nummeriere die Flächen.

Lösung:



Datei: Graphen598-Zahlen-vorgeben

Weiter auf nächster Seite

Aufgabe 5.13 (*Arbeitsblatt 5.7 (Schriftliche Aufgaben), Aufgabe 9*)

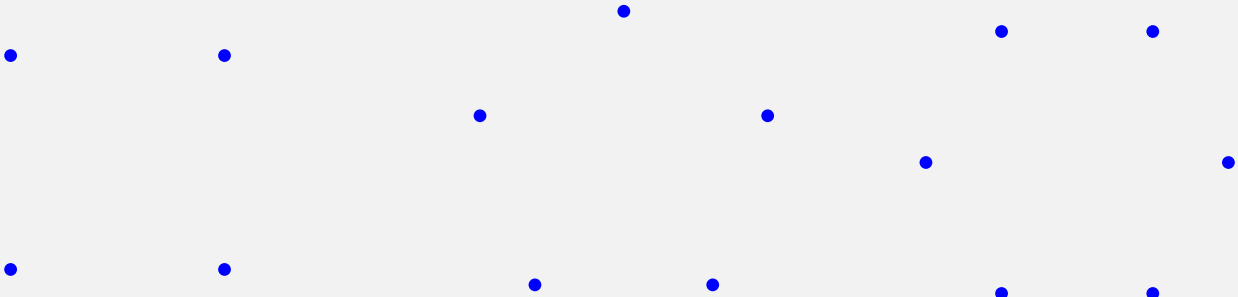
Erinnerung: Ein Graph heißt einfach, wenn er keine Schlingen und keine parallelen Kanten besitzt.

Wie viele Kanten kann ein ebener einfacher Graph besitzen? Konstruiere ebene einfache Graphen, die möglichst viele Kanten und

a) 4 Ecken,

b) 5 Ecken,

c) 6 Ecken besitzen.



Trage Deine Ergebnisse in die Tabelle ein.

Anzahl Ecken	$e = 4$	$e = 5$	$e = 6$
Anzahl Kanten	$k =$	$k =$	$k =$

Datei: Graphen54-wie-viele-Kanten

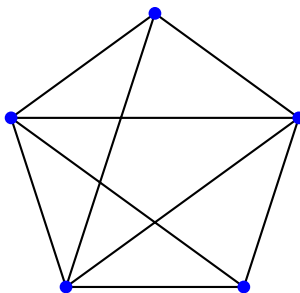
5.6 Weitere Aufgaben

Aufgabe 5.14 (*Arbeitsblatt 5.8 (Weitere Aufgaben), Zusatzaufgabe 5*)

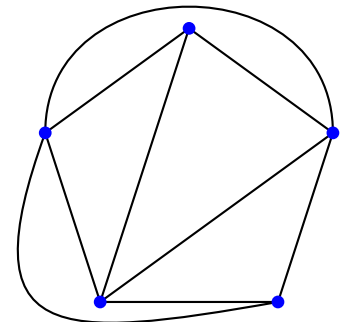
Beweise, dass die folgenden Graphen plättbar sind, indem Du einen isomorphen ebenen Graphen daneben zeichnest.

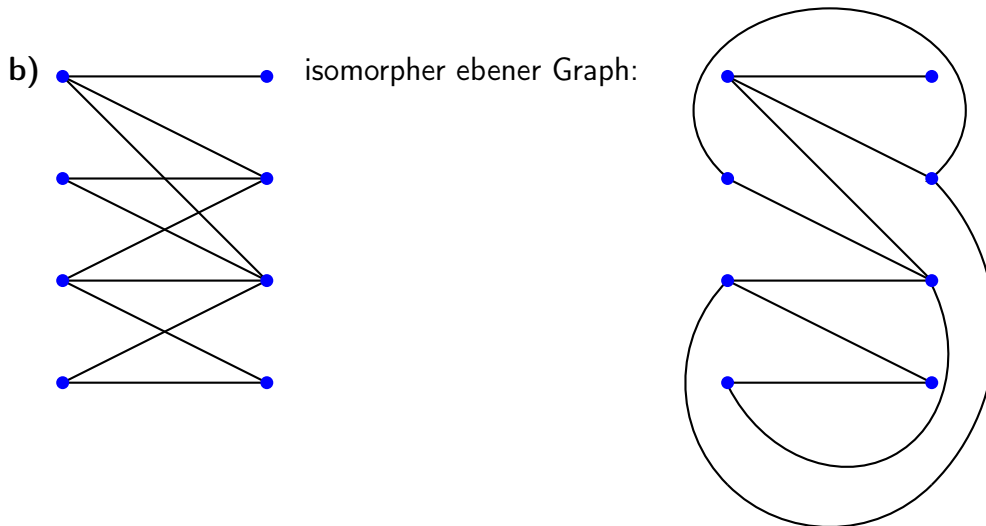
Datei: Graphen57-plaettbar

Lösung: a)



isomorpher ebener Graph:

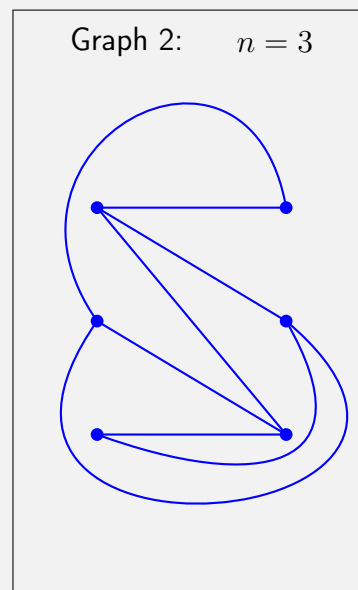
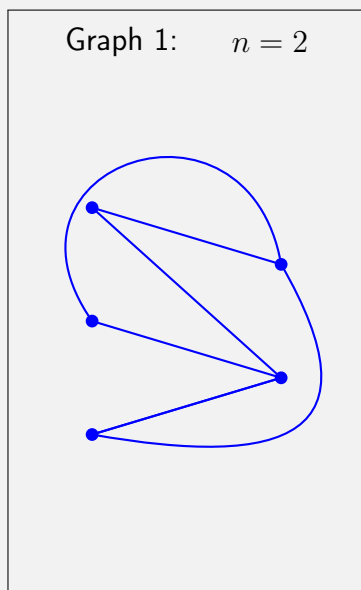




Aufgabe 5.15 (Arbeitsblatt 5.8 (Weitere Aufgaben), Zusatzaufgabe 6)

Erinnerung: Ein Graph heißt einfach, wenn er keine Schlingen und keine parallelen Kanten besitzt.

Wie viele Kanten kann ein **ebener einfacher bipartiter** Graph besitzen? Konstruiere ebene einfache bipartite Graphen, deren eine Eckenmenge 3 Ecken enthält, und die möglichst viele Kanten besitzen. Trage Deine Ergebnisse in die Tabelle ein.



Anzahl Ecken in N	$n = 2$	$n = 3$
Anzahl Kanten	$k = 6$	$k = 8$

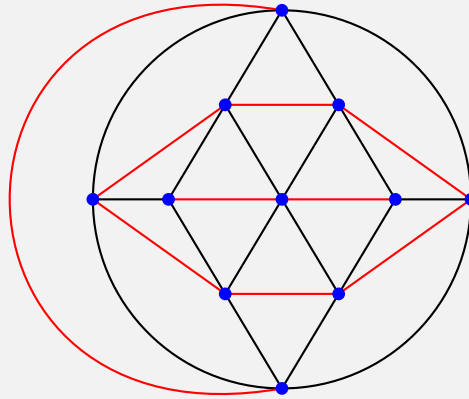
Datei: Graphen55-bipartit-wie-viele-Kanten

Lösung: Ist bereits im Aufgabentext enthalten.

Aufgabe 5.16 (*Arbeitsblatt 5.8 (Weitere Aufgaben), Zusatzaufgabe 7*)

Erinnerung: Ein Graph heißt einfach, wenn er keine Schlingen und keine parallelen Kanten besitzt.

Im unten gezeichneten ebenen einfachen Graphen sollen möglichst viele Kanten ergänzt werden (keine Ecken). Er soll eben und einfach bleiben. Zeichne die ergänzten Kanten farbig ein. Wie viele sind es?



Datei: Graphen591-Kanten-ergaenzen

Lösung: Es wurden 9 Kanten ergänzt. Der Graph besitzt $e = 11$ Ecken und $k = 18 + 9 = 27$ Kanten.

Weiter auf nächster Seite

Aufgabe 5.17 (*Arbeitsblatt 5.8 (Weitere Aufgaben), Zusatzaufgabe 8*)

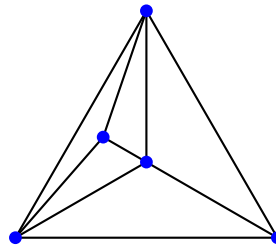
Es sollen ebene einfache Graphen mit 3, 4, 5 Ecken und möglichst vielen Kanten konstruiert werden. Gehe dazu folgendermaßen vor:

- Zeichne als erstes ein Dreieck, Seitenlänge ca. 5 cm. Dieses hat drei Ecken und drei Kanten. Da es eben und einfach sein soll, kann keine weitere Kante ergänzt werden.
- Zeichne eine zusätzliche Ecke ins Innere des Dreiecks und verbinde sie mit allen anderen Ecken.
- Zeichne eine weitere zusätzliche Ecke ins Innere eines der Teildreiecke und verbinde sie mit allen Ecken des Teildreiecks.
- Mache so weiter, so lange Du willst.
- Wie viele Kanten kommen in jedem Schritt dazu?
- Wie viele Kanten kannst Du ergänzen, wenn Du eine neue Ecke außerhalb des ursprünglichen Dreiecks hinzufügst?
- Fülle die Tabelle aus.

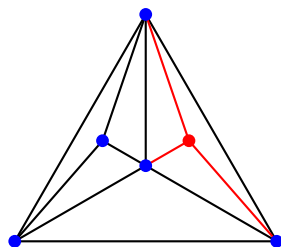
Anzahl Ecken	$e = 3$	$e = 4$	$e = 5$	$e = 6$	$e = 7$
Anzahl Kanten	$k = 3$	$k = 6$	$k = 9$	$k = 12$	$k = 15$

Datei: Graphen592-vollstaendig-eben-konstruktion

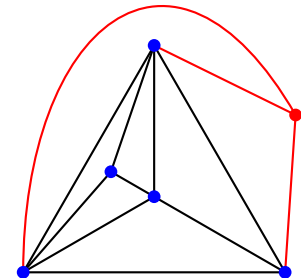
Lösung: Nachdem zwei Ecken ergänzt wurden:



Eine weitere Ecke innen:



Eine weitere Ecke außen:



Egal, ob eine Ecke innerhalb oder außerhalb ergänzt wird: Es kommen jedesmal 3 Kanten dazu.

6 Unterrichtseinheit 6: Plättbare und nicht plättbare Graphen

6.1 Inhalt

- Eulersche Formel, vollständig ebene Graphen
- Plättbarer Graph
- Möglichst „kleine“ nicht plättbare Graphen: vollständiges Fünfeck, 3-3-Graph
- Unterteilungen von Graphen, Satz von Kuratowski

6.2 Wiederholung

Vorgehen: L fragt die Schüler:innen nach der Bedeutung der Begriffe und trägt dann die Antworten ein.

Vorlage Visualizer

- a) Einfacher Graph:
Keine Schlingen und keine parallelen Kanten
- b) Ebener Graph:
Kanten haben keine Punkte gemeinsam außer Ecken
- c) Plättbarer Graph:
Der Graph ist isomorph zu einem ebenen Graphen

Mündlich: Man kann den Graphen so „verbiegen“, dass ein ebener Graph entsteht.

Vorgehen: L zeigt die Lösungen der letzten Aufgabe aus der vorigen Einheit und ergänzt gegebenenfalls die Einträge der letzten Zeile *Baum mit n Ecken*:
 $e = n, k = n - 1, f = 1, e - k + f = n - (n - 1) + 1 = 2.$

6.3 Ebene Graphen

Tafelanschrieb

Satz: Für jeden zusammenhängenden ebenen Graphen gilt die eulersche Flächenformel

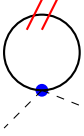
$$e - k + f = 2.$$


Hierbei bezeichnet e die Anzahl der Ecken, k die Anzahl der Kanten und f die Anzahl der Flächen. Die äußere Fläche muss mitgezählt werden.

Tafelanschrieb

Beweis: Betrachte einen zusammenhängenden ebenen Graphen mit e Ecken, k Kanten und f Flächen.

Entferne so lange Kanten, bis der entstehende Teilgraph ein Baum ist.

Entfernen einer Schlinge:  f und k werden jeweils um 1 kleiner, e bleibt gleich
 $\Rightarrow e - k + f$ bleibt gleich.

Entfernen einer parallelen Kante:  genauso

Entfernen einer Kante aus einem Kreis:  genauso

Wir können also alle Kreise „öffnen“, ohne den Wert von $e - k + f$ zu ändern. Der Graph bleibt zusammenhängend.

Am Ende bleibt ein Baum mit e Ecken übrig. Für diesen gilt $e - k + f = 2$ (letzte Aufgabe).
 \Rightarrow Für den ursprünglich gegebenen Graphen gilt ebenfalls $e - k + f = 2$. \square

Mündlich: Wenn eine Kante entfernt wird, verschmelzen zwei Flächen zu einer.

Aufgabe 6.1 (Arbeitsblatt 6.1 (Graphen und Eulerformel), Aufgabe 1)

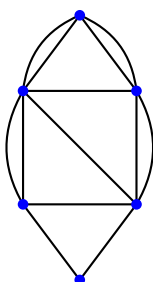
- Ein zusammenhängender ebener Graph besitzt 13 Kanten und unterteilt die Ebene in 9 Flächen. Wie viele Ecken hat er?
- Ein zusammenhängender ebener Graph hat 5 Ecken und 7 Flächen. Wie viele Kanten hat er?
- Zeichne jeweils für a) und b) einen ebenen Graphen, der diese Eigenschaften hat. Sind die Graphen, die Du gezeichnet hast, einfach?

Datei: Graphen601-Flaechen-Kanten

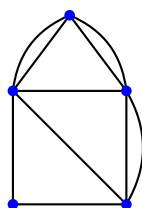
Lösung: a) $e - k + f = 2 \Rightarrow e = 2 + k - f$. Hier ist $k = 13$ und $f = 9$, also ist $e = 2 + 13 - 9 = 6$.

b) $e - k + f = 2 \Rightarrow k = e + f - 2$. Hier ist $e = 5$ und $f = 7$, also ist $k = 5 + 7 - 2 = 10$.

c) Zu a):



Zu b):



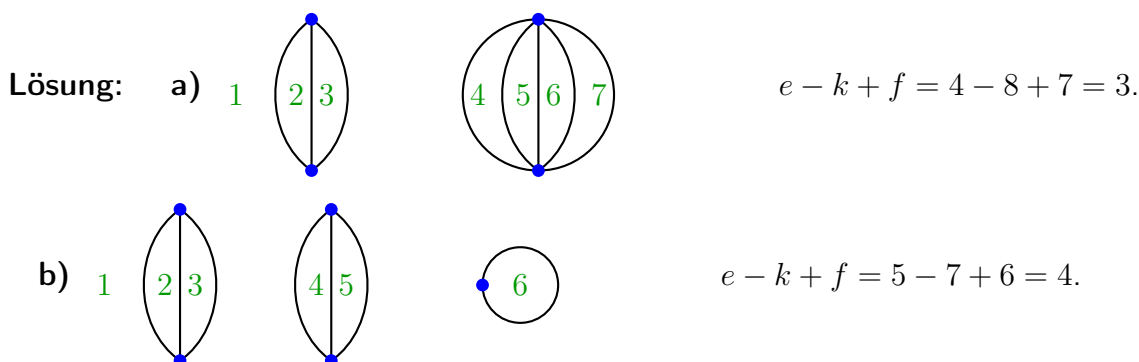
Die Graphen sind nicht einfach, da sie parallele Kanten (oder je nach Lösung Schlingen) besitzen.

Hinweis: Ein einfacher ebener Graph kann höchstens $3e - 6$ Kanten besitzen, siehe später.

Aufgabe 6.2 (Arbeitsblatt 6.1 (Graphen und Eulerformel), Aufgabe 2)

- a) Zeichne einen eben Graphen mit 7 Flächen, der nicht zusammenhängend ist und aus zwei Komponenten besteht. Berechne $e + k - f$.
- b) Zeichne einen eben Graphen mit 6 Flächen, der nicht zusammenhängend ist und aus drei Komponenten besteht. Berechne $e + k - f$.
- c) Sei ein ebener Graph mit e Ecken, k Kanten und f Flächen gegeben, der aus n Komponenten besteht. Stelle eine Vermutung für den Wert von $e + k - f$ in Abhängigkeit von n auf. Überprüfe, ob Deine Formel auch für $n = 1$ stimmt. In diesem Fall ist der Graph zusammenhängend.

Datei: Graphen611-Eulerformel-Komponenten



- c) Es gilt $e - k + f = n + 1$. Diese Formel ist für $n = 1$ identisch mit der eulerschen Formel.

Man kann diese Formel beweisen, indem man die eulersche Formel auf jede Komponente anwendet und dann die Gleichungen addiert. Dabei wird die äußere Fläche n Mal gezählt anstelle von 1 Mal. Man muss also $(n - 1)$ abziehen und erhält

$$e - k + f = 2n - (n - 1) = n + 1.$$

Mündlich: Ist ein Graph plättbar, so können wir dies überprüfen, indem wir einen isomorphen ebenen Graphen zeichnen. Wir wollen nun Werkzeuge kennenlernen, mit deren Hilfe wir feststellen können, ob ein Graph plättbar oder nicht plättbar ist. Dazu betrachten wir zunächst ebene Graphen mit möglichst vielen Kanten.

Tafelanschrieb

Definition: Ein Graph heißt vollständig eben, wenn er einfach und eben ist und ihm keine Kante hinzugefügt werden kann, ohne dass seine Eigenschaft, einfach und eben zu sein, verloren geht.

Anmerkung

Anstelle von *vollständig eben* wird in der Literatur der Begriff *maximal planar* verwendet. Wobei der letzte Begriff allgemeiner ist, denn er bezeichnet Graphen, die zu einem vollständig ebenen Graphen isomorph sind.

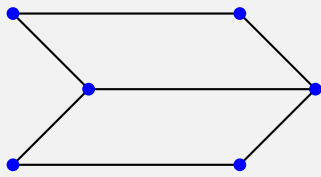
Analog zu den Begriffen *vollständiger Graph* und *vollständig bipartiter Graph* haben wir uns für den in der Definition verwendeten Begriff entschieden.

Anmerkung

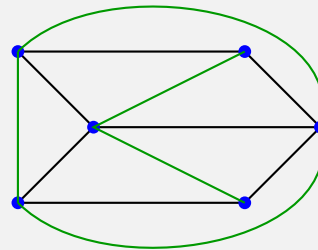
Mit Hilfe der folgenden Aufgabe wird die Definition veranschaulicht und der Beweis des nächsten Satzes vorbereitet. Alternativ kann man nur an der Tafel arbeiten, wie weiter unten beschrieben.

Aufgabe 6.3 (Arbeitsblatt 6.2 (Möglichst viele Kanten), Aufgabe 3)

Gegeben ist der folgende Graph.



Lösung:



Ergänze möglichst viele Kanten, so dass der entstehende Graph einfach und eben ist. Wie viele Kanten kannst Du ergänzen?

Datei: Graphen612-ergaenzen-vollst-eben

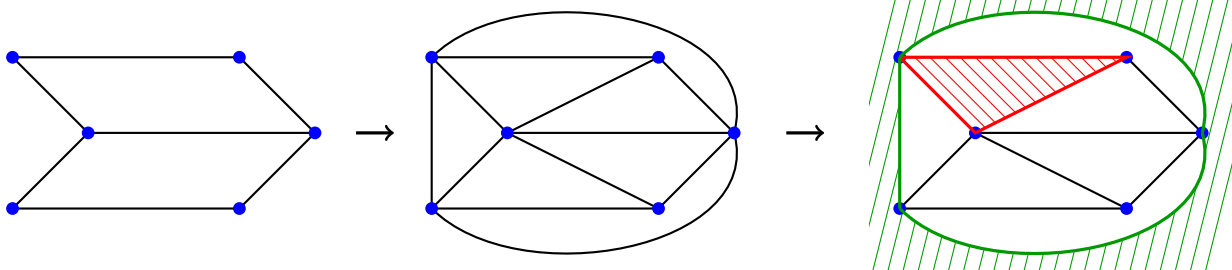
Lösung: Man kann 5 Kanten ergänzen, siehe grüne Kanten in der Graphik.

Vorgehen: Alternative nur an der Tafel: Zunächst wird der linke Graph an die Tafel gezeichnet. Die Schüler:innen sollen überlegen, wie viele Kanten sie noch hinzufügen können, so dass ein vollständig ebener Graph entsteht. Dazu sollen sie den Graphen in ihren Aufschrieb übernehmen.

Dann werden im Graphen die fehlenden 5 Kanten ergänzt, siehe mittlerer Graph.

Tafelanschrieb

Wie viele Kanten müssen ergänzt werden, damit ein vollständig ebener Graph entsteht?



Vorgehen: Gemeinsam wird festgestellt, dass in diesem Graphen (an der Tafel oder in der Aufgabe) alle Flächen Dreiecke sind, auch die äußere. Ein inneres Dreieck und das äußere werden markiert, siehe rechte Graphik.

Tafelanschrieb

Satz: Ein vollständig ebener Graph mit $e \geq 3$ Ecken besitzt $k = 3 \cdot e - 6$ Kanten.

Beweis: Betrachte einen vollständig ebenen Graphen.

Er ist zusammenhängend, denn sonst könnte man noch eine Kante ergänzen.

\Rightarrow Es gilt die eulersche Formel $f = 2 + k - e$.

Jede innere Fläche ist ein Dreieck, denn sonst könnte noch eine Kante eingefügt werden.

Die äußere Fläche wird auch von 3 Kanten begrenzt, denn sonst könnte man außen noch eine Kante ergänzen.

Addiert man die Anzahl der Kanten, die die Dreiecke begrenzen, so zählt man jede Kante doppelt.

$\Rightarrow 2k = 3f = 3(2 + k - e)$

$\Rightarrow 2k = 6 + 3k - 3e \Leftrightarrow 0 = 6 + k - 3e \Leftrightarrow k = 3e - 6. \quad \square$

Mündlich: Am letzten Graphen erklären, dass in jedem Viereck eine Kante ergänzt werden konnte.

Anmerkung

Es gilt auch die Umkehrung, wir verzichten hier aus Zeitgründen darauf. Man kann den Beweis rückwärts lesen: Besitzt ein Graph $3e - 6$ Kanten, dann zeigt die obige Äquivalenz, dass im Graphen alle Fläche durch Dreiecke begrenzt sind, auch die Außenfläche ist durch drei Kanten begrenzt. Dann kann keine Kante dazugefügt werden, ohne dass die Eigenschaft, eben zu sein, verloren geht.

Vorgehen: Nun kann die Aussage des Satzes am letzten Graphen nachgerechnet werden. Er hat $e = 6$ Ecken und $k = 12$ Kanten: $3 \cdot e - 6 = 18 - 6 = 12 = k$. Der Satz garantiert uns, dass wir keine Kante vergessen haben.

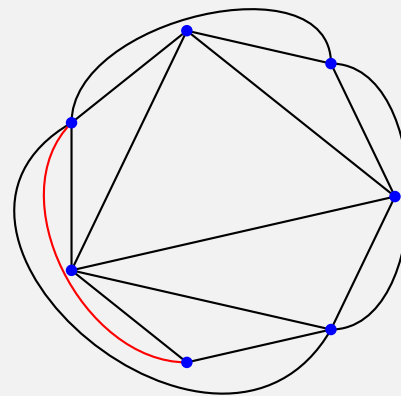
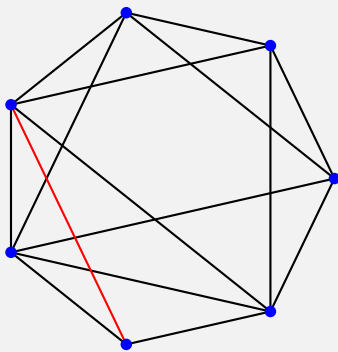
Tafelanschrieb

Folgerung: Ein einfacher ebener Graph mit $e \geq 3$ Ecken besitzt höchstens $k = 3e - 6$ Kanten.

Aufgabe 6.4 (*Arbeitsblatt 6.3 (Plättbare und nicht plättbare Graphen), Aufgabe 4*)

Gegeben ist der unten links gezeichnete Graph.

- Beweise, dass der Graph plättbar ist, indem Du daneben einen isomorphen ebenen Graphen zeichnest.
- Wie viele Ecken und Kanten besitzt der Graph? $e =$, $k =$.
- Warum ist der Graph nicht vollständig eben?
- Ergänze (zuerst im rechten, dann im linken Graphen) so viele Kanten (in rot), bis der Graph vollständig eben ist.

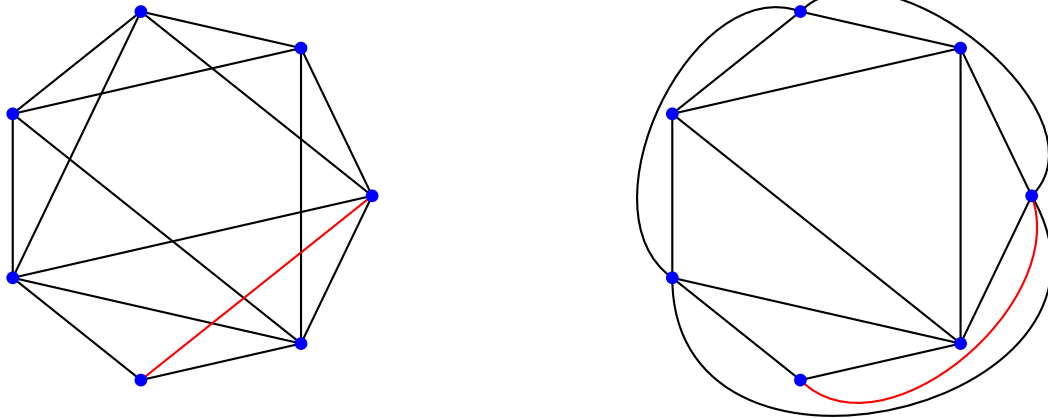


Datei: Graphen603-plaettbar-vollstaendig

Lösung: a) und b) Siehe oben.

- Ein vollständiger Graph mit 7 Ecken muss $k = 3 \cdot 7 - 6 = 15$ Kanten besitzen. Der gegebene Graph besitzt jedoch nur 14 Kanten.
Andere Antwort: In Teil c) kann eine Kante ergänzt werden, also ist der Graph nicht vollständig eben.

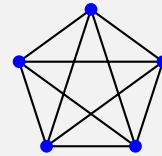
- Aus der Formel des letzten Satzes folgt, dass genau eine Kante ergänzt werden muss. Eine Lösung siehe Graphik oben. Je nachdem, wie die Lösung von a) gezeichnet wurde, muss die rote Kante entsprechend gewählt werden. Hier eine andere Lösung:



6.4 Nicht plättbare Graphen

Aufgabe 6.5 (Arbeitsblatt 6.3 (Plättbare und nicht plättbare Graphen), Aufgabe 5)

Gegeben ist das vollständige Fünfeck, siehe rechts.



a) Warum ist das vollständige Fünfeck einfach?

Antwort:

b) Wie viele Ecken und Kanten hat das vollständige Fünfeck? $e =$, $k =$.

c) Angenommen, das vollständige Fünfeck wäre plättbar. Dann besitzt es einen isomorphen einfachen und ebenen Graphen. Wie viele Ecken und Kanten hat der isomorphe Graph?

Antwort: $e =$, $k =$.

d) Für diesen isomorphen einfachen und ebenen Graphen gilt $3e - 6 =$.

e) Warum gibt es diesen isomorphen ebenen und einfachen Graphen nicht?

Antwort:

f) Also ist die Annahme, das vollständige Fünfeck wäre plättbar, .

Datei: Graphen613-Fuenfeck-nicht-plaettbar

Lösung: Ist bereits im Aufgabentext enthalten.

Tafelanschrieb

10. Nicht plättbare Graphen

Satz: Ein vollständiges Fünfeck ist nicht plättbar. (Beweis siehe Übungsaufgabe)

Mündlich: Dies ist der erste Graph, von dem wir bewiesen haben, dass er nicht plättbar ist. Nun folgt der zweite wichtige Graph, der nicht plättbar ist.

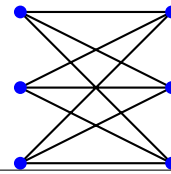
Tafelanschrieb

Satz: Der vollständige 3-3-Graph ist nicht plättbar.

Beweisversuch:

$$e = 6 \Rightarrow 3 \cdot e - 6 = 12$$

Es gilt $k = 9 \leq 12$, also kein Widerspruch



Mündlich: Man kann nicht wie beim vollständigen Fünfeck beweisen, dass dieser Graph nicht plättbar ist.

Sucht man im vollständigen 3-3-Graphen Kreise, so stellt man fest, dass es nur Kreise gibt, die mindestens 4 Ecken bzw. 4 Kanten besitzen. Dies wird dem Graphen zum Verhängnis.

Tafelanschrieb

Beweis: Annahme: Der vollständige 3-3-Graph ist plättbar

Dann gibt es einen isomorphen ebenen Graphen.

Der ebene Graph hat $e = 6$ Ecken und $k = 9$ Kanten.

$$\text{eulersche Formel} \Rightarrow f = 2 + k - e = 5$$

Der ebene Graph hat, wie der vollständige 3-3-Graph, nur Kreise mit mindestens 4 Ecken.

\Rightarrow jede Fläche wird von mindestens 4 Kanten begrenzt, auch die Außenfläche

Addiert man die Anzahl der begrenzenden Kanten, so zählt man jede Kante doppelt

$$\Rightarrow 2k \geq 4f = 20 \Rightarrow k \geq 10 \quad \text{Denn er besitzt nur 9 Kanten}$$

\Rightarrow die Annahme muss falsch sein

\Rightarrow der vollständige 3-3-Graph ist nicht plättbar. \square

Satz: Ist ein Graph plättbar, dann sind auch alle seine Teilgraphen plättbar. Insbesondere: Besitzt ein Graph auch nur einen Teilgraphen, der nicht plättbar ist, dann ist der Graph nicht plättbar.

Beweisskizze: Gibt es zu einem Graphen einen isomorphen ebenen Graphen, dann gibt es zu jedem Teilgraphen einen isomorphen Teilgraphen des ebenen Graphen. Und der ist dann eben.

Mündlich: Wir verzichten auf den Beweis des Satzes. Aber es ist klar: Gibt es zu einem Graphen einen isomorphen ebenen Graphen, dann gibt es zu jedem Teilgraphen einen isomorphen Teilgraphen des ebenen Graphen. Und der ist dann eben.

Mündlich: Wir kennen nun zwei Graphen, die nicht plättbar sind. Fügen wir bei einer bestehenden Kante eine Ecke ein, so bleibt der Graph nicht plättbar. So können wir viele verschiedene Graphen erhalten, die nicht plättbar sind.

Vorgehen: Zur Verdeutlichung können im 3-3-Graphen im letzten Beweis Unterteilungsecken eingezeichnet werden.

Mündlich: Wir führen nun einen Begriff für dieses *Ecken einfügen* ein.

Tafelanschrieb

Definition: Fügt man in einem Graphen zusätzliche Ecken auf den bereits bestehenden Kanten ein, so erhält man eine Unterteilung des Graphen.

Durch eine zusätzliche Ecke werden aus einer Kante zwei neue Kanten.

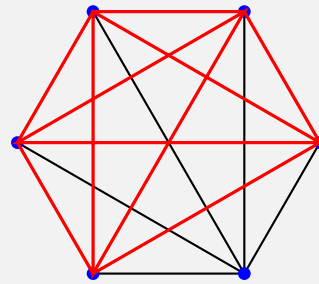
Tafelanschrieb

Satz von Kuratowski: Ein Graph ist genau dann nicht plättbar, wenn er einen Teilgraphen enthält, der isomorph zu einem vollständigen Fünfeck oder einem vollständigen bipartiten 3-3-Graphen oder einer Unterteilung eines dieser beiden Graphen ist.

Aufgabe 6.6 (Arbeitsblatt 6.4 (Nicht plättbare Graphen), Aufgabe 6)

Gegeben ist das vollständige Sechseck, siehe rechts.

Beweise, dass das vollständige Sechseck nicht plättbar ist, indem Du einen Teilgraphen farblich markierst, der isomorph zu einem vollständigen Fünfeck ist.



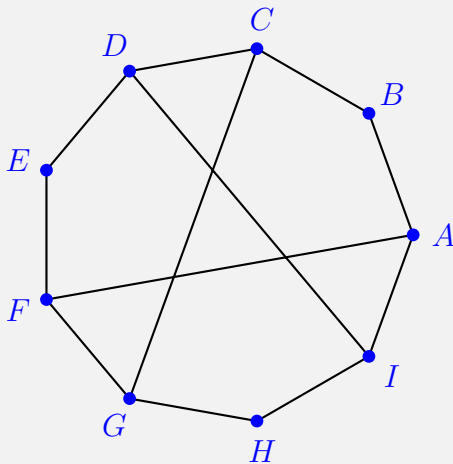
Datei: Graphen614-Sechseck-nicht-plaettbar

Lösung: Ist bereits im Aufgabentext enthalten.

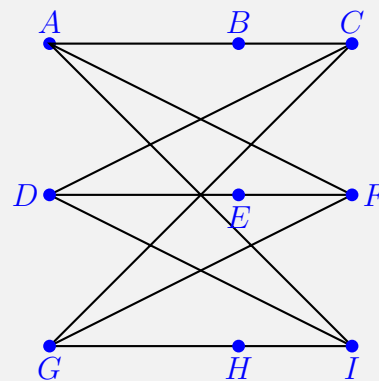
Aufgabe 6.7 (Arbeitsblatt 6.4 (Nicht plättbare Graphen), Aufgabe 7)

Beweise, dass der unten gezeichnete Graph nicht plättbar ist. Weise dazu nach, dass er isomorph zu einer Unterteilung des vollständigen 3–3-Graphen ist. Zeichne dazu rechts den vollständigen 3–3-Graphen mit den vorgegebenen Ecken. Bezeichne dann die Ecken so, dass die Kanten des rechten Graphen denen im linken Graphen entsprechen. Dazu musst Du noch 3 Unterteilungsecken im rechten Graphen passend einfügen.

Hinweis: Die Ecke im rechten Graphen, die der Ecke A im linken Graphen entsprechen soll, ist bereits bezeichnet.



Lösung:



Datei: Graphen605-nicht-plaettbar

Lösung: Ist bereits im Aufgabentext enthalten.

6.5 Schriftliche Aufgaben (ohne Lösungen)

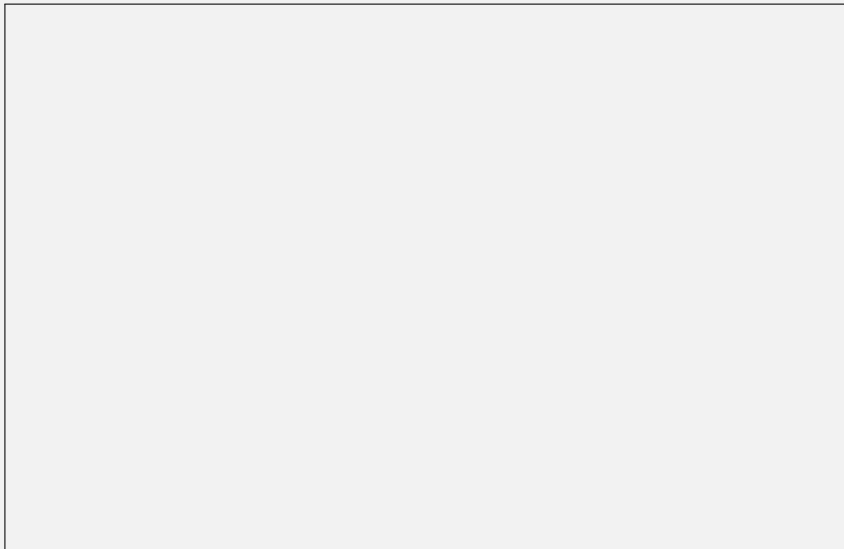
Aufgabe 6.8 (Arbeitsblatt 6.5 (Schriftliche Aufgaben), Aufgabe 8)

- a) Welche Beziehung zwischen e und k muss bei einem zusammenhängenden ebenen Graphen mit 7 Flächen gelten?

Antwort:

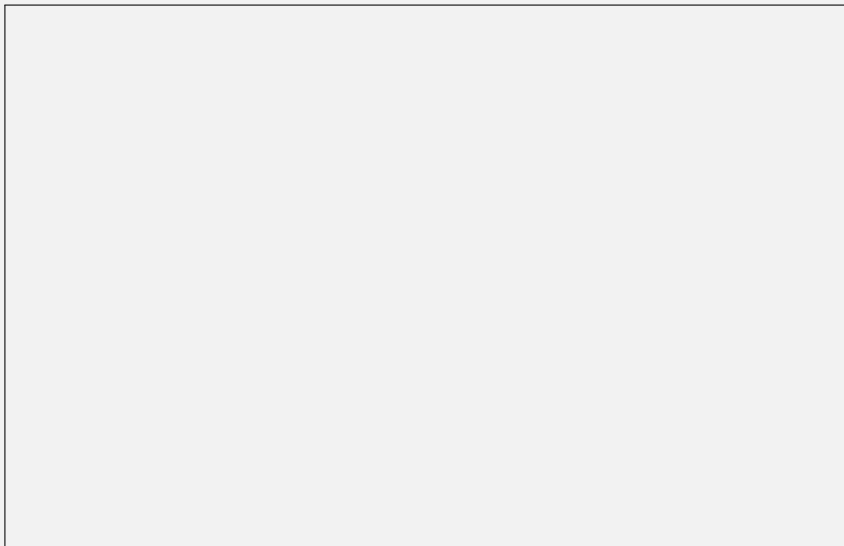
- b) Zeichne einen zusammenhängenden ebenen Graphen mit 7 Flächen und möglichst wenig Ecken. Nummeriere die Flächen.

Lösung:



- c) Zeichne einen einfachen zusammenhängenden ebenen Graphen mit 7 Flächen. Nummeriere die Flächen.

Lösung:



Datei: Graphen602-SiebenFlaechenEulerformel

Aufgabe 6.9 (Arbeitsblatt 6.5 (Schriftliche Aufgaben), Aufgabe 9)

a) Wie viele Ecken und Kanten hat das vollständige Sechseck? $e = \square$, $k = \square$.

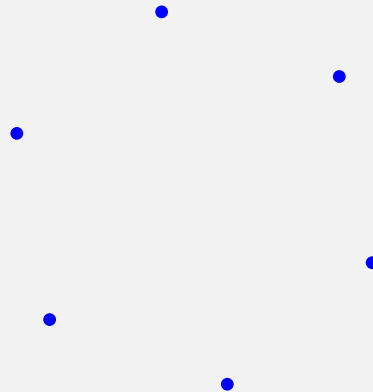
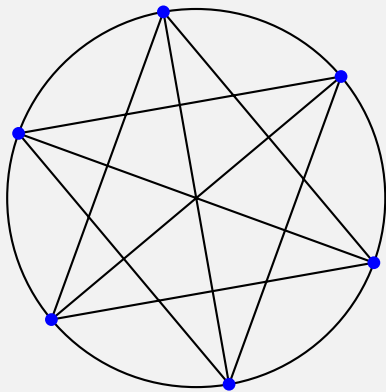
b) Warum ist das vollständige Sechseck nicht plättbar?

Antwort:

c) Wie viele Kanten müssen entfernt werden, damit aus dem vollständigen Sechseck ein plättbarer Graph wird?

Antwort: Es müssen Kanten entfernt werden.

d) Streiche im linken Graphen möglichst wenig Kanten, so dass ein plättbarer Graph entsteht. Zeichne rechts einen ebenen Graphen, der isomorph zu dem linken abgeänderten Graphen ist.



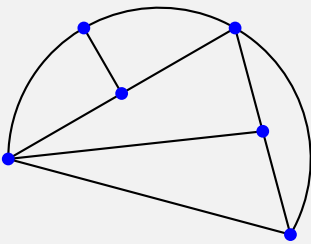
Datei: Graphen604-vollstaendiges-Sechseck-plaettbar-machen

Aufgabe 6.10 (Arbeitsblatt 6.5 (Schriftliche Aufgaben), Aufgabe 10)

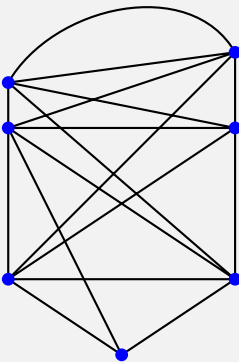
Betrachte die gegebenen Graphen. Welcher davon ist eben, plättbar oder nicht plättbar? Trage Deine Ergebnisse in die Tabelle ein. Begründe Deine Ergebnisse. Falls notwendig, zeichne einen isomorphen ebenen Graphen oder einen Graphen, der zu einem Teilgraphen isomorph ist.

	Graph 1	Graph 2	Graph 3	Graph 4
eben				
plättbar				

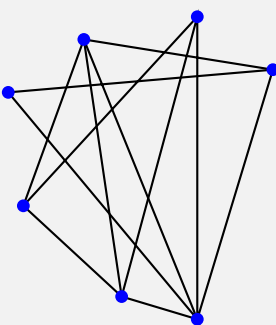
Graph 1



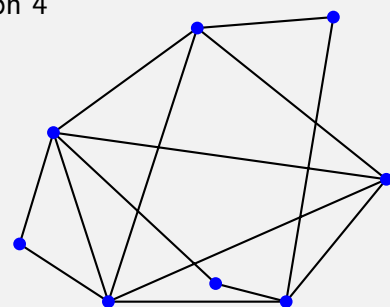
Graph 2



Graph 3



Graph 4



Datei: Graphen609-eben-plaettbar-nicht-plaettbar

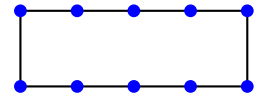
6.6 Weitere Aufgaben

Aufgabe 6.11 (Arbeitsblatt 6.6 (Weitere Aufgaben), Zusatzaufgabe 1)

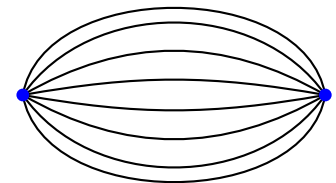
Für zusammenhängende ebene Graphen sind folgende Angaben bekannt. Ergänze die fehlenden Zahlen und zeichne jeweils einen ebenen Graphen mit der entsprechenden Anzahl an Ecken, Kanten und Flächen.

Datei: Graphen695-Graphen-durch-eulersche-Formel

Lösung: a) $e = 10, f = 2 \xrightarrow{\text{eulersche Formel}} k = e + f - 2 = 10.$

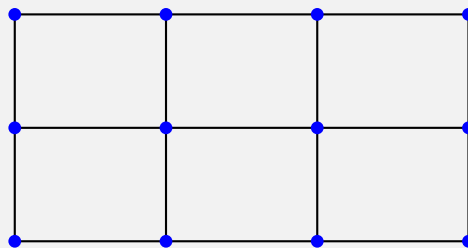


b) $k = 8, f = 8 \xrightarrow{\text{eulersche Formel}} e = 2 + k - f = 2$



Aufgabe 6.12 (Arbeitsblatt 6.6 (Weitere Aufgaben), Zusatzaufgabe 2)

Reisfelder werden durch Dämme getrennt. Du kannst sie dir folgendermaßen vorstellen:



Du siehst ein 3×2 -Feldanbau. Das umliegende Gebiet zählt ebenfalls als ein Feld.

- Gilt für den 3×2 -Feldanbau die eulersche Formel? Gib die Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen an.
- Wie viele Ecken, Kanten und Flächen hat ein $m \times n$ -Anbau? Rechne nach, ob die eulersche Flächenformel gilt.

Datei: Graphen693-Reisfelder

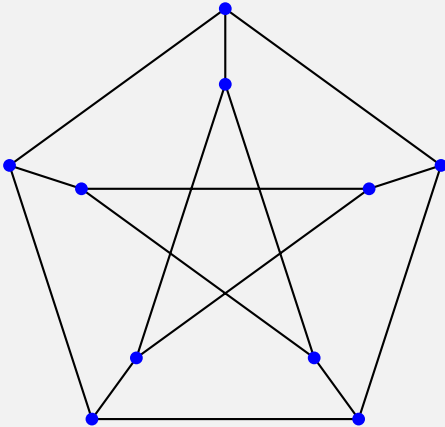
Lösung: a) $e = 12, k = 17, f = 7$ und $e - k + f = 12 - 17 + 7 = 2$

b) $e = (m + 1) \cdot (n + 1), k = (n + 1) \cdot m + (m + 1) \cdot n, f = m \cdot n + 1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow e - k + f &= (m + 1) \cdot (n + 1) - (n + 1) \cdot m - (m + 1) \cdot n + m \cdot n + 1 \\ &= mn + n + m + 1 - nm - m - mn - n + mn + 1 = 2. \end{aligned}$$

Aufgabe 6.13 (Arbeitsblatt 6.6 (Weitere Aufgaben), Zusatzaufgabe 3)

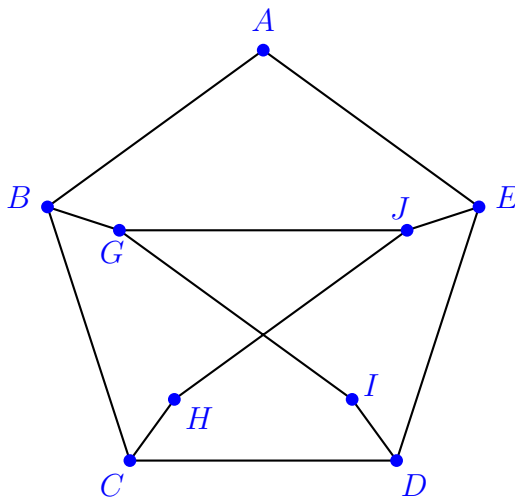
Gegeben ist der Petersen-Graph:



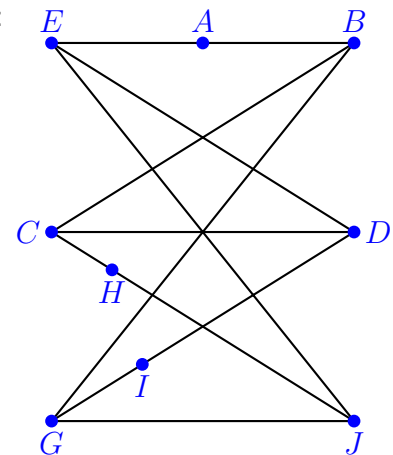
Lösche eine der inneren Ecken (Ecke mit den zugehörigen Kanten entfernen) und zeige, dass der entstehende Teilgraph isomorph zu einer Unterteilung des vollständigen 3-3-Graphen ist.

Datei: Graphen606-Petersengraph

Lösung:



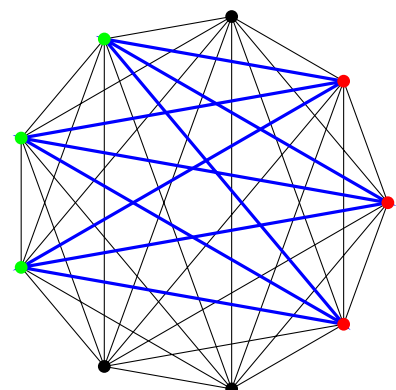
ist isomorph zu:

**Aufgabe 6.14** (Arbeitsblatt 6.6 (Weitere Aufgaben), Zusatzaufgabe 4)

Markiere in dem nebenstehenden vollständigen 9-Eck einen Teilgraphen farbig, der isomorph zum 3-3-Graphen ist.

Datei: Graphen608-3-3-graph-einzeichnen

Lösung: Man kann drei beliebige Ecken auswählen. Hier sind zur besseren Übersicht drei Ecken grün und drei rot markiert. Dann muss man nur noch die richtigen Kanten blau färben.



Aufgabe 6.15 (Arbeitsblatt 6.6 (Weitere Aufgaben), Zusatzaufgabe 5)

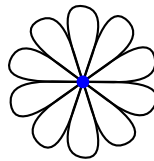
In dieser Aufgabe sind Graphen gesucht, die möglichst viele Flächen haben, wobei die Ecken- und Kantenzahl jeweils vorgegebene Größen nicht überschreiten dürfen.

- Löse die eulersche Flächenformel für ebene Graphen nach f auf.
- Zeichne einen Graphen mit höchstens $k = 10$ Kanten und möglichst vielen Flächen.
- Für ebene einfache Graphen gilt $k \leq 3e - 6$. Wie viele Ecken muss ein Graph mit $k = 10$ Kanten mindestens besitzen? Wie viele Flächen hat ein Graph mit dieser Mindestzahl von Ecken? Zeichne einen solchen Graphen.
- Gesucht ist ein ebener einfacher Graph mit $k = 18$ Kanten und möglichst vielen Flächen. Wie viele Ecken und Flächen besitzt er? Zeichne einen solchen Graphen.

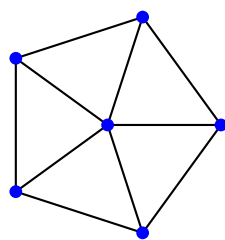
Datei: Graphen696-maximale-Flaechenzahl

Lösung: a) $e - k + f = 2 \Rightarrow f = 2 + k - e$.

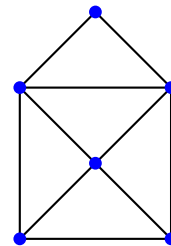
- b) Aus Teil a) folgt, dass der Graph möglichst wenig Ecken und möglichst viele Kanten besitzen muss. Ein Graph muss mindestens eine Ecke besitzen, also $e = 1$, $k = 10$ und somit $f = 2 + 10 - 1 = 11$.



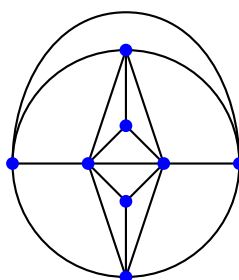
- c) Es muss $3e \geq k + 6 = 16$ gelten. Der Graph muss also mindestens $e = 6$ Ecken besitzen. Für die maximale Flächenzahl folgt $f = 2 + k - e = 2 + 10 - 6 = 6$.



oder



- d) Für die Anzahl der Ecken muss $3e = k + 6 = 24$ gelten, also $e = 8$. Die Anzahl der Flächen ergibt sich zu $f = 2 + k - e = 2 + 18 - 8 = 12$.



Anmerkung

Die folgende Aufgabe (Schafhürde) ist leider nicht ganz zum Stoff passend. Man könnte sie ändern, indem man für die Zaunstücke verschiedene Längen zulässt. Dann läuft die Aufgabe auf etwas hinaus, das analog zu Aufgabe 6.16 ist.

Aufgabe 6.16 (Arbeitsblatt 6.6 (Weitere Aufgaben), Zusatzaufgabe 6)

Ein Schäfer möchte seine Schafherde, die zum Gras in der in Abb. 1 dargestellten Weide ist, an einen neuen Weideplatz bringen. Dazu muss er die Herde in mindestens 3 Teile teilen. Die Pfosten sind dabei die Ecken, die Zaunstücke die Kanten. Beachte: Das Gebiet um die Weide zählt ebenfalls als Fläche

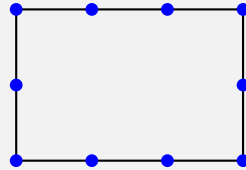
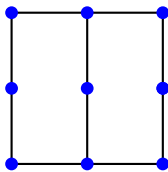


Abbildung 1: Eingezäunte Weide

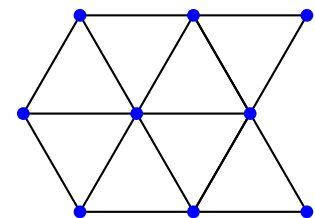
- a) Der Schäfer hat vergessen, weitere Pfosten und Zaunstücke mitzubringen. Wie kann er trotzdem die Weide unterteilen, wenn er Pfosten und Kanten verschieben und/oder wegnehmen kann?
- b) Sein Mitarbeiter bringt ihm noch weitere 3 Pfosten und 7 Zaunstücke. Wie viele Flächen kann der Schäfer damit maximal erstellen?
Hinweis: Die Zaunstücke sind alle gleich lang und können nicht gebogen werden.

Datei: Graphen692-Schaefer

Lösung: a)



- b) Mit $k = 16$ Zaunstücken und $e = 9$ Pfosten kann man $f = 9$ Flächen abteilen.



7 Unterrichtseinheit 7: Graphen und Polyeder

7.1 Inhalt

- Polyeder und ebene Graphen. Welche ebenen Graphen gehören zu Polyedern?
- Es gibt kein Polyeder mit 7 Kanten. Für jedes $k \geq 6$, $k \neq 7$ gibt es ein Polyeder mit k Kanten.
- Konvexität
- Eulersche Polyederformel
- Platonische Körper und platonische Graphen, es gibt nur 5 platonische Graphen.

7.2 Benötigte Vorkenntnisse

Eulerscher Graph, hamiltonscher Graph, Isomorphie von Graphen, zusammenhängend, einfacher Graph, vollständiges n -Eck, ebener und plättbarer Graph, eulersche Formel für Graphen.

Aus Zeitgründen wurde auf eine Wiederholung verzichtet. Benötigte Begriffe werden in den Aufgaben bzw. im Tafelaufschrieb wiederholt.

7.3 Polyeder

Bedarf an Modellen: Alle platonischen Körper als Körper, mindestens zwei als räumliche Graphen (Röhrchenmodelle), Modelle nicht konvexer Polyeder, selber gebasteltes nicht-konvexes Polyeder (Vorlage dazu in Kapitel 15).

Vorgehen: Modelle von Polyedern zeigen. Was charakterisiert Polyeder?

- Ebene Randflächen aus Vielecken,
- An jeder Kante stoßen jeweils zwei Flächen zusammen,
- An jeder Ecke enden jeweils mindestens drei Kanten.

Tafelanschrieb

11. Graphen und Polyeder

Definition: Ein Polyeder ist ein dreidimensionaler Körper, dessen Seiten aus ebenen Vielecksflächen bestehen. Die Vielecksflächen stoßen an den Kanten und den Ecken des Körpers zusammen. In jeder Ecke enden mindestens 3 Kanten.

Die Ecken und Kanten bilden den Graphen des Polyeders.

Mündlich: Ebene Graphen haben auch Flächen. Es stellt sich die Frage, ob Graphen von Polyedern plättbar sind, also einen isomorphen ebenen Graphen besitzen.

Anmerkung

Auf die Aussage, dass für ein Polyeder $f \geq 4$ gilt, wurde verzichtet.

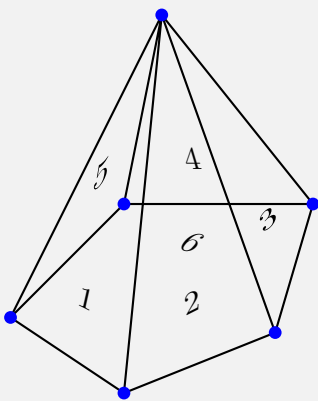
Hier wurde der Begriff *Ende einer Kante* verwendet, ohne vorher definiert zu werden. Bisher wurde nur die Eigenschaft benannt, dass jede Kante zwei Ecken verbindet.

Mit den nächsten beiden Aufgaben sollen sich die Schüler:innen mit dem Begriff *Polyeder* vertraut machen und *isomorph*, *eben* wiederholen. Dies bereitet den ersten Satz und seinen Beweis vor. Außerdem bereiten diese Aufgaben auch auf den Beweis des zweiten Satzes vor.

Aufgabe 7.1 (Arbeitsblatt 7.1 (Polyeder und Graphen), Aufgabe 1)

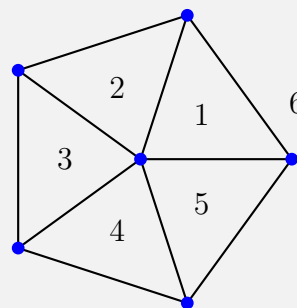
Gegeben ist das unten skizzierte Polyeder mit 6 Ecken, 10 Kanten und 6 Flächen. Die dreieckigen Seitenflächen sind der Reihe nach mit den Zahlen 1 bis 5 nummeriert, die fünfeckige Bodenfläche hat die Nummer 6.

- a) Warum ist der Graph des Polyeders einfach?
- b) Zeichne einen isomorphen ebenen Graphen und nummeriere die Flächen des Graphen so, dass ihre Nummern denen der Flächen des Polyeders entsprechen.
Hinweis: Der ebene Graph besitzt auch eine äußere Fläche.



- a) Der Graph ist einfach, denn:
 Er hat keine Schlingen und keine parallelen Kanten

- b) Isomorpher ebener Graph:



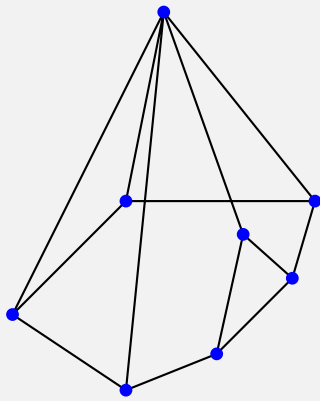
Datei: Graphen70-Polyeder-10-Kanten

Lösung: Ist bereits im Aufgabentext enthalten.

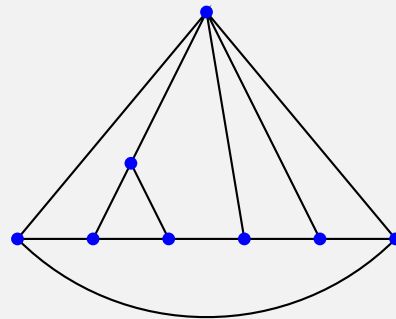
Weiter auf nächster Seite

Aufgabe 7.2 (Arbeitsblatt 7.1 (Polyeder und Graphen), Aufgabe 2)

Beim Polyeder aus der letzten Aufgabe wurde eine Ecke abgeschnitten, siehe unten stehende Graphik. Zeichne einen isomorphen ebenen Graphen. Wie viele Ecken, Kanten, Flächen hat der vorliegende Graph mehr als der aus der vorigen Aufgabe?



a) Isomorpher ebener Graph:



b) Im Vergleich zum Graphen aus der letzten Aufgabe erhöhte sich die Anzahl der Ecken um

2	,
3	und
1	.

die der Kanten um
die der Flächen um

Datei: Graphen71-Polyeder-13-Kanten

Lösung: Ist bereits im Aufgabentext enthalten.

Tafelanschrieb

Satz: Für jeden Graphen eines Polyeders gelten:

- 1) Der Graph ist zusammenhängend und einfach,
- 2) Eckenzahl $e \geq 4$,
- 3) Kantenzahl $k \geq 6$.

Beweis: 1) Zusammenhängend: Ein Polyeder ist ein Körper.

Die Kante eines Polyeders sind Geradenstücke. Daher besitzt der Graph keine parallelen Kanten und keine Schlingen, ist also einfach.

2) 3 Ecken liegen in einer Ebene, bilden also nicht die Ecken eines Körpers $\Rightarrow e \geq 4$.

3) In jeder Ecke enden mindestens 3 Kanten
 \Rightarrow Es gibt mindestens $4 \cdot 3 = 12$ Enden von Kanten.

Jede Kante hat zwei Enden $\Rightarrow k \geq 6$. \square

Anmerkung

Zur Veranschaulichung, dass drei Ecken in einer Ebene liegen, kann man einen flachen Karton auf drei Fingerspitzen legen.

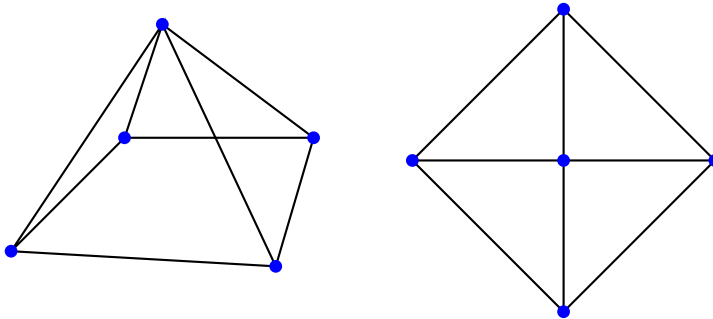
Weiter auf nächster Seite

Aufgabe 7.3 (Arbeitsblatt 7.2 (Polyeder mit wie vielen Kanten gibt es?), Aufgabe 3)

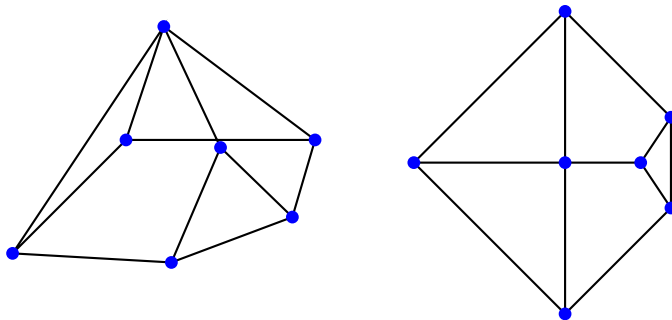
- a) Konstruiere ein Polyeder mit $k = 8$ Kanten. Zeichne einen isomorphen ebenen Graphen.
Hinweis: Das Polyeder kann entsprechend zu dem aus Aufgabe 1 konstruiert werden. Wähle als Grundfläche ein Viereck.
- b) Konstruiere ein Polyeder mit $k = 11$ Kanten. Zeichne einen isomorphen ebenen Graphen.
Hinweis: Verwende das Polyeder aus Teilaufgabe a) und schneide eine Ecke ab (vgl. die Konstruktion für Aufgabe 2).

Datei: Graphen72-Polyeder-mit-Anzahl-Kanten

Lösung: a)



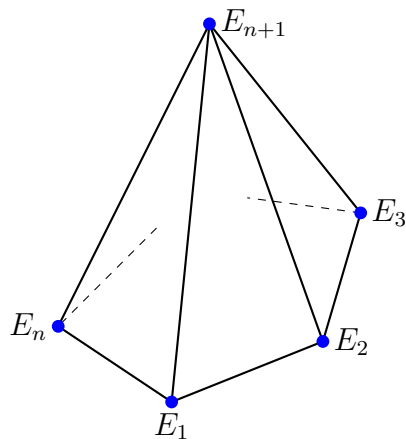
b)

**Aufgabe 7.4** (Arbeitsblatt 7.2 (Polyeder mit wie vielen Kanten gibt es?), Aufgabe 4)

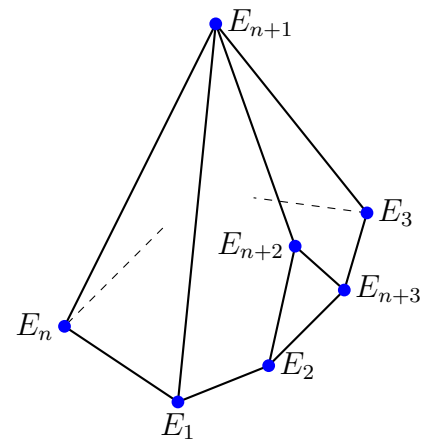
- a) Sei k ein Element der Menge $\{6, 8, 10, \dots\}$. Konstruiere ein Polyeder mit k Kanten, indem Du eine Grundfläche mit $n = \frac{k}{2}$ Ecken und eine Spitze wählst.
- b) Sei k ein Element der Menge $\{9, 11, 13, \dots\}$. Konstruiere ein Polyeder mit k Kanten, indem Du eine Grundfläche mit $n = \frac{k-3}{2}$ Ecken und eine Spitze wählst und dann eine Ecke abschneidest.

Datei: Graphen73-Existenz-Polyeder

Lösung: a)



b)

**Tafelanschrieb**

Satz: 1) Zu jeder natürlichen Zahl $k \geq 6$, $k \neq 7$ gibt es ein Polyeder mit k Kanten.

2) Es gibt kein Polyeder mit 7 Kanten.

Beweis: Siehe letztes und nächstes Übungsblatt.

Vorgehen: Die folgende Aufgabe wird gemeinsam gelöst. L. am Visualizer, Schüler:innen füllen die Lücken im Arbeitsblatt aus.

Aufgabe 7.5 (Arbeitsblatt 7.3 (Polyeder mit 7 Kanten?), Aufgabe 5)

In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass es kein Polyeder mit 7 Kanten gibt. Fülle dazu die Lücken aus.

Betrachte den Graphen des Polyeders. Die Anzahl seiner Ecken wird mit e bezeichnet. Wir wissen, dass der Graph einfach ist.

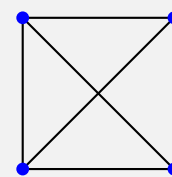
Weiter wissen wir, dass $e \geq$ gilt. Nun können wir eine Fallunterscheidung vornehmen.

Fall $e = 4$: Zeichne rechts ein vollständiges Viereck, d.h. einen einfachen Graphen mit 4 Ecken und möglichst vielen Kanten.

Das vollständige Viereck besitzt $k =$ Kanten. Ein einfacher Graph mit 4 Ecken kann nicht mehr Kanten besitzen.

\Rightarrow Es gibt kein Polyeder mit $e =$ Ecken und 7 Kanten.

Vollständiges Viereck



Fall $e \geq 5$: Der Eckengrad jeder Ecke ist mindestens .

\Rightarrow Im Graphen gibt es mindestens Enden von Kanten.

Jede Kante hat 2 Enden \Rightarrow Für die Anzahl von Kanten folgt $k \geq$.

\Rightarrow Der Graph besitzt mindestens Kanten.

\Rightarrow Es gibt kein Polyeder mit $e \geq$ Ecken und 7 Kanten.

Datei: Graphen74-keine-7-Kanten

Lösung: Ist bereits im Aufgabentext enthalten.

Anmerkung

Alternativer Beweis mit Satz vom letzten Mal: Der Graph des Polyeders ist isomorph zu einem ebenen Graphen (nicht plättbare Graphen haben nach dem Satz von Kuratowski mindestens $k = 9$ Kanten.) Für diesen gilt nach einem Satz vom letzten Mal $k \leq 3e - 6$.

$\Rightarrow 3e \geq 7 + 6 = 13$, also $e \geq 5$.

Andererseits gilt $k \geq \frac{3}{2} \cdot e$, da der Grad jeder Ecke mindestens 3 sein muss. Es folgt $k \geq \frac{15}{2}$, also muss der Graph mindestens 8 Kanten besitzen ⚡
(Siehe auch Aufgabe im Kapitel 7.6).

Tafelanschrieb

Definition: Ein Polyeder heißt konvex, wenn die Verbindungsstrecken beliebiger Punkte des Polyeders ganz im Polyeder verlaufen.

Vorgehen: Modelle zeigen, auch nicht konvexe Polyeder. Eigenschaft konvex am Modell erklären, am Besten an einem Röhrenmodell.

Tafelanschrieb

Satz: Der Graph eines konvexen Polyeders ist plättbar, d.h. er besitzt einen isomorphen ebenen Graphen. Die Anzahl der Flächen des Polyeders ist gleich der Anzahl der Flächen des ebenen Graphen, wenn beim ebenen Graphen die äußere Fläche mitgezählt wird.

Vorgehen: Anschaulich an ein oder zwei Röhrenmodellen erklären, warum die Konvexität garantiert, dass man beim Sehen durch eine Fläche die Kanten ohne Kreuzungen sieht.

Tafelanschrieb

Veranschaulichung: Bei dem Graphen eines konvexen Polyeders kann man so durch eine seiner Flächen hindurchsehen, so dass man den Graphen des Polyeders ohne Kreuzungen der Kanten sieht. Die Fläche, durch die man hindurchsieht, wird die äußere Fläche des ebenen Graphen.

Tafelanschrieb

Satz: Für jedes konvexe Polyeder gilt die eulersche Polyederformel: $e - k + f = 2$

Beweis: Betrachte ein konvexes Polyeder. Der Graph des Polyeders besitzt einen isomorphen Graphen, der eben, einfach und zusammenhängend ist. Für jeden ebenen und zusammenhängenden Graphen gilt die eulersche Formel $e - k + f = 2$ (früherer Satz).

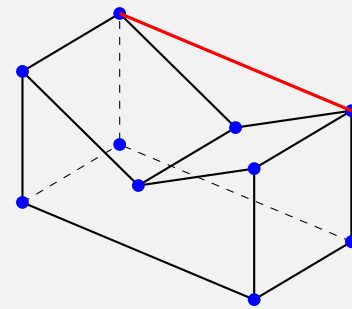
Der Graph des Polyeders besitzt gleich viele Ecken, Kanten und Flächen,

\Rightarrow Die Formel gilt auch für das Polyeder. \square

Vorgehen: Verschiedene nicht konvexe Polyeder zeigen. Erwähnen, dass für manche die eulersche Formel gilt, aber für das Polyeder mit Loch nicht. Und dass für dieses Polyeder der Graph dann nicht plättbar ist. Diese Eigenschaften sollen auf dem nächsten Arbeitsblatt nachgewiesen werden.

Aufgabe 7.6 (Arbeitsblatt 7.4 (Polyeder und ebene Graphen), Aufgabe 6)

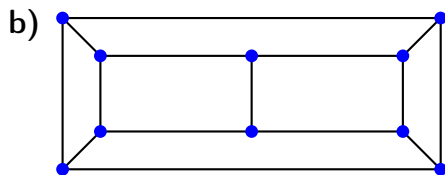
Gegeben ist das rechts dargestellte Polyeder.



- a) Weise nach, dass das Polyeder nicht konvex ist. Zeichne dazu eine Verbindungsstrecke zweier Punkte des Polyeders ein, die nicht ganz im Polyeder verläuft.
- b) Weise nach, dass der Graph des Polyeders einen isomorphen ebenen Graphen besitzt, obwohl die Voraussetzung *konvex* nicht erfüllt ist. Zeichne dazu einen isomorphen ebenen Graphen.

Datei: Graphen75-Nicht-konvex-plaettbar

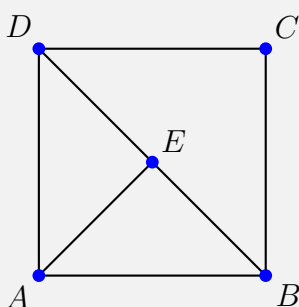
Lösung: a) Siehe rote Linie in der Graphik im Aufgabentext.



Aufgabe 7.7 (Arbeitsblatt 7.4 (Polyeder und ebene Graphen), Aufgabe 7)

Gegeben ist der unten stehende ebene Graph mit 7 Kanten.

- a) Zeige, dass die eulersche Formel gilt.
- b) Warum gibt es kein Polyeder, dessen Graph isomorph zum hier gezeigten Graphen ist?



a)

$e = 5$, $k = 7$, $f = 4$
$\Rightarrow e - k + f = 2$		

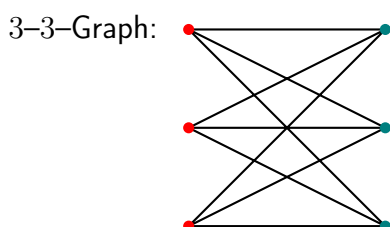
- b) Es gibt kein Polyeder, dessen Graph isomorph zum nebenstehenden Graphen ist, denn
 $\text{Grad}(C) = 2$,
 der Eckengrad muss mindestens 3 sein.

Datei: Graphen76-7-Kanten

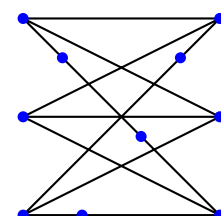
Lösung: Ist bereits im Aufgabentext enthalten.

Text auf dem Aufgabenblatt 7.4 vor der nächsten Aufgabe:

Erinnerung: Wenn ein Graph einen Teilgraphen enthält, der isomorph zu einer Unterteilung des vollständigen 3-3-Graphen ist, dann ist er nicht plättbar.

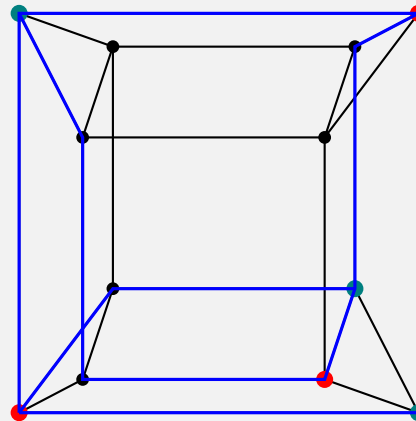
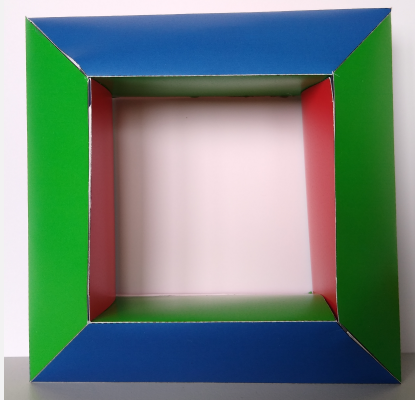


Unterteilung des 3-3-Graphen:



Aufgabe 7.8 (Arbeitsblatt 7.4 (Polyeder und ebene Graphen), Aufgabe 8)

Gegeben ist das nicht konvexe Polyeder, dessen Photo und Graph abgebildet sind.



- a) Bestimme die Anzahl der Flächen, Kanten und Ecken des Polyeders. Zeige, dass die eulersche Polyederformel nicht gilt. Beachte, dass die im Graphen als Dreiecke erscheinende Flächen keine Seiten des Polyeders sind.

$$e = 12, k = 24, f = 12, \Rightarrow e - k + f = 12 - 24 + 12 = 0 \neq 2.$$

- b) Zeige, dass der Graph des Polyeders nicht plättbar ist, indem Du einen Teilgraphen blau markierst, der isomorph zu einer Unterteilung des 3-3-Graphen ist.

Datei: Graphen77-nicht-plaettbar

Lösung: Ist bereits im Aufgabentext enthalten.

Tafelanschrieb

Satz: Ein ebener Graph, der isomorph zu dem Graphen eines Polyeders ist, hat folgende Eigenschaften:

- 1) Er ist zusammenhängend und einfach,
- 2) $e \geq 4$,
- 3) Jede Ecke hat mindestens den Grad 3,
- 4) $k \geq 6$.

Beweis: Jeder Graph eines Polyeders besitzt alle diese Eigenschaften, also auch jeder isomorphe Graph. \square

Weiter auf nächster Seite

Anmerkung

Man kann folgenden Satz vermuten:

Satz: Besitzt ein ebener, einfacher und zusammenhängender Graph die Eigenschaften 1), 2), 3) des vorigen Satzes, so gibt es ein Polyeder mit einem dazu isomorphen Graphen.

Aber der Beweis ist nicht offensichtlich. Man könnte an folgendes denken: Zeichne den Graphen auf ein Blatt aus elastischem Material. Ziehe das Blatt über eine Kugel. Denkt man sich die Kanten nicht auf der Kugel, sondern geradlinig verlaufend, so hat man das Polyeder konstruiert.

Aber: Es folgt nicht, dass dann die Kanten, die vorher eine Fläche des ebenen Graphen begrenzen, nach dieser Prozedur in einer Ebene liegen. Das ist nur für Dreiecke klar.

7.4 Platonische Körper und Graphen

Tafelanschrieb

12. Platonische Körper und Graphen

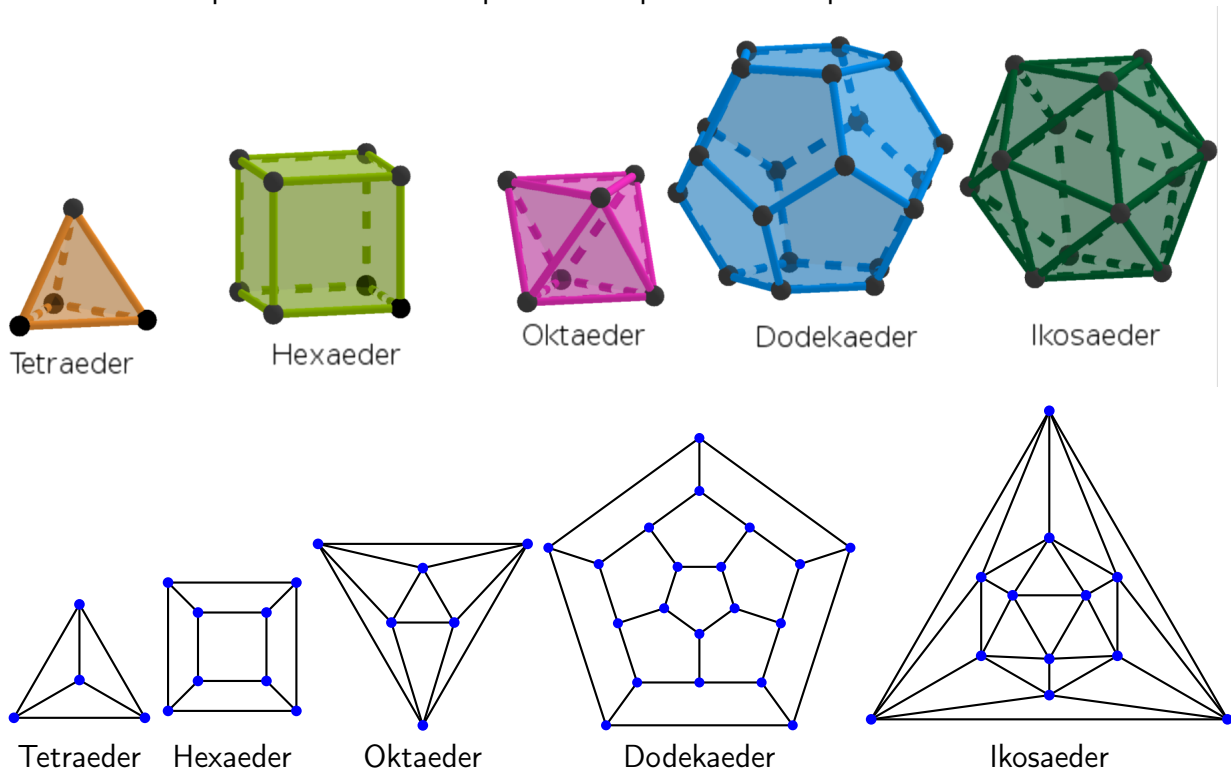
Definition: Ein konvexes Polyeder heißt platonischer Körper, wenn alle Flächen aus kongruenten regelmäßigen n -Ecken bestehen und in jeder Ecke gleich viele Kanten enden.

Vorgehen: Alle 5 platonischen Körper zeigen. Man muss nicht dazu sagen, dass dies alle sind. Auf dem Arbeitsblatt sind alle abgebildet und auch die dazugehörigen ebenen Graphen.

Mündlich: Z.B. beim Dodekaeder bestehen die Flächen aus regelmäßigen Fünfecken, und in jeder Ecke stoßen drei Kanten zusammen. In jeder Ecke ist der Eckengrad drei .

Text auf dem Aufgabenblatt 7.5 (Platonische Körper und Graphen)

Platonische Körper und zu ihren Graphen isomorphe ebene Graphen:



Aufgabe 7.9 (Arbeitsblatt 7.5 (Platonische Körper und Graphen), Aufgabe 9)

Trage in die Tabelle den Eckengrad g der Ecken und die Ecken-, Kanten- und Flächenzahl ein.

	Tetraeder	Hexaeder	Oktaeder	Dodekaeder	Iksaeder
$g =$	3	3	4	3	5
$e =$	3	8	6	20	12
$k =$	6	12	12	30	30
$f =$	4	6	8	12	20

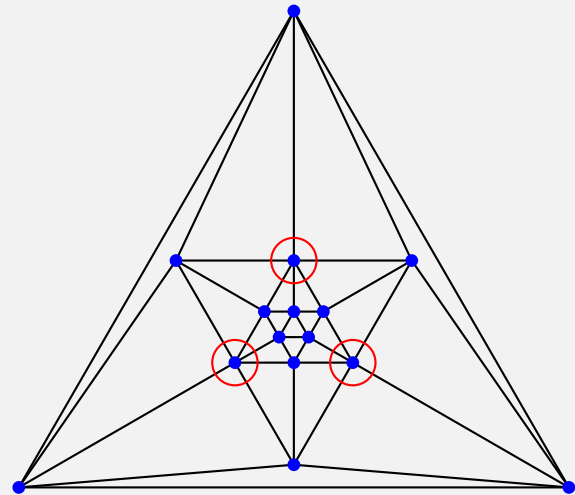
Datei: Graphen797-DatenPlatonischeKoerper

Lösung: Ist bereits im Aufgabentext enthalten.

Aufgabe 7.10 (Arbeitsblatt 7.5 (Platonische Körper und Graphen), Aufgabe 10)

Gegeben ist der nebenstehende ebene Graph. Er ist isomorph zu dem Graphen eines Polyeders.

- Aus was für n -Ecken bestehen die Seiten des Polyeders?
- Warum kann das zugehörige Polyeder nicht platonisch sein?



Datei: Graphen77-nicht-platonisches-Polyeder

Lösung: a) Die Seiten bestehen aus Dreiecken, auch die äußere Fläche wird durch drei Kanten begrenzt.

b) Es gibt Ecken mit Eckengrad 5 (die meisten) und Ecken mit Eckengrad 6 (im Graphen rot markiert). Bei einem platonischen Körper müssten alle Eckengrade gleich sein.

Tafelanschrieb

Definition: Ein zusammenhängender einfacher ebener Graph heißt platonischer Graph, wenn er folgende Eigenschaften besitzt:

- Alle Ecken des Graphen haben den selben Grad, dieser beträgt mindestens 3 und
- alle Flächen (auch die äußere) haben die selbe Anzahl Kanten, diese ist mindestens 3.

Folgerung: Die fünf Polyeder Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder, Iksaeder sind platonische Körper, ihre Graphen sind isomorph zu platonische Graphen.

Tafelanschrieb

Satz: Jeder platonische Graph ist isomorph zu einem der Graphen von Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder, Iksaeder. Daher gibt es genau diese fünf platonischen Körper.

Aufgabe 7.11 (Arbeitsblatt 7.6 (Die 5 platonischen Körper und Graphen), Aufgabe 11)

In dieser Aufgabe zeigen wir: Jeder platonische Graph ist isomorph zu einem der Graphen von Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder, Ikosaeder. Fülle dazu die Lücken aus.

Wir betrachten einen platonischen Graphen mit e Ecken, k Kanten und f Flächen. Seien zusätzlich g der Eckengrad, den jede Ecke besitzt, und n die Anzahl der Kanten, die jede Fläche begrenzen.

Jede Ecke hat den Eckengrad $g \Rightarrow$ es gibt $\boxed{g \cdot e}$ Enden von Kanten.

Da jede Kante $\boxed{2}$ Enden besitzt, gibt es insgesamt $k = \boxed{\frac{1}{2}g \cdot e}$ Kanten.

Umformen nach der Anzahl der Ecken e liefert

$$e = \boxed{\frac{2k}{g}}. \quad (*)$$

Addiert man die Anzahl der Kanten, die die Flächen begrenzen, so zählt man jede Kante doppelt

\Rightarrow Der Graph besitzt $k = \boxed{\frac{1}{2} \cdot n \cdot f}$ Kanten. Umformen nach der Anzahl der Flächen liefert

$$f = \boxed{\frac{2k}{n}}. \quad (**)$$

Setzt man (*) und (**) für e und f in die eulersche Formel ein, so erhält man

$$2 = e - k + f \Rightarrow 2 = \boxed{\frac{2k}{g} - k + \frac{2k}{n}}.$$

Teilt man auf beiden Seiten durch $2k$, so erhält man die Gleichung $\boxed{\frac{1}{k} = \frac{1}{g} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n}}$.

Nach dem ersten Satz gilt $g \geq 3$ und $n \geq 3$. Deshalb müssen wir jetzt einfach durchprobieren, für welche Werte von g und n wir Lösungen für k finden. Starte dazu mit $g = 3$ und erhöhe n solange, bis du keine sinnvolle Lösung mehr für k findest. Fahre dann mit dem nächst größeren g fort.

g	n	$\frac{1}{g} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2}$	k	Name
3	3	$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{2+2-3}{6} = \frac{1}{6}$	6	Tetraeder
3	4	$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{4+3-6}{12} = \frac{1}{12}$	12	Würfel
3	5	$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} = \frac{10+6-15}{30} = \frac{1}{30}$	30	Dodekaeder
3	6	$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = \frac{2+1-3}{6} = 0$	-	
4	3	$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$	12	Oktaeder
4	4	$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 0$	-	
5	3	$\frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{30}$	30	Ikosaeder
5	4	$\frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{4+5-10}{20} < 0$	-	
6	3	$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = \frac{2+1-3}{6} = 0$	-	

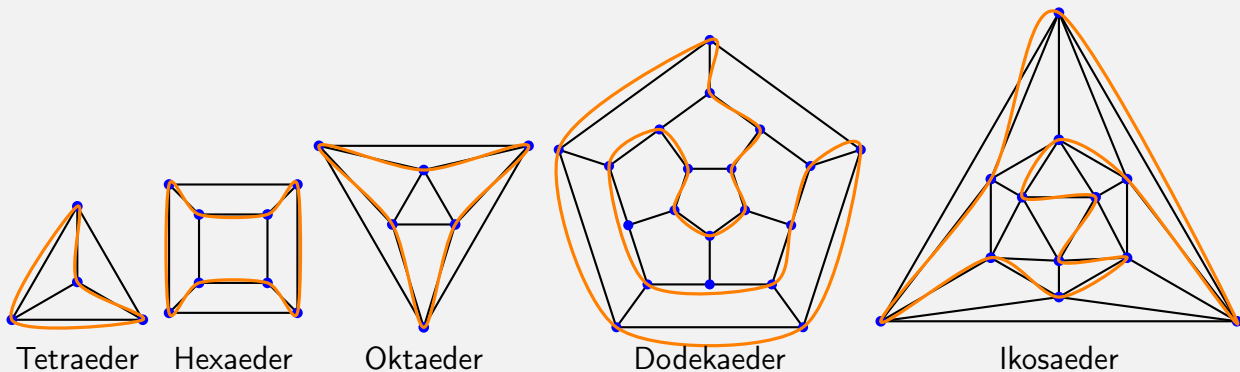
Warum sind wir mit den hier betrachteten Werten für g und n fertig und müssen nicht alle möglichen Kombinationen durchgehen? Für höhere Werte von g, n ist die Summe der Brüche negativ, daher gibt es kein k und keinen platonischen Graphen.

Datei: Graphen792-AllePlatonischenKörper

Lösung: Ist bereits im Aufgabentext enthalten.

Aufgabe 7.12 (Arbeitsblatt 7.6 (Die 5 platonischen Körper und Graphen), Aufgabe 12)

Untersuche ob die 5 platonischen Graphen eulersch und/oder hamiltonsch sind.



	Tetraeder	Hexaeder	Oktaeder	Dodekaeder	Ikosaeder
ist eulersch	Nein	Nein	Ja	Nein	Nein
ist hamiltonsch	Ja	Ja	Ja	Ja	Ja

Datei: Graphen795-platonisch-eulersch-hamiltonsch

Lösung: Damit ein Graph eulersch ist, müssen alle Eckengrade geradzahlig sein.

In den Graphiken sind hamiltonsche Kreise eingezeichnet.

Anmerkung

Alternative für den zweiten Teil des Beweises:

Mündlich: Die Kanten- und Flächenzahl sind durch n, g eindeutig bestimmt. Also ist auch der Graph bis auf Isomorphie durch n, g eindeutig bestimmt. Deshalb genügt es, die Bedingung $\frac{1}{g} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$ zu überprüfen.

Voraussetzung ist $g \geq 3$ und $n \geq 3$. Jetzt durchprobieren:

g	n	$\frac{1}{g} + \frac{1}{n}$	$> \frac{1}{2}$?	Name
3	3	$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$	Ja	Tetraeder
3	4	$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$	Ja	Würfel
3	5	$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{16}{30}$	Ja	Dodekaeder
3	6	$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$	Nein	
4	3	$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$	Ja	Oktaeder
4	4	$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$	Nein	
5	3	$\frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{8}{15}$	Ja	Ikosaeder
5	4	$\frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{9}{20}$	Nein	

□

7.5 Schriftliche Aufgaben (ohne Lösungen)

Aufgabe 7.13 (Arbeitsblatt 7.7 (Schriftliche Aufgaben), Aufgabe 13)

Wahr oder falsch? Kreuze an!

	wahr	falsch
Es gibt ein platonisches Polyeder, dessen Flächen regelmäßige 4-Ecke sind.		
Es gibt ein platonisches Polyeder, dessen Flächen regelmäßige 5-Ecke sind.		
Es gibt ein platonisches Polyeder, dessen Flächen regelmäßige 6-Ecke sind.		
Es gibt einen platonischen Graphen, der 14 Ecken besitzt.		
Für alle platonischen Graphen gilt die eulersche Flächenformel $e - k + f = 2$.		
Jedes konvexe Polyeder besitzt einen plättbaren Graphen.		
Ist der Graph eines Polyeders plättbar, dann ist es konvex.		
Zu jeder natürlichen Zahl $k \geq 6$ gibt es ein Polyeder mit k Kanten.		
Ist ein ebener Graph nicht einfach, so gibt es kein Polyeder, dessen Graph isomorph zu diesem ebenen Graphen ist.		
Für jedes Polyeder gilt die eulersche Flächenformel $e - k + f = 2$.		
Besitzt ein konvexes Polyeder $k = 9$ Kanten und $e = 5$ Ecken, dann hat es $f = 6$ Flächen.		

Datei: Graphen798-wahr-falsch

Aufgabe 7.14 (Arbeitsblatt 7.7 (Schriftliche Aufgaben), Aufgabe 14)

Gegeben ist der rechts skizzierte ebene und einfache Graph.

a) Bestimme die Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen.

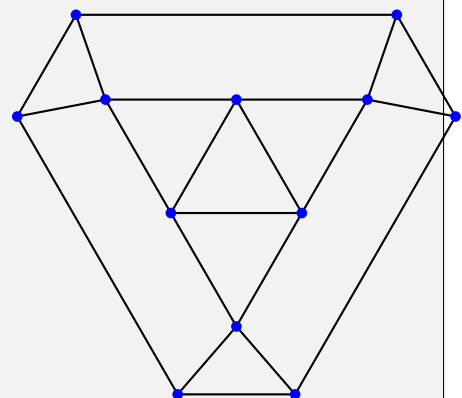
$e = \square$, $k = \square$, $f = \square$.

b) Überprüfe die eulersche Formel.

$e - k + f = \square$.

c) Der Graph ist isomorph zum Graphen eines Polyeders. Die Flächen des Polyeders bestehen aus n -Ecken. Kreuze an, welche n -Ecke der Polyeder als Flächen besitzt.

$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$	$n = 8$	$n = 9$	$n = 10$



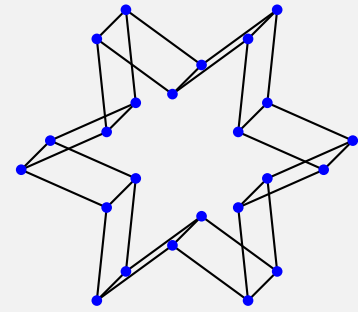
Datei: Graphen798-Graph-welcheFlaechen

Aufgabe 7.15 (Arbeitsblatt 7.7 (Schriftliche Aufgaben), Aufgabe 15)

Gegeben ist das Polyeder, dessen Graph rechts dargestellt ist.

- a) Warum ist das Polyeder nicht konvex?

Antwort:



- b) Zeichne einen isomorphen ebenen Graphen.

Datei: Graphen798-Stern-nicht-konvex

Aufgabe 7.16 (Arbeitsblatt 7.7 (Schriftliche Aufgaben), Zusatzaufgabe 1)

Ein (alter) Fußball besteht aus 12 Fünfecken und aus 20 Sechsecken, siehe Photo.

Zeichne einen isomorphen ebenen Graphen auf einem extra Blatt.

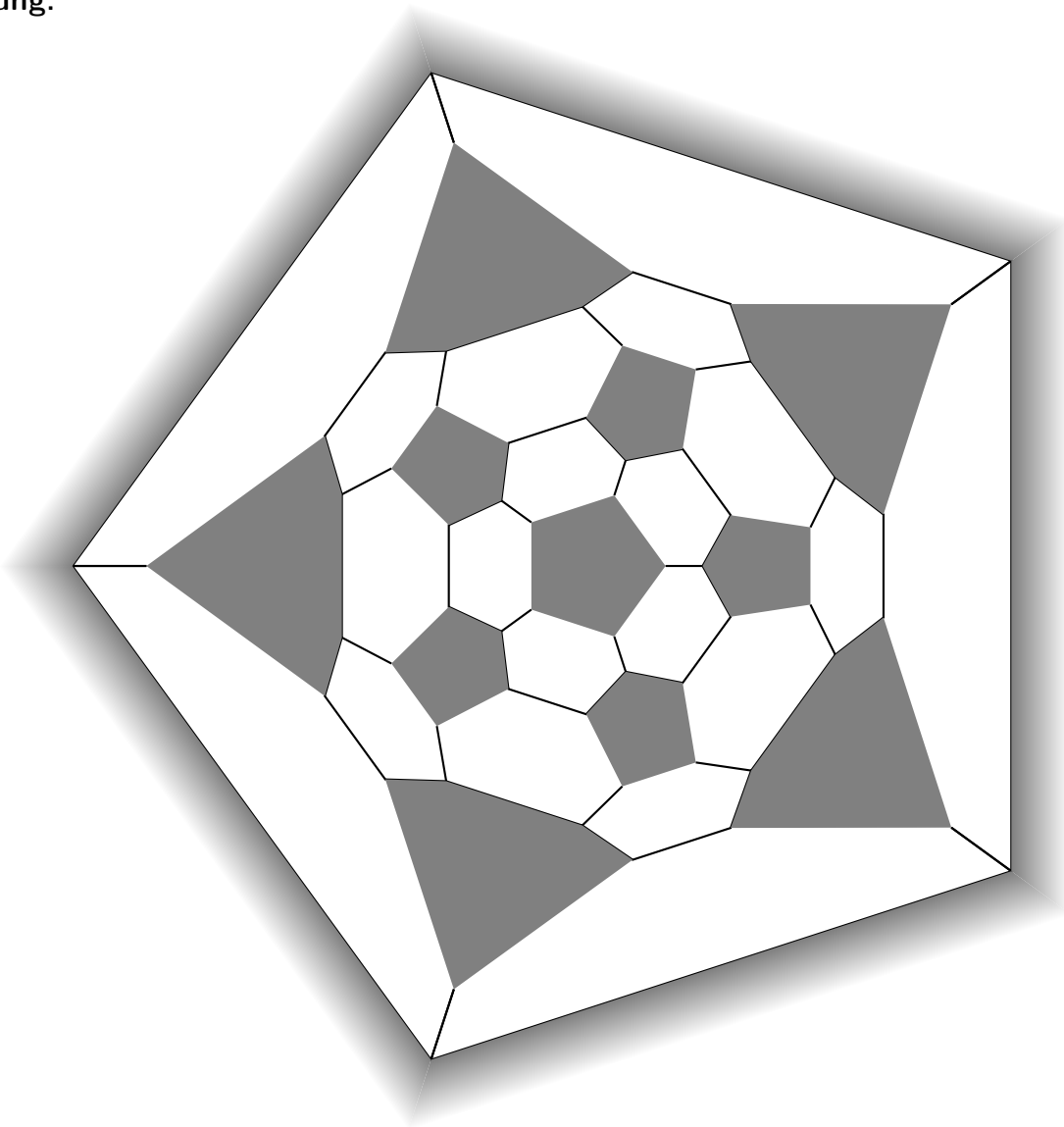
Tipp: Markiere die Fünfecke farbig. Starte mit einem Fünfeck und zeichne den Graphen mit diesem Fünfeck als Zentrum. Dann muss der ganze Graph außen durch ein Fünfeck begrenzt sein.

Teste, ob jemand deinen „Fußball“ erkennt.



Datei: Graphen791-Fussball

Lösung:



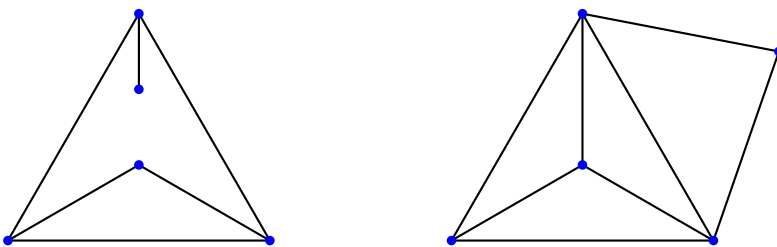
7.6 Weitere Aufgaben

Aufgabe 7.17 (Arbeitsblatt 7.8 (Weitere Aufgaben), Zusatzaufgabe 2)

Zeichne einen zusammenhängenden, einfachen und ebenen Graphen, der mindestens sechs Kanten hat und nicht isomorph zum Graphen eines Polyeders ist.

Datei: Graphen72-Graph-nicht-Polyeder

Lösung: Es gibt verschiedene Lösungen: Mindestens eine Ecke mit Grad 1 oder mindestens eine Ecke mit Grad 2.



Aufgabe 7.18 (*Arbeitsblatt 7.8 (Weitere Aufgaben), Zusatzaufgabe 3*)

In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass es kein Polyeder mit 7 Kanten gibt. Dazu führen wir einen Widerspruchsbeweis. Das bedeutet wir nehmen an, dass es ein Polyeder mit $k = 7$ Kanten gibt, und finden dann einen Widerspruch.

Der Graph des Polyeders ist isomorph zu einem einfachen ebenen Graphen. Wir wissen aus einem Satz: Für die Anzahl der Kanten k eines einfachen ebenen Graphen gilt $k \leq 3e - 6$.

Umformen nach der Anzahl der Ecken e und Einsetzen von $k = 7$ liefert $e \geq \frac{1}{3}(k + 6) = \frac{13}{3}$.

Der Graph muss also mindestens Ecken besitzen.

Der Eckengrad jeder Ecke ist mindestens .

Was folgt damit für die Anzahl der Kanten k des ebenen Graphen?

Antwort: .

Worin liegt der Widerspruch?

Antwort:

Datei: Graphen792-kein-7-Kanten-Polyeder

Lösung: Ist bereits im Aufgabentext enthalten.

Aufgabe 7.19 (*Arbeitsblatt 7.8 (Weitere Aufgaben), Zusatzaufgabe 4*)

Entscheide ob die Aussagen wahr oder falsch sind. Gib jeweils eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel an.

- Ein einfacher Graph mit 5 Ecken besitzt höchstens 10 Kanten.
- Jeder Kreis ist bipartit.
- Es gibt keinen bipartiten platonischen Graph.
- Jeder Graph besitzt genau einen aufspannenden Baum.
- Ein Graph, der nur aus einer Kante und zwei Ecken besteht, besitzt immer genau eine Fläche.
- Es gibt einen zusammenhängenden ebenen Graphen mit 12 Kanten, 8 Ecken und 6 Flächen.
- Die eulersche Formel gilt für einen Graphen, der nur aus einer isolierten Ecke besteht.
- Jeder einfache zusammenhängende ebene Graph mit mindestens 4 Ecken und mindestens 6 Kanten ist isomorph zu dem Graphen eines Polyeders.

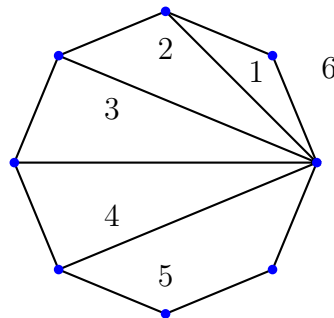
Datei: Graphen796-wahr-falsch

Lösung: a) Diese Aussage ist wahr. Laut einem Satz aus der zweiten Einheit besitzt eine einfacher Graph mit n Ecken höchstens $\frac{n}{2}(n - 1)$ Kanten. Für $n = 5$ liefert diese Formel, dass der Graph höchstens 10 Kanten besitzt.

b) Diese Aussage ist falsch. Z.B. ist ein Kreis mit 3 Ecken nicht bipartit.

- c) Diese Aussage ist falsch. Der Graph des Hexaeders ist bipartit. Alle anderen Graphen platonischer Körper sind nicht bipartit, da sie Kreise mit 3 Ecken (also einer ungeraden Anzahl) enthalten.
- d) Diese Aussage ist falsch. Die Voraussetzung *zusammenhängend* fehlt.
- e) Diese Aussage ist wahr. Dieser Graph ist ein Baum, und für Bäume gilt die eulersche Flächenformel. Oder nachrechnen: $e - k + f = 2 - 1 + 1 = 2$.

- f) Diese Aussage ist wahr:



- g) Ein Graph unterteilt die Ebene in Flächen, wenn er mindestens eine Kante besitzt. Für Graphen ohne Kanten haben wir keine Flächen definiert. Die eulersche Formel ist hier also nicht definiert. Also gibt es hier kein wahr oder falsch.
- h) Diese Aussage ist falsch. Die Voraussetzung *Der Grad jeder Ecke muss mindestens 3 sein* fehlt.

Aufgabe 7.20 (Arbeitsblatt 7.8 (Weitere Aufgaben), Zusatzaufgabe 5)

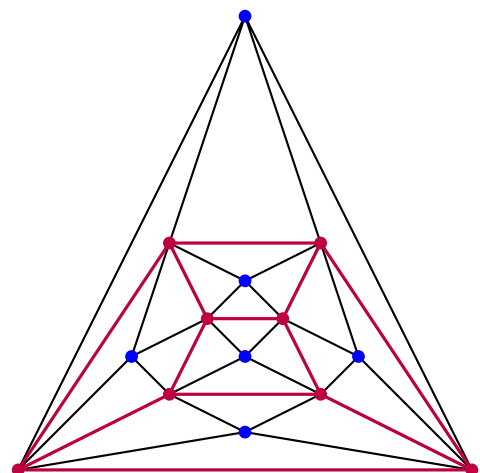
Gegeben ist ein Körper, der dadurch entsteht, dass bei einem Würfel auf jede Fläche eine quadratische Pyramide gestellt wird. Der Körper hat also weitere 6 Ecken.

- a) Wie viele Ecken, Kanten und Flächen hat der Körper?
- b) Überprüfe die Gültigkeit der eulerschen Formel.
- c) Ist der Körper ein platonischer Körper?
- d) Kannst Du einen isomorphen ebenen Graphen zeichnen?
Falls Nein: Begründung.
Falls Ja: Beweis durch Zeichnen des ebenen isomorphen Graphen.

Datei: Graphen794-Raumstern

Lösung:

- a) $e = 8 + 6 = 14$, $k = 12 + 6 \cdot 4 = 36$, $f = 6 \cdot 4 = 24$.
- b) $e - k + f = 14 - 36 + 24 = 2$ stimmt.
- c) Der Graph ist plättbar, siehe nebenstehenden Graphen. Die den Kanten und Ecken des Würfels entsprechenden Kanten und Ecken sind dunkelrot gefärbt.

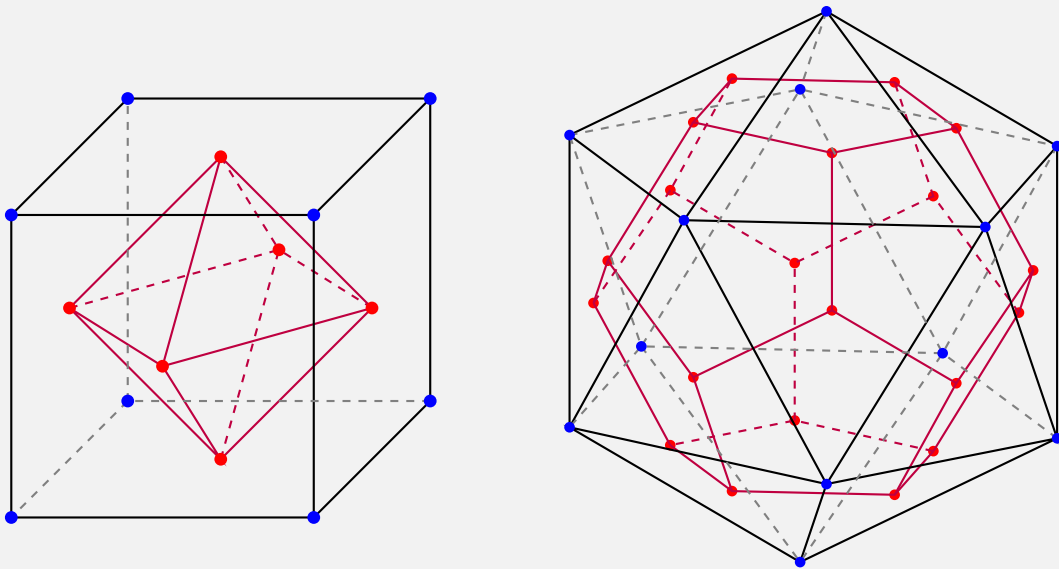


Aufgabe 7.21 (Arbeitsblatt 7.8 (Weitere Aufgaben), Zusatzaufgabe 6)

a) Trage in die Tabelle die Ecken-, Kanten- und Flächenzahl ein.

	Tetraeder	Hexaeder	Oktaeder	Dodekaeder	Iksaeder
$e =$	4	8	6	20	12
$k =$	6	12	12	30	30
$f =$	4	6	8	12	20

b) Vergleiche die Zahlen des Hexaeders mit denen des Oktaeders und die Zahlen des Dodekaeders mit denen des Iksaeders. Es gibt eine Beziehung, die in den untenstehenden Graphiken veranschaulicht wird. Formuliere diesen Sachverhalt.



Datei: Graphen78-Dualiteat

Lösung: a) Siehe Aufgabentext.

b) Der Hexaeder hat genauso viele Ecken, wie der Oktaeder Flächen hat. Umgekehrt hat der Oktaeder genau so viele Ecken, wie der Hexaeder Flächen hat.

Dieselben Beziehungen gelten auch zwischen Dodekaeder und Iksaeder.

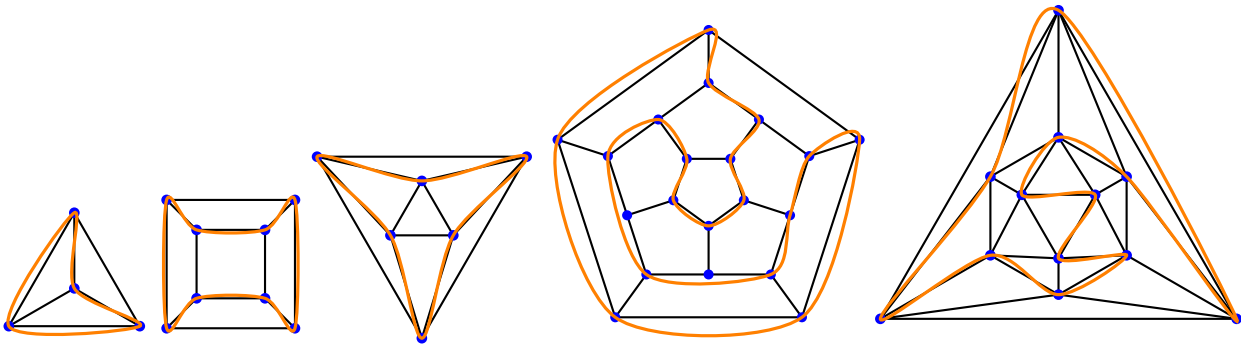
Man spricht von *Dualität*.

Aufgabe 7.22 (Arbeitsblatt 7.8 (Weitere Aufgaben), Zusatzaufgabe 7)

Zeige, dass die platonischen Graphen hamiltonsch sind, indem Du in die Graphen, die auf dem letzten Aufgabenblatt gezeichnet sind, jeweils einen hamiltonschen Kreis einzeichnest.

Datei: Graphen79-Koerper-hamiltonsch

Lösung:



Ideen für Aufgaben: Regelmäßiges Antiprisma

Anmerkung

Es gibt den Satz von Wagner und Fáry: jeder ebene einfache Graph besitzt einen isomorphen Streckengraphen.

Definition: Eine lückenlose Unterteilung der Ebene in unendlich viele n -Ecke heißt Parkettierung der Ebene. Dabei dürfen verschiedene n -Ecke verwendet werden.

Eine Parkettierung heißt platonisch, wenn der unendlich große Graph, der aus den Kanten und Ecken der Unterteilung gebildet wird, folgende Eigenschaften besitzt:

- a) Alle Ecken des Graphen haben den selben Grad, dieser beträgt mindestens 3 und
- b) alle Flächen haben die selbe Anzahl Kanten, diese ist mindestens 3.

Satz: Ein platonische Parkettierung kann aus 3-Ecken oder aus 4-Ecken oder aus 6-Ecken bestehen. Eine platonische Parkettierung mit anderen n -Ecken gibt es nicht.

Beweis: Siehe Graphen für Einsteiger, der Beweis dort ist aber nicht korrekt. Man muss von einem endlichen $n \times n$ -Teilgraphen der Parkettierung ausgehen, dafür gilt die eulersche Formel. Dann $n \rightarrow \infty$, das liefert erst die Formel $\frac{1}{g} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$.

8 Heftaufschrieb

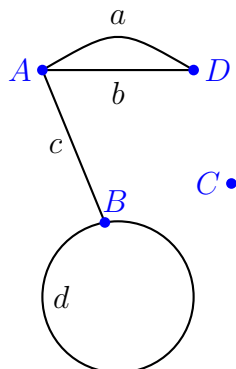
Dieses Kapitel enthält die Teile des Skripts, die bei den Schüler:innen im Aufschrieb stehen sollen. Dies dient unter anderem der Kontrolle, ob aus den vorbereiteten Tafelaufschrieben ein sinnvoller Heftaufschrieb entstehen kann.

Einheit 1

1. Was ist ein Graph?

Definition: Ein Graph besteht aus Ecken und Kanten. Er muss mindestens eine Ecke besitzen. Jede Kante verbindet zwei verschiedene Ecken oder eine Ecke mit sich selber.

Bezeichnungen:

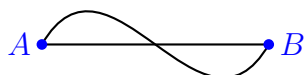


- C: isolierte Ecke
- d: Schlinge
- a, b: parallele Kanten
- $\text{Grad}(A) = 3$
- $\text{Grad}(B) = 3$
- $\text{Grad}(C) = 0$
- $\text{Grad}(D) = 2$

Definition: Eine Ecke, an der keine Kante endet, heißt isoliert.
Eine Kante, die eine Ecke mit sich selbst verbindet, heißt Schlinge.
Zwei Kanten, die die selben Ecken verbinden, heißen parallel.
Der Grad einer Ecke ist die Anzahl der Endpunkte von Kanten in dieser Ecke.

Hier wurde Arbeitsblatt 1.1 (Graphen und Eckengrade) ausgegeben.

Vereinbarung: Kreuzen sich zwei Kanten, ohne dass dort eine Ecke eingezeichnet ist, so stellen wir uns vor, dass die Kanten übereinander verlaufen, ohne sich zu schneiden.



Graph mit zwei Ecken und zwei parallelen Kanten

2. Graphen als Tabellen

Methode: Zeichne eine Tabelle, die für jede Ecke sowohl eine Spalte als auch eine Zeile enthält. Trage in das Feld der Zeile B und Spalte C ein, wie viele Kanten B und C verbinden.

Hier wurde Arbeitsblatt 1.2 (Tabellen von Graphen) ausgegeben.

Definition: Zwei Graphen heißen isomorph, wenn sie bei geeigneter Bezeichnung der Ecken dieselbe Tabelle besitzen.

Anschaulich: Der eine Graph kann so „verbogen“ werden, dass der andere entsteht.

Satz: Sind zwei Graphen isomorph, so haben sie dieselbe

- Anzahl von Ecken
- Anzahl von Kanten
- Anzahl von Schlingen
- Anzahl paralleler Kanten
- Liste der Eckengrade bis auf Reihenfolge

Umgekehrt: Ist einer dieser Punkte nicht erfüllt, so sind die Graphen nicht isomorph.

Hier wurde Arbeitsblatt 1.3 (Isomorphe Graphen) ausgegeben.

3. Rundwege

Definition: 1) Ein Kantenzug in einem Graphen ist eine Folge von Kanten, die nacheinander ohne Absetzen gezeichnet werden können.

Beim Nachfahren eines Kantenzugs wird die Ecke, in der die erste Kante beginnt, über den Kantenzug mit der Ecke, in der die letzte Kante endet, verbunden.

2) Ein Graph heißt zusammenhängend, wenn es zu je zwei beliebig gewählten Ecken immer einen Kantenzug gibt, der sie verbindet.

3) Ein Kantenzug heißt geschlossen, wenn Anfangsecke = Endecke.

4) Ein Kantenzug, der

- jede Kante genau ein Mal benützt und
- geschlossen ist,

heißt eulersche Tour.

5) Ein Graph, der eine eulersche Tour enthält, heißt eulerscher Graph.

Anschaulich: Einen eulerschen Graphen ohne isolierte Ecke kann man zeichnen ohne abzusetzen, ohne eine Kante doppelt abzufahren und so, dass man bei der Anfangsecke endet.

Hier wurde Arbeitsblatt 1.4 (Eulersche Touren) ausgegeben.

Satz: In einem eulerschen Graphen sind alle Eckengrade geradzahlig.

Beweis: Fall 1: E ist eine isolierte Ecke. Dann gilt $\text{Grad}(E) = 0$, und 0 ist gerade.

Fall 2: E ist eine nicht isolierte Ecke. Betrachte eine eulersche Tour. Diese geht durch E . Sei n die Zahl, wie oft die Tour durch E kommt. Dann gilt $\text{Grad}(E) = 2n$, da die Tour E immer auf einer Kante erreicht und auf einer anderen Kante verlässt und beim nächsten Durchgang neue Kanten verwendet werden. \square

Satz von Euler: Ein Graph ohne isolierte Ecke ist genau dann eulersch, wenn er zusammenhängend ist und alle Eckengrade gerade sind.

Beweis: Ist der Graph eulersch, so gilt:

- Nach dem letzten Satz sind alle Eckengrade gerade.
- Sind zwei Ecken gegeben, dann kann man von der einen Ecke aus so lange eine eulersche Tour entlanggehen, bis man bei der anderen Ecke ankommt, da keine der Ecken isoliert ist. Dann hat man einen Kantenzug gefunden, der die beiden Ecken verbindet. Also ist der Graph zusammenhängend. (Da es keine isolierten Ecken gibt, geht jede eulersche Tour durch die beiden Ecken.)

Jetzt setze voraus: Alle Eckengrade sind gerade und der Graph ist zusammenhängend.

Beweise: Es gibt eine eulersche Tour. Siehe nächstes Arbeitsblatt.

Hier wurde Arbeitsblatt 1.5 (Eulersche Touren finden) gemeinsam bearbeitet.

Hier wurde Arbeitsblatt 1.6 (Eulersche Graphen) ausgegeben.

Einheit 2

Hier wurde zur Wiederholung Arbeitsblatt 2.1 (Eigenschaften von Graphen) ausgegeben.

4. Einfache Graphen

Definition: 1) Ein Graph heißt einfach, wenn er keine Schlingen und keine parallelen Kanten besitzt.

Hier wurde Arbeitsblatt 2.2 (Einfache Graphen) ausgegeben.

2) Ein Graph heißt vollständiges Vieleck, wenn er einfach ist und jede Ecke mit jeder anderen durch eine Kante verbunden ist.

Hier wurde Arbeitsblatt 2.3 (Vollständige Vielecke) ausgegeben.

Satz: Ein vollständiges Vieleck mit n Ecken besitzt $\frac{1}{2}n(n-1)$ Kanten.

Beweis: Jede Ecke ist mit jeder der anderen $n-1$ Ecken durch eine Kante verbunden.

$\Rightarrow \text{Grad}(E) = n-1$ für jede Ecke E im Graphen

\Rightarrow Summe der Eckengrade ist $n \cdot (n-1)$

Hierbei wird jede Kante zwei Mal gezählt

\Rightarrow der Graph besitzt $\frac{1}{2}n(n-1)$ Kanten. \square

Folgerung: Ein einfacher Graph mit n Ecken besitzt höchstens $\frac{1}{2}n(n-1)$ Kanten.

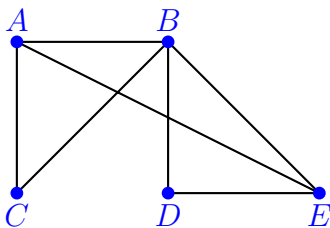
Hier wurde Arbeitsblatt 2.4 (Rundreisen) ausgegeben.

5. Hamiltonsche Graphen

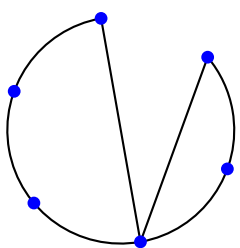
Definition: Ein geschlossener Kantenzug, der jede Ecke des Graphen genau ein Mal durchläuft und keine Kante zwei Mal benützt, heißt Hamiltonscher Kreis

Ein Graph, der einen Hamiltonschen Kreis enthält, heißt Hamiltonscher Graph.

Beispiele:



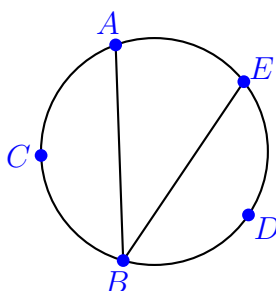
Graph 1:
Hamiltonscher Kreis:
 $A - C - B - D - E - A$
 \Rightarrow hamiltonsch



Graph 2: nicht hamiltonsch

Satz: Jeder hamiltonsche Graph ist isomorph zu einem Graphen, dessen Ecken auf einem Kreis liegen, und der die Kreislinie als Kantenzug enthält.

Beispiel:



Graph 3: isomorph zu Graph 1

Hier wurde Arbeitsblatt 2.5 (Hamiltonsche Graphen) ausgegeben.

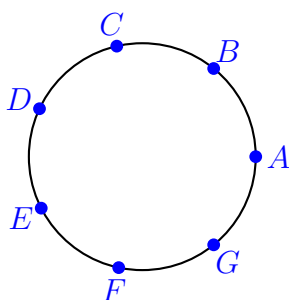
Einheit 3

Zur Wiederholung wurde hier Arbeitsblatt 3.1 (Kantenzüge) ausgegeben.

Satz von Dirac: Ein Graph mit $n \geq 3$ Ecken, der einfach und zusammenhängend ist und bei dem $\text{Grad}(E) \geq \frac{n}{2}$ für jede Ecke E gilt, ist hamiltonsch.

Ohne Beweis.

Beispiel: Hamiltonscher Graph mit 7 Ecken und möglichst wenig Kanten



Graph 1

Satz: 1) Ein hamiltonscher Graph ist zusammenhängend.

2) Für jede Ecke E in einem hamiltonschen Graphen gilt $\text{Grad}(E) \geq 2$.

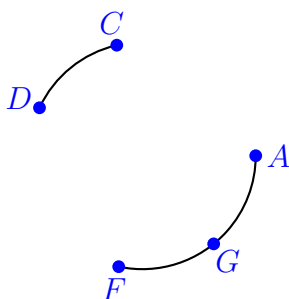
Beweis: 1) Seien E, E' zwei beliebige Ecken des Graphen. Da sie auf einem hamiltonschen Kreis liegen, gibt es einen Kantenzug, der die beiden Ecken verbindet.

2) E liegt auf einem hamiltonschen Kreis, also folgt $\text{Grad}(E) \geq 2$. \square

Definition: 1) Sei E eine Ecke in einem Graphen. E wird aus dem Graphen gelöscht, indem man E und alle Kanten, die E mit sich oder anderen Ecken verbinden, aus dem Graphen entfernt.

2) Ein Graph H heißt Teilgraph eines Graphen G , wenn alle Ecken und Kanten von H auch Ecken und Kanten von G sind.

Beispiel: Lösche aus Graph 1 die Ecken B und E .



Graph 2

Graph 2 ist ein Teilgraph von Graph 1. Graph 2 besteht aus zwei Teilgraphen, die jeder für sich zusammenhängend sind.

Definition: Die maximal großen zusammenhängenden Teilgraphen eines Graphen heißen die Komponenten des Graphen. Ist ein Graph zusammenhängend, so besteht er aus einer Komponente.

Hier wurde Arbeitsblatt 3.2 (Teilgraphen und Komponenten) ausgegeben.

Satz: In einem hamiltonschen Graphen mit n Ecken gelten:

1) Löscht man eine Ecke, so ist der entstehende Teilgraph zusammenhängend.

2) Löscht man zwei Ecken, so zerfällt der entstehende Teilgraph in höchstens zwei Komponenten.

3) Löscht man m Ecken ($m < n$), so zerfällt der entstehende Teilgraph in höchstens m Komponenten.

Hier wurde Arbeitsblatt 3.3 (Graphiken zu Beweisen) ausgegeben.

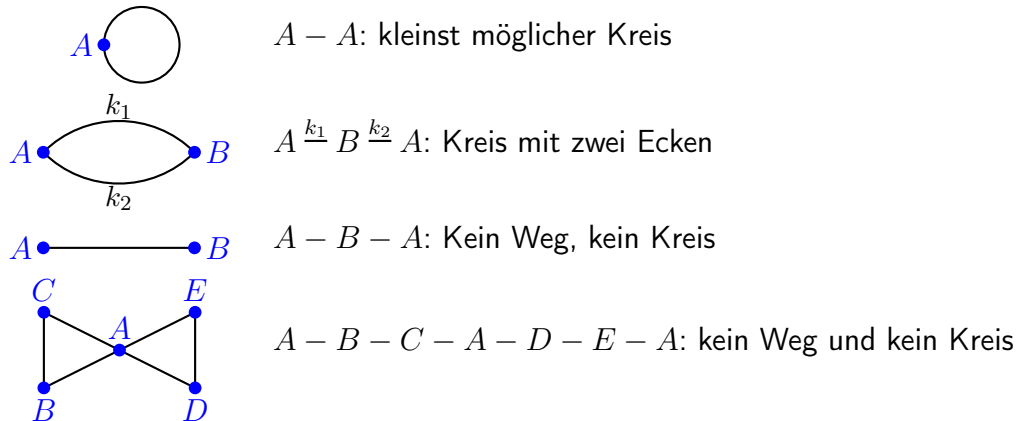
Hier wurde Arbeitsblatt 3.4 (Nicht hamiltonsche Graphen) ausgegeben.

6. Wege und Kreise

Definition: Ein Kantenzug heißt Weg, wenn er jede Ecke des Graphen höchstens ein Mal durchläuft und jede Kante höchstens ein Mal benützt. Anfangs- und End-Ecke dürfen übereinstimmen (diese Ecke wird auch nur ein Mal durchlaufen).

Definition: Ein Kreis ist ein Weg, der geschlossen ist.

Beispiele:



Hier wurde Arbeitsblatt 3.5 (Wege und Kreise) ausgegeben.

7. Bäume

Definition: Ein Graph, der zusammenhängend ist und keinen Kreis enthält, heißt Baum

Folgerung: Ein Baum enthält keine Schlingen und keine parallelen Kanten.

Satz: In einem Baum gibt es von jeder Ecke zu jeder anderen Ecke genau einen Weg.

Beweis: Betrachte einen Baum.

1) Da der Baum zusammenhängend ist, gibt es von jeder Ecke zu jeder anderen mindestens einen Weg.

2) Nun beweisen wir, dass es von jeder Ecke zu jeder anderen höchstens einen Weg gibt. Dazu führen wir einen Widerspruchsbeweis.

Annahme: Es gibt im Baum zwei Ecken A und B , so dass mindestens zwei verschiedene Wege von A nach B existieren.

Mit der Graphik auf Arbeitsblatt 3 folgt, dass es im Baum einen Kreis gibt \downarrow

Also war die Annahme falsch, und für beliebige Ecken A, B gibt es nicht mehr als einen Weg von A nach B . \square

Hier wurde Arbeitsblatt 3.6 (Bäume) ausgegeben.

Einheit 4

Hier wurde Arbeitsblatt 4.1 (Bäume) ausgegeben.

Umkehrsatz: Gibt es in einem Graphen von jeder Ecke zu jeder anderen Ecke genau einen Weg, und enthält der Graph keine Schlinge, dann ist dieser Graph ein Baum.

Beweis: Der Graph ist zusammenhängend, da es von jeder Ecke zu jeder anderen einen Weg gibt.

Der Graph enthält keinen Kreis mit 1 Ecke, da er keine Schlinge besitzt.

Er enthält auch keinen Kreis mit mindestens 2 Ecken, denn andernfalls gäbe es zu zwei verschiedenen Ecken dieses Kreises zwei verschiedene Wege, die sie verbinden.

\Rightarrow der Graph ist ein Baum. \square

Satz: Ein Baum mit n Ecken besitzt genau $n - 1$ Kanten

Beweis: Es sei ein Graph mit n Ecken gegeben. Wir färben seine Ecken und Kanten, während wir sie zählen.

1) Wähle eine beliebige Ecke E_1 und färbe sie.

2) Wähle eine beliebige Kante, die E_1 mit einer Ecke E_2 verbindet. Da keine Schlinge erlaubt ist, folgt $E_1 \neq E_2$. Färbe die gewählte Kante und E_1 . **Bisher gezählt: 2 Ecken und 1 Kante.**

3) Wähle eine noch nicht gefärbte Kante, die E_1 oder E_2 mit einer Ecke E_3 verbindet. Da der Baum keinen Kreis enthält, gilt $E_3 \neq E_2$ und $E_3 \neq E_1$. Färbe die neue Kante und E_3 . **Bisher gezählt: 3 Ecken und 2 Kanten.**

Setze entsprechend fort: In jedem Schritt wird eine neue Kante gefärbt, die eine der bereits gefärbten Ecken mit einer Ecke verbindet. Diese Ecke ist noch nicht gefärbt, da es im Baum keinen Kreis gibt, und wird jetzt gefärbt. Es kommt 1 Kante und 1 Ecke dazu.

Mit dieser Methode wird jede Ecke des Baumes gefärbt, da er zusammenhängend ist.

Nach n Schritten haben wir n Ecken und $n - 1$ Kanten gezählt. Der Graph besitzt keine weiteren Kanten, denn jede weitere Kante müsste eine der bereits gefärbten Ecken mit einer neuen Ecke verbinden. Weitere Ecken besitzt der Graph nicht, also haben wir alle Ecken und Kanten des Graphen gezählt. \square

Hier wurde Arbeitsblatt 4.2 (Bäume in Graphen) ausgegeben.

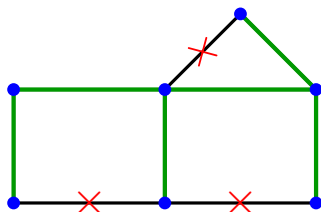
Definition: Ist ein Teilgraph eines Graphen ein Baum, der alle Ecken des Graphen enthält, so heißt er aufspannender Baum des Graphen.

Satz: Jeder zusammenhängende Graph besitzt einen aufspannenden Baum.

Beweis: Sei ein zusammenhängender Graph gegeben. Wenn er keinen Kreis enthält, ist er ein Baum und sein eigener aufspannender Baum.

Enthält er einen Kreis, so entferne eine Kante des Kreises aus dem Graphen. Der entstehende Teilgraph ist weiterhin zusammenhängend, da der Kreis zusammenhängend bleibt. Wiederhole diesen Schritt so oft, bis der entstehende Teilgraph keinen Kreis mehr enthält. Dieser ist ein aufspannender Baum des Graphen. \square

Skizze zum Beweis:



Folgerung: Jeder zusammenhängende Graph mit n Ecken besitzt mindestens $n - 1$ Kanten.

Beweis: Der Graph besitzt einen aufspannenden Baum mit n Ecken. Dieser hat $n - 1$ Kanten, die alle im Graphen enthalten sind. \square

Folgerung: Entfernt man aus einem Baum eine Kante, so ist er nicht mehr zusammenhängend.

Beweis: Betrachte einen Baum mit n Ecken. Er hat $n - 1$ Kanten. Entfernt man eine Kante, so hat der entstehende Teilgraph n Ecken und $n - 2$ Kanten. Der Teilgraph kann nicht zusammenhängend sein, denn sonst müsste er mindestens $n - 1$ Kanten besitzen. \square

Folgerung: Besitzt ein zusammenhängender Graph mit n Ecken genau $n - 1$ Kanten, so ist der Graph ein Baum.

Beweis: Sei ein zusammenhängender Graph mit n Ecken und $n - 1$ Kanten gegeben.

Letzter Satz \Rightarrow Er enthält einen aufspannenden Baum. Dieser hat $n - 1$ Kanten.

\Rightarrow Der Graph ist gleich seinem aufspannenden Baum, ist also selber ein Baum. \square

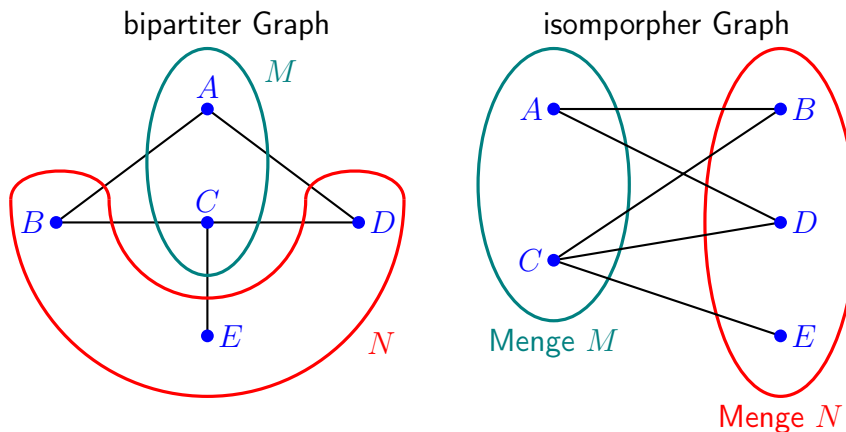
Hier wurde Arbeitsblatt 4.3 (Aufspannende Bäume) ausgegeben.

8. Bipartite Graphen

Definition: 1) In einem Graphen heißen zwei Ecken benachbart, falls sie durch mindestens eine Kante verbunden sind.

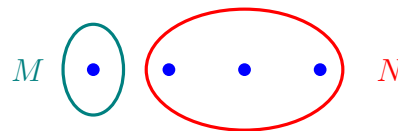
2) Ein einfacher Graph heißt bipartit, wenn die Menge seiner Ecken in zwei nichtleere Teilmengen M und N aufgeteilt werden kann, so dass nur Ecken aus verschiedenen Mengen benachbart sind. Kanten, die zwei Ecken derselben Teilmenge verbinden, gibt es nicht.

Beispiel:



Bemerkungen: 1) Ein bipartiter Graph besitzt mindestens zwei Ecken, denn sowohl in M als auch in N muss mindestens eine Ecke enthalten sein.

2) Ein Graph ohne Kanten mit mindestens zwei Ecken ist bipartit (aber langweilig).



3) Ein bipartiter Graph enthält keine Schlinge, denn jede Ecke mit einer Schlinge ist zu sich selbst benachbart.

4) Sind zwei Graphen isomorph, so sind entweder beide bipartit oder beide nicht bipartit.

Die Färbemethode:

Gegeben: Ein zusammenhängender Graph mit mindestens zwei Ecken.

Ziel: Entscheide, ob dieser Graph bipartit ist.

Vorgehen: 1) Wähle eine Ecke des Graphen und färbe sie grün.

2) Färbe alle ihre Nachbarn rot.

3) Färbe deren benachbarte Ecken wieder grün, usw.

Ergeben sich gleichfarbige benachbarte Ecken, so ist der Graph nicht bipartit.

Gelingt es, alle Ecken so zu färben, dass benachbarte Ecken verschieden gefärbt sind, dann ist der Graph bipartit. Die grünen Ecken bilden die Menge M , die roten die Menge N .

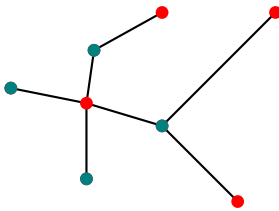
Hier wurde Arbeitsblatt 4.4 (Bipartite Graphen) ausgegeben.

Einheit 5

Hier wurde Arbeitsblatt 5.1 (Wasserversorgung) ausgegeben.

Satz: Jeder Baum mit mindestens zwei Ecken ist bipartit.

Beweisidee:



Beweis: Betrachte einen beliebigen Baum mit mindestens zwei Ecken.

Färbe eine beliebige Ecke grün. Laufe von dieser Ecke aus den Baum entlang und färbe die Ecken abwechselnd rot und grün.

Man erreicht jede Ecke, da der Baum zusammenhängend ist.

Jede Ecke wird nur über einen Weg erreicht. Daher treten keine Konflikte auf.

⇒ Der Baum ist bipartit. □

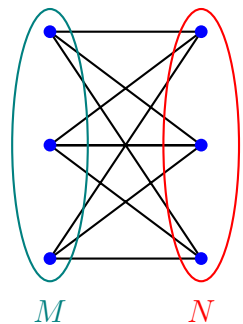
Hier wurde Arbeitsblatt 5.2 (Bipartite Kreise) ausgegeben.

Satz: Ein Graph mit n Ecken, der nur aus einem Kreis besteht, ist genau dann bipartit, wenn n gerade ist. (vgl. Arbeitsblatt 5.2)

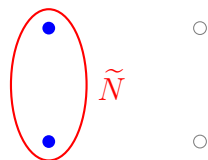
Satz: Jeder Teilgraph eines bipartiten Graphen, der mindestens zwei Ecken enthält, ist bipartit.

Beweis:

bipartiter Graph:

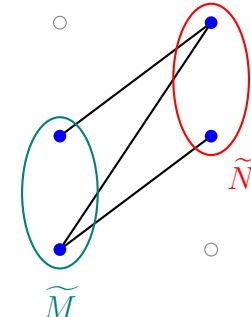


Fall 1: Nur Ecken aus M



Fall 2: Nur Ecken aus N
Analog

Fall 3: Aus M und N mindestens eine Ecke



□

Folgerung: Enthält ein Graph einen Teilgraphen mit mindestens zwei Ecken, der nicht bipartit ist, dann ist der Graph auch nicht bipartit.

Spezialfall: Enthält ein Graph einen Kreis mit einer ungeraden Anzahl von Ecken, so ist er nicht bipartit.

Hier wurde Arbeitsblatt 5.3 (Bipartit und nicht bipartit) ausgegeben.

Satz: Ein einfacher Graph mit mindestens zwei Ecken ist genau dann bipartit, wenn er keinen Kreis mit ungerader Eckenzahl enthält.

Beweis: Aus Spezialfall: Ist ein Graph bipartit, so enthält er keinen Kreis mit ungerader Eckenzahl.

Betrachte einen einfachen Graphen, der keinen Kreis mit ungerader Eckenzahl enthält. Zeige: Der Graph ist bipartit.

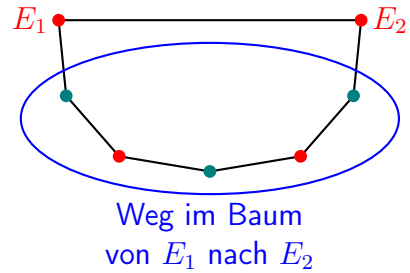
Wir nehmen an, dass der Graph zusammenhängend ist.

Schritt 1: Konstruiere einen aufspannenden Baum. Der Baum ist bipartit. Färbe die Ecken, um sie den Mengen M und N zuzuordnen. Damit sind alle Ecken des Graphen gefärbt!

Schritt 2: Ergänze nun die restlichen Kanten des Graphen. Es gibt keine Kante, die gleich gefärbte

Ecken verbindet, denn:

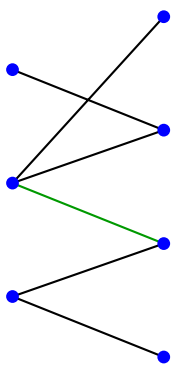
Annahme: Eine Kante verbindet zwei rote Ecken E_1, E_2 .
 Im Baum gibt es einen Weg, der E_1 und E_2 verbindet.
 E_1, E_2 haben dieselbe Farbe und der Baum ist bipartit
 \Rightarrow der Weg hat eine ungerade Anzahl an Ecken.
 Durch die Kante, die E_1 mit E_2 verbindet, entsteht ein
 Kreis mit ungerader Eckenzahl \downarrow \square



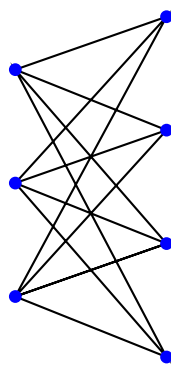
Definition: 1) Ein zusammenhängender bipartiter Graph heißt m - n -Graph, wenn seine zwei Ecken-
 teilmengen M und N m Ecken bzw. n Ecken enthalten.

2) Ein bipartiter Graph ohne parallele Kanten, bei dem jede Ecke aus M mit jeder Ecke aus N
 benachbart ist, heißt vollständiger bipartiter Graph.

Veranschaulichung:



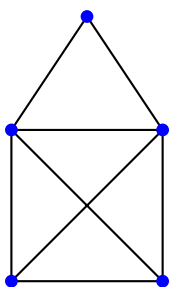
3-4-Graph



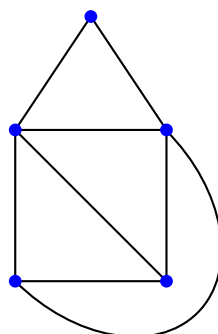
vollständiger 3-4-Graph

Hier wurde Arbeitsblatt 5.4 (Vollständige m - n -Graphen) ausgegeben.

9. Ebene und plättbare Graphen



nicht eben, aber plättbar



eben und plättbar

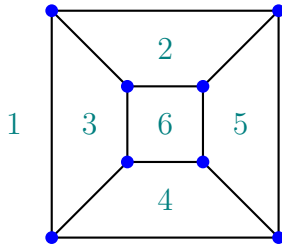
Definition: 1) Ein in der Ebene gezeichneter Graph heißt eben, wenn seine Kanten keine Punkte
 gemeinsam haben außer Ecken.

2) Ein Graph heißt plättbar, wenn er isomorph zu einem ebenen Graphen ist.

Hier wurde Arbeitsblatt 5.5 (Ebene Graphen) ausgegeben.

Beobachtung: Ein ebener Graph unterteilt die Zeichenebene in Flächen, eine Außenfläche und keine,
 eine oder mehrere Innenflächen.

Beispiel:



Hier wurde Arbeitsblatt 5.1 (Ecken, Kanten und Flächen) ausgegeben.

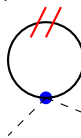
Einheit 6


Satz: Für jeden zusammenhängenden ebenen Graphen gilt die eulersche Flächenformel

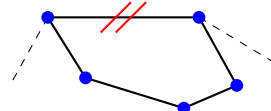
$$e - k + f = 2.$$

Hierbei bezeichnet e die Anzahl der Ecken, k die Anzahl der Kanten und f die Anzahl der Flächen. Die äußere Fläche muss mitgezählt werden.

Beweis: Betrachte einen zusammenhängenden ebenen Graphen mit e Ecken, k Kanten und f Flächen. Entferne so lange Kanten, bis der entstehende Teilgraph ein Baum ist.

Entfernen einer Schlinge:  f und k werden jeweils um 1 kleiner, e bleibt gleich
 $\Rightarrow e - k + f$ bleibt gleich.

Entfernen einer parallelen Kante:  genauso

Entfernen einer Kante aus einem Kreis:  genauso

Wir können also alle Kreise „öffnen“, ohne den Wert von $e - k + f$ zu ändern. Der Graph bleibt zusammenhängend.

Am Ende bleibt ein Baum mit e Ecken übrig. Für diesen gilt $e - k + f = 2$ (letzte Aufgabe).
 \Rightarrow Für den ursprünglich gegebenen Graphen gilt ebenfalls $e - k + f = 2$. \square

Hier wurde hier Arbeitsblatt 6.1 (Graphen und Eulerformel) ausgegeben.

Definition: Ein Graph heißt vollständig eben, wenn er einfach und eben ist und ihm keine Kante hinzugefügt werden kann, ohne dass seine Eigenschaft, einfach und eben zu sein, verloren geht.

Hier wurde Arbeitsblatt 6.2 (Möglichst viele Kanten) ausgegeben.

Satz: Ein vollständig ebener Graph mit $e \geq 3$ Ecken besitzt $k = 3 \cdot e - 6$ Kanten.

Beweis: Betrachte einen vollständig ebenen Graphen.

Er ist zusammenhängend, denn sonst könnte man noch eine Kante ergänzen.

\Rightarrow Es gilt die eulersche Formel $f = 2 + k - e$.

Jede innere Fläche ist ein Dreieck, denn sonst könnte noch eine Kante eingefügt werden.

Die äußere Fläche wird auch von 3 Kanten begrenzt, denn sonst könnte man außen noch eine Kante ergänzen.

Addiert man die Anzahl der Kanten, die die Dreiecke begrenzen, so zählt man jede Kante doppelt

$$\Rightarrow 2k = 3f = 3(2 + k - e)$$

$$\Rightarrow 2k = 6 + 3k - 3e \Leftrightarrow 0 = 6 + k - 3e \Leftrightarrow k = 3e - 6. \quad \square$$

Folgerung: Ein einfacher ebener Graph mit $e \geq 3$ Ecken besitzt höchstens $k = 3e - 6$ Kanten.

Hier wurde Arbeitsblatt 6.3 (Plättbare und nicht plättbare Graphen) ausgegeben.

10. Nicht plättbare Graphen

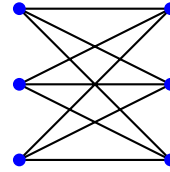
Satz: Ein vollständiges Fünfeck ist nicht plättbar. (Beweis siehe Übungsaufgabe)

Satz: Der vollständige 3-3-Graph ist nicht plättbar.

Beweisversuch:

$$e = 6 \Rightarrow 3 \cdot e - 6 = 12$$

Es gilt $k = 9 \leq 12$, also kein Widerspruch



Beweis: Annahme: Der vollständige 3-3-Graph ist plättbar

Dann gibt es einen isomorphen ebenen Graphen.

Der ebene Graph hat $e = 6$ Ecken und $k = 9$ Kanten.

$$\text{Eulersche Formel} \Rightarrow f = 2 + k - e = 5$$

Der ebene Graph hat, wie der vollständige 3-3-Graph, nur Kreise mit mindestens 4 Ecken.

\Rightarrow jede Fläche wird von mindestens 4 Kanten begrenzt, auch die Außenfläche

Addiert man die Anzahl der begrenzenden Kanten, so zählt man jede Kante doppelt

$$\Rightarrow 2k \geq 4f = 20 \Rightarrow k \geq 10 \quad \text{Denn er besitzt nur 9 Kanten}$$

\Rightarrow die Annahme muss falsch sein

\Rightarrow der vollständige 3-3-Graph ist nicht plättbar. \square

Satz: Ist ein Graph plättbar, dann sind auch alle seine Teilgraphen plättbar. Insbesondere: Besitzt ein Graph auch nur einen Teilgraphen, der nicht plättbar ist, dann ist der Graph nicht plättbar.

Beweisskizze: Gibt es zu einem Graphen einen isomorphen ebenen Graphen, dann gibt es zu jedem Teilgraphen einen isomorphen Teilgraphen des ebenen Graphen. Und der ist dann eben.

Definition: Fügt man in einem Graphen zusätzliche Ecken auf den bereits bestehenden Kanten ein, so erhält man eine Unterteilung des Graphen.

Durch eine zusätzliche Ecke werden aus einer Kante zwei neue Kanten.

Satz von Kuratowski: Ein Graph ist genau dann nicht plättbar, wenn er einen Teilgraphen enthält, der isomorph zu einem vollständigen Fünfeck oder einem vollständigen bipartiten 3-3-Graphen oder einer Unterteilung eines dieser beiden Graphen ist.

Hier wurde Arbeitsblatt 6.4 (Nicht plättbare Graphen) ausgegeben.

Einheit 7

11. Graphen und Polyeder

Definition: Ein Polyeder ist ein dreidimensionaler Körper, dessen Seiten aus ebenen Vielecksflächen bestehen. Die Vielecksflächen stoßen an den Kanten und den Ecken des Körpers zusammen. In jeder Ecke enden mindestens 3 Kanten.

Die Ecken und Kanten bilden den Graphen des Polyeders.

Hier wurde Arbeitsblatt 7.1 (Polyeder und Graphen) ausgegeben.

Satz: Für jeden Graphen eines Polyeders gelten:

- 1) Der Graph ist zusammenhängend und einfach,
- 2) Eckenzahl $e \geq 4$,
- 3) Kantenzahl $k \geq 6$.

Beweis: 1) Zusammenhängend: Ein Polyeder ist ein Körper.

Die Kante eines Polyeders sind Geradenstücke. Daher besitzt der Graph keine parallelen Kanten und keine Schlingen, ist also einfach.

2) 3 Ecken liegen in einer Ebene, bilden also nicht die Ecken eines Körpers $\Rightarrow e \geq 4$.

3) In jeder Ecke enden mindestens 3 Kanten

\Rightarrow Es gibt mindestens $4 \cdot 3 = 12$ Enden von Kanten.

Jede Kante hat zwei Enden $\Rightarrow k \geq 6$. \square

Hier wurde Arbeitsblatt 7.2 (Polyeder mit wie vielen Kanten gibt es?) ausgegeben.

Satz: 1) Zu jeder natürlichen Zahl $k \geq 6$, $k \neq 7$ gibt es ein Polyeder mit k Kanten.

2) Es gibt kein Polyeder mit 7 Kanten.

Beweis: Siehe letztes und nächstes Übungsblatt.

Hier wurde Arbeitsblatt 7.3 (Polyeder mit 7 Kanten?) ausgegeben.

Definition: Ein Polyeder heißt konvex, wenn die Verbindungsstrecken beliebiger Punkte des Polyeders ganz im Polyeder verlaufen.

Satz: Der Graph eines konvexen Polyeders ist plättbar, d.h. er besitzt einen isomorphen ebenen Graphen. Die Anzahl der Flächen des Polyeders ist gleich der Anzahl der Flächen des ebenen Graphen, wenn beim ebenen Graphen die äußere Fläche mitgezählt wird.

Veranschaulichung: Bei dem Graphen eines konvexen Polyeders kann man so durch eine seiner Flächen hindurchsehen, so dass man den Graphen des Polyeders ohne Kreuzungen der Kanten sieht. Die Fläche, durch die man hindurchsieht, wird die äußere Fläche des ebenen Graphen.

Satz: Für jedes konvexe Polyeder gilt die eulersche Polyederformel: $e - k + f = 2$

Beweis: Betrachte ein konvexes Polyeder. Der Graph des Polyeders besitzt einen isomorphen Graphen, der eben, einfach und zusammenhängend ist. Für jeden ebenen und zusammenhängenden Graphen gilt die eulersche Formel $e - k + f = 2$ (früherer Satz).

Der Graph des Polyeders besitzt gleich viele Ecken, Kanten und Flächen,

\Rightarrow Die Formel gilt auch für das Polyeder. \square

Hier wurde Arbeitsblatt 7.4 (Polyeder und ebene Graphen) ausgegeben.

Satz: Ein ebener Graph, der isomorph zu dem Graphen eines Polyeders ist, hat folgende Eigenschaften:

1) Er ist zusammenhängend und einfach,

2) $e \geq 4$,

3) Jede Ecke hat mindestens den Grad 3,

4) $k \geq 6$.

Beweis: Jeder Graph eines Polyeders besitzt alle diese Eigenschaften, also auch jeder isomorphe Graph. \square

12. Platonische Körper und Graphen

Definition: Ein konvexes Polyeder heißt platonischer Körper, wenn alle Flächen aus kongruenten regelmäßigen n -Ecken bestehen und in jeder Ecke gleich viele Kanten enden.

Hier wurde Arbeitsblatt 7.5 (Platonische Körper und Graphen) ausgegeben.

Definition: Ein zusammenhängender einfacher ebener Graph heißt platonischer Graph, wenn er folgende Eigenschaften besitzt:

- 1) Alle Ecken des Graphen haben den selben Grad, dieser beträgt mindestens 3 und
- 2) alle Flächen (auch die äußere) haben die selbe Anzahl Kanten, diese ist mindestens 3.

Folgerung: Die fünf Polyeder Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder, Ikosaeder sind platonische Körper, ihre Graphen sind isomorph zu platonische Graphen.

Satz: Jeder platonische Graph ist isomorph zu einem der Graphen von Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder, Ikosaeder. Daher gibt es genau diese fünf platonischen Körper.

Hier wurde Arbeitsblatt 7.6 (Die 5 platonischen Körper und Graphen) ausgegeben.

9 Ausarbeitung Unterrichtsstunde 1: Graphen und Rundwege

9.1 Stundenverlauf

Zeit	Unterrichtsschritte bzw. Unterrichtsarrangement	Sozialform L-S-Tätigkeit Methode	Was ich brauche
17:00	Begrüßung, Vorstellung		
17:02	Haus vom Nikolaus zeichnen	Schüler:in an Tafel	Tafel
17:05	Definition Graph, Bezeichnungen	L-Vortrag	Tafel
17:15	Übungen, Besprechung am Visualizer	Einzel-/ Partnerarbeit	Arbeitsblatt 1, Visualizer
17:25	Vereinbarung, Graph als Tabelle	L-Vortrag	Tafel
17:30	Übungen, Besprechung am Visualizer	Einzel-/ Partnerarbeit	Arbeitsblatt 2, Visualizer
17:40	Isomorphie von Graphen	L-Vortrag	Tafel
17:45	Übungen, Besprechung am Visualizer	Einzel-/ Partnerarbeit	Arbeitsblatt 3, Visualizer
17:55	Rundwege	L-Vortrag	Tafel
18:00	Übungen, Besprechung am Visualizer	Einzel-/ Partnerarbeit	Arbeitsblatt 4, Visualizer
18:10	Sätze über eulersche Graphen	L-Vortrag, gemeinsames Beschriften	Tafel, Visualizer Arbeitsblatt 5
18:??	Übungen	Puffer	Arbeitsblatt 6
18.30	Verabschiedung		

Kommentar: Doppelstunde ist sehr voll. 2024 konnte das Arbeitsblatt 5 (Eulersche Touren finden) nur kurz besprochen werden.

2024 haben wir den Inhalt von 6 Doppelstunden gestreckt auf 7 Doppelstunden.

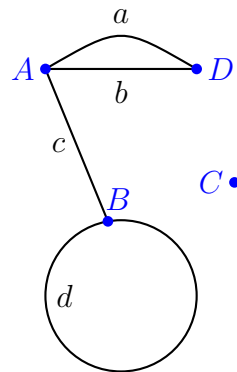
9.2 Tafelanschiebe

Haus vom Nikolaus zeichnen (Schüler:in)

1. Was ist ein Graph?

Definition: Ein Graph besteht aus Ecken und Kanten. Er muss mindestens eine Ecke besitzen. Jede Kante verbindet zwei verschiedene Ecken oder eine Ecke mit sich selber.

Bezeichnungen:

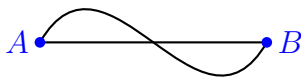


C : isolierte Ecke
 d : Schlinge
 a, b : parallele Kanten
 $\text{Grad}(A) = 3$
 $\text{Grad}(B) = 3$
 $\text{Grad}(C) = 0$
 $\text{Grad}(D) = 2$

Definition: Eine Ecke, an der keine Kante endet, heißt isoliert.
 Eine Kante, die eine Ecke mit sich selbst verbindet, heißt Schlinge.
 Zwei Kanten, die die selben Ecken verbinden, heißen parallel.
 Der Grad einer Ecke ist die Anzahl der Endpunkte von Kanten in dieser Ecke.

Arbeitsblatt 1.1: Graphen und Eckengrade (Besprechung an Tafel)

Vereinbarung: Kreuzen sich zwei Kanten, ohne dass dort eine Ecke eingezeichnet ist, so stellen wir uns vor, dass die Kanten übereinander verlaufen, ohne sich zu schneiden.



Graph mit zwei Ecken und zwei parallelen Kanten

2. Graphen als Tabellen

Methode: Zeichne eine Tabelle, die für jede Ecke sowohl eine Spalte als auch eine Zeile enthält. Trage in das Feld der Zeile B und Spalte C ein, wie viele Kanten B und C verbinden.

Arbeitsblatt 1.2: Tabellen von Graphen (Besprechung am Visualizer)

Definition: Zwei Graphen heißen isomorph, wenn sie bei geeigneter Bezeichnung der Ecken dieselbe Tabelle besitzen.

Anschaulich: Der eine Graph kann so „verbogen“ werden, dass der andere entsteht.

Satz: Sind zwei Graphen isomorph, so haben sie dieselbe

- Anzahl von Ecken
- Anzahl von Kanten
- Anzahl von Schlingen
- Anzahl paralleler Kanten
- Liste der Eckengrade bis auf Reihenfolge

Umgekehrt: Ist einer dieser Punkte nicht erfüllt, so sind die Graphen nicht isomorph.

Arbeitsblatt 1.3: Isomorphe Graphen (Besprechung am Visualizer)

3. Rundwege

Definition: 1) Ein Kantenzug in einem Graphen ist eine Folge von Kanten, die nacheinander ohne Absetzen gezeichnet werden können.

Beim Nachfahren eines Kantenzugs wird die Ecke, in der die erste Kante beginnt, über den Kantenzug mit der Ecke, in der die letzte Kante endet, verbunden.

2) Ein Graph heißt zusammenhängend, wenn es zu je zwei beliebig gewählten Ecken immer einen Kantenzug gibt, der sie verbindet.

3) Ein Kantenzug heißt geschlossen, wenn Anfangsecke = Endecke.

4) Ein Kantenzug, der

- jede Kante genau ein Mal benützt und
- geschlossen ist,

heißt eulersche Tour.

5) Ein Graph, der eine eulersche Tour enthält, heißt eulerscher Graph.

Anschaulich: Einen eulerschen Graphen ohne isolierte Ecke kann man zeichnen ohne abzusetzen, ohne eine Kante doppelt abzufahren und so, dass man bei der Anfangsecke endet.

Arbeitsblatt 1.4: Eulersche Touren (Besprechung am Visualizer)

Satz: In einem eulerschen Graphen sind alle Eckengrade geradzahlig.

Beweis: Fall 1: E ist eine isolierte Ecke. Dann gilt $\text{Grad}(E) = 0$, und 0 ist gerade.

Fall 2: E ist eine nicht isolierte Ecke. Betrachte eine eulersche Tour. Diese geht durch E . Sei n die Zahl, wie oft die Tour durch E kommt. Dann gilt $\text{Grad}(E) = 2n$, da die Tour E immer auf einer Kante erreicht und auf einer anderen Kante verlässt und beim nächsten Durchgang neue Kanten verwendet werden. \square

Satz von Euler: Ein Graph ohne isolierte Ecke ist genau dann eulersch, wenn er zusammenhängend ist und alle Eckengrade gerade sind.

Beweis: Ist der Graph eulersch, so gilt:

- Nach dem letzten Satz sind alle Eckengrade gerade.
- Sind zwei Ecken gegeben, dann kann man von der einen Ecke aus so lange eine eulersche Tour entlanggehen, bis man bei der anderen Ecke ankommt, da keine der Ecken isoliert ist. Dann hat man einen Kantenzug gefunden, der die beiden Ecken verbindet. Also ist der Graph zusammenhängend. (Da es keine isolierten Ecken gibt, geht jede eulersche Tour durch die beiden Ecken.)

Jetzt setze voraus: Alle Eckengrade sind gerade und der Graph ist zusammenhängend.

Beweis: Es gibt eine eulersche Tour. Siehe nächstes Arbeitsblatt.

Arbeitsblatt 1.5: Eulersche Touren finden (Gemeinsames Ausfüllen, siehe nächstes Tafelbild)

Erster Kantenzug:
 $A - k_1 - k_2 - k_3 - A$

Erste Erweiterung:
 $A - k_1 - k_2 - E_1 - k_4 - k_5 - k_6 - k_7 - E_1 - k_3 - A$

Zweite Erweiterung:
 $A - k_1 - k_2 - E_1 - k_4 - k_5 - k_6 - E_2$
 $- k_8 - k_9 - k_{10} - E_2 - k_7 - E_1 - k_3 - A$

Nun sind alle Kanten verbraucht und wir haben eine eulersche Tour gefunden.

Arbeitsblatt 1.6: Eulersche Graphen (Besprechung durch Zuruf / an Tafel)

9.3 Arbeitsblätter

Siehe folgende Seiten

Graphen und Eckengrade

Aufgabe 1

- a) Zeichne einen Graphen mit 2 Ecken mit Grad 1 und 7.
- b) Zeichne einen Graphen mit 5 Ecken mit Grad 1, 2, 2, 2, 3.
- c) Zeichne zwei verschiedene Graphen mit jeweils 4 Ecken, wovon zwei den Grad 2 und zwei den Grad 3 haben.

d) Fülle die Tabelle aus:

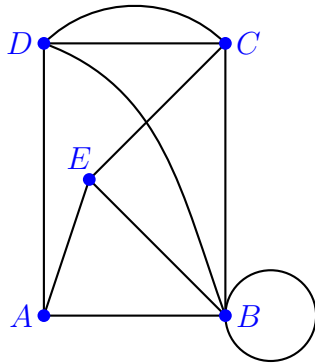
	a)	b)	c ₁)	c ₂)
Summe Eckengrade				
Anzahl Kanten				

- e) Wie hängen die Eckengrade und die Zahl der Kanten zusammen?
- f) Warum gibt es keinen Graphen mit drei Ecken mit den Graden 4, 5, 6?

Tabellen von Graphen

Aufgabe 2

Trage in die Tabelle ein, wie viele Kanten die jeweiligen Ecken verbinden.



	A	B	C	D	E	Grad
A						
B						
C						
D						
E						

Aufgabe 3

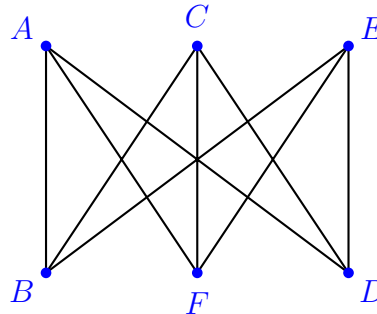
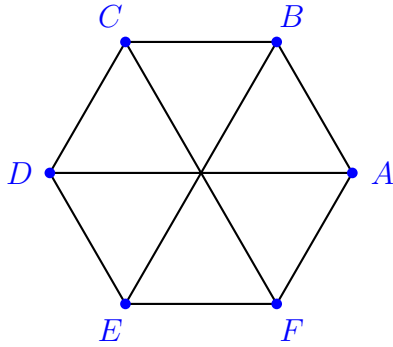
Zeichne zwei verschieden aussehende Graphen, die die folgende Tabelle besitzen.

	A	B	C	D
A	1	0	1	1
B	0	0	0	2
C	1	0	2	1
D	1	2	1	0

Isomorphe Graphen

Aufgabe 4

Zeige, dass die folgenden Graphen isomorph sind:



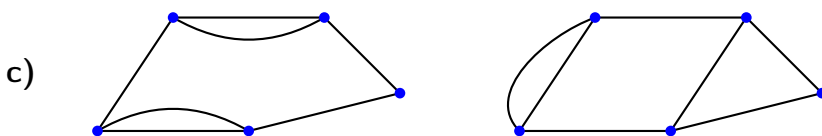
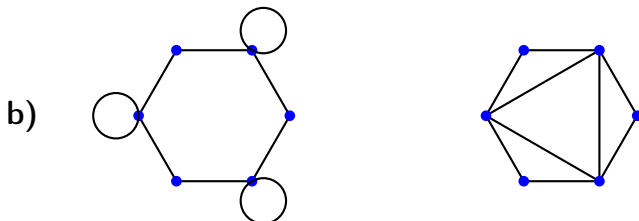
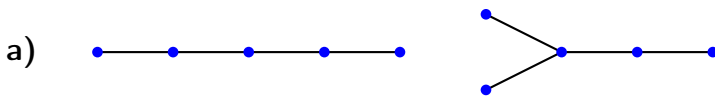
	A	B	C	D	E	F
A						
B						
C						
D						
E						
F						

	A	B	C	D	E	F
A						
B						
C						
D						
E						
F						

Die Graphen sind isomorph, denn

Aufgabe 5

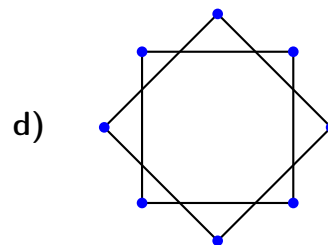
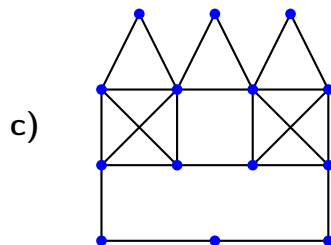
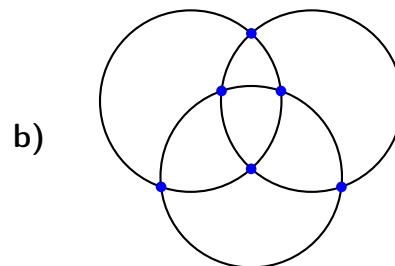
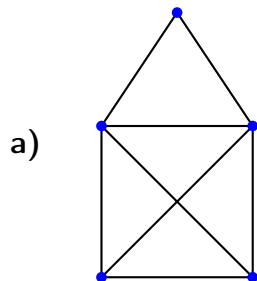
Warum sind die folgenden Graphen jeweils nicht isomorph?



Eulersche Touren

Aufgabe 6

In welchem der Graphen gibt es eine eulersche Tour?



Eulersche Touren finden

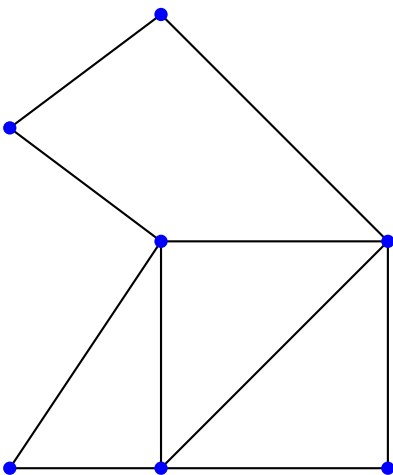
Sei ein zusammenhängender Graph gegeben, bei dem alle Eckengrade geradzahlig sind. Um eine Eulersche Tour zu finden, kann der folgende Algorithmus verwendet werden.

Schritt 1: Wähle irgendeine Ecke A als Anfangsecke. Bilde einen Kantenzug, bis die Anfangsecke wieder erreicht ist. Dies geht, da jede andere Ecke, die man erreicht, auch wieder auf einer anderen Kante verlassen werden kann (gerader Eckengrad).

Schritt 2: Falls noch nicht alle Kanten benützt wurden, gehe auf dem bisherigen Kantenzug bis zur ersten Ecke E_1 , von der eine nicht benutzte Kante abzweigt. Da der Eckengrad eine gerade Zahl ist, müssen sogar zwei Kanten abzweigen. Gehe eine dieser Kanten entlang und bilde einen Kantenzug aus lauter noch nicht verwendeten Kanten, bis wieder E_1 erreicht wird. Füge diesen neuen Kantenzug in den alten ein.

Wiederhole nun Schritt 2 so oft, bis alle Kanten verbraucht sind. Da der Graph zusammenhängend ist, bleibt keine Kante übrig. \square

Der Algorithmus am Beispiel:



Erster Kantenzug:

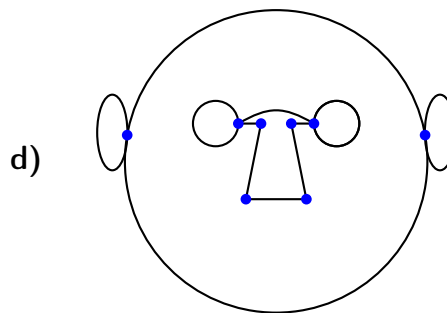
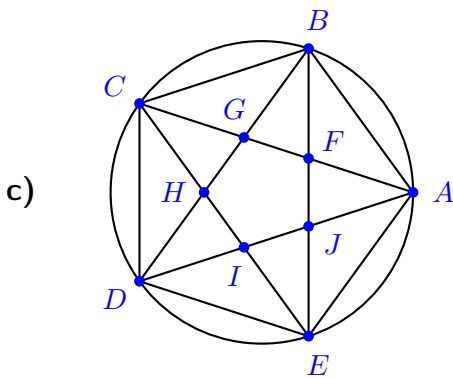
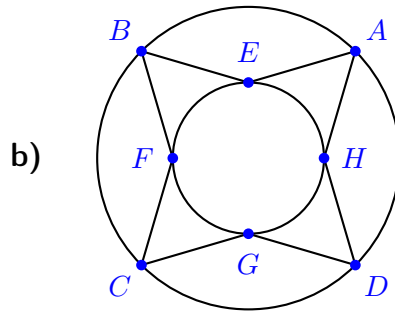
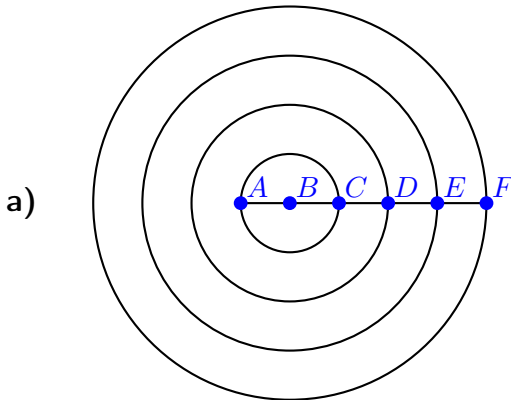
Erste Erweiterung:

Zweite Erweiterung:

Eulersche Graphen

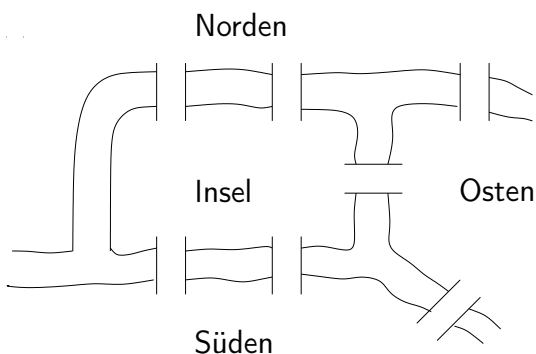
Aufgabe 7

Welcher der folgenden Graphen ist eulersch? Trage Deine Antwort in die Tabelle ein.



	eulersch	nicht eulersch weil
Graph a)		
Graph b)		
Graph c)		
Graph d)		

Aufgabe 8



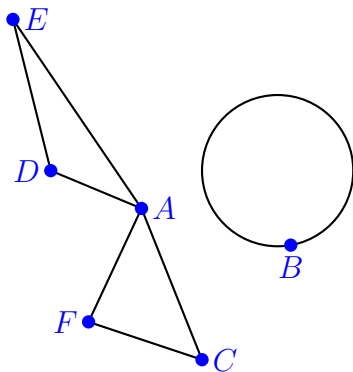
Das Königsberger Brückenproblem: In Königsberg gibt es 7 Brücken über die Pregel, wie im nebenstehenden Stadtplan dargestellt. Die Frage ist nun, ob es einen Rundweg durch Königsberg gibt, so dass jede der Brücken genau ein Mal überquert wird. Zeichne einen Graphen, der zu diesem Problem passt: Die Brücken sollen als Kanten dargestellt werden, da man sie genau einmal überqueren soll. Entscheide dann, ob ein solcher Rundweg möglich ist.

Schriftliche Aufgaben

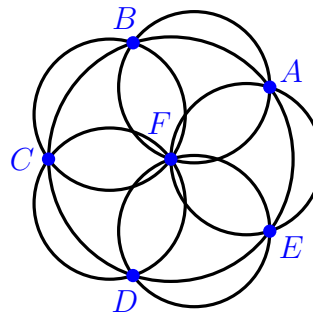
Name:

Aufgabe 9

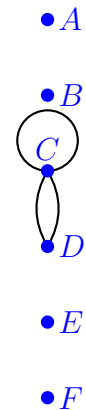
Trage die Anzahl an Schlingen, isolierten Ecken, parallelen Kanten, Komponenten und die Grade der Ecken der abgebildeten Graphen in die Tabelle ein. Kreuze außerdem die entsprechenden Felder in der Tabelle an, wenn die abgebildeten Graphen zusammenhängend oder eulersch sind.



Graph 1



Graph 2



Graph 3

	Graph 1	Graph 2	Graph 3
Anzahl Schlingen			
Anzahl isolierter Ecken			
Anzahl paralleler Kanten			
zusammenhängend?			
Grad von A			
Grad von B			
Grad von C			
Grad von D			
Grad von E			
Grad von F			
eulersch?			

Weiter auf Seite 2

Aufgabe 10

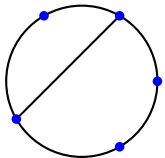
Wahr oder falsch? Kreuze an!

	wahr	falsch
In jedem Graphen ist die Summe der Eckengrade eine gerade Zahl.		
Ein zusammenhängender Graph kann eine isolierte Ecke besitzen.		
In jedem zusammenhängenden Graphen, dessen Ecken alle geraden Grad haben, gibt es eine eulersche Tour.		
In einer eulerschen Tour darf eine Ecke auch mehrmals überfahren werden.		
In einer eulerschen Tour darf eine Kante auch mehrmals benützt werden.		
Ein eulerscher Graph kann eine Schlinge besitzen.		
Ein eulerscher Graph kann eine isolierte Ecke besitzen.		
In einem eulerschen Graphen ist es in jeder Ecke möglich, eine eulersche Tour zu starten.		

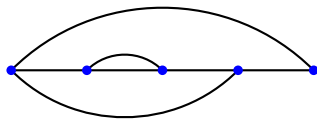
Aufgabe 11

Gegeben sind fünf Graphen. Untersuche, welche der Graphen isomorph zueinander sind. Trage Deine Ergebnisse in die Tabelle ein bzw. kreuze an, falls der angegebene Graph zu keinem der anderen isomorph ist.

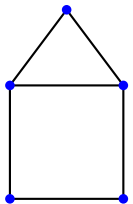
Graph 1:



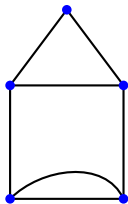
Graph 2:



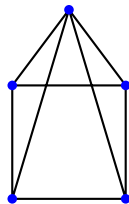
Graph 3:



Graph 4:



Graph 5:



	ist isomorph zu	ist zu keinem der anderen Graphen isomorph
Graph 1		
Graph 2		
Graph 3		
Graph 4		
Graph 5		

Weiter auf Seite 3

Aufgabe 12

Zeichne jeweils einen Graphen, der die angegebenen Eigenschaften besitzt.

Hinweis: Die Graphen sind durch die angegebenen Eigenschaften nicht unbedingt eindeutig bestimmt.

- a) Zusammenhängender Graph mit 5 Ecken, 4 Kanten, und ein Eckengrad soll 3 sein.
- b) Nicht zusammenhängender Graph mit 5 Ecken, 4 Kanten, und ein Eckengrad soll 3 sein.
- c) Eulerscher Graph mit 5 Ecken und möglichst wenig Kanten, ohne isolierte Ecke.
- d) Eulerscher Graph mit 5 Ecken und möglichst vielen Kanten, ohne parallele Kanten.

Graph zu a)

Graph zu b)

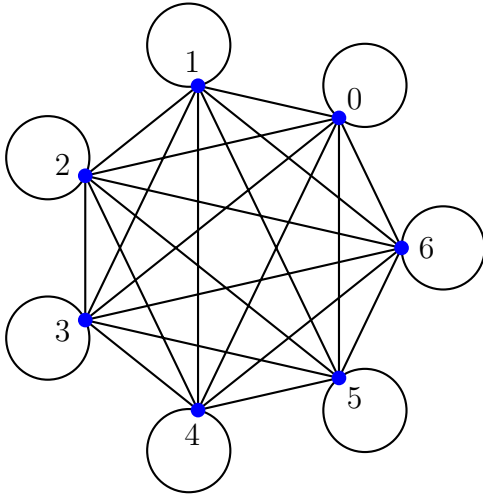
Graph zu c)

Graph zu d)

Weitere Aufgaben

Zusatzaufgabe 1

Alle Steine eines Dominospiels sollen nach den Dominoregeln hintereinander gelegt werden. Der Anfang und das Ende der Kette sollen wieder zusammenpassen. Diese Problemstellung ist zeichnerisch in den folgenden Graphen übersetzt:



Die Kante von der Ecke 0 nach der Ecke 1 entspricht dem Dominostein mit der Augenzahl 0 auf der einen Hälfte und der Augenzahl 1 auf der anderen Hälfte.

Somit erfüllt jeder Kantenzug in diesem Graph die Dominoregeln. Damit der Anfang und das Ende auch übereinstimmen, muss der Kantenzug eine Eulersche Tour sein.

- a) Gibt es eine Eulersche Tour? Antwort:

Begründung:

- b) Wie sieht der Graph aus, wenn nur Dominosteine mit Augenzahlen von 0 bis 5 verwendet werden? Gibt es dann auch eine Eulersche Tour?

Antwort:

10 Ausarbeitung Unterrichtsstunde 2: Einfache und Hamiltonsche Graphen

10.1 Stundenverlauf

Zeit	Unterrichtsschritte bzw. Unterrichtsarrangement	Sozialform L-S-Tätigkeit Methode	Was ich brauche
17:00	Wiederholung	L-S-Gespräch	
17:05	Übung	Partnerarbeit	Tandembogen, AB 1
17:10	Def. einfacher Graph	L-Vortrag	Tafel
17:12	Übung, Besprechung	Einzelarbeit/L-S-Gespräch	AB 2, Visualizer
17:18	Def. vollst. Vieleck	L-Vortrag	Tafel
17:20	Übung, Besprechung	Partnerarbeit	AB 3, Visualizer
17:32	Satz	L-S-Gespräch	Tafel
17:40	Hamiltonsche Graphen	L-Vortrag/L-S-Gespräch	Tafel
17:56	Übung, Besprechung	Einzel-/Partnerarbeit	AB 4, Visualizer
18:24	Kriterien bis Def. Eckenlöschen	L-Vortrag/L-S-Gespräch	Tafel
18:30	Verabschiedung		

Kommentar: Wir haben den Begriff *Labeln* weggelassen, ich halte ihn für unnötig. Außerdem sehe ich ihn ein bisschen kritisch, da verschieden gelabelte Graphen als gleich betrachtet werden müssen.

Nach der Kürzung gut machbar. (Kriterien für nicht-hamiltonsche Graphen wurden in die nächste Einheit verschoben.)

10.2 Tafelanschiebe

Arbeitsblatt 2.1: [Eigenschaften von Graphen](#) (Besprechung an Tafel durch Zuruf)

4. Einfache Graphen

Definition: 1) Ein Graph heißt einfach, wenn er keine Schlingen und keine parallelen Kanten besitzt.

Arbeitsblatt 2.2: [Einfache Graphen](#) (Besprechung an Tafel)

2) Ein Graph heißt vollständiges Vieleck, wenn er einfach ist und jede Ecke mit jeder anderen durch eine Kante verbunden ist.

Arbeitsblatt 2.3: [Vollständige Vielecke](#) (Besprechung an Tafel)

Satz: Ein vollständiges Vieleck mit n Ecken besitzt $\frac{1}{2}n(n-1)$ Kanten.

Beweis: Jede Ecke ist mit jeder der anderen $n-1$ Ecken durch eine Kante verbunden.

$\Rightarrow \text{Grad}(E) = n-1$ für jede Ecke E im Graphen

\Rightarrow Summe der Eckengrade ist $n \cdot (n-1)$

Hierbei wird jede Kante zwei Mal gezählt

\Rightarrow der Graph besitzt $\frac{1}{2}n(n-1)$ Kanten. \square

Folgerung: Ein einfacher Graph mit n Ecken besitzt höchstens $\frac{1}{2}n(n-1)$ Kanten.

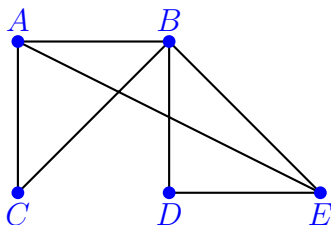
Arbeitsblatt 2.4: [Rundreisen](#) (Besprechung am Visualizer)

5. Hamiltonsche Graphen

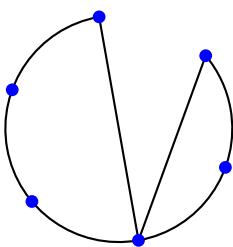
Definition: Ein geschlossener Kantenzug, der jede Ecke des Graphen genau ein Mal durchläuft und keine Kante zwei Mal benützt, heißt Hamiltonscher Kreis

Ein Graph, der einen Hamiltonschen Kreis enthält, heißt Hamiltonscher Graph.

Beispiele:



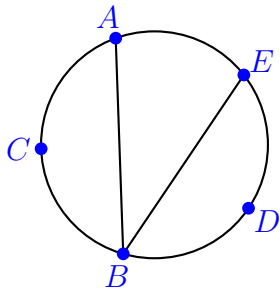
Graph 1:
Hamiltonscher Kreis:
 $A - C - B - D - E - A$
 \Rightarrow hamiltonsch



Graph 2: nicht hamiltonsch

Satz: Jeder hamiltonsche Graph ist isomorph zu einem Graphen, dessen Ecken auf einem Kreis liegen, und der die Kreislinie als Kantenzug enthält.

Beispiel:



Graph 3: isomorph zu Graph 1

Arbeitsblatt 2.5: Hamiltonsche Graphen (Besprechung an Tafel)

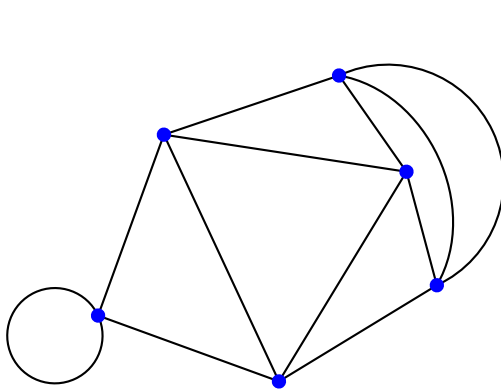
10.3 Arbeitsblätter

Siehe folgende Seiten

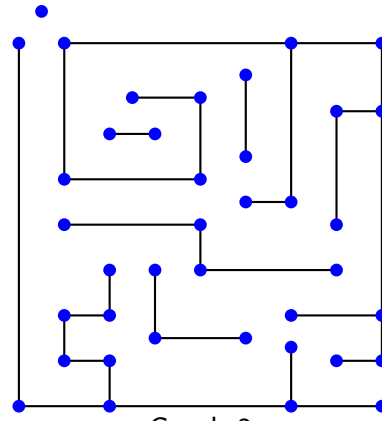
Eigenschaften von Graphen

Aufgabe 1

Welche Eigenschaften haben die beiden Graphen? Trage in die Tabelle „j“ für ja, „n“ für nein ein.



Graph 1



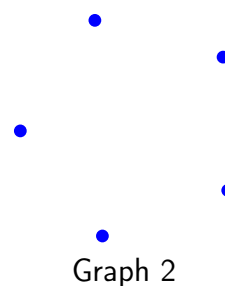
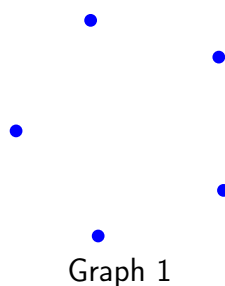
Graph 2

	Graph 1	Graph 2
enthält parallele Kanten		
enthält mindestens eine Schlinge		
hat mindestens eine isolierte Ecke		
ist zusammenhängend		
hat lauter Ecken mit dem selben Grad		
enthält eine Eulersche Tour		

Einfache Graphen

Aufgabe 2

- a) Ergänze den Graphen 1, so dass er einfach ist und genau vier Kanten besitzt (Lösung ist nicht eindeutig).
- b) Ergänze den Graphen 2, so dass er einfach ist und möglichst viele Kanten besitzt.



Vollständige Vielecke

Aufgabe 3

- a) Zeichne ein vollständiges 6-Eck, also einen vollständigen Graphen mit 6 Ecken. Wie viele Kanten besitzt es?
- b) Wie viele Kanten besitzt ein vollständiges 10-Eck?

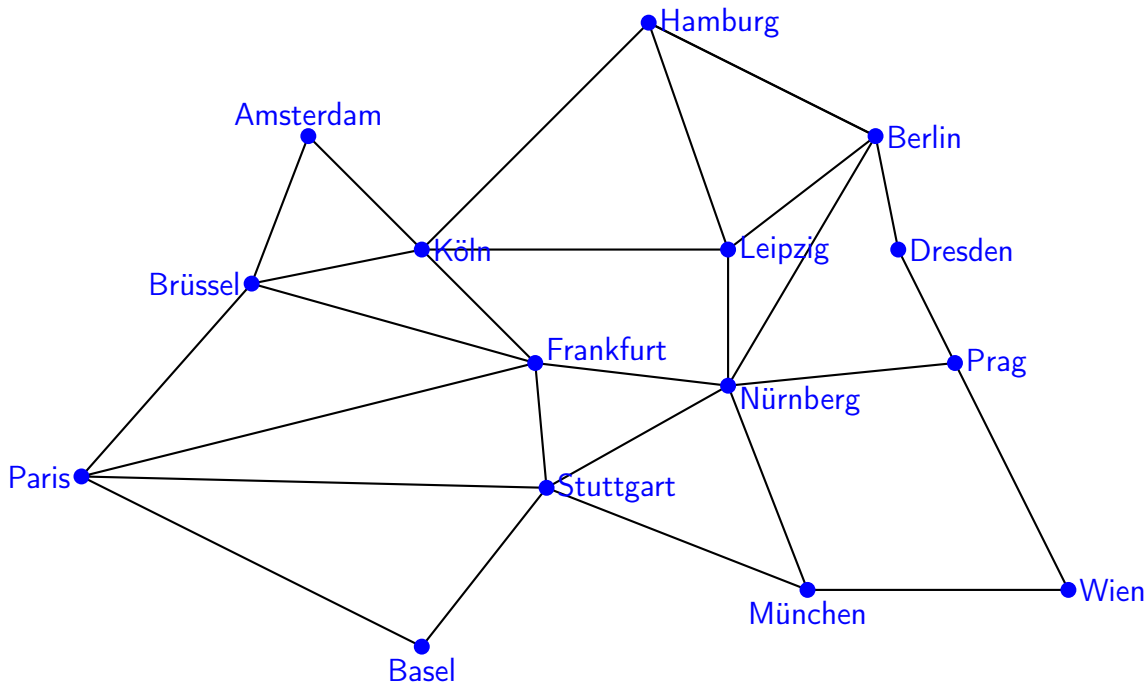
Zusatzaufgabe 1

Welche vollständigen n -Ecke sind eulersch?

Rundreisen

Aufgabe 4

Eine Freundesgruppe möchte eine Rundreise durch die in der Karte eingezeichneten Städte machen. Dabei wollen sie durch jede Stadt nur ein Mal reisen. Sie können nur die eingezeichneten Verbindungen benutzen.



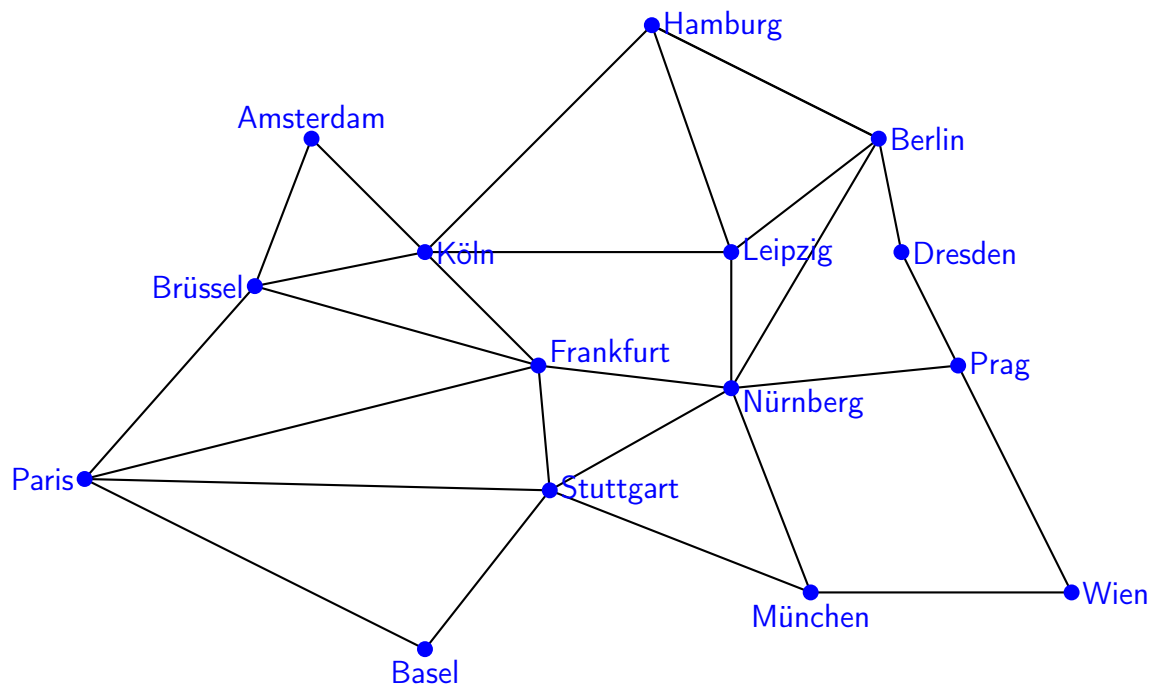
- Gib es eine Rundreise, die in Berlin startet und anschließend durch Nürnberg und dann durch Leipzig geht?
- Gibt es eine Rundreise, die in Berlin startet und anschließend durch Leipzig und dann durch Köln geht?
- Gibt es eine Rundreise, die in Stuttgart losgeht, dann nach Basel, nach Paris und anschließend nach Brüssel?
- Gibt es eine Rundreise, die in Berlin startet und anschließend nach Nürnberg und dann nach München geht?

Hinweis: Du kannst die Graphen auf der übernächsten Seite benutzen, um die Rundreisen einzuzeichnen oder zu begründen, warum es keine Rundreise mit der geforderten Reihenfolge gibt.

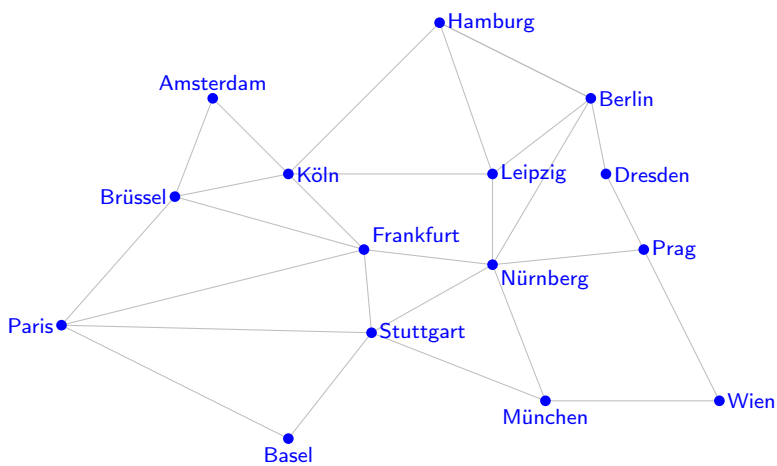
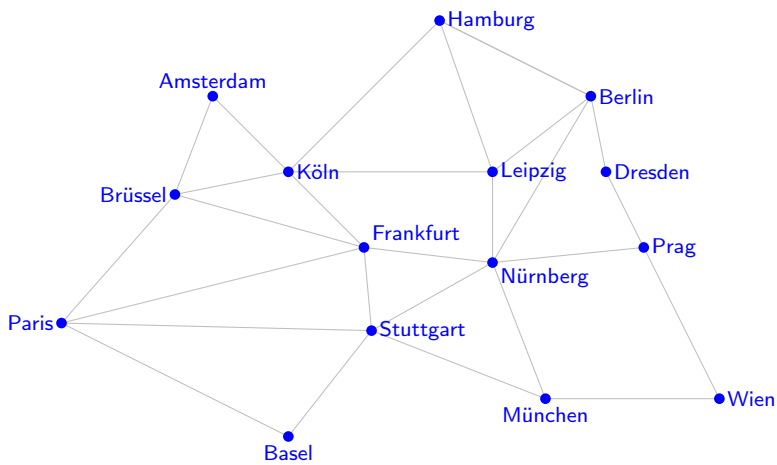
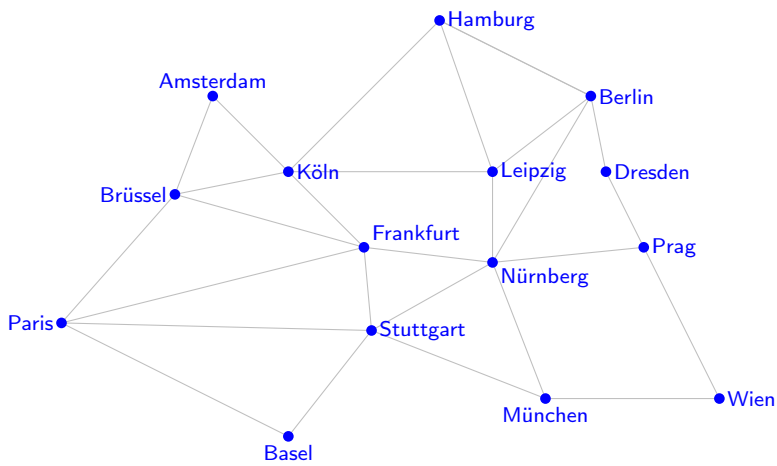
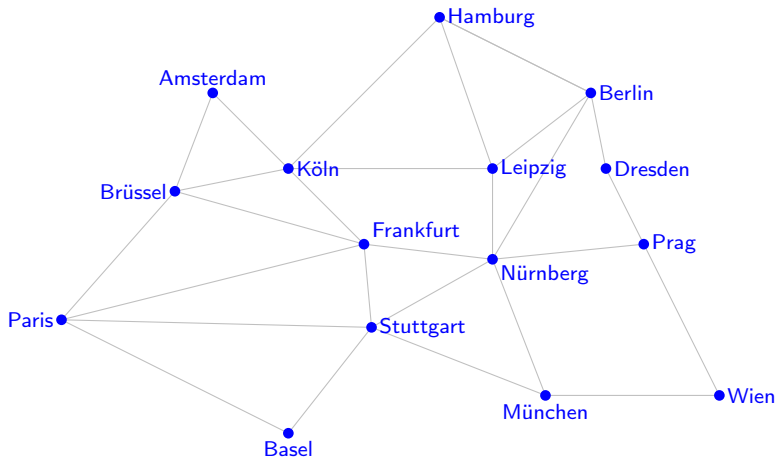
Weiter auf Seite 2

Zusatzaufgabe 2

Wie viele Kanten muss man im unten stehenden Graphen mindestens ergänzen, damit der Graph eulersch wird? Zeichne diese Kanten ein.



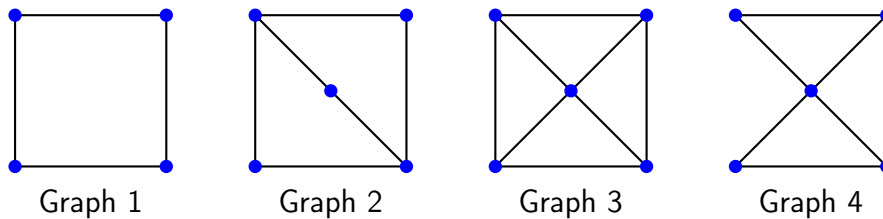
Weiter auf Seite 3



Hamiltonsche Graphen

Aufgabe 5

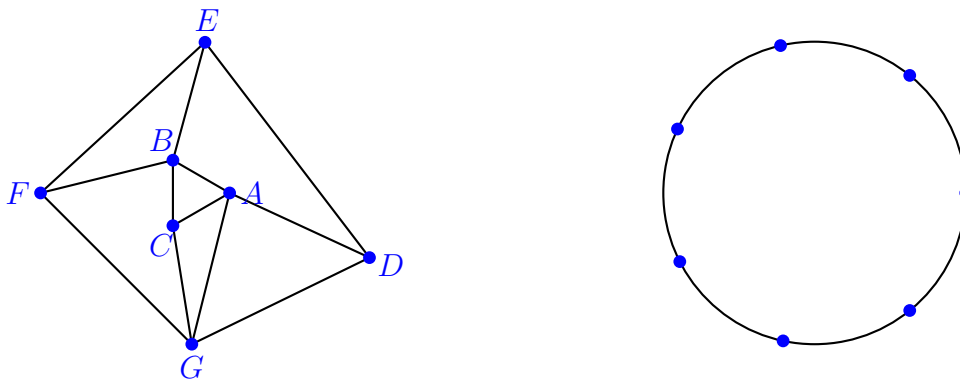
Untersuche, welcher der folgenden Graphen eulersch oder hamiltonsch ist. Trage in die Tabelle „j“ für ja, „n“ für nein ein.



	Graph 1	Graph 2	Graph 3	Graph 4
ist eulersch				
ist hamiltonsch				

Aufgabe 6

Gegeben sind die folgenden zwei Graphen.



- a) Finde im linken Graphen einen hamiltonschen Kreis.

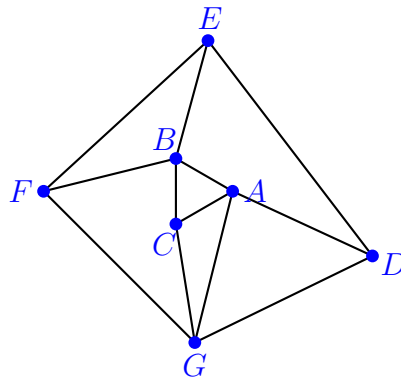
Hamiltonscher Kreis:

- b) Zeichne im rechten Graphen geeignete Bezeichnungen für die Ecken und weitere Kanten ein, so dass der fertige Graph isomorph zum linken Graphen ist.

Weiter auf Seite 2

Zusatzaufgabe 3

Gegeben ist nochmals der Graph aus der letzten Aufgabe.



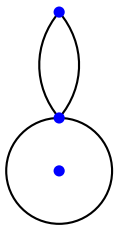
Gib möglichst viele verschiedene hamiltonsche Kreise des Graphen an. Hierbei bedeutet *verschieden*, dass die Reihenfolge unterschiedlich ist und nicht nur der Anfangspunkt im Kreis verschoben wurde.

Schriftliche Aufgaben

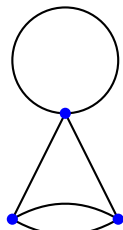
Name:

Aufgabe 7

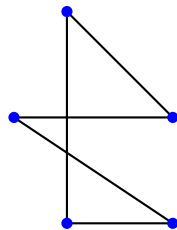
Welche Eigenschaften haben die Graphen? Trage in die Tabelle „j“ für ja, „n“ für nein ein.



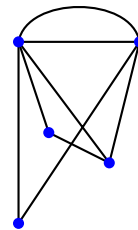
Graph 1



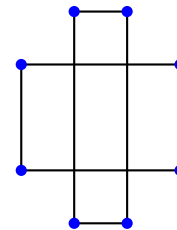
Graph 2



Graph 3



Graph 4



Graph 5

	Graph 1	Graph 2	Graph 3	Graph 4	Graph 5
ist zusammenhängend					
ist eulersch					
ist hamiltonsch					
ist einfach					

Weiter auf Seite 2

Aufgabe 8

Bei Antons Geburtstagsfeier soll die Sitzordnung von der Gestalt sein, dass eine Person immer zwischen zwei Personen sitzt, die sie bereits kennt. Anton lädt insgesamt sechs Personen aus verschiedenen Freundesgruppen ein.

In folgenden Gruppen kennt jeder jeden:

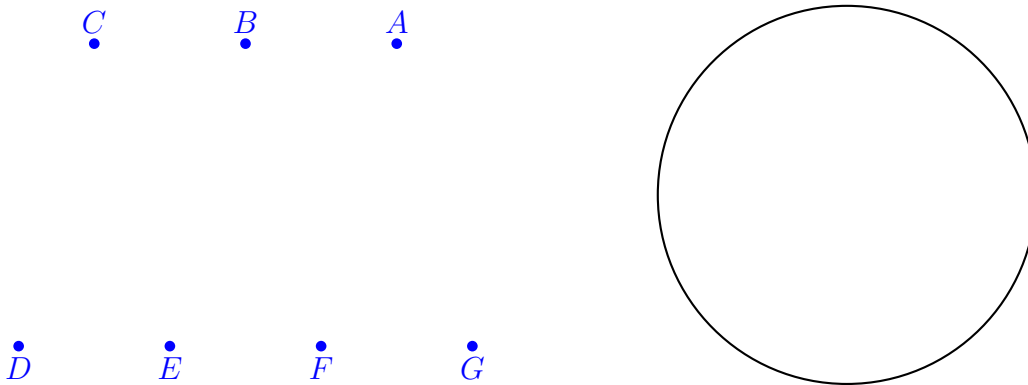
(Anton, Charlie, Emil, Florian);

(Anton, Charlie, Daniela, Gabriel);

(Anton, Beate, Gabriel);

(Anton, Daniela, Emil).

Übersetze die Problemstellung zeichnerisch in einen Graphen. Die Ecken stellen die Freunde mit gleichnamigem Anfangsbuchstaben dar.



- a) Verbinde zuerst im linken Graphen alle befreundeten Ecken mit einer Kante.
 b) Gib einen hamiltonschen Kreis im linken Graphen an.

Hamiltonscher Kreis:

A—	—A
----	----

- c) Zeichne die Ecken A, B, C, D, E, F, G gemäß der Reihenfolge im hamiltonschen Kreis auf dem rechts gezeichneten Kreis ein. Ergänze weitere Kanten, bis der rechte Graph isomorph zum links gezeichneten Graphen ist.
 d) Gib die Reihenfolge an, in der Anton seine Freunde um den Tisch setzen kann.

Sitzreihenfolge:

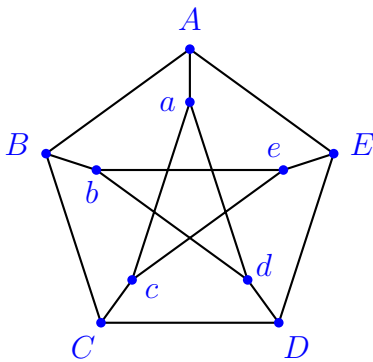
Anton—	—Anton
--------	--------

Aufgabe 9

- a) Der in den beiden Teilaufgaben gezeichnete *Petersen-Graph* ist nicht hamiltonsch. Was bedeutet dies?

Antwort:

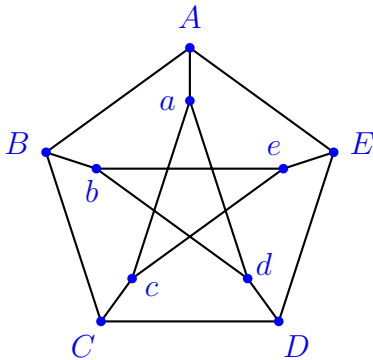
- b) Ergänze im Graphen eine Kante, so dass der Kantenzug $A - B - C - D - E$ zu einem Hamiltonkreis ergänzt werden kann. Zeichne die Kante farbig ein und gib den Hamiltonkreis an.



Ergänzte Kante:

Hamilton-Kreis:

- c) Ergänze im Graphen eine Kante, so dass der Kantenzug $a - c - e - b - d$ zu einem Hamiltonkreis ergänzt werden kann. Zeichne die Kante farbig ein und gib den Hamiltonkreis an.



Ergänzte Kante:

Hamilton-Kreis:

Weitere Aufgaben

Aufgabe 10

Kreuze die wahren Aussagen an.

- Ein hamiltonscher Graph ist immer zusammenhängend.
- In einem hamiltonschen Graphen ist es in jeder Ecke möglich, einen hamiltonschen Kreis zu starten.
- Jeder einfache Graph ist auch ein hamiltonscher Graph.
- In einem hamiltonschen Kreis darf eine Kante auch mehrmals verwendet werden.
- Jedes vollständige n -Eck ist auch hamiltonsch.
- Ein hamiltonscher Kreis kann in der Form eines Kreises gezeichnet werden.

11 Ausarbeitung Unterrichtsstunde 3: Hamiltonsche Graphen, Kreise und Bäume

11.1 Vorbemerkung

Wir haben den Begriff *Brücke* weggelassen. Die korrekte Definition wäre meiner Meinung nach: Eine Kante heißt *Brücke*, wenn der Teilgraph, der entsteht, wenn man die Kante entfernt, in eine Komponente mehr zerfällt als der ursprüngliche Graph.

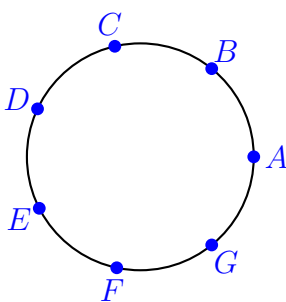
11.2 Tafelanschiebe

Arbeitsblatt 3.1: [Kantenzüge](#) (Besprechung an Tafel durch Zuruf)

Satz von Dirac: Ein Graph mit $n \geq 3$ Ecken, der einfach und zusammenhängend ist und bei dem $\text{Grad}(E) \geq \frac{n}{2}$ für jede Ecke E gilt, ist hamiltonsch.

Ohne Beweis.

Beispiel: Hamiltonscher Graph mit 7 Ecken und möglichst wenig Kanten



Graph 1

Satz: 1) Ein hamiltonscher Graph ist zusammenhängend.

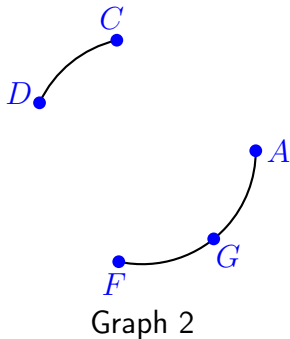
2) Für jede Ecke E in einem hamiltonschen Graphen gilt $\text{Grad}(E) \geq 2$.

Beweis: 1) Seien E, E' zwei beliebige Ecken des Graphen. Da sie auf einem hamiltonschen Kreis liegen, gibt es einen Kantenzug, der die beiden Ecken verbindet.

2) E liegt auf einem hamiltonschen Kreis, also folgt $\text{Grad}(E) \geq 2$. \square

Definition: 1) Sei E eine Ecke in einem Graphen. E wird aus dem Graphen gelöscht, indem man E und alle Kanten, die E mit sich oder anderen Ecken verbinden, aus dem Graphen entfernt.
 2) Ein Graph H heißt Teilgraph eines Graphen G , wenn alle Ecken und Kanten von H auch Ecken und Kanten von G sind.

Beispiel: Lösche aus Graph 1 die Ecken B und E .



Graph 2 ist ein Teilgraph von Graph 1. Graph 2 besteht aus zwei Teilgraphen, die jeder für sich zusammenhängend sind.

Definition: Die maximal großen zusammenhängenden Teilgraphen eines Graphen heißen die Komponenten des Graphen. Ist ein Graph zusammenhängend, so besteht er aus einer Komponente.

Arbeitsblatt 3.2: Teilgraphen und Komponenten (Besprechung an Tafel)

Satz: In einem hamiltonschen Graphen mit n Ecken gelten:

- 1) Löscht man eine Ecke, so ist der entstehende Teilgraph zusammenhängend.
- 2) Löscht man zwei Ecken, so zerfällt der entstehende Teilgraph in höchstens zwei Komponenten.
- 3) Löscht man m Ecken ($m < n$), so zerfällt der entstehende Teilgraph in höchstens m Komponenten.

Zum Beweis siehe Arbeitsblatt 3.

Arbeitsblatt 3.3: Graphiken zu Beweisen

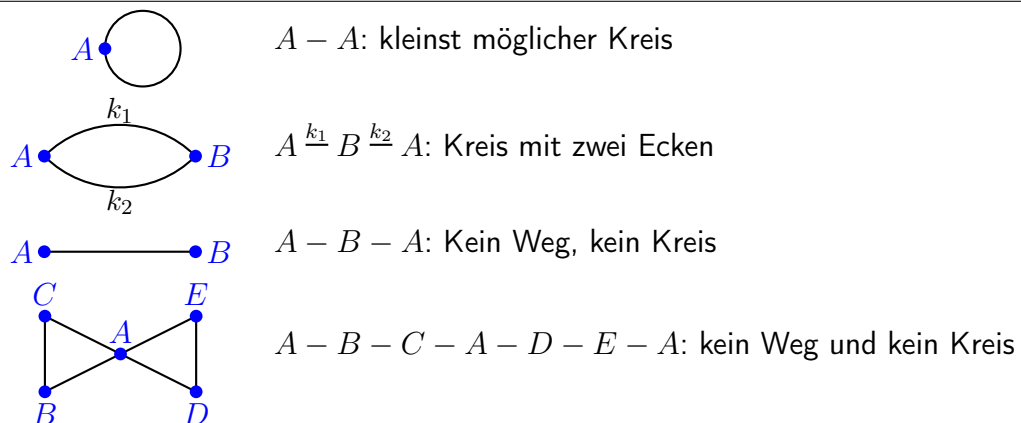
Arbeitsblatt 3.4: Nicht hamiltonsche Graphen (Besprechung am Visualizer)

6. Wege und Kreise

Definition: Ein Kantenzug heißt Weg, wenn er jede Ecke des Graphen höchstens ein Mal durchläuft und jede Kante höchstens ein Mal benützt. Anfangs- und End-Ecke dürfen übereinstimmen (diese Ecke wird auch nur ein Mal durchlaufen).

Definition: Ein Kreis ist ein Weg, der geschlossen ist.

Beispiele:



Arbeitsblatt 3.5: Wege und Kreise (Besprechung an Tafel)

7. Bäume

Definition: Ein Graph, der zusammenhängend ist und keinen Kreis enthält, heißt Baum

Folgerung: Ein Baum enthält keine Schlingen und keine parallelen Kanten.

Satz: In einem Baum gibt es von jeder Ecke zu jeder anderen Ecke genau einen Weg.

Beweis: Betrachte einen Baum.

1) Da der Baum zusammenhängend ist, gibt es von jeder Ecke zu jeder anderen mindestens einen Weg.

2) Nun beweisen wir, dass es von jeder Ecke zu jeder anderen höchstens einen Weg gibt. Dazu führen wir einen Widerspruchsbeweis.

Annahme: Es gibt im Baum zwei Ecken A und B , so dass mindestens zwei verschiedene Wege von A nach B existieren.

Mit der Graphik auf Arbeitsblatt 3 folgt, dass es im Baum einen Kreis gibt ⚡

Also war die Annahme falsch, und für beliebige Ecken A, B gibt es nicht mehr als einen Weg von A nach B . \square

[Arbeitsblatt 3.6: Bäume](#) (Besprechung an Tafel)

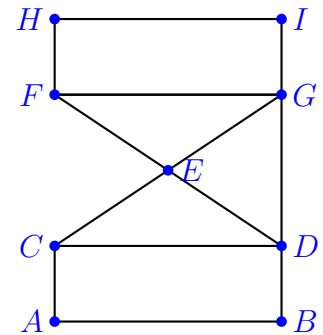
11.3 Arbeitsblätter

Siehe folgende Seiten

Kantenzüge

Aufgabe 1

Gegeben ist der nebenstehende einfache Graph.



- a) Gib einen Kantenzug an, der A und F verbindet.

Antwort:

- b) Warum ist der Graph hamiltonsch?

Antwort:

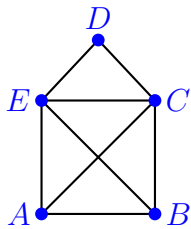
- c) Gib einen geschlossenen Kantenzug an, der durch alle Ecken des Graphen verläuft, keine Kante zwei Mal benützt und trotzdem kein hamiltonscher Kreis ist.

Antwort:

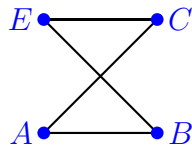
Teilgraphen und Komponenten

Aufgabe 2

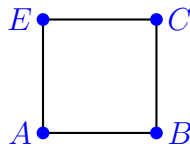
Welcher der Graphen ist Teilgraph von einem oder von mehreren der skizzierten Graphen? Trage Deine Antworten in die Tabelle ein. Überlege Dir, ob ein Graph Teilgraph von sich selber sein kann (eventuell Definition nachsehen).



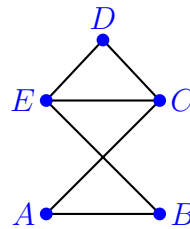
Graph 1



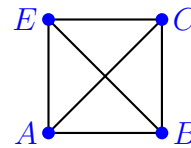
Graph 2



Graph 3



Graph 4



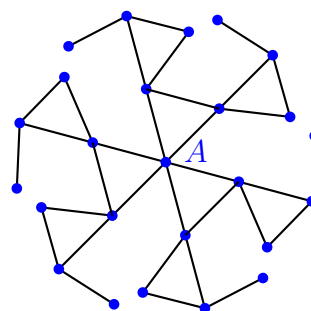
Graph 5

Graph 1 ist Teilgraph des Graphen	
Graph 2 ist Teilgraph des Graphen	
Graph 3 ist Teilgraph des Graphen	
Graph 4 ist Teilgraph des Graphen	
Graph 5 ist Teilgraph des Graphen	

Aufgabe 3

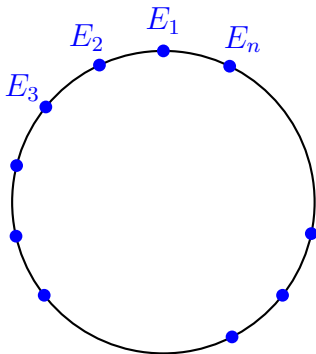
In wie viele Komponenten zerfällt nebenstehender Graph, wenn die Ecke *A* gelöscht wird?

Antwort: In Komponenten



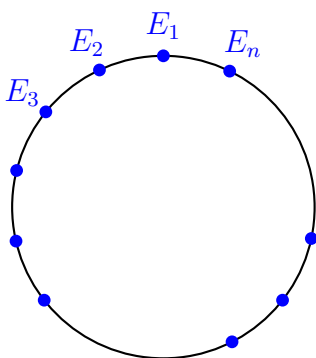
Graphiken zu Beweisen

Beweisidee für den Satz über Eckenlöcher in hamiltonschen Graphen:



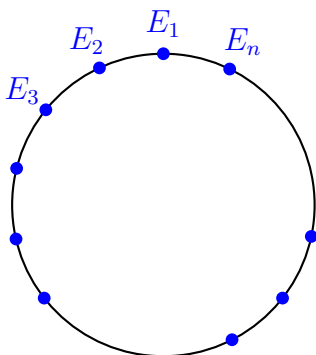
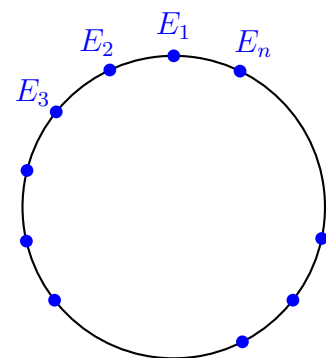
Löschen **einer** Ecke:

Der entstehende Graph



Löschen von **zwei** Ecken:

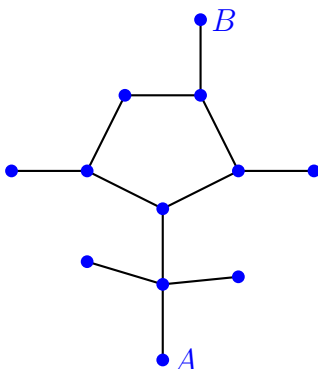
Der entstehende Graph



Löschen von **drei** Ecken:

Der entstehende Graph

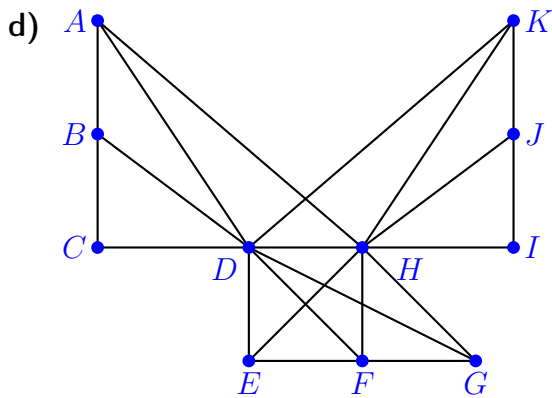
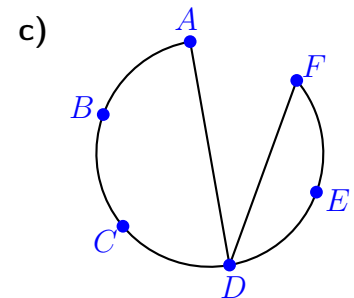
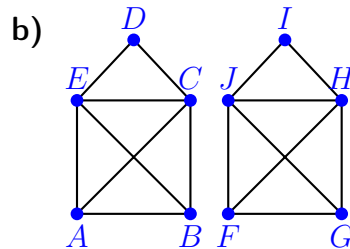
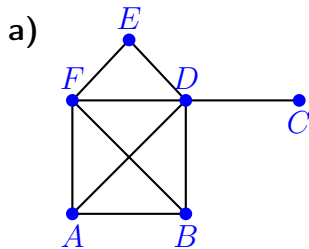
Graph zum Beweis des Satzes über Wege in einem Baum:



Nicht hamiltonsche Graphen

Aufgabe 4

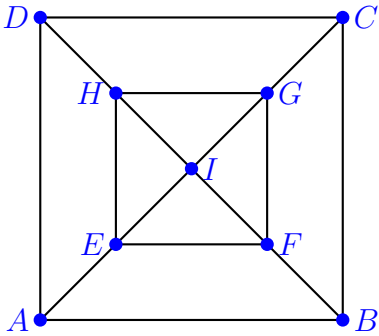
Gib für jeden der Graphen unter Verwendung eines der letzten beiden Sätze eine Begründung dafür an, dass er nicht hamiltonsch ist.



Wege und Kreise

Aufgabe 5

Gib im folgenden Graphen einen hamiltonschen Kreis und drei verschiedene nicht hamiltonsche Kreise an.



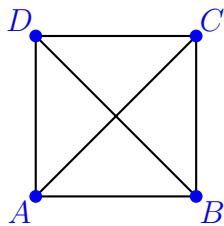
Hamiltonscher Kreis:

Nicht hamiltonsche Kreise:

Aufgabe 6

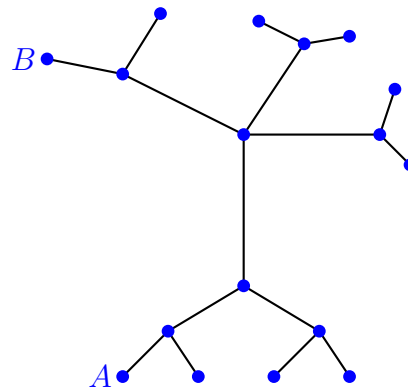
Wie viele verschiedene Wege gibt es jeweils, die A und B verbinden?

a)



Antwort: Es gibt Weg(e)

b)



Antwort: Es gibt Weg(e)

Bäume

Aufgabe 7

Zeichne jeweils einen Graphen, der ein Baum ist und die angegebenen Eigenschaften besitzt.

- a) Der Baum besitzt 7 Ecken und eine davon hat Eckengrad 5.
- b) Der Baum besitzt 10 Ecken und zwei davon haben Eckengrad 5.

Aufgabe 8

- a) Zeichne einen einfachen Graphen mit 8 Ecken und 8 Kanten, der hamiltonsch ist und nach Löschen einer Ecke ein Baum ist.
- b) Zeichne einen einfachen Graphen mit 8 Ecken und 13 Kanten, der hamiltonsch ist und nach Löschen einer Ecke ein Baum ist.

Schriftliche Aufgaben

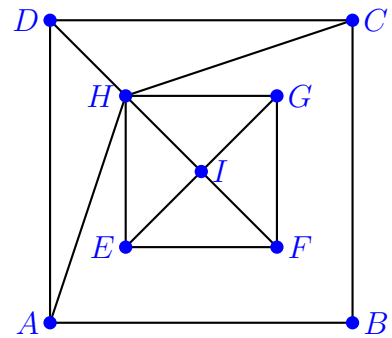
Aufgabe 9

Im rechts gezeichnete Graph wird die Ecke H gelöscht.

- a) In wieviele Komponenten zerfällt der entstehende Graph?

In Komponenten.

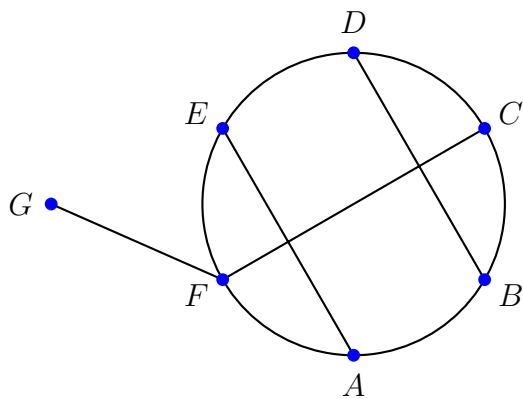
- b) Markiere die Komponenten im entstehenden Graphen mit verschiedenen Farben.



Aufgabe 10

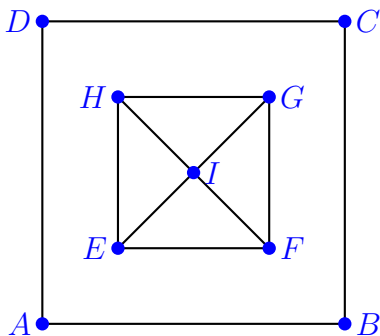
Warum ist der jeweils gegebene Graph nicht hamiltonsch?

- a)



Begründung:

- b)

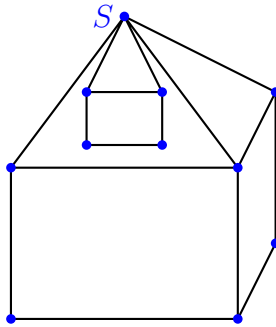


Begründung:

Weiter auf nächster Seite

Aufgabe 11

Gegeben ist der folgende einfache Graph 1.



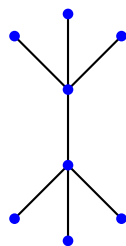
Graph 1

Graph 1 nach Löschen der Ecke S

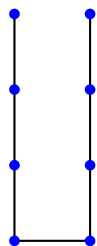
- a) Zeichne daneben den Graphen, der entsteht, wenn man die Ecke S löscht.
- b) Begründe, dass Graph 1 nicht hamiltonsch ist:

Aufgabe 12

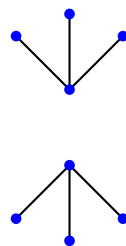
Gegeben sind die folgenden vier Graphen.



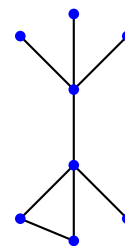
Graph 1



Graph 2



Graph 3



Graph 4

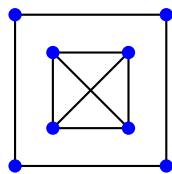
Welcher der Graphen ist ein Baum? Kreuze an!

	Graph 1	Graph 2	Graph 3	Graph 4
Baum				
Kein Baum				

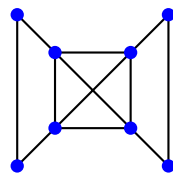
Weitere Aufgaben

Zusatzaufgabe 1

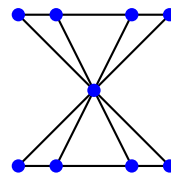
Untersuche, welcher der folgenden Graphen zusammenhängend, eulersch oder hamiltonsch ist. Trage in die Tabelle „j“ für ja, „n“ für nein ein.



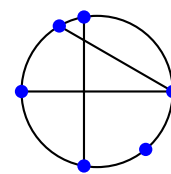
Graph 1



Graph 2



Graph 3

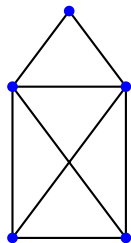


Graph 4

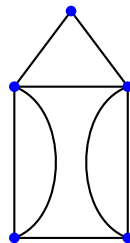
	Graph 1	Graph 2	Graph 3	Graph 4
ist zusammenhängend				
ist eulersch				
ist hamiltonsch				

Zusatzaufgabe 2

Warum sind die beiden Graphen nicht isomorph?



Graph 1



Graph 2

Antwort:

Zusatzaufgabe 3

Zeichne jeweils einen zusammenhängenden Graphen mit 7 Ecken und 6 Kanten, der zusätzlich die angegebenen Eigenschaften besitzt. Ist der Graph einfach?

- a) Der Graph besitzt eine Ecke mit Grad 6.
- b) Der Graph besitzt eine Ecke mit Grad 5.
- c) Der Graph besitzt eine Ecke mit Grad 4 und eine Ecke mit Grad 3.
- d) Alle Eckengrade sind höchstens 2.

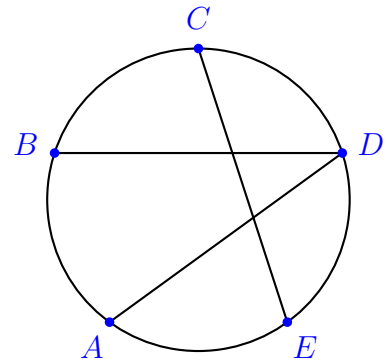
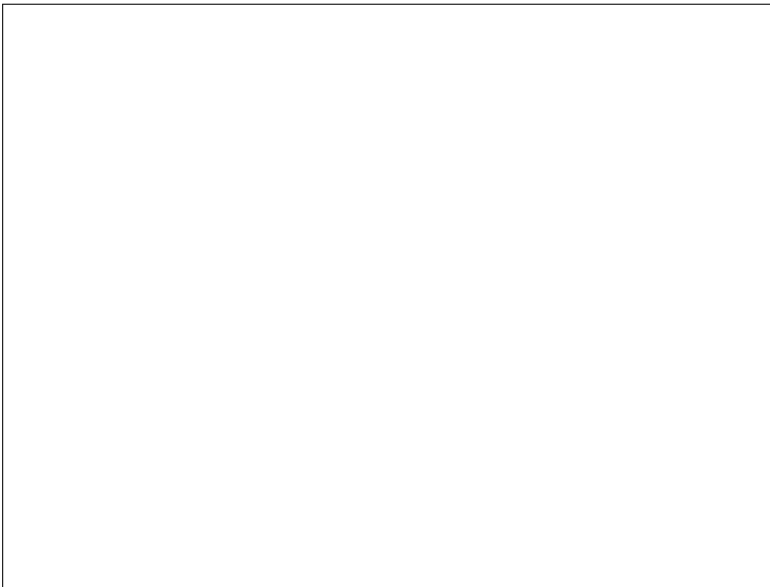
Zusatzaufgabe 4

Zeichne einen zusammenhängenden Graphen mit 7 Ecken und 7 Kanten, der nicht einfach ist. Ist der Graph hamiltonsch?

Zusatzaufgabe 5

Gegeben ist der rechts skizzierte einfache Graph. Gib möglichst viele verschiedene hamiltonsche Kreise des Graphen an. Alle sollen mit der Ecke A beginnen.

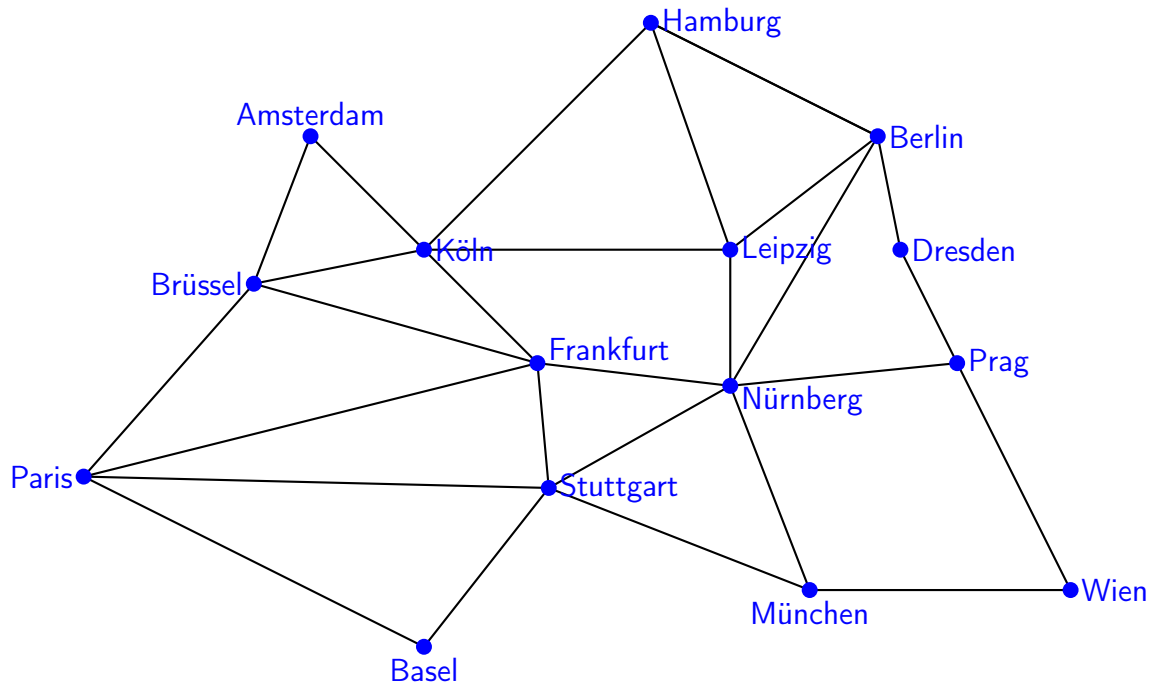
Hamiltonsche Kreise:



Weiter auf nächster Seite

Zusatzaufgabe 6

Eine Freundesgruppe möchte eine Rundreise mit der Bahn durch die in der Karte eingezeichneten Städte machen. Dabei wollen sie durch jede Stadt nur ein Mal reisen. Sie können nur die eingezeichneten Verbindungen benutzen.

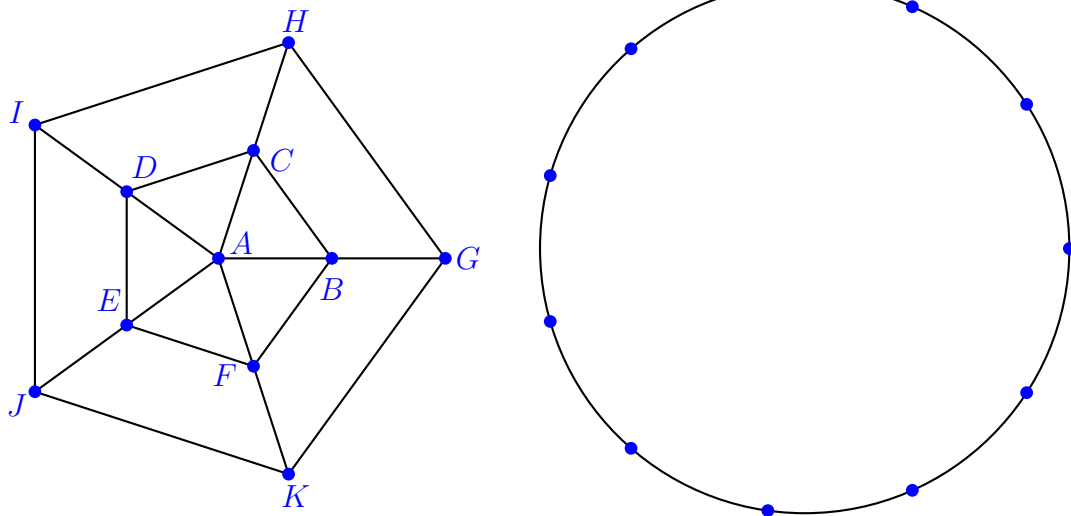


- a) Leider müssen sie feststellen, dass die Bahn in Nürnberg den Bahnhof umbaut und daher alle Verbindungen mit Nürnberg nicht benutzt werden können. Also streichen sie Nürnberg und alle Verbindungen nach Nürnberg aus ihrem Plan.
Zeichne den reduzierten Plan. Gibt es eine Rundreise?
- b) Nachdem in Nürnberg der Bahnhof fertig gestellt ist, wird der Bahnhof in Köln für einen Umbau gesperrt.
Zeichne den reduzierten Plan. Gibt es eine Rundreise?
- c) Nachdem auch in Köln der Bahnverkehr wieder läuft, muss die Bahn aufgrund des maroden Schienennetzes in drei deutschen Städten zugleich den Bahnhof sperren. Welche drei Städte können gesperrt werden, so dass eine Rundreise durch die restlichen europäischen Städte möglich ist? Zeichne den reduzierten Plan und eine Rundreise (Lösung ist nicht eindeutig).

Weiter auf nächster Seite

Zusatzaufgabe 7

Zeichne im Graphen einen hamiltonschen Kreis (rot) ein. Zeichne einen isomorphen Graphen rechts ein, bei dem der hamiltonsche Kreis als Kreis zu sehen ist.



12 Ausarbeitung Unterrichtsstunde 4: Bäume und bipartite Graphen

12.1 Tafelanschiebe

Arbeitsblatt 4.1: Bäume (Besprechung durch Zuruf/an Tafel)

Umkehrsatz: Gibt es in einem Graphen von jeder Ecke zu jeder anderen Ecke genau einen Weg, und enthält der Graph keine Schlinge, dann ist dieser Graph ein Baum.

Beweis: Der Graph ist zusammenhängend, da es von jeder Ecke zu jeder anderen einen Weg gibt.

Der Graph enthält keinen Kreis mit 1 Ecke, da er keine Schlinge besitzt.

Er enthält auch keinen Kreis mit mindestens 2 Ecken, denn andernfalls gäbe es zu zwei verschiedenen Ecken dieses Kreises zwei verschiedene Wege, die sie verbinden.

⇒ der Graph ist ein Baum. □

Satz: Ein Baum mit n Ecken besitzt genau $n - 1$ Kanten

Beweis: Es sei ein Graph mit n Ecken gegeben. Wir färben seine Ecken und Kanten, während wir sie zählen.

1) Wähle eine beliebige Ecke E_1 und färbe sie.

2) Wähle eine beliebige Kante, die E_1 mit einer Ecke E_2 verbindet. Da keine Schlinge erlaubt ist, folgt $E_1 \neq E_2$. Färbe die gewählte Kante und E_1 . **Bisher gezählt: 2 Ecken und 1 Kante.**

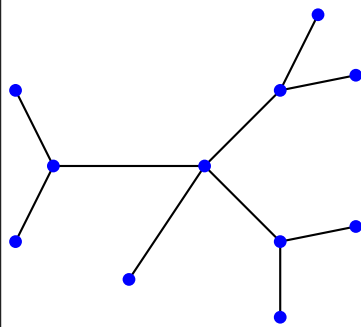
3) Wähle eine noch nicht gefärbte Kante, die E_1 oder E_2 mit einer Ecke E_3 verbindet. Da der Baum keinen Kreis enthält, gilt $E_3 \neq E_2$ und $E_3 \neq E_1$. Färbe die neue Kante und E_3 . **Bisher gezählt: 3 Ecken und 2 Kanten.**

Setze entsprechend fort: In jedem Schritt wird eine neue Kante gefärbt, die eine der bereits gefärbten Ecken mit einer Ecke verbindet. Diese Ecke ist noch nicht gefärbt, da es im Baum keinen Kreis gibt, und wird jetzt gefärbt. Es kommt 1 Kante und 1 Ecke dazu.

Mit dieser Methode wird jede Ecke des Baumes gefärbt, da er zusammenhängend ist.

Nach n Schritten haben wir n Ecken und $n - 1$ Kanten gezählt. Der Graph besitzt keine weiteren Kanten, denn jede weitere Kante müsste eine der bereits gefärbten Ecken mit einer neuen Ecke verbinden. Weitere Ecken besitzt der Graph nicht, also haben wir alle Ecken und Kanten des Graphen gezählt. □

Skizze zum Beweis eines Satzes:



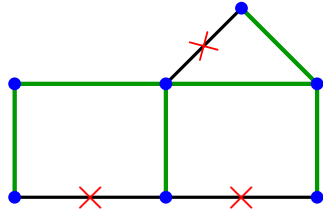
Arbeitsblatt 4.2: Bäume in Graphen (Besprechung an Tafel)

Definition: Ist ein Teilgraph eines Graphen ein Baum, der alle Ecken des Graphen enthält, so heißt er aufspannender Baum des Graphen.

Satz: Jeder zusammenhängende Graph besitzt einen aufspannenden Baum.

Beweis: Sei ein zusammenhängender Graph gegeben. Wenn er keinen Kreis enthält, ist er ein Baum und sein eigener aufspannender Baum.
 Enthält er einen Kreis, so entferne eine Kante des Kreises aus dem Graphen. Der entstehende Teilgraph ist weiterhin zusammenhängend, da der Kreis zusammenhängend bleibt. Wiederhole diesen Schritt so oft, bis der entstehende Teilgraph keinen Kreis mehr enthält. Dieser ist ein aufspannender Baum des Graphen. \square

Skizze zum Beweis:



Folgerung: Jeder zusammenhängende Graph mit n Ecken besitzt mindestens $n - 1$ Kanten.

Beweis: Der Graph besitzt einen aufspannenden Baum mit n Ecken. Dieser hat $n - 1$ Kanten, die alle im Graphen enthalten sind. \square

Folgerung: Entfernt man aus einem Baum eine Kante, so ist er nicht mehr zusammenhängend.

Beweis: Betrachte einen Baum mit n Ecken. Er hat $n - 1$ Kanten. Entfernt man eine Kante, so hat der entstehende Teilgraph n Ecken und $n - 2$ Kanten. Der Teilgraph kann nicht zusammenhängend sein, denn sonst müsste er mindestens $n - 1$ Kanten besitzen. \square

Folgerung: Besitzt ein zusammenhängender Graph mit n Ecken genau $n - 1$ Kanten, so ist der Graph ein Baum.

Beweis: Sei ein zusammenhängender Graph mit n Ecken und $n - 1$ Kanten gegeben.

Letzter Satz \Rightarrow Er enthält einen aufspannenden Baum. Dieser hat $n - 1$ Kanten.

\Rightarrow Der Graph ist gleich seinem aufspannenden Baum, ist also selber ein Baum. \square

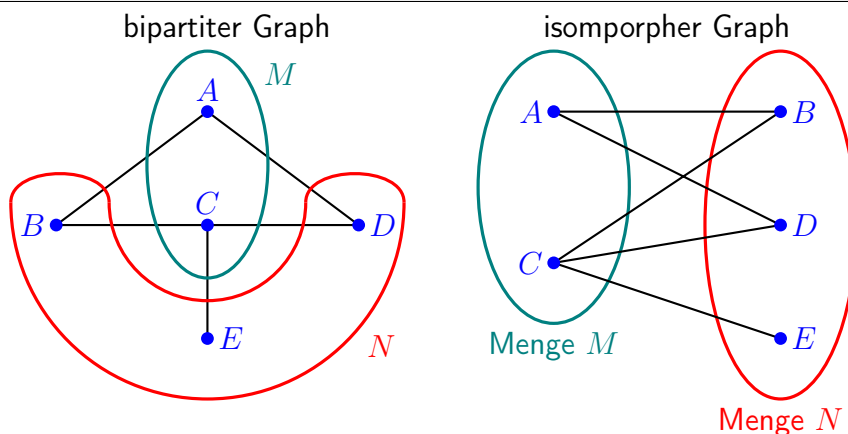
Arbeitsblatt 4.3: Aufspannende Bäume (Besprechung an Tafel)

8. Bipartite Graphen

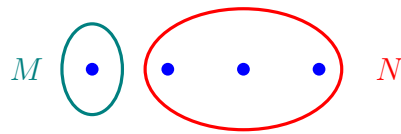
Definition: 1) In einem Graphen heißen zwei Ecken benachbart, falls sie durch mindestens eine Kante verbunden sind.

2) Ein einfacher Graph heißt bipartit, wenn die Menge seiner Ecken in zwei nichtleere Teilmengen M und N aufgeteilt werden kann, so dass nur Ecken aus verschiedenen Mengen benachbart sind. Kanten, die zwei Ecken derselben Teilmenge verbinden, gibt es nicht.

Beispiel:



Bemerkungen: 1) Ein bipartiter Graph besitzt mindestens zwei Ecken, denn sowohl in M als auch in N muss mindestens eine Ecke enthalten sein.
 2) Ein Graph ohne Kanten mit mindestens zwei Ecken ist bipartit (aber langweilig).



3) Ein bipartiter Graph enthält keine Schlinge, denn jede Ecke mit einer Schlinge ist zu sich selbst benachbart.
 4) Sind zwei Graphen isomorph, so sind entweder beide bipartit oder beide nicht bipartit.

Die Färbemethode:

Gegeben: Ein zusammenhängender Graph mit mindestens zwei Ecken.

Ziel: Entscheide, ob dieser Graph bipartit ist.

Vorgehen: 1) Wähle eine Ecke des Graphen und färbe sie grün.

2) Färbe alle ihre Nachbarn rot.

3) Färbe deren benachbarte Ecken wieder grün, usw.

Ergeben sich gleichfarbige benachbarte Ecken, so ist der Graph nicht bipartit.

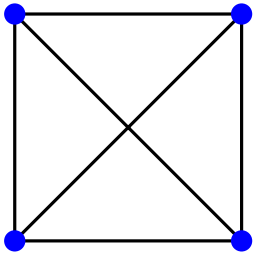
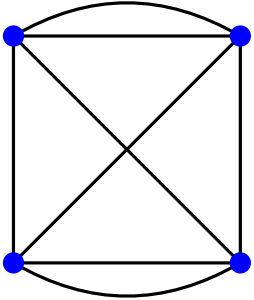
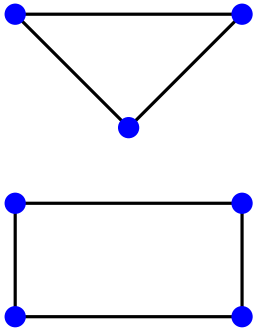
Gelingt es, alle Ecken so zu färben, dass benachbarte Ecken verschieden gefärbt sind, dann ist der Graph bipartit. Die grünen Ecken bilden die Menge M , die roten die Menge N .

[Arbeitsblatt 4.4: Bipartite Graphen](#) (Besprechung an Tafel)

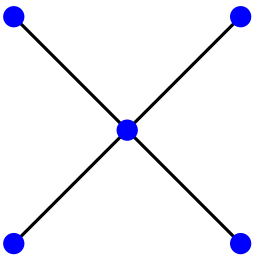
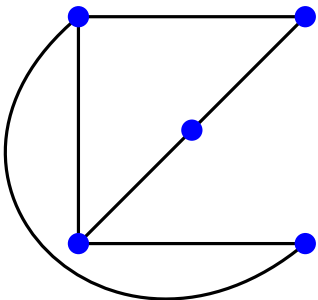
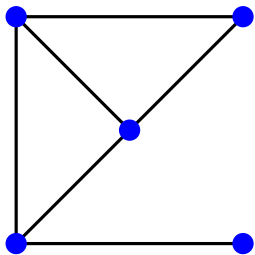
12.2 Vorlagen und Arbeitsblätter

Siehe folgende Seiten

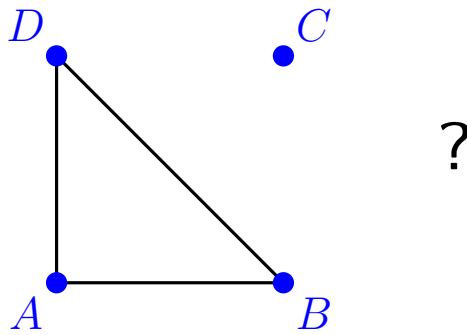
Welcher Graph ist eulersch?

1	2	3
		

Welcher Graph ist isomorph zu einem Graphen, dessen Ecken auf einem Kreis liegen?

1	2	3
		

Welcher Graph ist ein Teilgraph von



1	2	3

Welcher Graph ist ein Baum?

1	2	3

Bäume

Aufgabe 1

Ergänze jeweils die Sätze.

- a) Ein Graph, der

ist und ,

heißt Baum.

- b) In einem Baum gibt es von jeder Ecke zu jeder anderen Ecke

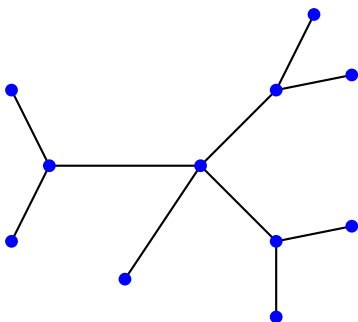
.

Aufgabe 2

Skizziere Bäume mit 6 Ecken und den jeweils angegebenen Eigenschaften. Wie viele Kanten haben die Bäume?

- a) Der Baum hat genau zwei Ecken mit Eckengrad 1,
- b) Der Baum hat genau drei Ecken mit Eckengrad 1,
- c) Der Baum hat genau vier Ecken mit Eckengrad 1,
- d) Der Baum hat genau fünf Ecken mit Eckengrad 1.

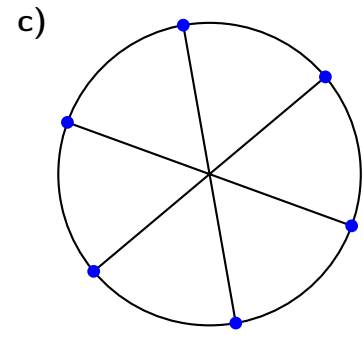
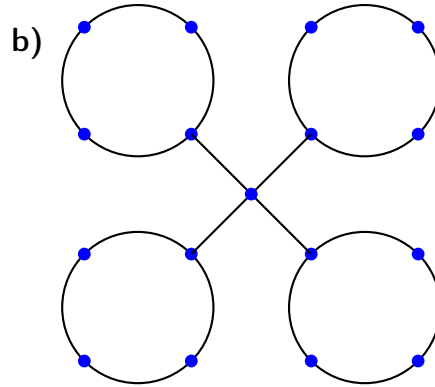
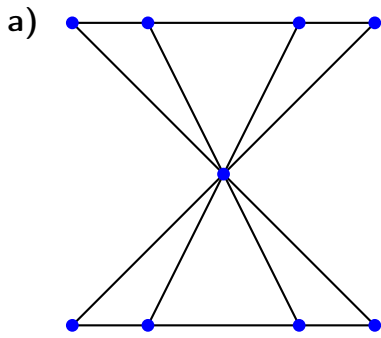
Skizze zum Beweis eines Satzes:



Bäume in Graphen

Aufgabe 3

Streiche in den angegebenen Graphen jeweils so viele Kanten, dass der entstehende Teilgraph ein Baum ist und alle Ecken des gegebenen Graphen enthält.

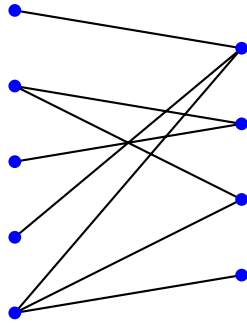


Aufspannende Bäume

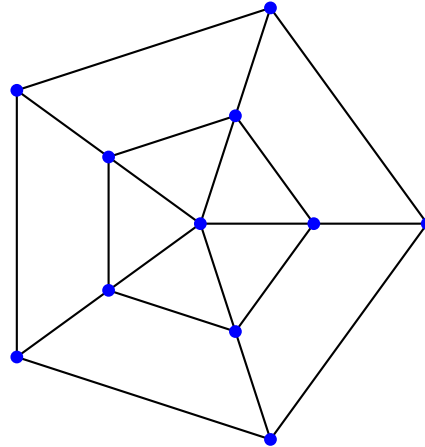
Aufgabe 4

Zeichne in die beiden Graphen jeweils einen aufspannenden Baum ein.

a)



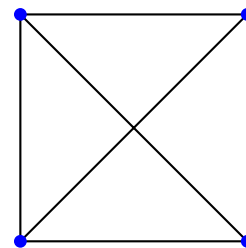
b)



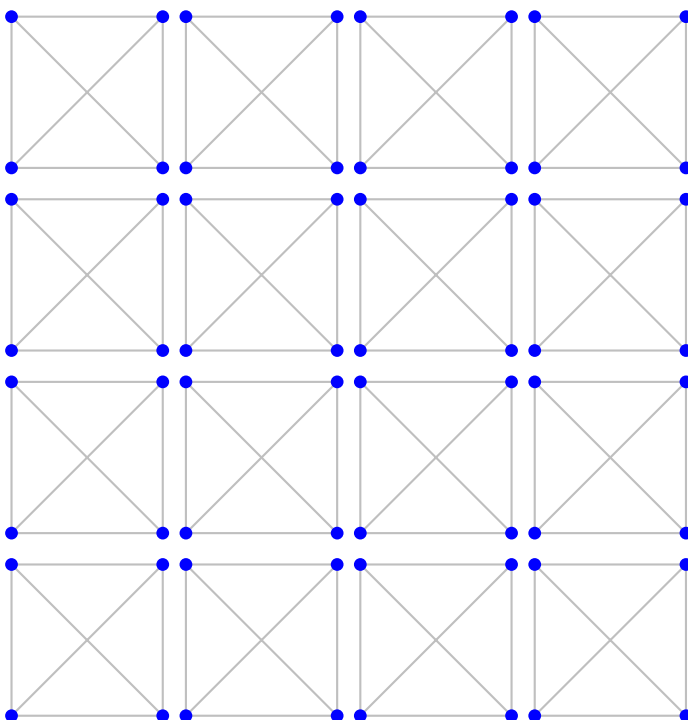
Aufgabe 5

Gegeben ist ein vollständiges Viereck.

- a) Der Graph besitzt 16 verschiedene aufspannende Bäume. Skizziere sie.
- b) Wie viele nicht zueinander isomorphe aufspannende Bäume gibt es? Skizziere alle nicht zueinander isomorphen aufspannenden Bäume.



Lösung zu a):



Lösung zu b):

Weiter auf nächster Seite

Aufgabe 6

Diese Aufgabe soll einen neuen Typ von Graphen einführen. Deshalb besteht die Aufgabenstellung nur darin, die Kanten eines Graphen zu zeichnen.

Lisas Freundes-Clique möchte diese Woche ein Treffen vereinbaren. Da sich die Terminfindung in der Vergangenheit als sehr schwierig erwiesen hat, beschließen sie, dass jede(r) in eine Liste einträgt, an welchen Tagen sie/er Zeit hat. Anhand der Ergebnisse wollen sie dann einen Tag für das Treffen festlegen.

Lisa	Montag, Dienstag
Tim	Donnerstag
Lars	Mittwoch, Freitag
Laura	Donnerstag
Hannes	Montag, Donnerstag, Freitag
Sina	Freitag, Samstag

Sonntags hat keiner der Freunde Zeit. Aus der Tabelle kann man nicht direkt ablesen, welcher Tag gewählt werden sollte. Ergänze den unten stehenden Graphen durch Kanten zwischen den Personen und den angegebenen Tagen. Gibt es einen Tag, an dem alle Zeit haben? An welchen Tagen haben die meisten Zeit?

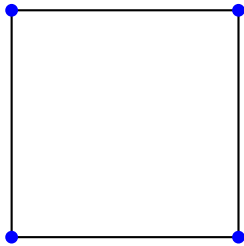


Bipartite Graphen

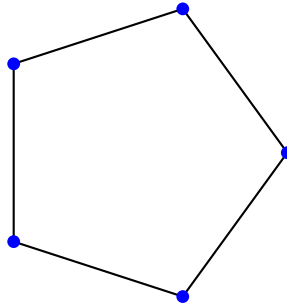
Aufgabe 7

Stelle mit Hilfe der Färbemethode fest, ob die Graphen bipartit sind oder nicht. Trage in die Tabelle J für Ja, N für Nein ein.

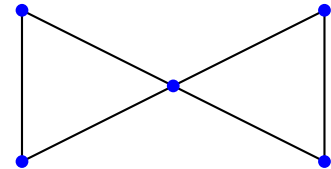
Graph 1:



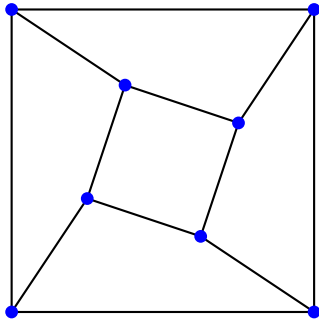
Graph 2:



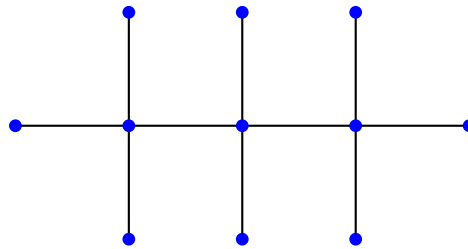
Graph 3:



Graph 4:



Graph 5:



Graph	Graph 1	Graph 2	Graph 3	Graph 4	Graph 5
ist bipartit					

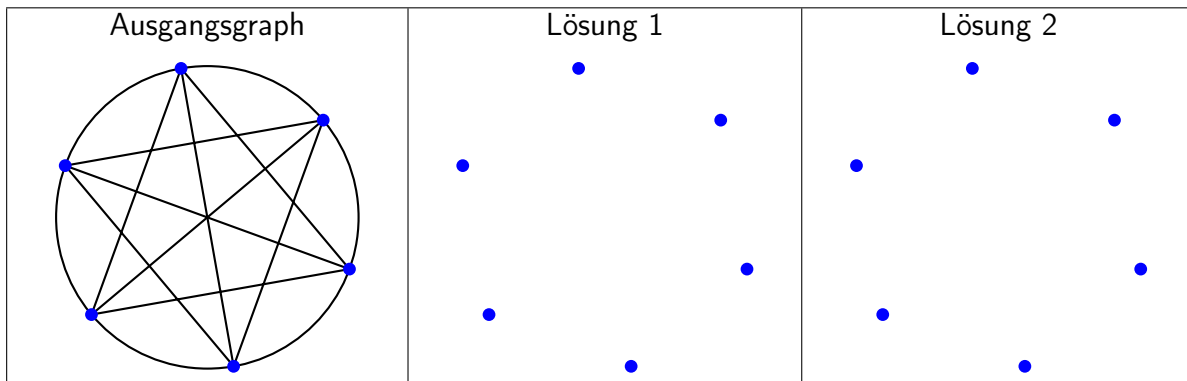
Schriftliche Aufgaben

Name:

Aufgabe 8

Gegeben ist ein vollständiges Sechseck (linker Graph). Skizziere zwei aufspannende Bäume, die deutlich verschieden und insbesondere nicht isomorph sind.

Hinweis: Graphen sind nicht z.B. isomorph, wenn sie sich in ihren Eckengraden unterscheiden.



Aufgabe 9

Eine Freundes-Clique organisiert eine Grillparty. Jede/jeder soll etwas beisteuern und trägt dazu in eine Liste ein, was sie/er mitbringen könnte:

Lisa	Stockbrotteig, Würstchen
Tim	Grillkohle, Salate
Lars	Stockbrotteig, Outdoor-Spiele
Laura	Grillkohle, Outdoor-Spiele
Hannes	Stockbrotteig, Marshmallows
Sina	Outdoor-Spiele, Marshmallows

- a) Zeichne einen bipartiten Graphen zur Liste.
- b) Gibt es eine Möglichkeit, dass jede Person genau eine Sache mitbringt und alles, was in die Liste eingetragen wurde, für die Grillparty vorhanden ist? Wenn ja, dann markiere die zugehörigen Kanten in Deinem Graphen farbig und mach einen Vorschlag, wer was mitbringen soll.

Zu a): Bipartiter Graph

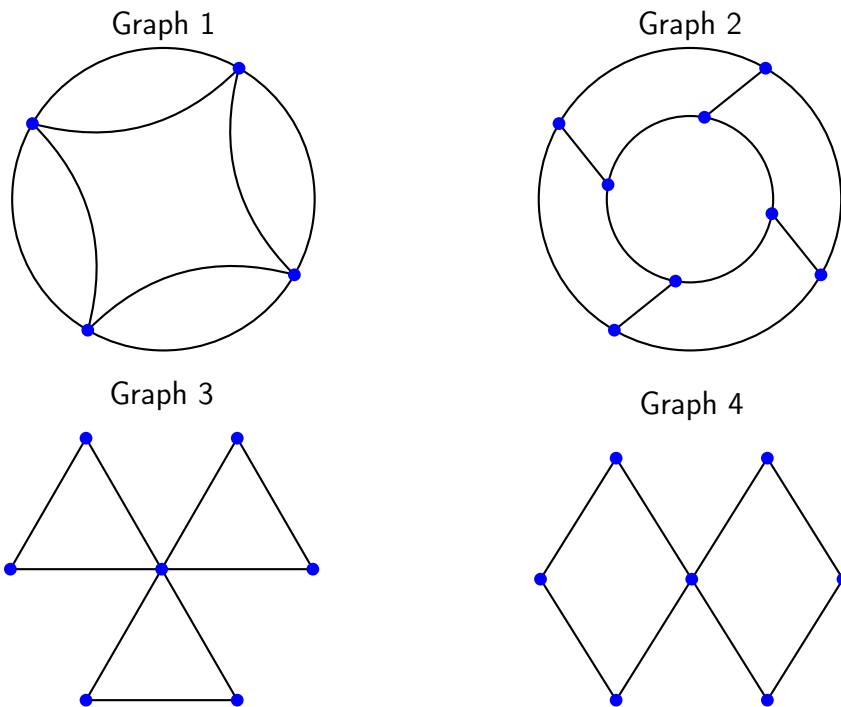
Zu b): Wer bringt was mit?

Lisa	
Tim	
Lars	
Laura	
Hannes	
Sina	

Bitte wenden

Aufgabe 10

Untersuche die vier Graphen und entscheide, welcher bipartit, eulersch oder hamiltonsch ist.

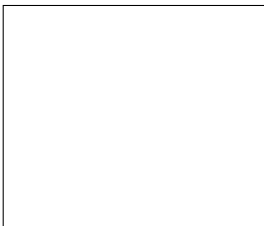


Graph	Graph 1	Graph 2	Graph 3	Graph 4
ist eulersch				
ist hamiltonsch				
ist bipartit				

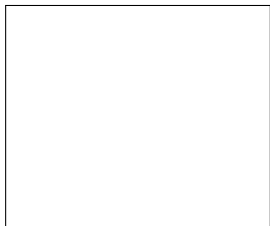
Aufgabe 11

Konstruiere jeweils mindestens einen Graphen, der

- a) bipartit, aber weder eulersch noch hamiltonsch ist,
- b) hamiltonsch, aber weder eulersch noch bipartit ist,
- c) eulersch und hamiltonsch, aber nicht bipartit ist.

Lösung: a) 

b) 

c) 

Matching

Definition: Ein Teilgraph eines Graphen heißt Matching, falls er alle Ecken des Graphen enthält und jede Ecke Grad 1 oder Grad 0 hat. Das bedeutet: Jede Ecke hat maximal eine benachbarte Ecke.

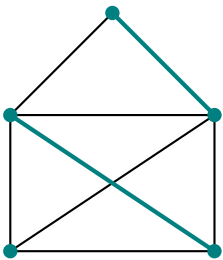
Definition: Ein Matching heißt perfekt, wenn alle Ecken des Teilgraphen Grad 1 haben. Das bedeutet: Jede Ecke hat genau eine benachbarte Ecke.

Definition: Ein Matching heißt maximal, wenn man keine Kante des Graphen dazunehmen kann, ohne dass der Teilgraph die Eigenschaft, ein Matching zu sein, verliert.

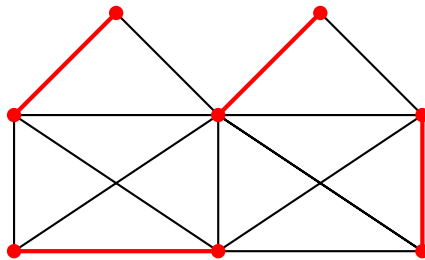
Zusatzaufgabe 1

Untersuche die folgenden Graphen. In welchen Graphen wurde ein Matching farblich markiert? In welchem Graphen ist das Matching perfekt oder maximal? Kreuze in der Tabelle an, welche der Aussagen richtig ist.

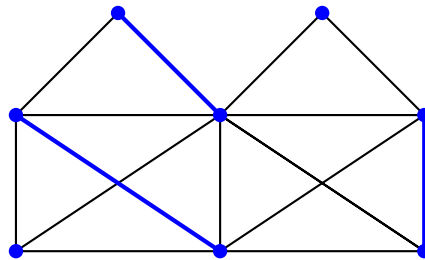
Graph 1:



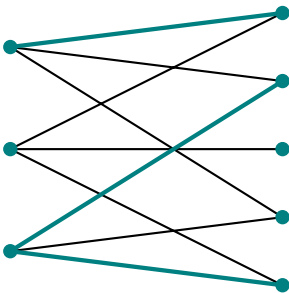
Graph 2:



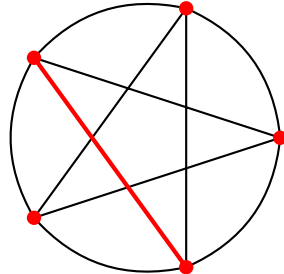
Graph 3:



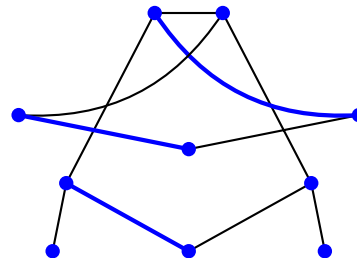
Graph 4:



Graph 5:



Graph 6:

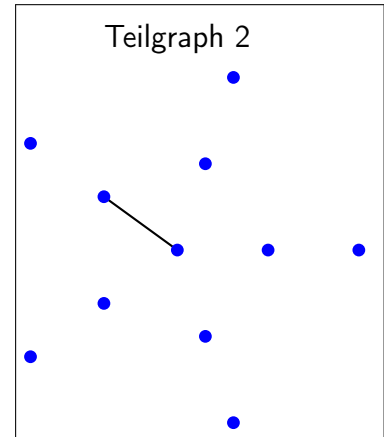
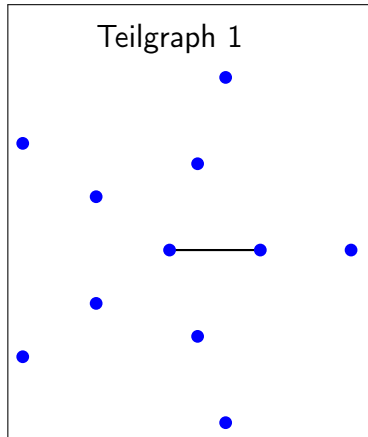
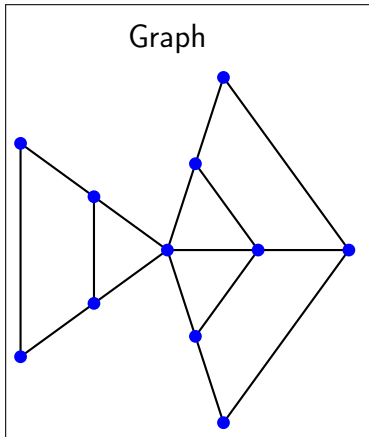


	Graph 1	Graph 2	Graph 3	Graph 4	Graph 5	Graph 6
Der markierte Teilgraph ist ein Matching	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Das markierte Matching ist maximal	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Das markierte Matching ist perfekt	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Weiter auf nächster Seite

Zusatzaufgabe 2

Gegeben ist der links stehende Graph mit zwei Teilgraphen.



- a) Ergänze die Teilgraphen, so dass jeder ein maximales Matching ist.
- b) Warum gibt es in dem gegebenen Graphen kein perfektes Matching?

Zusatzaufgabe 3

- a) Gegeben ist ein perfektes Matching mit n Kanten. Was kann man über die Anzahl der Ecken des Matchings sagen?

Anzahl der Ecken

- b) Gegeben ist ein Matching mit n Kanten. Was kann man über die Anzahl der Ecken des Matchings sagen?

Anzahl der Ecken

- c) Gegeben ist ein Matching mit n Ecken. Was kann man über die Anzahl der Kanten des Matchings sagen?

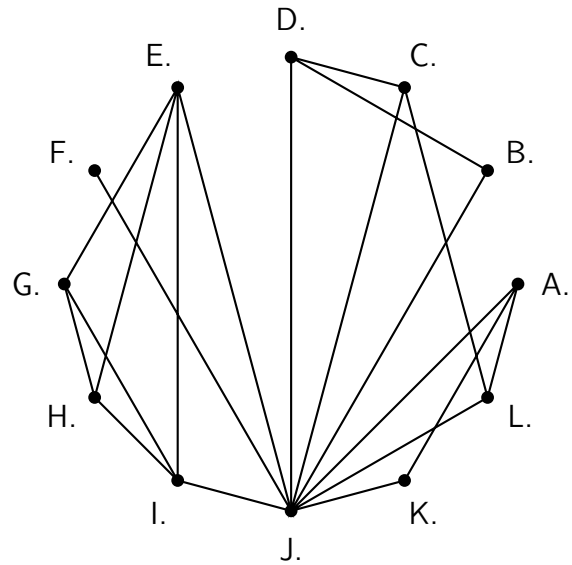
Anzahl der Kanten

Weiter auf nächster Seite

Zusatzaufgabe 4

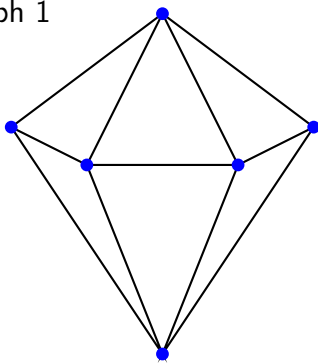
In einer Schulklasse soll ein Spiel gespielt werden, für das Paare gebildet werden müssen. Jeder und jede will natürlich nur mit jemandem ein Paar bilden, mit der oder dem man befreundet ist. Ist das möglich?

Rechts siehst Du die Darstellung der Freundschaften als Graph. Eine Kante zwischen zwei Ecken bedeutet, dass die Personen, die zu den Ecken gehören, befreundet sind. Markiere farbig ein perfektes Matching.

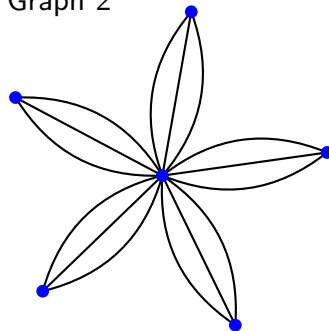


Zusatzaufgabe 5

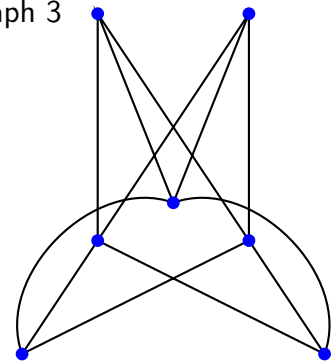
Graph 1



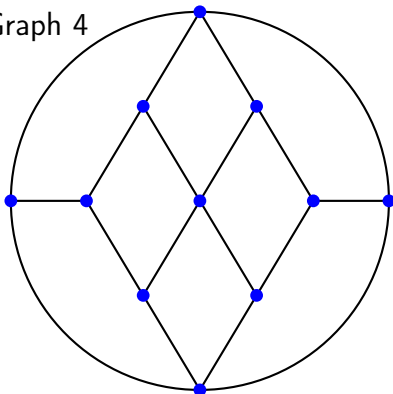
Graph 2



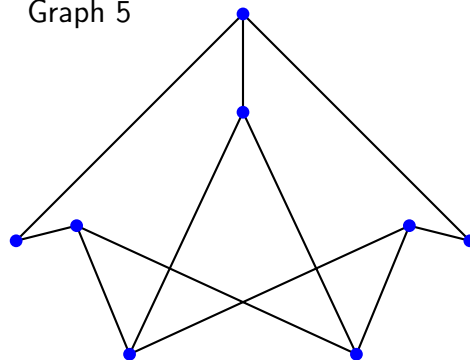
Graph 3



Graph 4



Graph 5



a) Welcher der Graphen ist bipartit? Kreuze an.

- Graph 1 Graph 2 Graph 3 Graph 4 Graph 5

b) Ist einer der Graphen sogar vollständig bipartit? Wenn ja, welcher Graph?

c) Markiere in Graph 4 ein maximales Matching farbig.

d) Markiere, wenn möglich, in Graph 5 ein perfektes Matching farbig.

Zusatzaufgabe 6

Kreuze alle Aussagen an, die wahr sind:

- Jeder Kreis ist bipartit.
- Ein bipartiter Graph darf parallele Kanten enthalten.
- Ein vollständiger bipartiter Graph darf parallele Kanten enthalten.
- Ein Matching darf isolierte Ecken enthalten.
- Jedes perfekte Matching ist maximal.
- Ein bipartiter Graph darf Schlingen enthalten.
- Zwei beliebige Bäume mit 10 Ecken können unterschiedlich viele Kanten haben.

Bemerkungen zu bipartiten Graphen

1) Ein bipartiter Graph besitzt mindestens zwei Ecken, denn

2) Ein Graph ohne Kanten mit mindestens zwei Ecken ist bipartit. Man kann M und N so wählen:

3) Ein bipartiter Graph enthält keine Schlinge, denn jede Ecke mit einer Schlinge ist

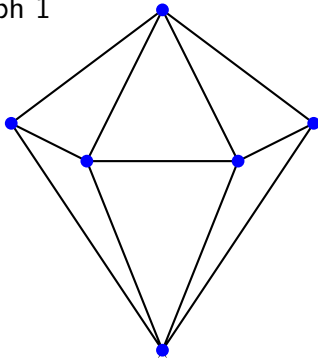
Daher kann diese Ecke weder in M noch in N liegen.

4) Sind zwei Graphen isomorph, so sind entweder beide bipartit oder beide nicht bipartit.

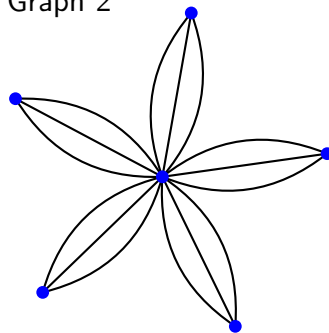
Hausaufgaben

Aufgabe 12

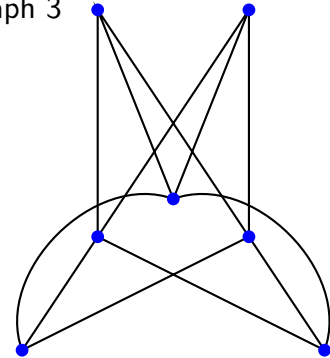
Graph 1



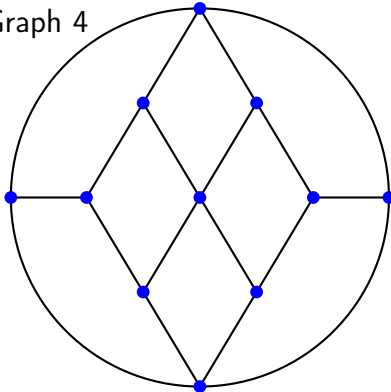
Graph 2



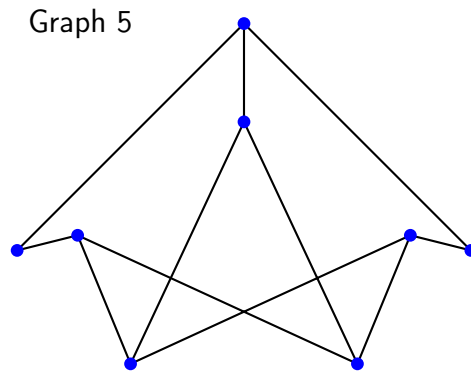
Graph 3



Graph 4



Graph 5



a) Welcher der Graphen ist bipartit? Kreuze an.

Graph 1

Graph 2

Graph 3

Graph 4

Graph 5

b) Ist einer der Graphen sogar vollständig bipartit? Wenn ja, welcher Graph?

c) Lösche aus jedem nicht bipartiten Graphen Ecken, sodass ein bipartiter Graph entsteht, der kein Baum ist.

d) Du kannst einen der nicht bipartiten Graphen in einen bipartiten Graphen umwandeln, indem du auf seinen Kanten zwei zusätzliche Ecken platzierst (Eine Kante, auf der die Ecke platziert wird, wird dann zu zwei Kanten, die in dieser Ecke enden). Welcher Graph ist das und wo müssen die Ecken platziert werden?

Aufgabe 15

In dieser Aufgabe sollst du Antworten auf die Fragen „Wann sind vollständige bipartite $m-n$ -Graphen eulersch?“ finden und beweisen.

a) Gib eine Bedingung an die Zahlen m und n an, sodass der vollständige bipartite $m-n$ -Graph genau dann eulersch ist, wenn diese Bedingung erfüllt ist (man sagt, die Bedingung ist dann äquivalent dazu, dass dieser Graph eulersch ist). Falls dir nichts einfällt, kannst du die Graphen für ein paar beispielhafte m und n untersuchen.

b) Beweise die in a) gefundene Bedingung. Auf der nächsten Seite findest du unten einen Tipp.

Aufgabe 16

In dieser Aufgabe sollst du Antworten auf die Fragen „Wann sind vollständige bipartite $m-n$ -Graphen hamiltonsch?“ finden und beweisen.

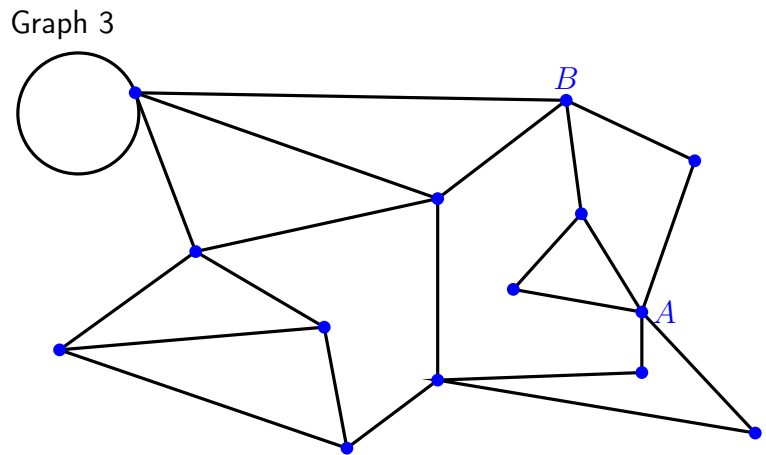
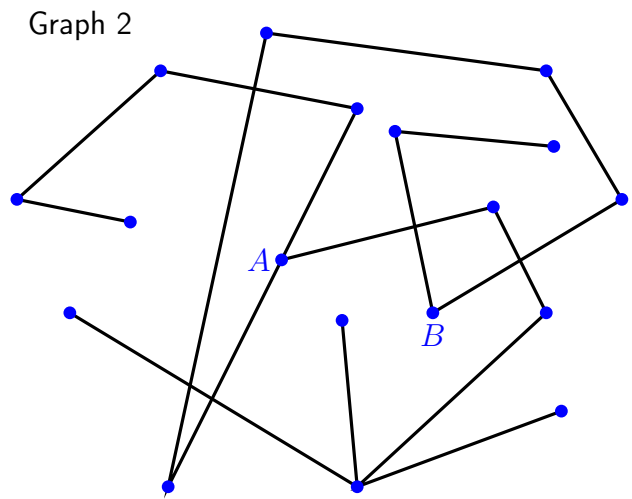
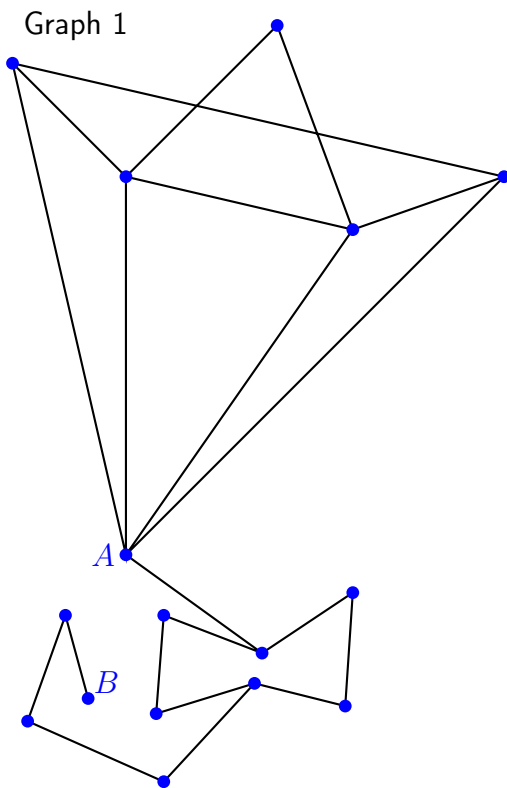
- Finde eine Bedingung an m und n , die äquivalent dazu ist, dass der vollständige $m-n$ -Graph hamiltonsch ist. Falls dir nichts einfällt, kannst du die Graphen für ein paar beispielhafte m und n untersuchen.
- Beweise die in a) gefundene Bedingung. Unten findest du einen Tipp.

Tipp zu Aufgabe 15, Teil b): Beachte die Eckengrade.

Tipp zu Aufgabe 16, Teil b): Zeichne die Menge M (mit m Ecken) links und die Menge N (mit n Ecken) rechts. Du kannst die Ecken von M z.B. als A_1, A_2, \dots, A_m und die Ecken von N als B_1, \dots, B_n benennen. Wenn die Bedingung erfüllt ist, gib einen hamiltonschen Kreis an. Falls die Bedingung nicht erfüllt ist: Starte bei einer beliebigen Ecke und probiere Kantenzüge von dieser Ecke aus zu finden, die alle Ecken verwenden. Muss eine Ecke irgendwann doppelt verwendet werden?

Weitere Aufgaben

Zusatzaufgabe 7



a) Wie viele verschiedene Wege führen von A nach B ? Trage die Anzahl in die Tabelle ein.

	Graph 1	Graph 2	Graph 3
Anzahl Wege von A nach B			

b) Markiere mit einem farbigen Stift (rot) einen Kreis mit sechs Ecken im Graph 1 und einen Kreis mit vier Ecken im Graph 3.

c) Begründe anhand der Anzahl der Ecken und Kanten: Kann Graph 1 ein Baum sein?

Anzahl Ecken:	Anzahl Kanten:	Baum Ja/Nein:
Begründung:		

d) Finde für die Graphen, die keine Bäume sind, einen aufspannenden Baum. Markiere einen aufspannenden Baum farbige (blau) im Graphen.

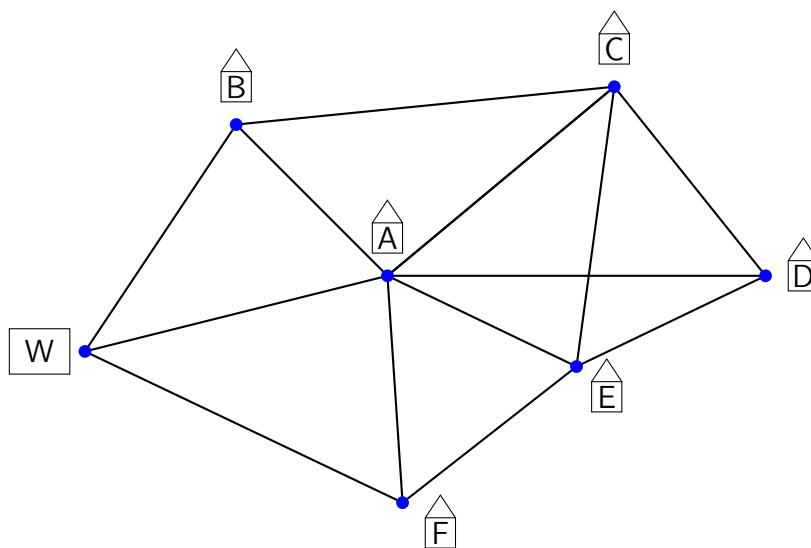
Zusatzaufgabe 8

Kreuze alle Aussagen an, die wahr sind:

- In einem Kreis kann man von einer beliebigen Ecke auf zwei verschiedenen Wegen zu einer anderen Ecke des Kreises gelangen.
- Ein geschlossener Weg ist ein Kreis.
- In einem Baum dürfen parallele Kanten vorkommen.
- Zwei beliebige Bäume mit 10 Ecken können unterschiedlich viele Kanten haben.
- Löscht man in einem Baum eine beliebige Kante, so entsteht ein nicht zusammenhängender Teilgraph, der aus zwei Komponenten besteht.

Zusatzaufgabe 9

Die Abbildung zeigt das Wasserversorgungssystem zwischen einem Wasserwerk W und den Häusern A, B, C, D, E und F. Da die Leitungen schon sehr alt sind und häufig kaputt gehen, soll Bauleiter Kraus Leitungen erneuern. Da nur wenig Geld zur Verfügung steht, darf er nur so viele Leitungen erneuern, dass gerade alle Häuser mit Wasser versorgt werden. Welche Leitungen könnte Herr Kraus erneuern? Markiere eine möglich Lösung farbig.



Zusatzaufgabe 10

Ein Umkehrsatz zum letzten Satz könnte folgendermaßen lauten:

Behauptung: Gibt es in einem Graphen von jeder Ecke zu jeder anderen Ecke genau einen Weg, so ist der Graph ein Baum.

Warum ist diese Behauptung falsch? Zeichne einen Graphen, der ein Gegenbeispiel darstellt.

Gegenbeispiel:

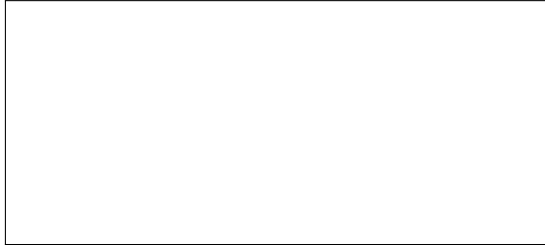
Zusatzaufgabe 11

Ein Umkehrsatz zum letzten Satz könnte lauten:

Behauptung: Besitzt ein Graph mit n Ecken genau $n - 1$ Kanten, so ist der Graph ein Baum.

Warum ist diese Behauptung falsch? Konstruiere ein Gegenbeispiel.

Gegenbeispiel:

**Zusatzaufgabe 12**

- a) Gegeben ist ein zusammenhängender Graph mit n Ecken und m Kanten. Laut Satz gilt $m \geq n - 1$. Wie viele Kanten müssen aus dem Graphen entfernt werden, um einen aufspannenden Baum zu erhalten?

Antwort:



- b) Gegeben ist ein vollständiges Vieleck mit n Ecken, $n \geq 3$. Wie viele Kanten müssen entfernt werden, um einen aufspannenden Baum zu erhalten?

Antwort:



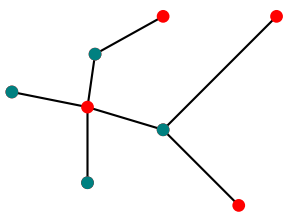
13 Ausarbeitung Unterrichtsstunde 5: Bipartite und plättbare Graphen

13.1 Tafelanschiebe

Arbeitsblatt 5.1: Wasserversorgung (Besprechung an Tafel durch Zuruf)

Satz: Jeder Baum mit mindestens zwei Ecken ist bipartit.

Beweisidee:



Beweis: Betrachte einen beliebigen Baum mit mindestens zwei Ecken. Färbe eine beliebige Ecke grün. Laufe von dieser Ecke aus den Baum entlang und färbe die Ecken abwechselnd rot und grün. Man erreicht jede Ecke, da der Baum zusammenhängend ist. Jede Ecke wird nur über einen Weg erreicht. Daher treten keine Konflikte auf. \Rightarrow Der Baum ist bipartit. \square

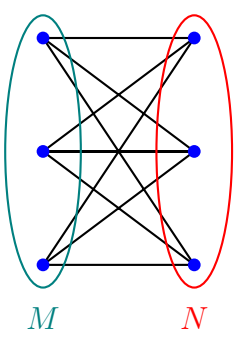
Arbeitsblatt 5.2: Bipartite Kreise (Besprechung an Tafel durch Zuruf)

Satz: Ein Graph mit n Ecken, der nur aus einem Kreis besteht, ist genau dann bipartit, wenn n gerade ist. (vgl. Arbeitsblatt 5.1)


Satz: Jeder Teilgraph eines bipartiten Graphen, der mindestens zwei Ecken enthält, ist bipartit.

Beweis:

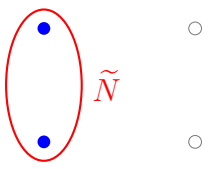
bipartiter Graph:



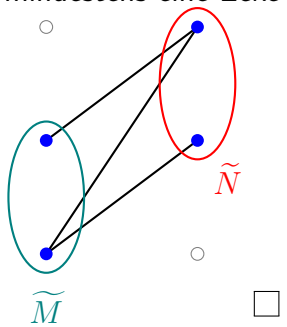
Fall 1: Nur Ecken aus M



Fall 2: Nur Ecken aus N Analog



Fall 3: Aus M und N mindestens eine Ecke



Folgerung: Enthält ein Graph einen Teilgraphen mit mindestens zwei Ecken, der nicht bipartit ist, dann ist der Graph auch nicht bipartit. Spezialfall: Enthält ein Graph einen Kreis mit einer ungeraden Anzahl von Ecken, so ist er nicht bipartit.

Arbeitsblatt 5.3: Bipartit und nicht bipartit (Besprechung an Tafel durch Zuruf)

Satz: Ein einfacher Graph mit mindestens zwei Ecken ist genau dann bipartit, wenn er keinen Kreis mit ungerader Eckenzahl enthält.

Beweis: Aus Spezialfall: Ist ein Graph bipartit, so enthält er keinen Kreis mit ungerader Eckenzahl.

Betrachte einen einfachen Graphen, der keinen Kreis mit ungerader Eckenzahl enthält. Zeige: Der Graph ist bipartit.

Wir nehmen an, dass der Graph zusammenhängend ist.

Schritt 1: Konstruiere einen aufspannenden Baum. Der Baum ist bipartit. Färbe die Ecken, um sie den Mengen M und N zuzuordnen. Damit sind alle Ecken des Graphen gefärbt!

Schritt 2: Ergänze nun die restlichen Kanten des Graphen. Es gibt keine Kante, die gleich gefärbte Ecken verbindet, denn:

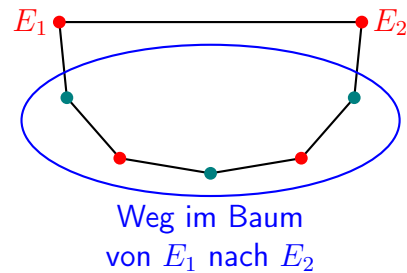
Annahme: Eine Kante verbindet zwei rote Ecken E_1, E_2 .

Im Baum gibt es einen Weg, der E_1 und E_2 verbindet.

E_1, E_2 haben dieselbe Farbe und der Baum ist bipartit

\Rightarrow der Weg hat eine ungerade Anzahl an Ecken.

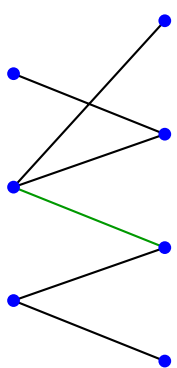
Durch die Kante, die E_1 mit E_2 verbindet, entsteht ein Kreis mit ungerader Eckenzahl \downarrow \square



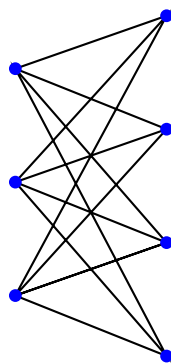
Definition: 1) Ein zusammenhängender bipartiter Graph heißt m - n -Graph, wenn seine zwei Eckenteilmengen M und N m Ecken bzw. n Ecken enthalten.

2) Ein bipartiter Graph ohne parallele Kanten, bei dem jede Ecke aus M mit jeder Ecke aus N benachbart ist, heißt vollständiger bipartiter Graph.

Veranschaulichung:

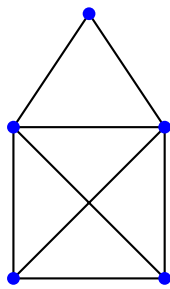


3-4-Graph

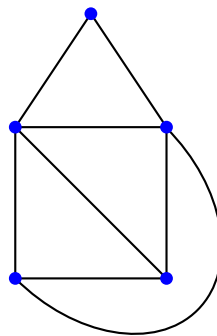


vollständiger 3-4-Graph

9. Ebene und plättbare Graphen



nicht eben, aber plättbar



eben und plättbar

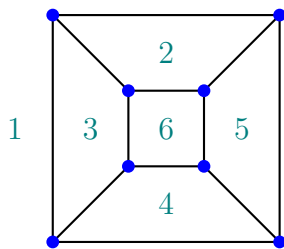
Definition: 1) Ein in der Ebene gezeichneter Graph heißt eben, wenn seine Kanten keine Punkte gemeinsam haben außer Ecken.

2) Ein Graph heißt plättbar, wenn er isomorph zu einem ebenen Graphen ist.

Arbeitsblatt 5.5: Ebene Graphen (Besprechung an Tafel durch Zuruf)

Beobachtung: Ein ebener Graph unterteilt die Zeichenebene in Flächen, eine Außenfläche und keine, eine oder mehrere Innenflächen.

Beispiel:



Arbeitsblatt 5.6: Ecken, Kanten und Flächen (Besprechung an Tafel durch Zuruf)

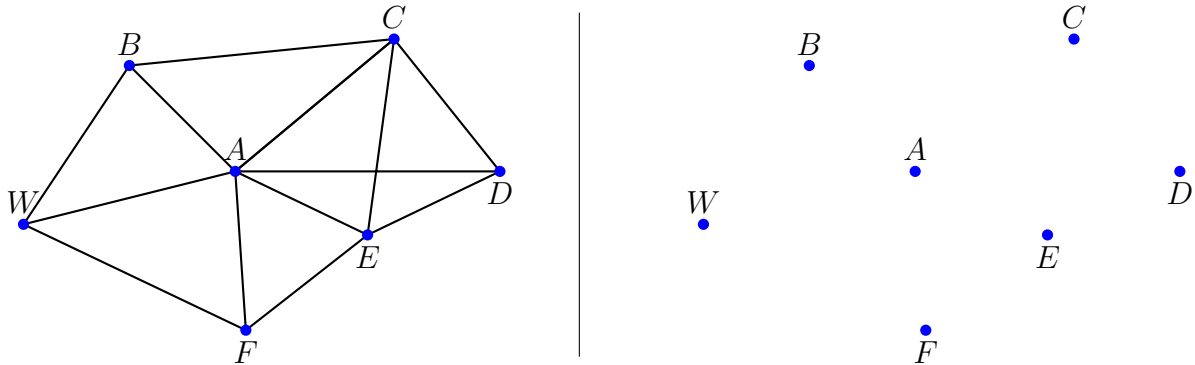
13.2 Arbeitsblätter

Siehe folgende Seiten

Wasserversorgung

Aufgabe 1

- a) Neben einem kleinen Bergdorf wurde ein Wasserwerk W zur Versorgung der Häuser A, \dots, F gebaut. In der Graphik unten links siehst Du die Häuser und die möglichen Wasserleitungen. Aus Kostengründen sollen möglichst wenig Leitungen gebaut werden. Streiche aus dem Graphen möglichst viele Kanten, so dass noch alle Häuser mit Wasser versorgt werden können. Zeichne dann die Kanten des entstehenden Teilgraphen rechts ein.



- b) Wie heißt die Eigenschaft eines Graphen, die in unserem Beispiel garantiert, dass jedes Haus mit Wasser versorgt wird?

Antwort: Der Graph ist .

- c) Wie heißt der Teilgraph, den Du im Aufgabenteil a) gezeichnet hast, in Bezug auf den ursprünglichen Graphen?

Antwort:

Der Teilgraph ist ein des linken Graphen.

- d) Die Wasserleitungsfirma hat nun Rohre geliefert, die zwei verschiedene Enden haben. Am einen Ende Anschlusstyp 1, am anderen den Anschlusstyp 2. Das bedeutet, dass nur Häuser mit verschiedenen Anschlüssen verbunden werden können. Außerdem ist vorgegeben, dass in jedem Haus nur einer der beiden Anschlusstypen verbaut werden kann. Zeige, dass die Wasserversorgung mit diesen Vorgaben gebaut werden kann. Färbe dazu die Häuser grün, die den Anschlusstyp 1 haben, und die anderen mit rot. Beachte, dass auch das Wasserwerk nur einen Anschlusstyp besitzen darf.

Bipartite Kreise

Wann sind Graphen, die nur aus Ecken auf einem Kreis bestehen, bipartit?

Wir untersuchen folgende Fragestellung: Für welche natürlichen Zahlen n ist ein Graph, der nur aus n Ecken auf einem Kreis besteht, bipartit?

Schritt 1: Untersuche Beispiele für „kleine“ n von 2 bis 7.

n	2	3	4
Graph			
bipartit?			
n	5	6	7
Graph			
bipartit?			

Schritt 2: Stelle eine Vermutung auf, wie die obige Frage beantwortet werden kann.

Vermutung:

Gegeben ist ein Graph, der nur aus n Ecken auf einem Kreis besteht.

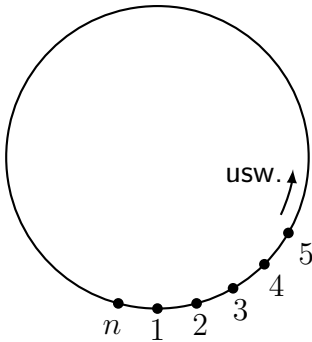
Falls n eine Zahl ist, dann ist der Graph bipartit.

Falls n eine Zahl ist, dann ist der Graph nicht bipartit.

Weiter auf nächster Seite

Schritt 3: Beweise deine Vermutung durch geeignetes Färben der Ecken.

Die Ecken benennen wir hierzu gegen den Uhrzeigersinn mit den Zahlen 1 bis n . Beginne nun mit dem Färben, indem du Ecke 1 grün färbst und gegen den Uhrzeigersinn fortfährst. Welche Farbe haben dann die Ecken 2, 3, 4 usw.?



Für die Ecke mit der Nummer k ergibt sich folgender Zusammenhang:

Falls k eine Zahl ist, dann ist die Ecke k grün.

Falls k eine Zahl ist, dann ist die Ecke k rot.

Zwischen welchen beiden benachbarten Ecken kann überhaupt ein Konflikt bei der Färbung auftreten?

Zwischen der Ecke mit der Nummer und der Ecke mit der Nummer .

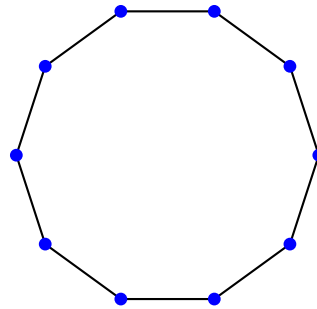
Falls n ist, sind beide Ecken unterschiedlich gefärbt, und es gibt keinen Konflikt. In diesem Fall ist der Graph bipartit.

Falls n ist, sind beide Ecken gleich gefärbt, und es gibt einen Konflikt. In diesem Fall ist der Graph nicht bipartit.

Bipartit und nicht bipartit

Aufgabe 2

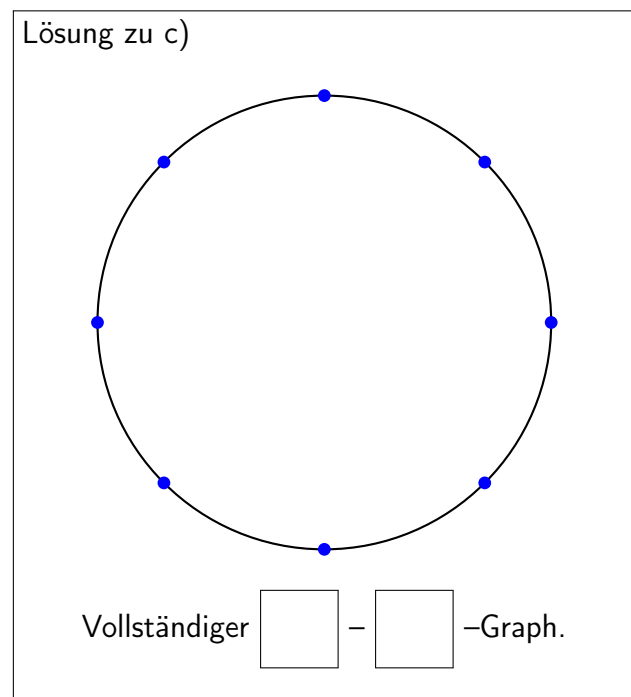
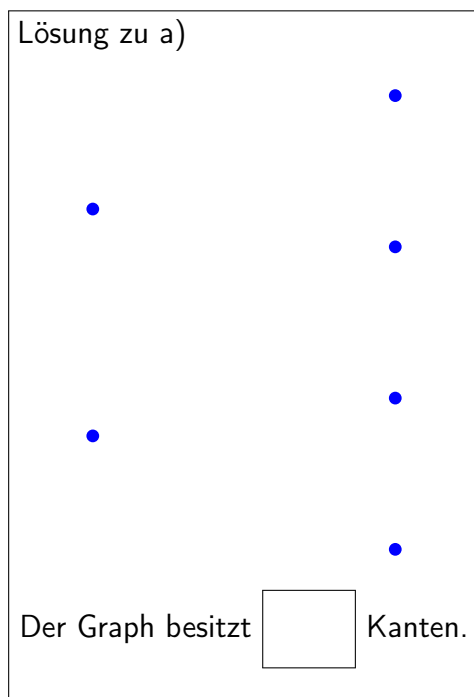
Gegeben ist der nebenstehende bipartite Graph. Ergänze eine Kante, so dass der Graph nicht mehr bipartit ist.



Vollständige m - n -Graphen

Aufgabe 3

- Zeichne einen vollständigen 2-4-Graphen. Wie viele Kanten besitzt er?
- Wie viele Kanten besitzt ein vollständiger m - n -Graph?
- Ergänze im Achteck Kanten (keine Ecken), bis ein vollständiger bipartiter Graph entsteht. Welcher vollständige m - n -Graph entsteht hierdurch?



Zusatzaufgabe 1

Zeichne alle vollständigen bipartiten Graphen mit 6 Ecken, die nicht zueinander isomorph sind.

Zusatzaufgabe 2

Zeichne einen Baum, der ein

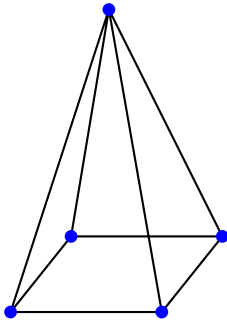
- 2-3-Graph ist.
- 1-4-Graph ist.
- 4-9-Graph ist.

Ebene Graphen

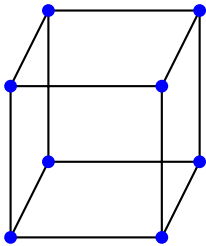
Aufgabe 4

Gegeben sind die folgenden Graphen, die Begrenzungen dreidimensionaler Körper darstellen. Zeige, dass die Graphen plättbar sind, indem Du jeweils einen isomorphen ebenen Graphen zeichnest.

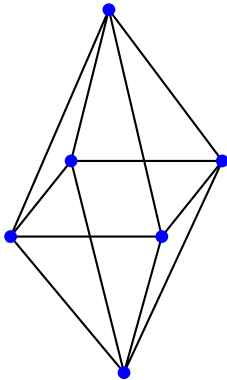
a) In dieser Teilaufgabe gibt es zwei verschiedene Lösungen!



b)

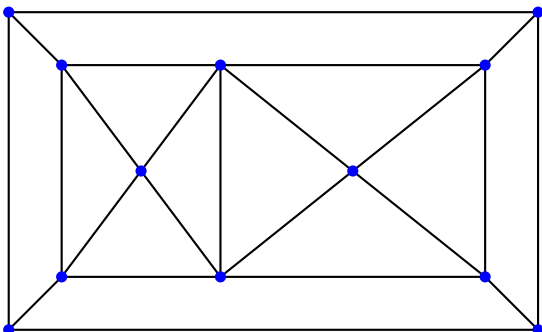


c)



Zusatzaufgabe 3

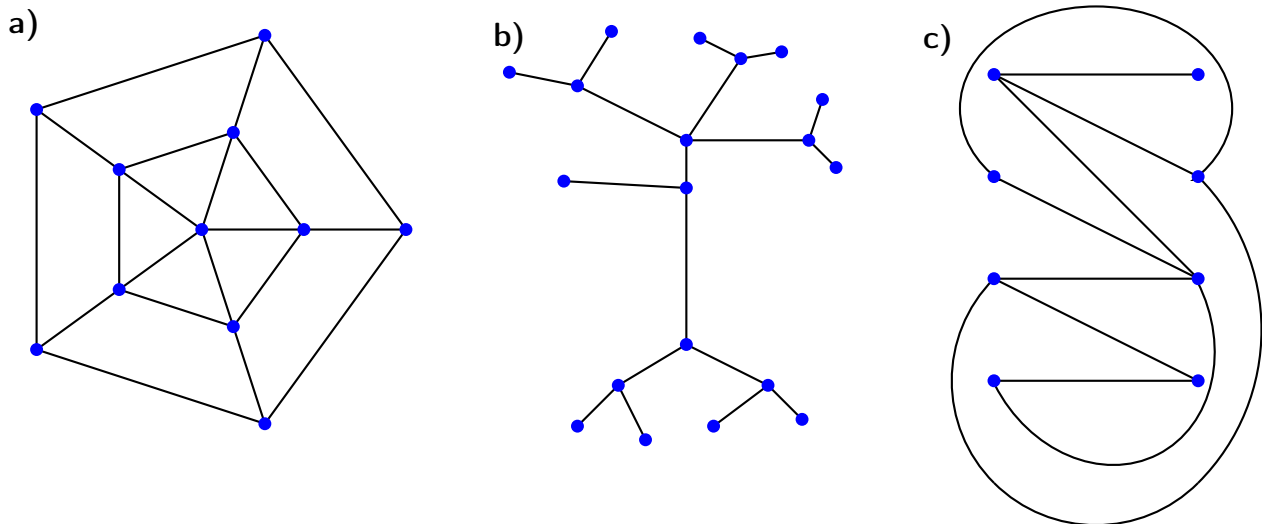
Zeichne neben den ebenen Graphen ein Gebäude, das zu dem Graphen gehören könnte.



Ecken, Kanten und Flächen

Aufgabe 5

Trage in die Graphen eine Nummerierung der Flächen ein, in die die Ebene durch den Graphen unterteilt wird. Vergiss die Außenfläche nicht. Fülle dann die Tabelle aus.



Graph	Anzahl Ecken	Anzahl Kanten	Anzahl Flächen	$e - k + f$
a)	$e =$	$k =$	$f =$	
b)	$e =$	$k =$	$f =$	
c)	$e =$	$k =$	$f =$	
Baum mit n Ecken	$e =$	$k =$	$f =$	

Zusatzaufgabe 4

Zeichne zusammenhängende Graphen mit jeweils vier Kanten, die

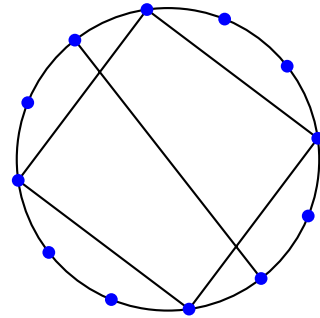
- eine Außenfläche und keine Innenfläche,
- eine Außenfläche und eine Innenfläche,
- eine Außenfläche und zwei Innenflächen,
- eine Außenfläche und drei Innenflächen,
- eine Außenfläche und vier Innenflächen

besitzen.

Schriftliche Aufgaben

Aufgabe 6

Gegeben ist der nebenstehende Graph.



a) Wie viele Ecken hat der längste Kreis im Graphen?

Antwort: Ecken.

b) Markiere farbige einen Kreis mit 4 Ecken (grün).

c) Markiere farbige einen Kreis mit 5 Ecken (rot).

d) Ist der Graph bipartit?

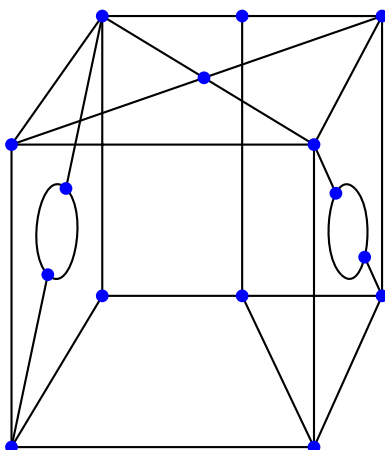
Antwort (Ja/Nein): .

e) Begründe Deine Antwort der letzten Teilaufgabe.

Begründung:

Aufgabe 7

Gegeben ist untenstehender Graph eines Würfels, bei dem auf den Seiten zusätzliche Kanten und Ecken ergänzt wurden. Zeichne einen isomorphen ebenen Graphen daneben.

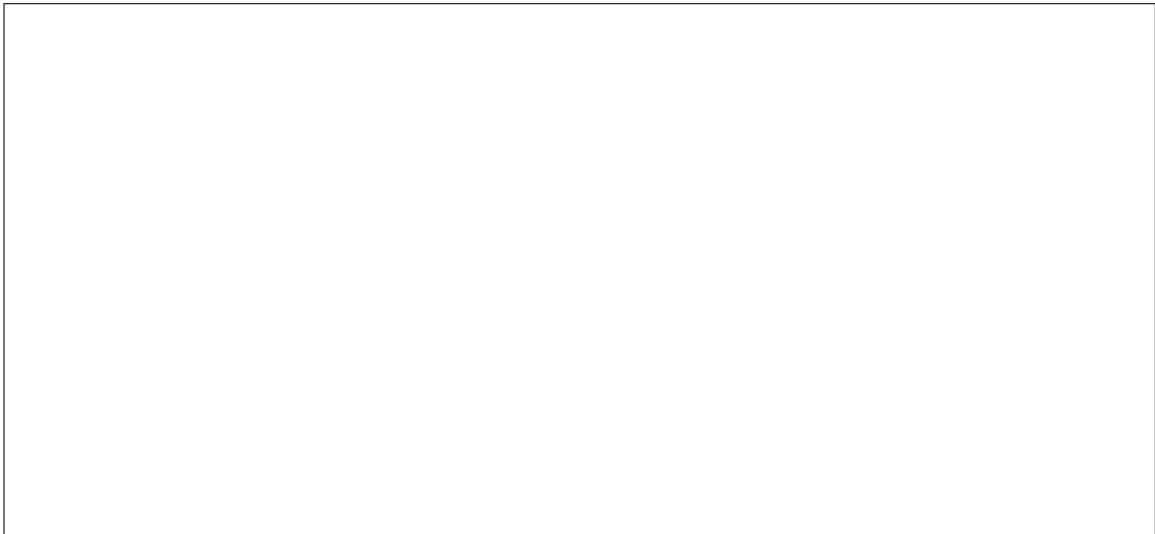


Bitte wenden

Aufgabe 8

Zeichne einen ebenen Graphen, der $e = 4$ Ecken und $k = 10$ Kanten besitzt und die Ebene in $f = 8$ Flächen unterteilt. Nummeriere die Flächen.

Lösung:



Aufgabe 9

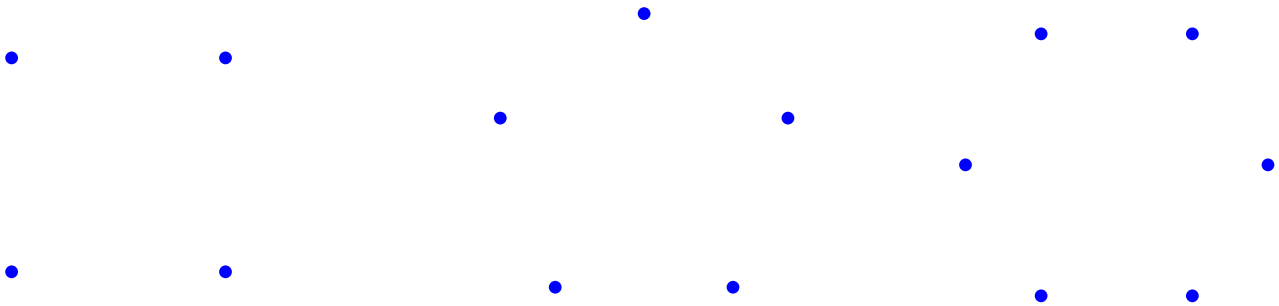
Erinnerung: Ein Graph heißt einfach, wenn er keine Schlingen und keine parallelen Kanten besitzt.

Wie viele Kanten kann ein ebener einfacher Graph besitzen? Konstruiere ebene einfache Graphen, die möglichst viele Kanten und

a) 4 Ecken,

b) 5 Ecken,

c) 6 Ecken besitzen.



Trage Deine Ergebnisse in die Tabelle ein.

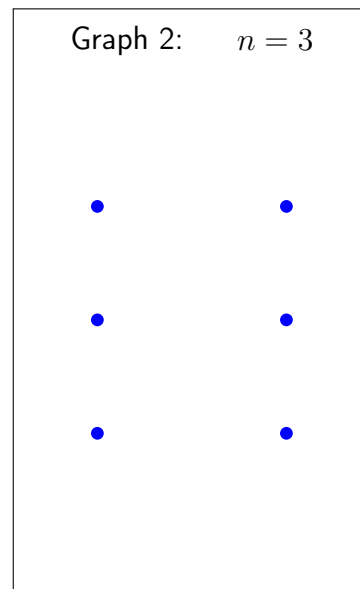
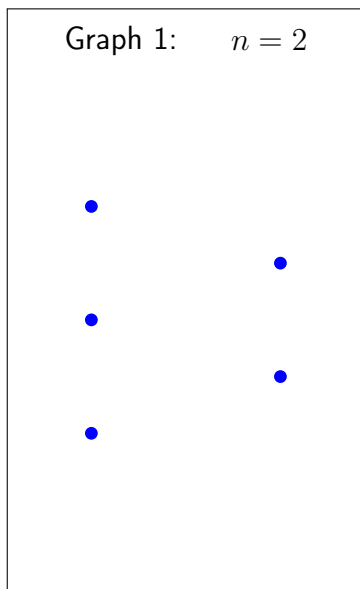
Anzahl Ecken	$e = 4$	$e = 5$	$e = 6$
Anzahl Kanten	$k =$	$k =$	$k =$

Weitere Aufgaben

Zusatzaufgabe 5

Erinnerung: Ein Graph heißt einfach, wenn er keine Schlingen und keine parallelen Kanten besitzt.

Wie viele Kanten kann ein **ebener einfacher bipartiter** Graph besitzen? Konstruiere ebene einfache bipartite Graphen, deren eine Eckenmenge 3 Ecken enthält, und die möglichst viele Kanten besitzen. Trage Deine Ergebnisse in die Tabelle ein.

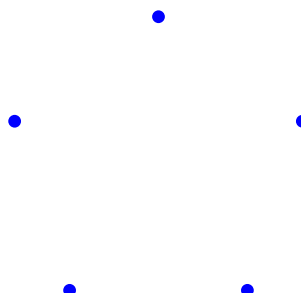
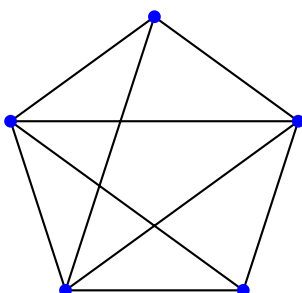


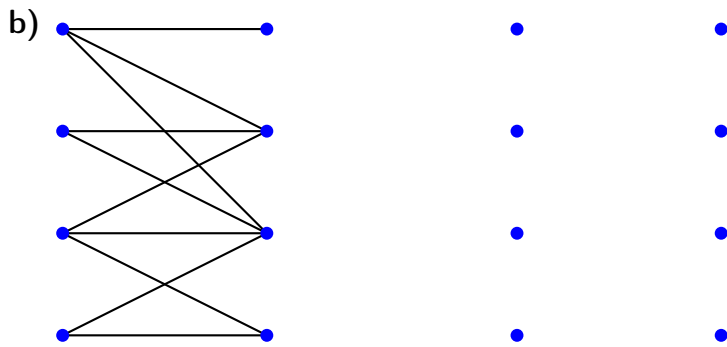
Anzahl Ecken in N	$n = 2$	$n = 3$
Anzahl Kanten	$k =$	$k =$

Zusatzaufgabe 6

Beweise, dass die folgenden Graphen plättbar sind, indem Du einen isomorphen ebenen Graphen daneben zeichnest.

a)

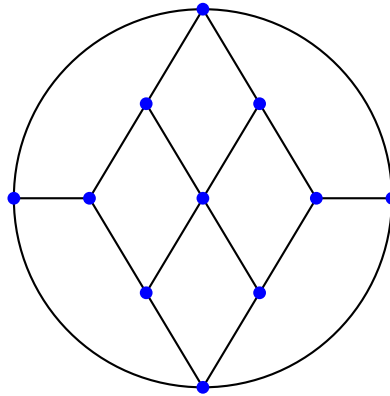




Zusatzaufgabe 7

Erinnerung: Ein Graph heißt einfach, wenn er keine Schlingen und keine parallelen Kanten besitzt.

Im unten gezeichneten ebenen einfachen Graphen sollen möglichst viele Kanten ergänzt werden (keine Ecken). Er soll eben und einfach bleiben. Zeichne die ergänzten Kanten farbig ein. Wie viele sind es?



Zusatzaufgabe 8

Es sollen ebene einfache Graphen mit 3, 4, 5 Ecken und möglichst vielen Kanten konstruiert werden. Gehe dazu folgendermaßen vor:

- Zeichne als erstes ein Dreieck, Seitenlänge ca. 5 cm. Dieses hat drei Ecken und drei Kanten. Da es eben und einfach sein soll, kann keine weitere Kante ergänzt werden.
- Zeichne eine zusätzliche Ecke ins Innere des Dreiecks und verbinde sie mit allen anderen Ecken.
- Zeichne eine weitere zusätzliche Ecke ins Innere eines der Teildreiecke und verbinde sie mit allen Ecken des Teildreiecks.
- Mache so weiter, so lange Du willst.
- Wie viele Kanten kommen in jedem Schritt dazu?
- Wie viele Kanten kannst Du ergänzen, wenn Du eine neue Ecke außerhalb des ursprünglichen Dreiecks hinzufügst?
- Fülle die Tabelle aus.

Anzahl Ecken	$e = 3$	$e = 4$	$e = 5$	$e = 6$	$e = 7$
Anzahl Kanten	$k =$	$k =$	$k =$	$k =$	$k =$

14 Ausarbeitung Unterrichtsstunde 6: Plättbare und nicht plättbare Graphen

14.1 Tafelanschiebe

- a) Einfacher Graph:
Keine Schlingen und keine parallelen Kanten
- b) Ebener Graph:
Kanten haben keine Punkte gemeinsam außer Ecken
- c) Plättbarer Graph:
Der Graph ist isomorph zu einem ebenen Graphen

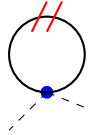
Satz: Für jeden zusammenhängenden ebenen Graphen gilt die eulersche Flächenformel


$$e - k + f = 2.$$

Hierbei bezeichnet e die Anzahl der Ecken, k die Anzahl der Kanten und f die Anzahl der Flächen. Die äußere Fläche muss mitgezählt werden.

Beweis: Betrachte einen zusammenhängenden ebenen Graphen mit e Ecken, k Kanten und f Flächen.

Entferne so lange Kanten, bis der entstehende Teilgraph ein Baum ist.

Entfernen einer Schlinge:  f und k werden jeweils um 1 kleiner, e bleibt gleich
 $\Rightarrow e - k + f$ bleibt gleich.

Entfernen einer parallelen Kante:  genauso

Entfernen einer Kante aus einem Kreis:  genauso

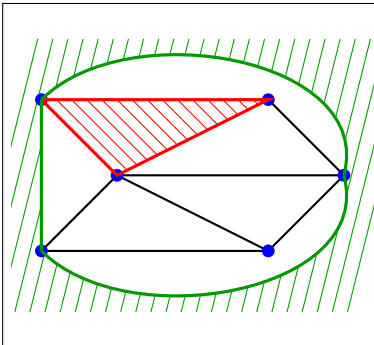
Wir können also alle Kreise „öffnen“, ohne den Wert von $e - k + f$ zu ändern. Der Graph bleibt zusammenhängend.

Am Ende bleibt ein Baum mit e Ecken übrig. Für diesen gilt $e - k + f = 2$ (letzte Aufgabe).
 \Rightarrow Für den ursprünglich gegebenen Graphen gilt ebenfalls $e - k + f = 2$. \square

Arbeitsblatt 6.1: Graphen und Eulerformel (Besprechung an Tafel)

Definition: Ein Graph heißt vollständig eben, wenn er einfach und eben ist und ihm keine Kante hinzugefügt werden kann, ohne dass seine Eigenschaft, einfach und eben zu sein, verloren geht.

Arbeitsblatt 6.2: Möglichst viele Kanten (Besprechung an Tafel, nach der Besprechung Dreiecke in der Lösung ergänzen, siehe unten.)



Satz: Ein vollständig ebener Graph mit $e \geq 3$ Ecken besitzt $k = 3 \cdot e - 6$ Kanten.

Beweis: Betrachte einen vollständig ebenen Graphen.

Er ist zusammenhängend, denn sonst könnte man noch eine Kante ergänzen.

\Rightarrow Es gilt die eulersche Formel $f = 2 + k - e$.

Jede innere Fläche ist ein Dreieck, denn sonst könnte noch eine Kante eingefügt werden.

Die äußere Fläche wird auch von 3 Kanten begrenzt, denn sonst könnte man außen noch eine Kante ergänzen.

Addiert man die Anzahl der Kanten, die die Dreiecke begrenzen, so zählt man jede Kante doppelt

$$\Rightarrow 2k = 3f = 3(2 + k - e)$$

$$\Rightarrow 2k = 6 + 3k - 3e \Leftrightarrow 0 = 6 + k - 3e \Leftrightarrow k = 3e - 6. \quad \square$$

Folgerung: Ein einfacher ebener Graph mit $e \geq 3$ Ecken besitzt höchstens $k = 3e - 6$ Kanten.

Arbeitsblatt 6.3: Plättbare und nicht plättbare Graphen (Besprechung an Tafel)

10. Nicht plättbare Graphen

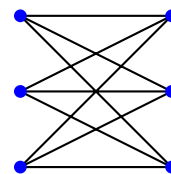
Satz: Ein vollständiges Fünfeck ist nicht plättbar. (Beweis siehe letzte Übungsaufgabe)

Satz: Der vollständige 3-3-Graph ist nicht plättbar.

Beweisversuch:

$$e = 6 \Rightarrow 3 \cdot e - 6 = 12$$

Es gilt $k = 9 \leq 12$, also kein Widerspruch



Beweis: Annahme: Der vollständige 3-3-Graph ist plättbar

Dann gibt es einen isomorphen ebenen Graphen.

Der ebene Graph hat $e = 6$ Ecken und $k = 9$ Kanten.

$$\text{eulersche Formel} \Rightarrow f = 2 + k - e = 5$$

Der ebene Graph hat, wie der vollständige 3-3-Graph, nur Kreise mit mindestens 4 Ecken.

\Rightarrow jede Fläche wird von mindestens 4 Kanten begrenzt, auch die Außenfläche

Addiert man die Anzahl der begrenzenden Kanten, so zählt man jede Kante doppelt

$$\Rightarrow 2k \geq 4f = 20 \Rightarrow k \geq 10 \quad \swarrow \text{Denn er besitzt nur 9 Kanten}$$

\Rightarrow die Annahme muss falsch sein

\Rightarrow der vollständige 3-3-Graph ist nicht plättbar. \square

Satz: Ist ein Graph plättbar, dann sind auch alle seine Teilgraphen plättbar. Insbesondere: Besitzt ein Graph auch nur einen Teilgraphen, der nicht plättbar ist, dann ist der Graph nicht plättbar.

Beweisskizze: Gibt es zu einem Graphen einen isomorphen ebenen Graphen, dann gibt es zu jedem Teilgraphen einen isomorphen Teilgraphen des ebenen Graphen. Und der ist dann eben.

Definition: Fügt man in einem Graphen zusätzliche Ecken auf den bereits bestehenden Kanten ein, so erhält man eine Unterteilung des Graphen.
Durch eine zusätzliche Ecke werden aus einer Kante zwei neue Kanten.

Satz von Kuratowski: Ein Graph ist genau dann nicht plättbar, wenn er einen Teilgraphen enthält, der isomorph zu einem vollständigen Fünfeck oder einem vollständigen bipartiten 3-3-Graphen oder einer Unterteilung eines dieser beiden Graphen ist.

[Arbeitsblatt 6.4: Nicht plättbare Graphen](#) (Besprechung an Tafel)

14.2 Arbeitsblätter

Siehe folgende Seiten

Graphen und Eulerformel

Aufgabe 1

- a) Ein zusammenhängender ebener Graph besitzt 13 Kanten und unterteilt die Ebene in 9 Flächen. Wie viele Ecken hat er?
- b) Ein zusammenhängender ebener Graph hat 5 Ecken und 7 Flächen. Wie viele Kanten hat er?
- c) Zeichne jeweils für a) und b) einen ebenen Graphen, der diese Eigenschaften hat. Sind die Graphen, die Du gezeichnet hast, einfach?

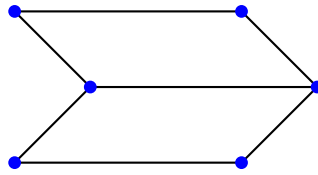
Aufgabe 2

- a) Zeichne einen ebenen Graphen mit 7 Flächen, der nicht zusammenhängend ist und aus zwei Komponenten besteht. Berechne $e + k - f$.
- b) Zeichne einen ebenen Graphen mit 6 Flächen, der nicht zusammenhängend ist und aus drei Komponenten besteht. Berechne $e + k - f$.
- c) Sei ein ebener Graph mit e Ecken, k Kanten und f Flächen gegeben, der aus n Komponenten besteht. Stelle eine Vermutung für den Wert von $e + k - f$ in Abhängigkeit von n auf. Überprüfe, ob Deine Formel auch für $n = 1$ stimmt. In diesem Fall ist der Graph zusammenhängend.

Möglichst viele Kanten

Aufgabe 3

Gegeben ist der folgende Graph.



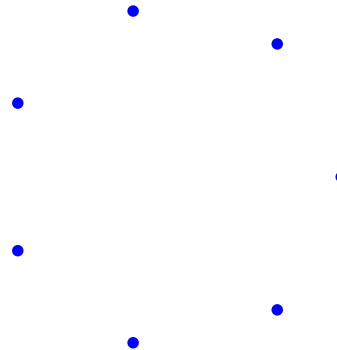
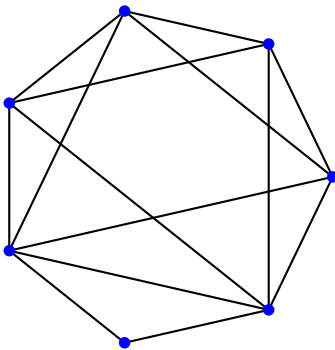
Ergänze möglichst viele Kanten, so dass der entstehende Graph einfach und eben ist. Wie viele Kanten kannst Du ergänzen?

Plättbare und nicht plättbare Graphen

Aufgabe 4

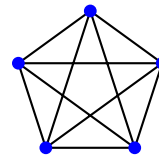
Gegeben ist der unten links gezeichnete Graph.

- Beweise, dass der Graph plättbar ist, indem Du daneben einen isomorphen ebenen Graphen zeichnest.
- Wie viele Ecken und Kanten besitzt der Graph? $e = \square$, $k = \square$.
- Warum ist der Graph nicht vollständig eben?
- Ergänze (zuerst im rechten, dann im linken Graphen) so viele Kanten (in rot), bis der Graph vollständig eben ist.



Aufgabe 5

Gegeben ist das vollständige Fünfeck, siehe rechts.



- Warum ist das vollständige Fünfeck einfach?

Antwort:

- Wie viele Ecken und Kanten hat das vollständige Fünfeck? $e = \square$, $k = \square$.
- Angenommen, das vollständige Fünfeck wäre plättbar. Dann besitzt es einen isomorphen einfachen und ebenen Graphen. Wie viele Ecken und Kanten hat der isomorphe Graph?

Antwort: $e = \square$, $k = \square$.

- Für diesen isomorphen einfachen und ebenen Graphen gilt $3e - 6 = \square$,

- Warum gibt es diesen isomorphen ebenen und einfachen Graphen nicht?

Antwort:

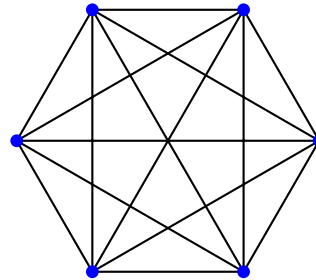
- Also ist die Annahme, das vollständige Fünfeck wäre plättbar,

Nicht plättbare Graphen

Aufgabe 6

Gegeben ist das vollständige Sechseck, siehe rechts.

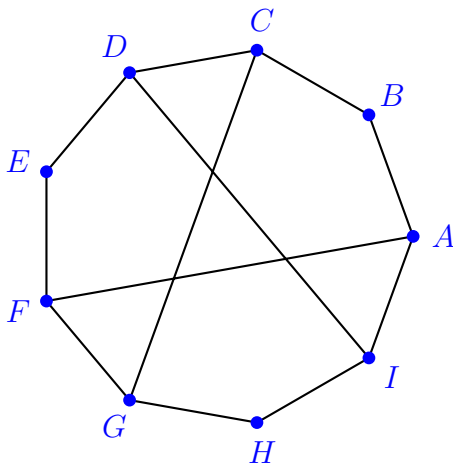
Beweise, dass das vollständige Sechseck nicht plättbar ist, indem Du einen Teilgraphen farbig markierst, der isomorph zu einem vollständigen Fünfeck ist.



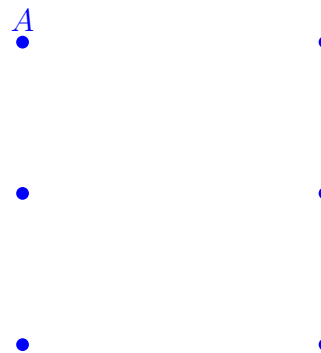
Aufgabe 7

Beweise, dass der unten gezeichnete Graph nicht plättbar ist. Weise dazu nach, dass er isomorph zu einer Unterteilung des vollständigen 3–3–Graphen ist. Zeichne dazu rechts den vollständigen 3–3–Graphen mit den vorgegebenen Ecken. Bezeichne dann die Ecken so, dass die Kanten des rechten Graphen denen im linken Graphen entsprechen. Dazu musst Du noch 3 Unterteilungsecken im rechten Graphen passend einfügen.

Hinweis: Die Ecke im rechten Graphen, die der Ecke *A* im linken Graphen entsprechen soll, ist bereits bezeichnet.



Lösung:



Schriftliche Aufgaben

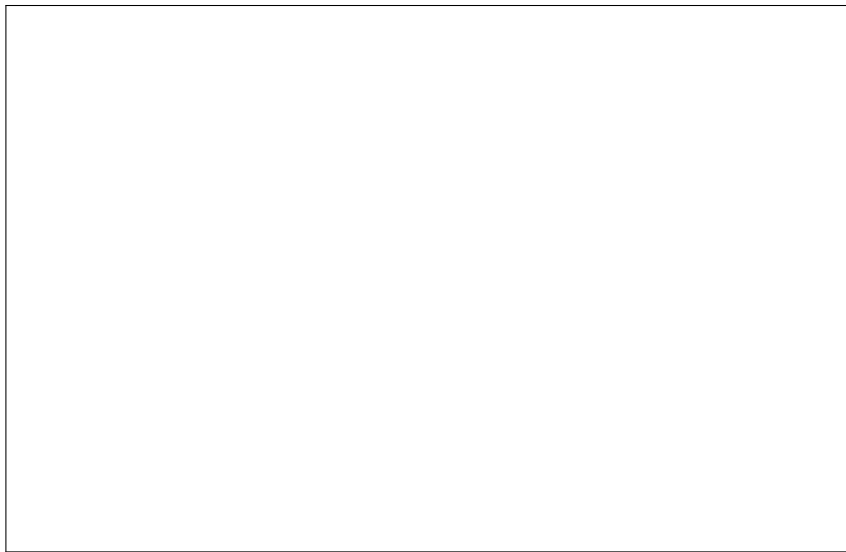
Aufgabe 8

- a) Welche Beziehung zwischen e und k muss bei einem zusammenhängenden ebenen Graphen mit 7 Flächen gelten?

Antwort:

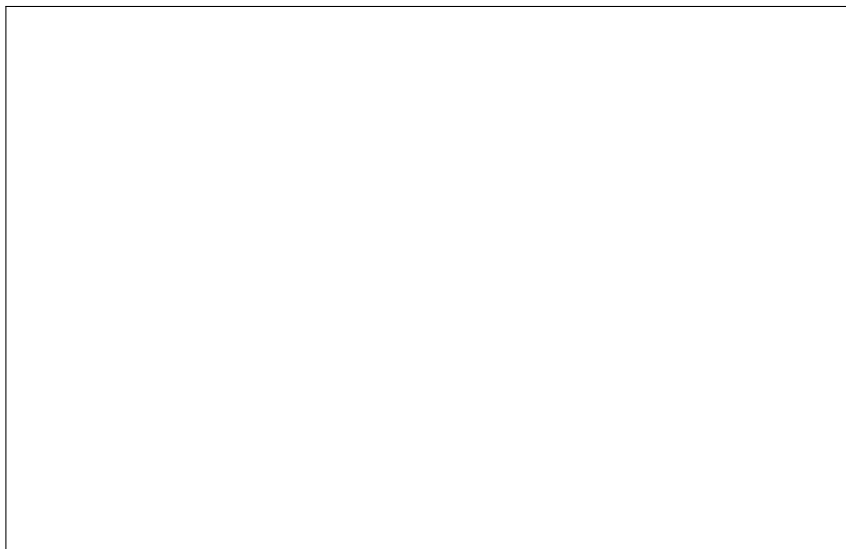
- b) Zeichne einen zusammenhängenden ebenen Graphen mit 7 Flächen und möglichst wenig Ecken. Nummeriere die Flächen.

Lösung:



- c) Zeichne einen einfachen zusammenhängenden ebenen Graphen mit 7 Flächen. Nummeriere die Flächen.

Lösung:



Weiter auf nächster Seite

Aufgabe 9

a) Wie viele Ecken und Kanten hat das vollständige Sechseck? $e = \square$, $k = \square$.

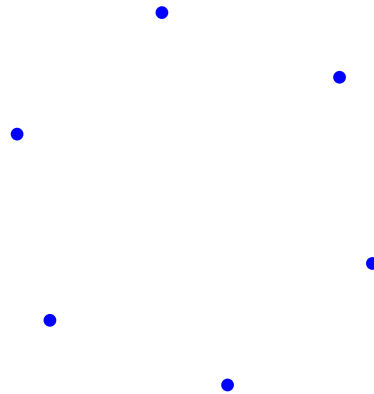
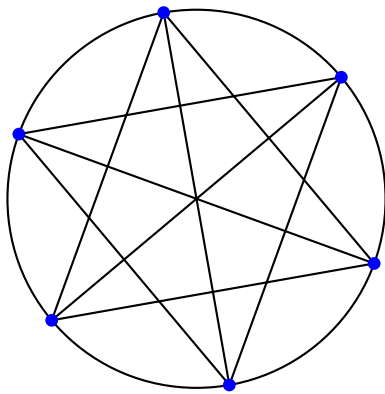
b) Warum ist das vollständige Sechseck nicht plättbar?

Antwort:

c) Wie viele Kanten müssen entfernt werden, damit aus dem vollständigen Sechseck ein plättbarer Graph wird?

Antwort: Es müssen Kanten entfernt werden.

d) Streiche im linken Graphen möglichst wenig Kanten, so dass ein plättbarer Graph entsteht. Zeichne rechts einen ebenen Graphen, der isomorph zu dem linken abgeänderten Graphen ist.



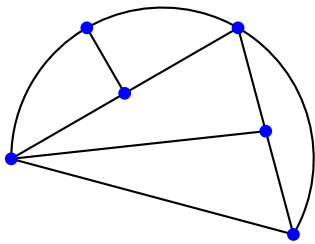
Weiter auf nächster Seite

Aufgabe 10

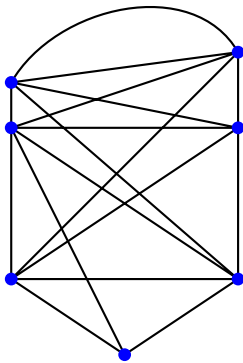
Betrachte die gegebenen Graphen. Welcher davon ist eben, plättbar oder nicht plättbar? Trage Deine Ergebnisse in die Tabelle ein. Begründe Deine Ergebnisse. Falls notwendig, zeichne einen isomorphen ebenen Graphen oder einen Graphen, der zu einem Teilgraphen isomorph ist.

	Graph 1	Graph 2	Graph 3	Graph 4
eben				
plättbar				

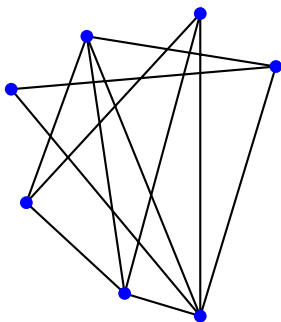
Graph 1



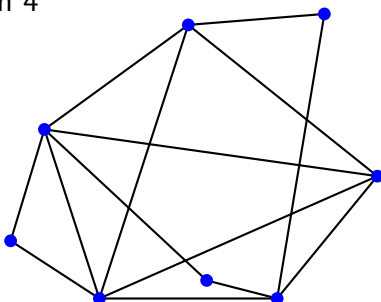
Graph 2



Graph 3



Graph 4



Weitere Aufgaben

Zusatzaufgabe 1

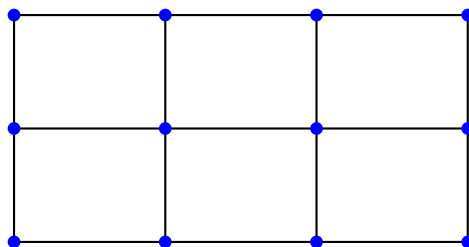
Für zusammenhängende ebene Graphen sind folgende Angaben bekannt. Ergänze die fehlenden Zahlen und zeichne jeweils einen ebenen Graphen mit der entsprechenden Anzahl an Ecken, Kanten und Flächen.

a) $e = 10, f = 2,$

b) $k = 8, f = 8.$

Zusatzaufgabe 2

Reisfelder werden durch Dämme getrennt. Du kannst sie dir folgendermaßen vorstellen:

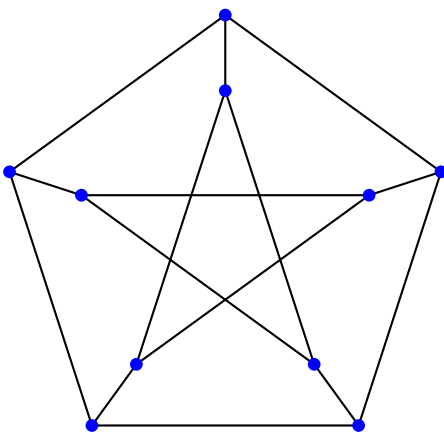


Du siehst ein 3×2 -Feldanbau. Das umliegende Gebiet zählt ebenfalls als ein Feld.

- Gilt für den 3×2 -Feldanbau die eulersche Formel? Gib die Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen an.
- Wie viele Ecken, Kanten und Flächen hat ein $m \times n$ -Anbau? Rechne nach, ob die eulersche Flächenformel gilt.

Zusatzaufgabe 3

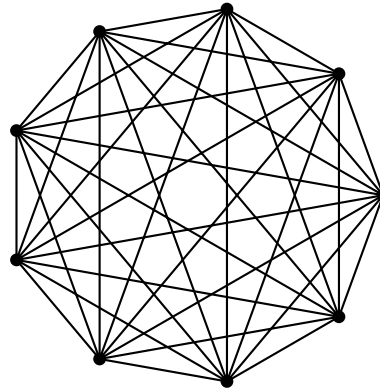
Gegeben ist der Petersen-Graph:



Lösche eine der inneren Ecken (Ecke mit den zugehörigen Kanten entfernen) und zeige, dass der entstehende Teilgraph isomorph zu einer Unterteilung des vollständigen $3-3$ -Graphen ist.

Zusatzaufgabe 4

Markiere in dem nebenstehenden vollständigen 9-Eck einen Teilgraphen farbig, der isomorph zum 3-3-Graphen ist.

**Zusatzaufgabe 5**

In dieser Aufgabe sind Graphen gesucht, die möglichst viele Flächen haben, wobei die Ecken- und Kantenzahl jeweils vorgegebene Größen nicht überschreiten dürfen.

- Löse die eulersche Flächenformel für ebene Graphen nach f auf.
- Zeichne einen Graphen mit höchstens $k = 10$ Kanten und möglichst vielen Flächen.
- Für ebene einfache Graphen gilt $k \leq 3e - 6$. Wie viele Ecken muss ein Graph mit $k = 10$ Kanten mindestens besitzen? Wie viele Flächen hat ein Graph mit dieser Mindestzahl von Ecken? Zeichne einen solchen Graphen.
- Gesucht ist ein ebener einfacher Graph mit $k = 18$ Kanten und möglichst vielen Flächen. Wie viele Ecken und Flächen besitzt er? Zeichne einen solchen Graphen.

Zusatzaufgabe 6

Ein Schäfer möchte seine Schafherde, die zum Gras in der in Abb. 1 dargestellten Weide ist, an einen neuen Weideplatz bringen. Dazu muss er die Herde in mindestens 3 Teile teilen. Die Pfosten sind dabei die Ecken, die Zaunstücke die Kanten. Beachte: Das Gebiet um die Weide zählt ebenfalls als Fläche

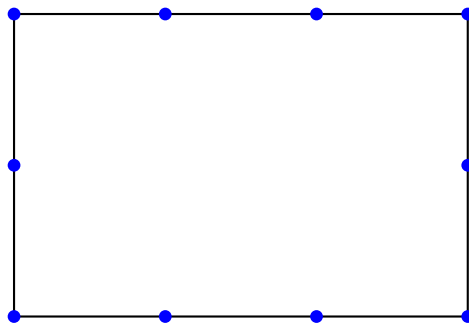


Abbildung 1: Eingezaunte Weide

- Der Schäfer hat vergessen, weitere Pfosten und Zaunstücke mitzubringen. Wie kann er trotzdem die Weide unterteilen, wenn er Pfosten und Kanten verschieben und/oder wegnehmen kann?

- b) Sein Mitarbeiter bringt ihm noch weitere 3 Pfosten und 7 Zaunstücke. Wie viele Flächen kann der Schäfer damit maximal erstellen?
Hinweis: Die Zaunstücke sind alle gleich lang und können nicht gebogen werden.

15 Ausarbeitung Unterrichtsstunde 7: Graphen und Polyeder

15.1 Vorbemerkung

2024 hatten wir ein paar Schüler:innen, die sehr langsam bei der Bearbeitung waren. Daher wurden im Thema 7 nur zwei der Übungsblätter bearbeitet, das erste und das letzte.

15.2 Tafelanschiebe

11. Graphen und Polyeder

Definition: Ein Polyeder ist ein dreidimensionaler Körper, dessen Seiten aus ebenen Vielecksflächen bestehen. Die Vielecksflächen stoßen an den Kanten und den Ecken des Körpers zusammen. In jeder Ecke enden mindestens 3 Kanten.
Die Ecken und Kanten bilden den Graphen des Polyeders.

Arbeitsblatt 7.1: Polyeder und Graphen

Satz: Für jeden Graphen eines Polyeders gelten:

- 1) Der Graph ist zusammenhängend und einfach,
- 2) Eckenzahl $e \geq 4$,
- 3) Kantenzahl $k \geq 6$.

Beweis: 1) Zusammenhängend: Ein Polyeder ist ein Körper.

Die Kante eines Polyeders sind Geradenstücke. Daher besitzt der Graph keine parallelen Kanten und keine Schlingen, ist also einfach.

2) 3 Ecken liegen in einer Ebene, bilden also nicht die Ecken eines Körpers $\Rightarrow e \geq 4$.

3) In jeder Ecke enden mindestens 3 Kanten
 \Rightarrow Es gibt mindestens $4 \cdot 3 = 12$ Enden von Kanten.
Jede Kante hat zwei Enden $\Rightarrow k \geq 6$. \square

Arbeitsblatt 7.2: Polyeder mit wie vielen Kanten gibt es?

Satz: 1) Zu jeder natürlichen Zahl $k \geq 6$, $k \neq 7$ gibt es ein Polyeder mit k Kanten.

2) Es gibt kein Polyeder mit 7 Kanten.

Beweis: Siehe letztes und nächstes Übungsblatt.

Arbeitsblatt 7.3: Polyeder mit 7 Kanten?

Definition: Ein Polyeder heißt konvex, wenn die Verbindungsstrecken beliebiger Punkte des Polyeders ganz im Polyeder verlaufen.

Satz: Der Graph eines konvexen Polyeders ist plättbar, d.h. er besitzt einen isomorphen ebenen Graphen. Die Anzahl der Flächen des Polyeders ist gleich der Anzahl der Flächen des ebenen Graphen, wenn beim ebenen Graphen die äußere Fläche mitgezählt wird.

Veranschaulichung: Bei dem Graphen eines konvexen Polyeders kann man so durch eine seiner Flächen hindurchsehen, so dass man den Graphen des Polyeders ohne Kreuzungen der Kanten sieht. Die Fläche, durch die man hindurchsieht, wird die äußere Fläche des ebenen Graphen.

Satz: Für jedes konvexe Polyeder gilt die eulersche Polyederformel: $e - k + f = 2$

Beweis: Betrachte ein konvexes Polyeder. Der Graph des Polyeders besitzt einen isomorphen Graphen, der eben, einfach und zusammenhängend ist. Für jeden ebenen und zusammenhängenden Graphen gilt die eulersche Formel $e - k + f = 2$ (früherer Satz).

Der Graph des Polyeders besitzt gleich viele Ecken, Kanten und Flächen,

⇒ Die Formel gilt auch für das Polyeder. □

Arbeitsblatt 7.4: Polyeder und ebene Graphen

Satz: Ein ebener Graph, der isomorph zu dem Graphen eines Polyeders ist, hat folgende Eigenschaften:

- 1) Er ist zusammenhängend und einfach,
- 2) $e \geq 4$,
- 3) Jede Ecke hat mindestens den Grad 3,
- 4) $k \geq 6$.

Beweis: Jeder Graph eines Polyeders besitzt alle diese Eigenschaften, also auch jeder isomorphe Graph. □

12. Platonische Körper und Graphen

Definition: Ein konvexes Polyeder heißt platonischer Körper, wenn alle Flächen aus kongruenten regelmäßigen n -Ecken bestehen und in jeder Ecke gleich viele Kanten enden.

Arbeitsblatt 7.5: Platonische Körper und Graphen

Definition: Ein zusammenhängender einfacher ebener Graph heißt platonischer Graph, wenn er folgende Eigenschaften besitzt:

- 1) Alle Ecken des Graphen haben den selben Grad, dieser beträgt mindestens 3 und
- 2) alle Flächen (auch die äußere) haben die selbe Anzahl Kanten, diese ist mindestens 3.

Folgerung: Die fünf Polyeder Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder, Ikosaeder sind platonische Körper, ihre Graphen sind isomorph zu platonische Graphen.

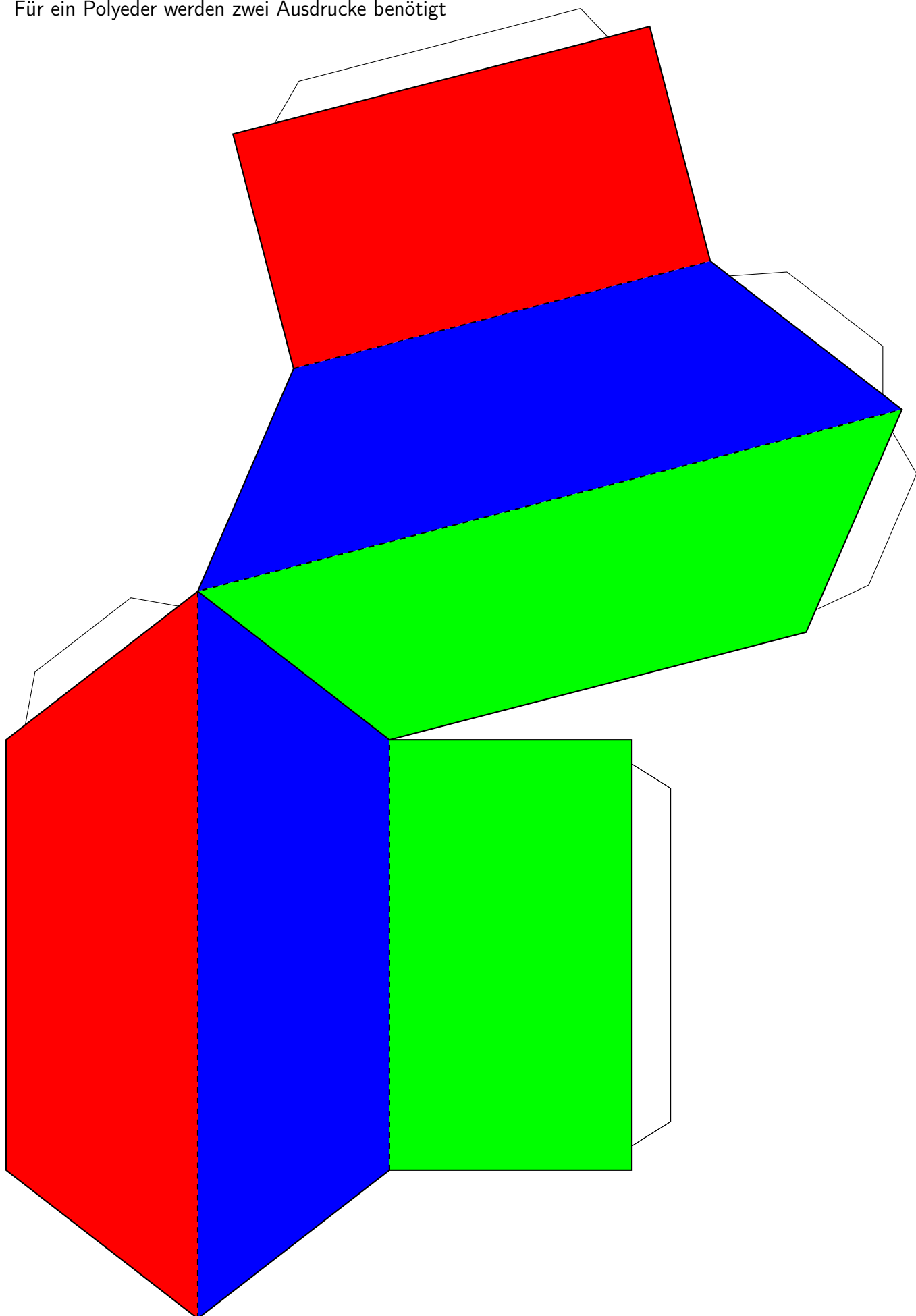
Satz: Jeder platonische Graph ist isomorph zu einem der Graphen von Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder, Ikosaeder. Daher gibt es genau diese fünf platonischen Körper.

Arbeitsblatt 7.6: Die 5 platonischen Körper und Graphen

15.3 Vorlagen und Arbeitsblätter

Siehe folgende Seiten

Für ein Polyeder werden zwei Ausdrücke benötigt

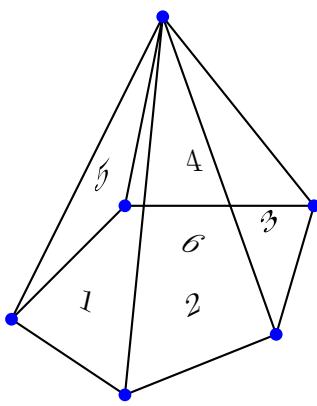


Polyeder und Graphen

Aufgabe 1

Gegeben ist das unten skizzierte Polyeder mit 6 Ecken, 10 Kanten und 6 Flächen. Die dreieckigen Seitenflächen sind der Reihe nach mit den Zahlen 1 bis 5 nummeriert, die fünfeckige Bodenfläche hat die Nummer 6.

- a) Warum ist der Graph des Polyeders einfach?
- b) Zeichne einen isomorphen ebenen Graphen und nummeriere die Flächen des Graphen so, dass ihre Nummern denen der Flächen des Polyeders entsprechen.
Hinweis: Der ebene Graph besitzt auch eine äußere Fläche.

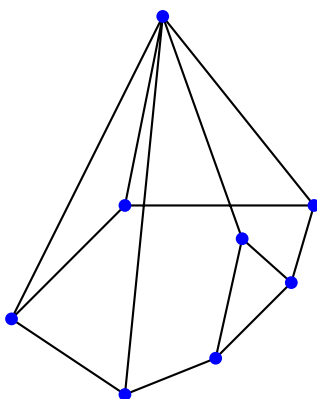


a) Der Graph ist einfach, denn:

b) Isomorpher ebener Graph:

Aufgabe 2

Beim Polyeder aus der letzten Aufgabe wurde eine Ecke abgeschnitten, siehe unten stehende Graphik. Zeichne einen isomorphen ebenen Graphen. Wie viele Ecken, Kanten, Flächen hat der vorliegende Graph mehr als der aus der vorigen Aufgabe?



a) Isomorpher ebener Graph:

b) Im Vergleich zum Graphen aus der letzten Aufgabe erhöhte

sich die Anzahl der Ecken um

die der Kanten um

die der Flächen um

,

und

.

Polyeder mit wie vielen Kanten gibt es?

Aufgabe 3

- a) Konstruiere ein Polyeder mit $k = 8$ Kanten. Zeichne einen isomorphen ebenen Graphen.
Hinweis: Das Polyeder kann entsprechend zu dem aus Aufgabe 1 konstruiert werden. Wähle als Grundfläche ein Viereck.
- b) Konstruiere ein Polyeder mit $k = 11$ Kanten. Zeichne einen isomorphen ebenen Graphen.
Hinweis: Verwende das Polyeder aus Teilaufgabe a) und schneide eine Ecke ab (vgl. die Konstruktion für Aufgabe 2).

Aufgabe 4

- a) Sei k ein Element der Menge $\{6, 8, 10, \dots\}$. Konstruiere ein Polyeder mit k Kanten, indem Du eine Grundfläche mit $n = \frac{k}{2}$ Ecken und eine Spitze wählst.
- b) Sei k ein Element der Menge $\{9, 11, 13, \dots\}$. Konstruiere ein Polyeder mit k Kanten, indem Du eine Grundfläche mit $n = \frac{k-3}{2}$ Ecken und eine Spitze wählst und dann eine Ecke abschneidest.

Polyeder mit 7 Kanten?

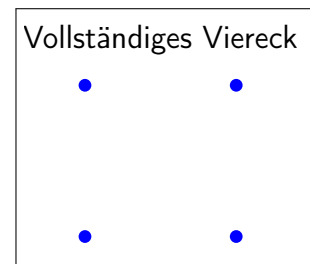
Aufgabe 5

In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass es kein Polyeder mit 7 Kanten gibt. Fülle dazu die Lücken aus.

Betrachte den Graphen des Polyeders. Die Anzahl seiner Ecken wird mit e bezeichnet. Wir wissen, dass der Graph einfach ist.

Weiter wissen wir, dass $e \geq \boxed{}$ gilt. Nun können wir eine Fallunterscheidung vornehmen.

Fall $e = 4$: Zeichne rechts ein vollständiges Viereck, d.h. einen einfachen Graphen mit 4 Ecken und möglichst vielen Kanten.



Das vollständige Viereck besitzt $k = \boxed{}$ Kanten. Ein einfacher Graph mit 4 Ecken kann nicht mehr Kanten besitzen.

\Rightarrow Es gibt kein Polyeder mit $e = \boxed{}$ Ecken und 7 Kanten.

Fall $e \geq 5$: Der Eckengrad jeder Ecke ist mindestens $\boxed{}$.

\Rightarrow Im Graphen gibt es mindestens $\boxed{}$ Enden von Kanten.

Jede Kante hat 2 Enden \Rightarrow Für die Anzahl von Kanten folgt $k \geq \boxed{}$.

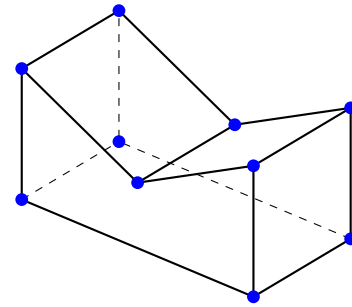
\Rightarrow Der Graph besitzt mindestens $\boxed{}$ Kanten.

\Rightarrow Es gibt kein Polyeder mit $e \geq \boxed{}$ Ecken und 7 Kanten. \square

Polyeder und ebene Graphen

Aufgabe 6

Gegeben ist das rechts dargestellte Polyeder.

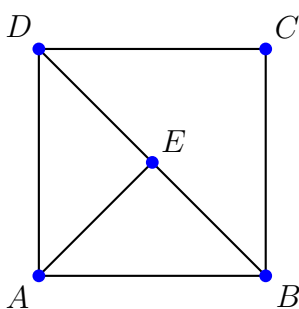


- a) Weise nach, dass das Polyeder nicht konvex ist. Zeichne dazu eine Verbindungsstrecke zweier Punkte des Polyeders ein, die nicht ganz im Polyeder verläuft.
- b) Weise nach, dass der Graph des Polyeders einen isomorphen ebenen Graphen besitzt, obwohl die Voraussetzung *konvex* nicht erfüllt ist. Zeichne dazu einen isomorphen ebenen Graphen.

Aufgabe 7

Gegeben ist der unten stehende ebene Graph mit 7 Kanten.

- a) Zeige, dass die eulersche Formel gilt.
- b) Warum gibt es kein Polyeder, dessen Graph isomorph zum hier gezeigten Graphen ist?



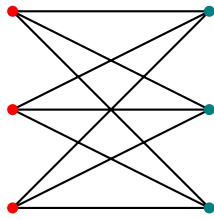
a) $e =$, $k =$, $f =$
 $\Rightarrow e - k + f =$

- b) Es gibt kein Polyeder, dessen Graph isomorph zum nebenstehenden Graphen ist, denn

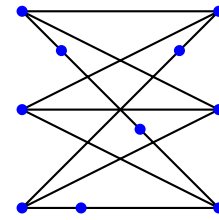
Weiter auf nächster Seite

Erinnerung: Wenn ein Graph einen Teilgraphen enthält, der isomorph zu einer Unterteilung des vollständigen 3-3-Graphen ist, dann ist er nicht plättbar.

3-3-Graph:

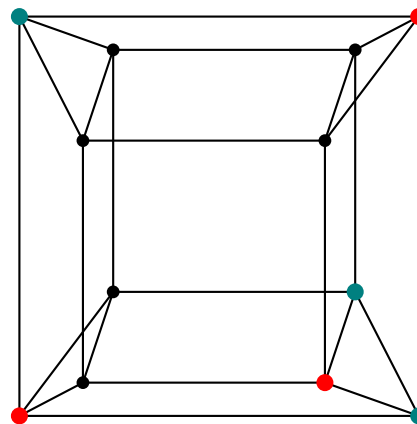
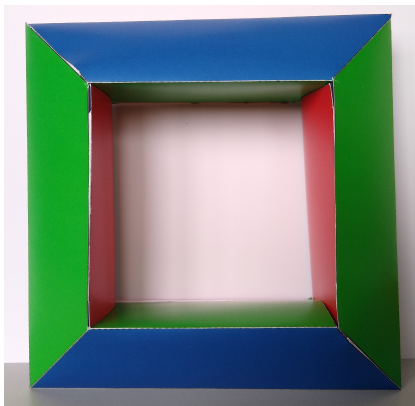


Unterteilung des 3-3-Graphen:



Aufgabe 8

Gegeben ist das nicht konvexe Polyeder, dessen Photo und Graph abgebildet sind.



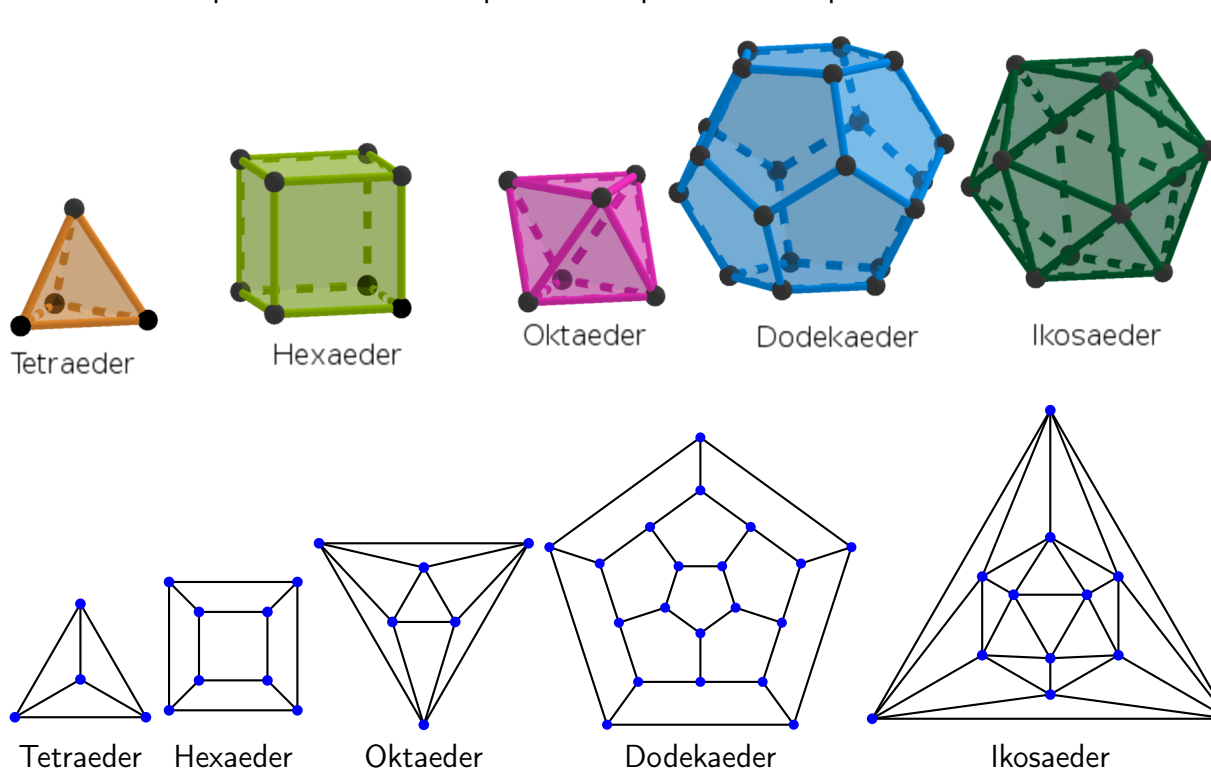
- a) Bestimme die Anzahl der Flächen, Kanten und Ecken des Polyeders. Zeige, dass die eulersche Polyederformel nicht gilt. Beachte, dass die im Graphen als Dreiecke erscheinende Flächen keine Seiten des Polyeders sind.

$$\boxed{e = \quad}, \boxed{k = \quad}, \boxed{f = \quad}, \Rightarrow \boxed{e - k + f = \quad} \neq 2.$$

- b) Zeige, dass der Graph des Polyeders nicht plättbar ist, indem Du einen Teilgraphen blau markierst, der isomorph zu einer Unterteilung des 3-3-Graphen ist.

Platonische Körper und Graphen

Platonische Körper und zu ihren Graphen isomorphe ebene Graphen:



Aufgabe 9

Trage in die Tabelle den Eckengrad g der Ecken und die Ecken-, Kanten- und Flächenzahl ein.

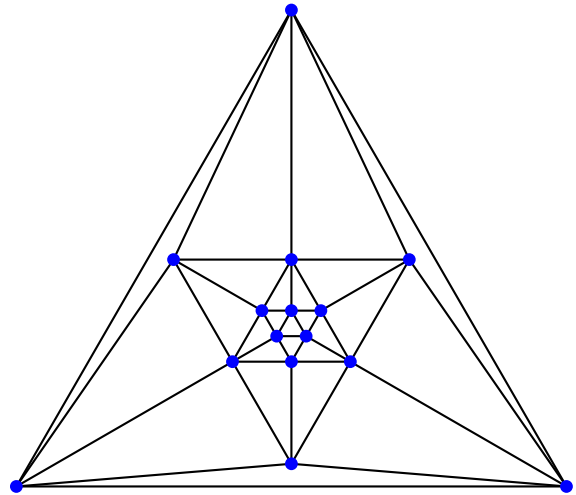
	Tetraeder	Hexaeder	Oktaeder	Dodekaeder	Ikosaeder
$g =$					
$e =$					
$k =$					
$f =$					

Weiter auf nächster Seite

Aufgabe 10

Gegeben ist der nebenstehende ebene Graph. Er ist isomorph zu dem Graphen eines Polyeders.

- a) Aus was für n -Ecken bestehen die Seiten des Polyeders?
- b) Warum kann das zugehörige Polyeder nicht platonisch sein?



Die 5 platonischen Körper und Graphen

Aufgabe 11

In dieser Aufgabe zeigen wir: Jeder platonische Graph ist isomorph zu einem der Graphen von Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder, Ikosaeder. Fülle dazu die Lücken aus.

Wir betrachten einen platonischen Graphen mit e Ecken, k Kanten und f Flächen. Seien zusätzlich g der Eckengrad, den jede Ecke besitzt, und n die Anzahl der Kanten, die jede Fläche begrenzen.

Jede Ecke hat den Eckengrad $g \Rightarrow$ es gibt Enden von Kanten.

Da jede Kante Enden besitzt, gibt es insgesamt $k =$ Kanten.

Umformen nach der Anzahl der Ecken e liefert

$$e = \frac{k}{g} \quad (*)$$

Addiert man die Anzahl der Kanten, die die Flächen begrenzen, so zählt man jede Kante doppelt

\Rightarrow Der Graph besitzt $k =$ Kanten. Umformen nach der Anzahl der Flächen liefert

$$f = \frac{k}{n} \quad (**)$$

Setzt man $(*)$ und $(**)$ für e und f in die eulersche Formel ein, so erhält man

$$2 = e - k + f \Rightarrow 2 = \frac{k}{g} - k + \frac{k}{n}$$

Teilt man auf beiden Seiten durch $2k$, so erhält man die Gleichung .

Nach dem ersten Satz gilt $g \geq 3$ und $n \geq 3$. Deshalb müssen wir jetzt einfach durchprobieren, für welche Werte von g und n wir Lösungen für k finden. Starte dazu mit $g = 3$ und erhöhe n solange, bis du keine sinnvolle Lösung mehr für k findest. Fahre dann mit dem nächst größeren g fort.

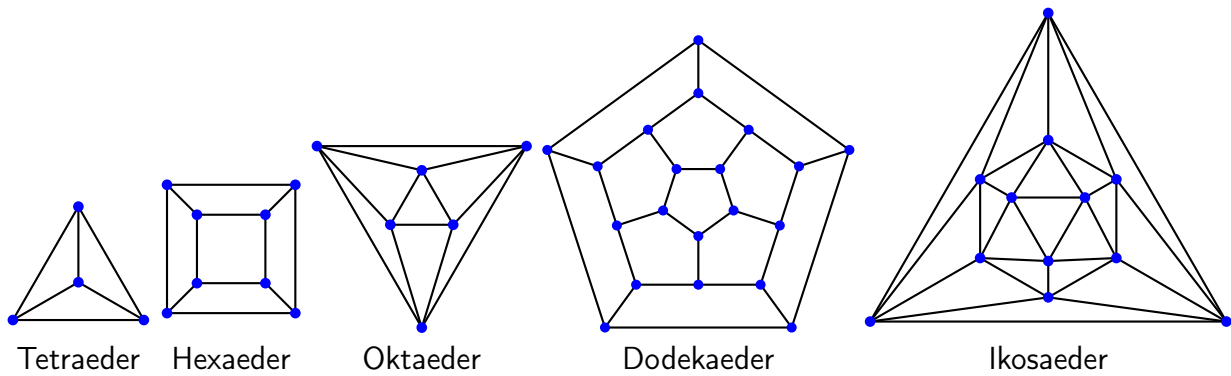
g	n	$\frac{1}{g} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2}$	k	Name
3	3			

Warum sind wir mit den hier betrachteten Werten für g und n fertig und müssen nicht alle möglichen Kombinationen durchgehen?

Weiter auf nächster Seite

Aufgabe 12

Untersuche ob die 5 platonischen Graphen eulersch und/oder hamiltonsch sind.



	Tetraeder	Hexaeder	Oktaeder	Dodekaeder	Ikosaeder
ist eulersch					
ist hamiltonsch					

Schriftliche Aufgaben

Name:

Aufgabe 13

Wahr oder falsch? Kreuze an!

	wahr	falsch
Es gibt ein platonisches Poyeder, dessen Flächen regelmäßige 4-Ecke sind.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Es gibt ein platonisches Poyeder, dessen Flächen regelmäßige 5-Ecke sind.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Es gibt ein platonisches Poyeder, dessen Flächen regelmäßige 6-Ecke sind.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Es gibt einen platonischen Graphen, der 14 Ecken besitzt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Für alle platonischen Graphen gilt die eulersche Flächenformel $e - k + f = 2$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Jedes konvexe Polyeder besitzt einen plättbaren Graphen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Ist der Graph eines Polyeders plättbar, dann ist es konvex.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Zu jeder natürlichen Zahl $k \geq 6$ gibt es ein Polyeder mit k Kanten.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Ist ein ebener Graph nicht einfach, so gibt es kein Polyeder, dessen Graph isomorph zu diesem ebenen Graphen ist.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Für jedes Polyeder gilt die eulersche Flächenformel $e - k + f = 2$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Besitzt ein konvexes Polyeder $k = 9$ Kanten und $e = 5$ Ecken, dann hat es $f = 6$ Flächen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Aufgabe 14

Gegeben ist der rechts skizzierte ebene und einfache Graph.

- a) Bestimme die Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen.

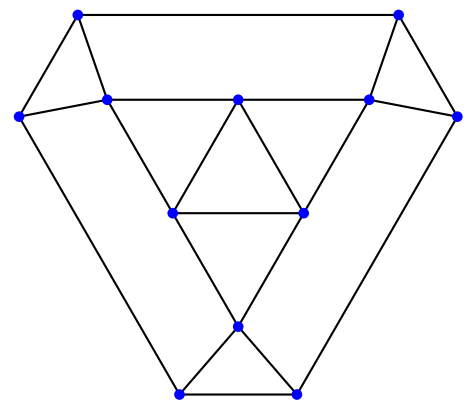
$$e = \boxed{}, k = \boxed{}, f = \boxed{}.$$

- b) Überprüfe die eulersche Formel.

$$e - k + f = \boxed{}.$$

- c) Der Graph ist isomorph zum Graphen eines Polyeders. Die Flächen des Polyeders bestehen aus n -Ecken. Kreuze an, welche n -Ecke der Polyeder als Flächen besitzt.

$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$	$n = 8$	$n = 9$	$n = 10$
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

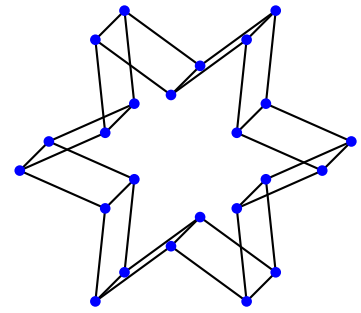


Aufgabe 15

Gegeben ist das Polyeder, dessen Graph rechts dargestellt ist.

- a) Warum ist das Polyeder nicht konvex?

Antwort:



- b) Zeichne einen isomorphen ebenen Graphen.

Zusatzaufgabe 1

Ein (alter) Fußball besteht aus 12 Fünfecken und aus 20 Sechsecken, siehe Photo.

Zeichne einen isomorphen ebenen Graphen auf einem extra Blatt.

Tipp: Markiere die Fünfecke farbig. Starte mit einem Fünfeck und zeichne den Graphen mit diesem Fünfeck als Zentrum. Dann muss der ganze Graph außen durch ein Fünfeck begrenzt sein.

Teste, ob jemand deinen „Fußball“ erkennt.



Weitere Aufgaben

Zusatzaufgabe 2

Zeichne einen zusammenhängenden, einfachen und ebenen Graphen, der mindestens sechs Kanten hat und nicht isomorph zum Graphen eines Polyeders ist.

Zusatzaufgabe 3

In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass es kein Polyeder mit 7 Kanten gibt. Dazu führen wir einen Widerspruchsbeweis. Das bedeutet wir nehmen an, dass es ein Polyeder mit $k = 7$ Kanten gibt, und finden dann einen Widerspruch.

Der Graph des Polyeders ist isomorph zu einem einfachen ebenen Graphen. Wir wissen aus einem Satz: Für die Anzahl der Kanten k eines einfachen ebenen Graphen gilt $k \leq$.

Umformen nach der Anzahl der Ecken e und Einsetzen von $k = 7$ liefert $e \geq$.

Der Graph muss also mindestens Ecken besitzen.

Der Eckengrad jeder Ecke ist mindestens .

Was folgt damit für die Anzahl der Kanten k des ebenen Graphen?

Antwort: .

Worin liegt der Widerspruch?

Antwort: .

Zusatzaufgabe 4

Entscheide ob die Aussagen wahr oder falsch sind. Gib jeweils eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel an.

- Ein einfacher Graph mit 5 Ecken besitzt höchstens 10 Kanten.
- Jeder Kreis ist bipartit.
- Es gibt keinen bipartiten platonischen Graph.
- Jeder Graph besitzt genau einen aufspannenden Baum.
- Ein Graph, der nur aus einer Kante und zwei Ecken besteht, besitzt immer genau eine Fläche.
- Es gibt einen zusammenhängenden ebenen Graphen mit 12 Kanten, 8 Ecken und 6 Flächen.
- Die eulersche Formel gilt für einen Graphen, der nur aus einer isolierten Ecke besteht.

- h) Jeder einfache zusammenhängende ebene Graph mit mindestens 4 Ecken und mindestens 6 Kanten ist isomorph zu dem Graphen eines Polyeders.

Zusatzaufgabe 5

Gegeben ist ein Körper, der dadurch entsteht, dass bei einem Würfel auf jede Fläche eine quadratische Pyramide gestellt wird. Der Körper hat also weitere 6 Ecken.

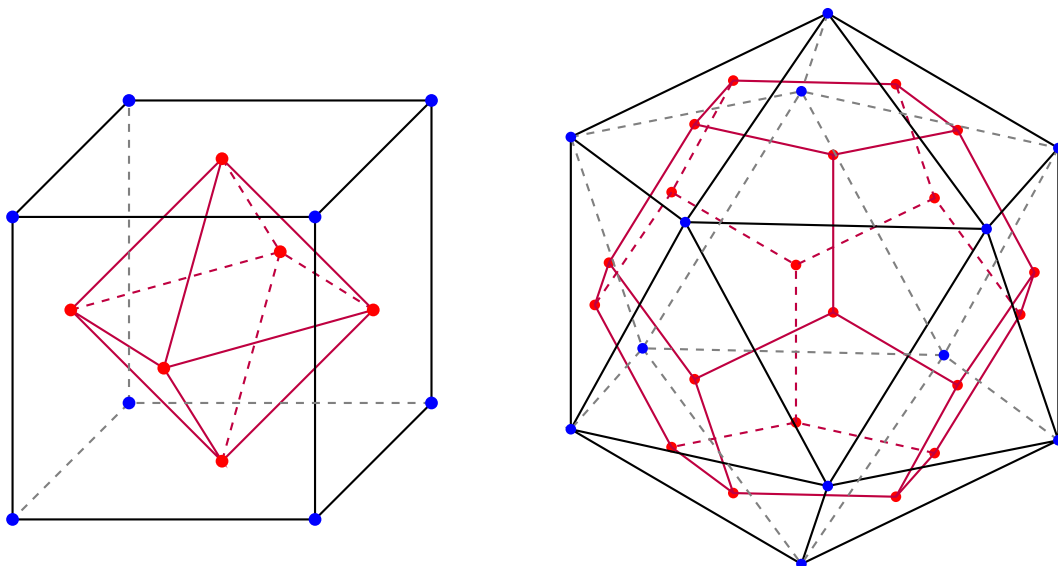
- Wie viele Ecken, Kanten und Flächen hat der Körper?
- Überprüfe die Gültigkeit der eulerschen Formel.
- Ist der Körper ein platonischer Körper?
- Kannst Du einen isomorphen ebenen Graphen zeichnen?
Falls Nein: Begründung.
Falls Ja: Beweis durch Zeichnen des ebenen isomorphen Graphen.

Zusatzaufgabe 6

- Trage in die Tabelle die Ecken-, Kanten- und Flächenzahl ein.

	Tetraeder	Hexaeder	Oktaeder	Dodekaeder	Ikosaeder
$e =$					
$k =$					
$f =$					

- Vergleiche die Zahlen des Hexaeders mit denen des Oktaeders und die Zahlen des Dodekaeders mit denen des Ikosaeders. Es gibt eine Beziehung, die in den untenstehenden Graphiken veranschaulicht wird. Formuliere diesen Sachverhalt.



Zusatzaufgabe 7

Zeige, dass die platonischen Graphen hamiltonsch sind, indem Du in die Graphen, die auf dem letzten Aufgabenblatt gezeichnet sind, jeweils einen hamiltonschen Kreis einzeichnest.

Graphentheorie

zum Selbstlernen

Vorwort

Dies ist ein Skript zum Selbststudium. Du kannst hier Grundlagen der Graphentheorie kennenlernen. Der Text ist im Wesentlichen der Mitschrieb aus einem Online-Kurs *Graphentheorie* im Schülerseminar für Klasse 8-10. Du findest diesen und andere Kurse auf der Seite

<https://pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/iadm/Zirkel/material-Schuelerseminar/>

Falls Du beim Studium des vorliegenden Textes Fragen hast, kannst Du beim Online-Kurs im entsprechenden Video nachsehen, dort gibt es ausführlichere Erklärungen. Um die Verbindung zu finden, ist am Rand des Textes markiert, wann die einzelnen Einheiten des Online-Kurses beginnen.

Die Aufgaben sind auch dieselben wie im Online-Kurs. Im Lerntext sind keine Lösungen dabei, damit Du sie selber lösen kannst. Bei den Aufgaben ist oft Platz, um Deine Lösungen aufzuschreiben. Manchmal musst Du aber auch ein extra Blatt für die Berechnungen dazunehmen. Falls Du Deine Lösungen überprüfen willst, stehen alle Aufgaben mit Lösungen im letzten Kapitel dieses Skripts.

Ich wünsche Dir viel Spaß beim Durcharbeiten des Skripts und bei den Aufgaben!

4. März 2025

Peter Lesky

1. Was ist ein Graph?	Seite 1
2. Graphen als Tabellen	Seite 2
3. Rundwege	Seite 4
4. Einfache Graphen	Seite 7
5. Hamiltonsche Graphen	Seite 8
6. Wege und Kreise	Seite 16
7. Bäume	Seite 17
8. Bipartite Graphen	Seite 22
9. Ebene und plättbare Graphen	Seite 29
10. Nicht plättbare Graphen	Seite 35
11. Graphen und Polyeder	Seite 37
12. Platonische Körper und Graphen	Seite 42
13. Lösungen der Aufgaben	Seite 46

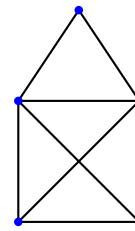
Copyright: © Schülerzirkel Mathematik, Universität Stuttgart, 2025



Dieses Dokument steht unter der der Creative Commons Lizenz **BY NC SA**,
siehe <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/legalcode>

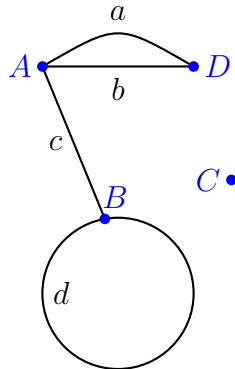
1 Was ist ein Graph?

Du kennst sicher die Aufgabe, das Haus vom Nikolaus in einem Zug zu zeichnen, ohne eine Linie doppelt zu zeichnen. Das Gebilde, das dabei herauskommt, hat Ecken und verbindende Linien. So ein Gebilde nennt man *Graph*. Aber nun genauer.



Definition: Ein Graph besteht aus Ecken und Kanten. Er muss mindestens eine Ecke besitzen. Jede Kante verbindet zwei verschiedene Ecken oder eine Ecke mit sich selber.

Bezeichnungen:



- C : isolierte Ecke
- d : Schlinge
- a, b : parallele Kanten
- $\text{Grad}(A) = 3$
- $\text{Grad}(B) = 3$
- $\text{Grad}(C) = 0$
- $\text{Grad}(D) = 2$

Definition: Eine Ecke, an der keine Kante endet, heißt isoliert.
 Eine Kante, die eine Ecke mit sich selbst verbindet, heißt Schlinge.
 Zwei Kanten, die die selben Ecken verbinden, heißen parallel.
 Der Grad einer Ecke ist die Anzahl der Endpunkte von Kanten in dieser Ecke.

Bemerkung: Der kleinste Graph besteht aus einer Ecke. Der ist aber langweilig.

Aufgabe 1

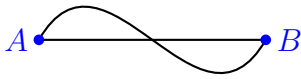
- a) Zeichne einen Graphen mit 2 Ecken mit Grad 1 und 7.
- b) Zeichne einen Graphen mit 5 Ecken mit Grad 1, 2, 2, 2, 3.
- c) Zeichne zwei verschiedene Graphen mit jeweils 4 Ecken, wovon zwei den Grad 2 und zwei den Grad 3 haben.

d) Fülle die Tabelle aus:

	a)	b)	c ₁)	c ₂)
Summe Eckengrade				
Anzahl Kanten				

- e) Wie hängen die Eckengrade und die Zahl der Kanten zusammen?
- f) Warum gibt es keinen Graphen mit drei Ecken mit den Graden 4, 5, 6?

Vereinbarung: Kreuzen sich zwei Kanten, ohne dass dort eine Ecke eingezeichnet ist, so stellen wir uns vor, dass die Kanten übereinander verlaufen, ohne sich zu schneiden.



Graph mit zwei Ecken und zwei parallelen Kanten

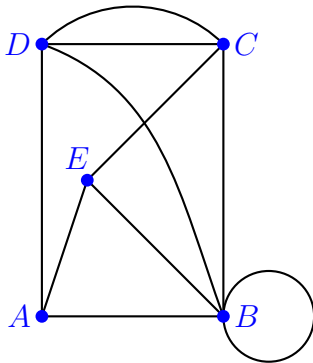
Beim *Haus vom Nikolaus* haben wir bei der Kreuzung der Diagonalen keine Ecke eingezeichnet. Also schneiden sich die Diagonalen nicht.

2 Graphen als Tabellen

Methode: Zeichne eine Tabelle, die für jede Ecke sowohl eine Spalte als auch eine Zeile enthält. Trage in das Feld der Zeile *B* und Spalte *C* ein, wie viele Kanten *B* und *C* verbinden.

Aufgabe 2

Trage in die Tabelle ein, wie viele Kanten die jeweiligen Ecken verbinden.



	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	Grad
<i>A</i>						
<i>B</i>						
<i>C</i>						
<i>D</i>						
<i>E</i>						

Aufgabe 3

Zeichne zwei verschieden aussehende Graphen, die die folgende Tabelle besitzen.

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
<i>A</i>	1	0	1	1
<i>B</i>	0	0	0	2
<i>C</i>	1	0	2	1
<i>D</i>	1	2	1	0

Definition: Zwei Graphen heißen isomorph, wenn sie bei geeigneter Bezeichnung der Ecken dieselbe Tabelle besitzen.

Anschaulich: Der eine Graph kann so „verbogen“ werden, dass der andere entsteht.

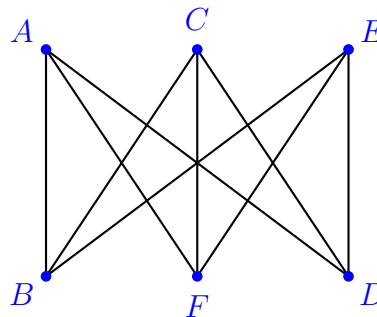
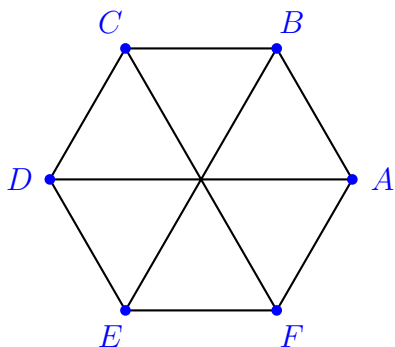
Satz: Sind zwei Graphen isomorph, so haben sie dieselbe

- Anzahl von Ecken
- Anzahl von Kanten
- Anzahl von Schlingen
- Anzahl paralleler Kanten
- Liste der Eckengrade bis auf Reihenfolge

Umgekehrt: Ist einer dieser Punkte nicht erfüllt, so sind die Graphen nicht isomorph.

Aufgabe 4

Zeige, dass die folgenden Graphen isomorph sind:



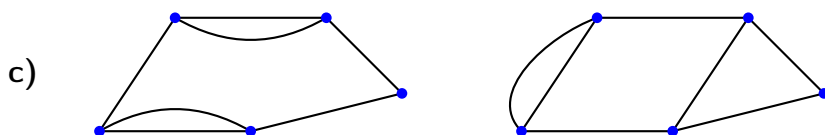
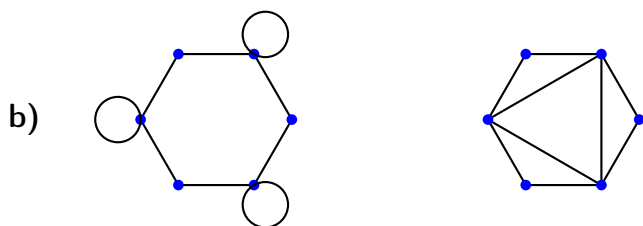
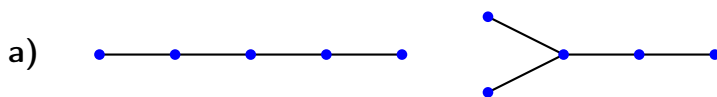
	A	B	C	D	E	F
A						
B						
C						
D						
E						
F						

	A	B	C	D	E	F
A						
B						
C						
D						
E						
F						

Die Graphen sind isomorph, denn

Aufgabe 5

Warum sind die folgenden Graphen jeweils nicht isomorph?



3 Rundwege

Definition: 1) Ein Kantenzug in einem Graphen ist eine Folge von Kanten, die nacheinander ohne Absetzen gezeichnet werden können.

Beim Nachfahren eines Kantenzugs wird die Ecke, in der die erste Kante beginnt, über den Kantenzug mit der Ecke, in der die letzte Kante endet, verbunden.

2) Ein Graph heißt zusammenhängend, wenn es zu je zwei beliebig gewählten Ecken immer einen Kantenzug gibt, der sie verbindet.

3) Ein Kantenzug heißt geschlossen, wenn Anfangsecke = Edecke.

4) Ein Kantenzug, der

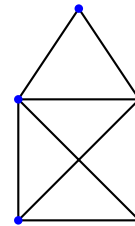
- jede Kante genau ein Mal benützt und
- geschlossen ist,

heißt eulersche Tour.

5) Ein Graph, der eine eulersche Tour enthält, heißt eulerscher Graph.

Anschaulich: Einen eulerschen Graphen ohne isolierte Ecke kann man zeichnen ohne abzusetzen, ohne eine Kante doppelt abzufahren und so, dass man bei der Anfangsecke endet.

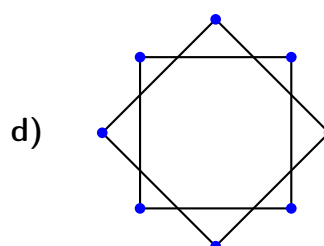
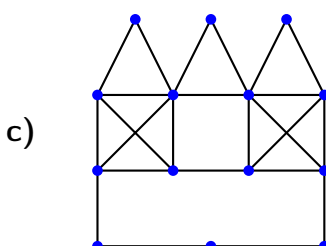
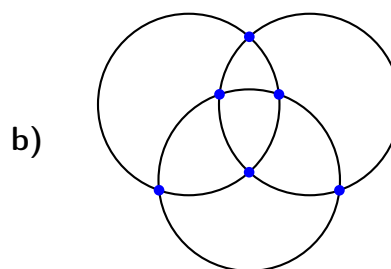
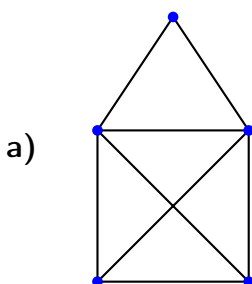
Betrachte nochmal das *Haus vom Nikolaus*. Beim Zeichnen geht man einen Kantenzug entlang. Da man durch alle Ecken kommt, ist der Graph zusammenhängend. Der Kantenzug ist jedoch nicht geschlossen, also keine eulersche Tour.



Achtung: Bei eulerschen Touren oder eulerschen Graphen geht es nur um die Kanten. Isolierte Ecken darf es geben.

Aufgabe 6

In welchem der Graphen gibt es eine eulersche Tour?



Bei großen Graphen kann es sehr mühsam sein, eine eulersche Tour zu finden. Wir lernen nun eine einfache Bedingung kennen, die garantiert, dass ein Graph eulersch ist.

Satz: In einem eulerschen Graphen sind alle Eckengrade geradzahlig.

Beweis: Fall 1: E ist eine isolierte Ecke. Dann gilt $\text{Grad}(E) = 0$, und 0 ist gerade.

Fall 2: E ist eine nicht isolierte Ecke. Betrachte eine eulersche Tour. Diese geht durch E . Sei n die Zahl, wie oft die Tour durch E kommt. Dann gilt $\text{Grad}(E) = 2n$, da die Tour E immer auf einer Kante erreicht und auf einer anderen Kante verlässt und beim nächsten Durchgang neue Kanten verwendet werden. \square Das selbe Argument stimmt auch, wenn E die Anfangsecke ist. Denn dann ist E auch die Endecke. Diese beiden Kanten addieren 2 zum Eckengrad von E dazu. Und für die restlichen Durchgänge gilt das Argument wie vorher. \square

Satz von Euler: Ein Graph ohne isolierte Ecke ist genau dann eulersch, wenn er zusammenhängend ist und alle Eckengrade gerade sind.

Beweis: Ist der Graph eulersch, so gilt:

- Nach dem letzten Satz sind alle Eckengrade gerade.
- Sind zwei Ecken gegeben, dann kann man von der einen Ecke aus so lange eine eulersche Tour entlanggehen, bis man bei der anderen Ecke ankommt, da keine der Ecken isoliert ist. Dann hat man einen Kantenzug gefunden, der die beiden Ecken verbindet. Also ist der Graph zusammenhängend. (Da es keine isolierten Ecken gibt, geht jede eulersche Tour durch die beiden Ecken.)

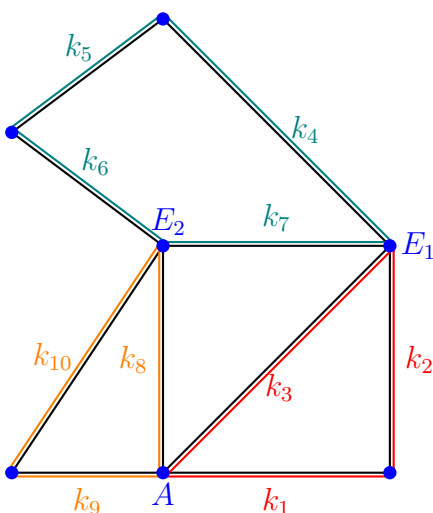
Jetzt setze voraus: Alle Eckengrade sind gerade und der Graph ist zusammenhängend.

Beweis: Es gibt eine eulersche Tour. Dazu geben wir eine Methode an, wie man in jedem solchen Graphen eine eulersche Tour findet.

Schritt 1: Wähle irgendeine Ecke A als Anfangsecke. Bilde einen Kantenzug, bis die Anfangsecke wieder erreicht ist. Dies geht, da jede andere Ecke, die man erreicht, auch wieder auf einer anderen Kante verlassen werden kann (gerader Eckengrad).

Schritt 2: Falls noch nicht alle Kanten benützt wurden, gehe auf dem bisherigen Kantenzug bis zur ersten Ecke E_1 , von der eine nicht benutzte Kante abzweigt. Da der Eckengrad eine gerade Zahl ist, müssen sogar zwei Kanten abzweigen. Gehe eine dieser Kanten entlang und bilde einen Kantenzug aus lauter noch nicht verwendeten Kanten, bis wieder E_1 erreicht wird. Füge diesen neuen Kantenzug in den alten ein.

Wiederhole nun Schritt 2 so oft, bis alle Kanten verbraucht sind. Da der Graph zusammenhängend ist, bleibt keine Kante übrig. \square



Erster Kantenzug:

$$A - k_1 - k_2 - k_3 - A$$

Erste Erweiterung:

$$A - k_1 - k_2 - E_1 - k_4 - k_5 - k_6 - k_7 - E_1 - k_3 - A$$

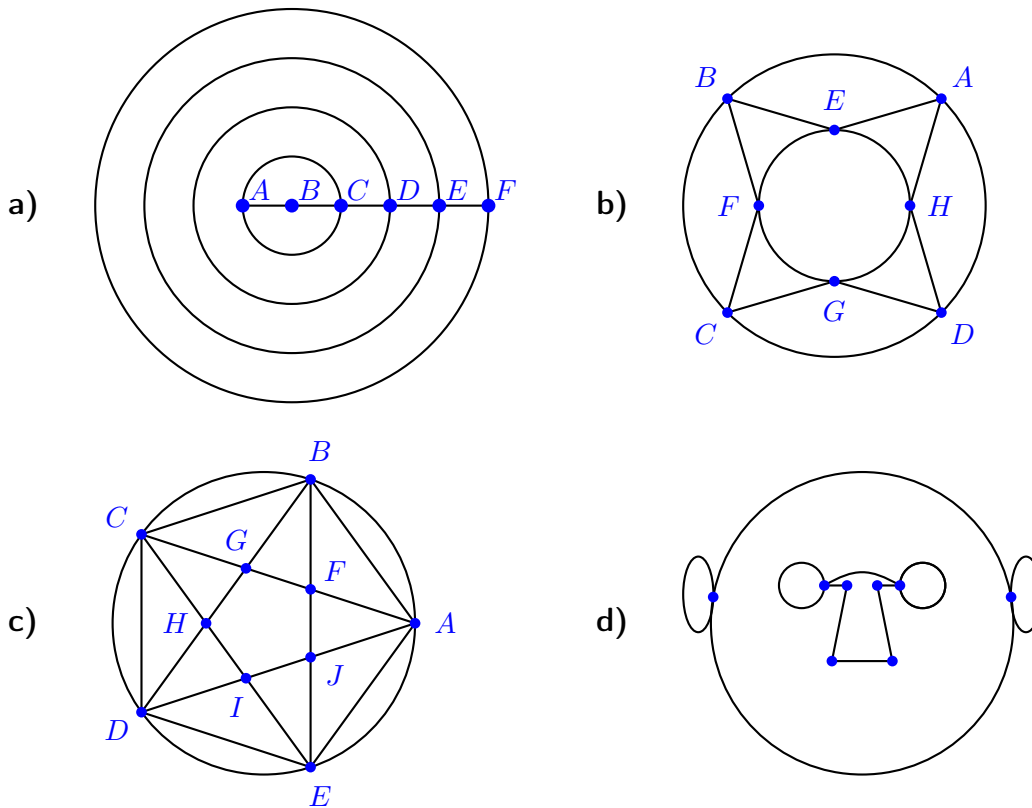
Zweite Erweiterung:

$$A - k_1 - k_2 - E_1 - k_4 - k_5 - k_6 - E_2 - k_8 - k_9 - k_{10} - E_2 - k_7 - E_1 - k_3 - A$$

Nun sind alle Kanten verbraucht und wir haben eine eulersche Tour gefunden.

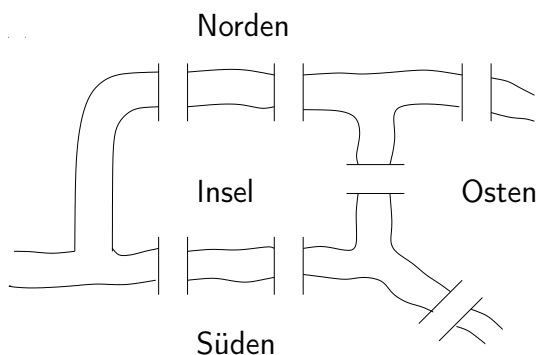
Aufgabe 7

Welcher der folgenden Graphen ist eulersch? Trage Deine Antwort in die Tabelle ein.



	eulersch	nicht eulersch weil
Graph a)		
Graph b)		
Graph c)		
Graph d)		

Aufgabe 8



Das Königsberger Brückenproblem: In Königsberg gibt es 7 Brücken über die Pregel, wie im nebenstehenden Stadtplan dargestellt. Die Frage ist nun, ob es einen Rundweg durch Königsberg gibt, so dass jede der Brücken genau ein Mal überquert wird. Zeichne einen Graphen, der zu diesem Problem passt: Die Brücken sollen als Kanten dargestellt werden, da man sie genau einmal überqueren soll. Entscheide dann, ob ein solcher Rundweg möglich ist.

4 Einfache Graphen

Definition: 1) Ein Graph heißt einfach, wenn er keine Schlingen und keine parallelen Kanten besitzt.

Aufgabe 9

- a) Ergänze den Graphen 1, so dass er einfach ist und genau vier Kanten besitzt (Lösung ist nicht eindeutig).
- b) Ergänze den Graphen 2, so dass er einfach ist und möglichst viele Kanten besitzt.



Definition: 2) Ein Graph heißt vollständiges Vieleck, wenn er einfach ist und jede Ecke mit jeder anderen durch eine Kante verbunden ist.

Aufgabe 10

- a) Zeichne ein vollständiges 6-Eck, also einen vollständigen Graphen mit 6 Ecken. Wie viele Kanten besitzt es?
- b) Wie viele Kanten besitzt ein vollständiges 10-Eck?

Aufgabe 11

Welche vollständigen n -Ecke sind eulersch?

Satz: Ein vollständiges Vieleck mit n Ecken besitzt $\frac{1}{2}n(n-1)$ Kanten.

Beweis: Jede Ecke ist mit jeder der anderen $n-1$ Ecken durch eine Kante verbunden.

$\Rightarrow \text{Grad}(E) = n-1$ für jede Ecke E im Graphen

\Rightarrow Summe der Eckengrade ist $n \cdot (n-1)$

Hierbei wird jede Kante zwei Mal gezählt

\Rightarrow der Graph besitzt $\frac{1}{2}n(n-1)$ Kanten. \square

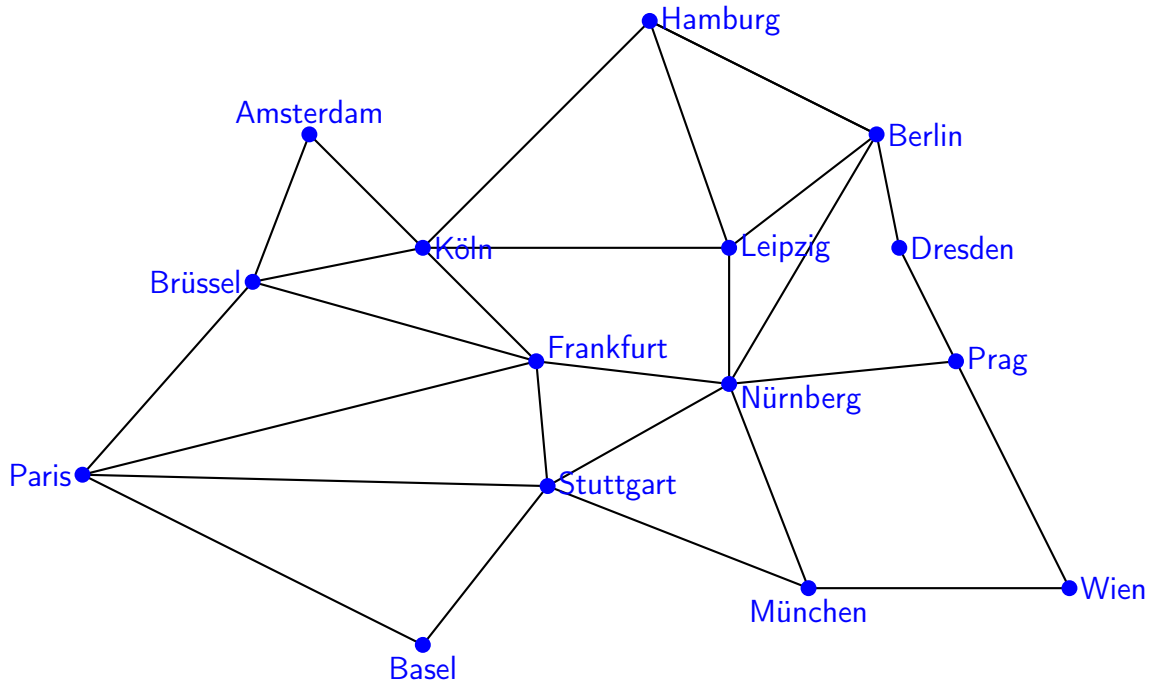
Ein vollständiges n -Eck heißt *vollständig*, weil ein einfacher Graph mit n Ecken nicht mehr Kanten besitzen kann. Daher liefert uns der letzte Satz eine Aussage über die Maximalzahl an Kanten, die ein einfacher Graph besitzen kann.

Folgerung: Ein einfacher Graph mit n Ecken besitzt höchstens $\frac{1}{2}n(n-1)$ Kanten.

5 Hamiltonsche Graphen

Aufgabe 12

Eine Freundesgruppe möchte eine Rundreise durch die in der Karte eingezeichneten Städte machen. Dabei wollen sie durch jede Stadt nur ein Mal reisen. Sie können nur die eingezeichneten Verbindungen benutzen.

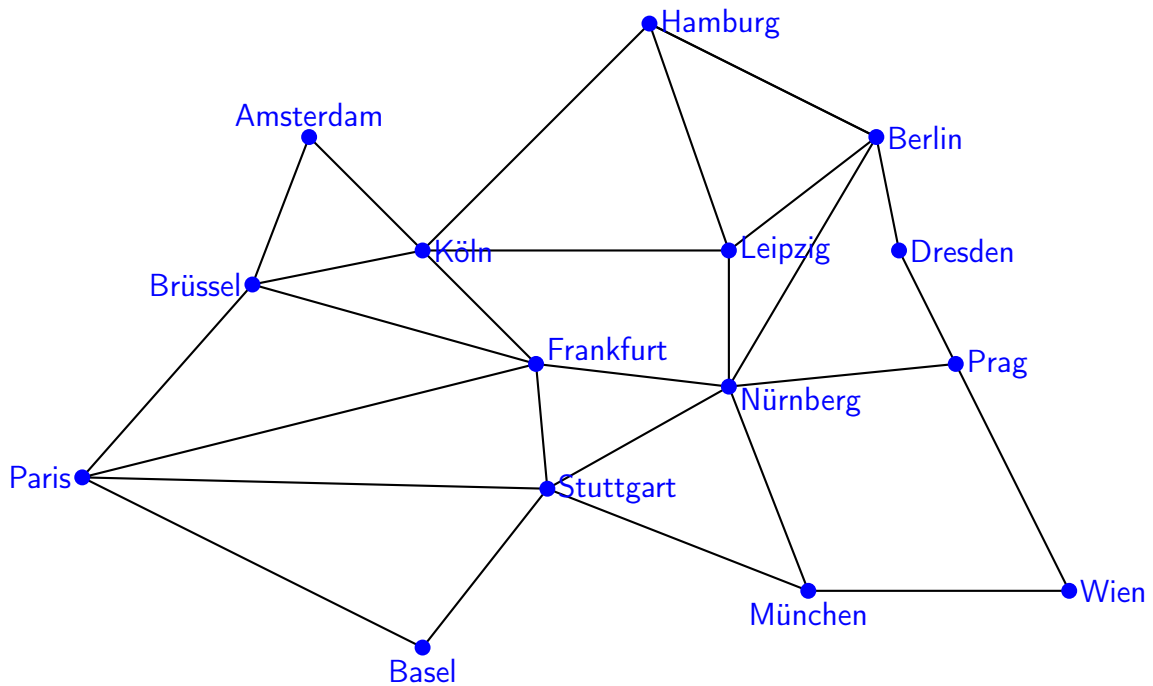


- Gib es eine Rundreise, die in Berlin startet und anschließend durch Nürnberg und dann durch Leipzig geht?
- Gibt es eine Rundreise, die in Berlin startet und anschließend durch Leipzig und dann durch Köln geht?
- Gibt es eine Rundreise, die in Stuttgart losgeht, dann nach Basel, nach Paris und anschließend nach Brüssel?
- Gibt es eine Rundreise, die in Berlin startet und anschließend nach Nürnberg und dann nach München geht?

Weiter auf nächster Seite

Aufgabe 13

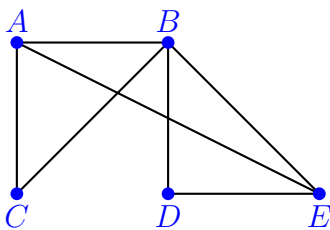
Wie viele Kanten muss man im unten stehenden Graphen mindestens ergänzen, damit der Graph eulersch wird? Zeichne diese Kanten ein.



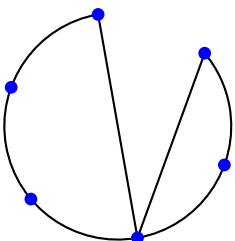
Definition: Ein geschlossener Kantenzug, der jede Ecke des Graphen genau ein Mal durchläuft und keine Kante zwei Mal benützt, heißt Hamiltonscher Kreis

Ein Graph, der einen Hamiltonschen Kreis enthält, heißt Hamiltonscher Graph.

Beispiele:



Graph 1:
Hamiltonscher Kreis:
 $A - C - B - D - E - A$
 \Rightarrow hamiltonsch



Graph 2: nicht hamiltonsch

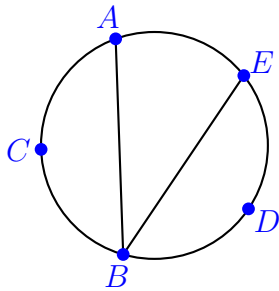
Um nachzuweisen, dass ein Graph hamiltonsch ist, reicht es, einen Hamiltonkreis anzugeben. Schwieriger ist der Nachweis, dass ein Graph nicht hamiltonsch ist. Bei Graph 2 sieht man, dass jeder Hamiltonkreis durch die unterste Ecke kommen muss und dann ein zweites Mal durch diese Ecke gehen müsste, was nicht erlaubt ist.

Bei einem Hamiltonkreis muss jede Ecke genau einmal durchlaufen werden im Unterschied zur eulerschen Tour, bei der jede Kante genau einmal benützt werden muss.

Erinnerung: Zwei Graphen sind isomorph, wenn sie die selbe Tabelle besitzen (bei geeigneter Bezeichnung ihrer Ecken). Oder wenn der eine Graph so verbogen werden kann, dass der andere entsteht.

Satz: Jeder hamiltonsche Graph ist isomorph zu einem Graphen, dessen Ecken auf einem Kreis liegen, und der die Kreislinie als Kantenzug enthält.

Beispiel:

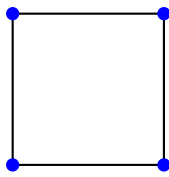


Graph 3: isomorph zu Graph 1

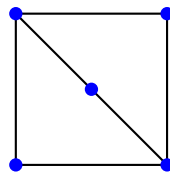
Man erhält den Graphen 3, indem man den hamiltonschen Kreis des Graphen 1 entlang geht und die Ecken in dieser Reihenfolge auf einem Kreis einzeichnet. Anschließend ergänzt man weitere Kanten, bis es zu jeder Kante des Graphen 1 eine Entsprechung im Graphen 3 gibt.

Aufgabe 14

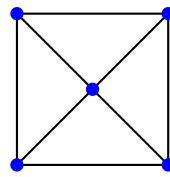
Untersuche, welcher der folgenden Graphen eulersch oder hamiltonsch ist. Trage in die Tabelle „j“ für ja, „n“ für nein ein.



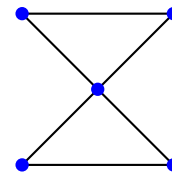
Graph 1



Graph 2



Graph 3



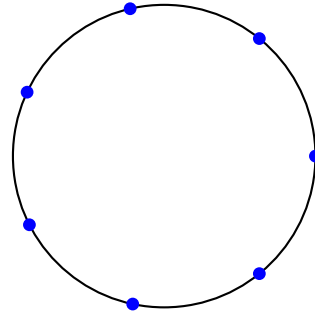
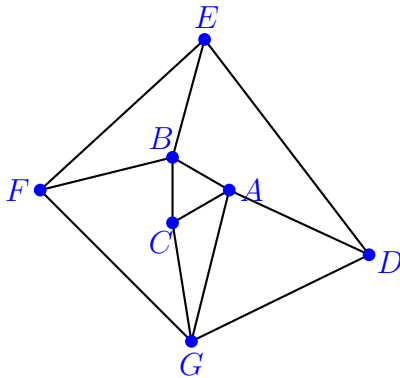
Graph 4

	Graph 1	Graph 2	Graph 3	Graph 4
ist eulersch				
ist hamiltonsch				

Weiter auf nächster Seite

Aufgabe 15

Gegeben sind die folgenden zwei Graphen.



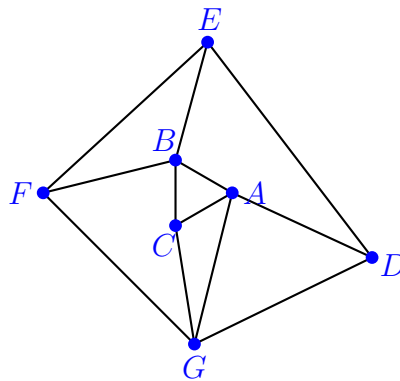
- a) Finde im linken Graphen einen hamiltonschen Kreis.

Hamiltonscher Kreis:

- b) Zeichne im rechten Graphen geeignete Bezeichnungen für die Ecken und weitere Kanten ein, so dass der fertige Graph isomorph zum linken Graphen ist.

Aufgabe 16

Gegeben ist nochmals der Graph aus der letzten Aufgabe.

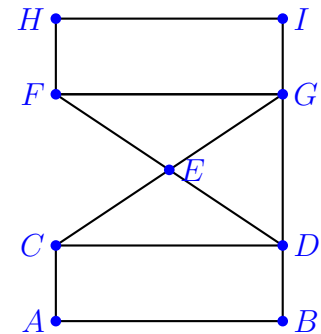


Gib möglichst viele verschiedene hamiltonsche Kreise des Graphen an. Hierbei bedeutet *verschieden*, dass die Reihenfolge unterschiedlich ist und nicht nur der Anfangspunkt im Kreis verschoben wurde.

Weiter auf nächster Seite

Aufgabe 17

Gegeben ist der nebenstehende einfache Graph.



- a) Gib einen Kantenzug an, der A und F verbindet.

Antwort:

- b) Warum ist der Graph hamiltonsch?

Antwort:

- c) Gib einen geschlossenen Kantenzug an, der durch alle Ecken des Graphen verläuft, keine Kante zwei Mal benützt und trotzdem kein hamiltonscher Kreis ist.

Antwort:

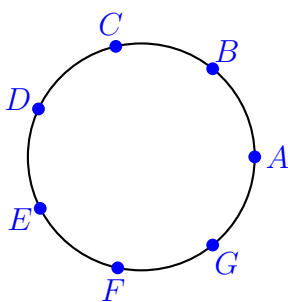
Es ist nicht immer einfach, einen hamiltonschen Kreis zu finden. Aber der folgende Satz besagt, dass ein Graph hamiltonsch ist, wenn er genügend viele Kanten besitzt.

Satz von Dirac: Ein Graph mit $n \geq 3$ Ecken, der einfach und zusammenhängend ist und bei dem $\text{Grad}(E) \geq \frac{n}{2}$ für jede Ecke E gilt, ist hamiltonsch.

Ohne Beweis. Wir benötigen diesen Satz im Weiteren nicht.

Dieser Satz gibt eine hinreichende Bedingung an. Wenn die Voraussetzungen des Satzes ($n \geq 3$, Graph einfach und zusammenhängend, $\text{Grad}(E) \geq \frac{n}{2}$ für jede Ecke E) erfüllt sind, dann ist der Graph hamiltonsch. Es gibt jedoch hamiltonsche Graphen, die nicht alle Voraussetzungen des Satzes erfüllen.

Beispiel: Hamiltonscher Graph mit 7 Ecken und möglichst wenig Kanten



Graph 1

Wir sehen: Jeder Eckengrad ist 2, und das ist kleiner als $\frac{7}{2}$.

Im Folgenden werden verschiedene Eigenschaften hamiltonscher Graphen zusammengestellt. Ist eine dieser Eigenschaften nicht erfüllt, dann ist der Graph nicht hamiltonsch.

- Satz: 1) Ein hamiltonscher Graph ist zusammenhängend.
 2) Für jede Ecke E in einem hamiltonschen Graphen gilt $\text{Grad}(E) \geq 2$.

Beweis: 1) Seien E, E' zwei beliebige Ecken des Graphen. Da sie auf einem hamiltonschen Kreis liegen, gibt es einen Kantenzug, der die beiden Ecken verbindet.

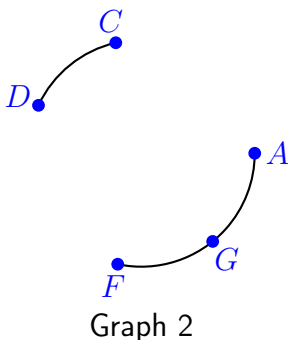
2) E liegt auf einem hamiltonschen Kreis, also folgt $\text{Grad}(E) \geq 2$. \square

Umgekehrt bedeutet dieser Satz: Ist ein Graph nicht zusammenhängend, so ist er nicht hamiltonsch. Oder gibt es eine Ecke E mit $\text{Grad}(E) \leq 1$, so ist der Graph nicht hamiltonsch.

Die beiden Eigenschaften dieses Satzes sind nicht sehr kraftvoll. Um bessere Kriterien dafür zu formulieren, dass ein Graph nicht hamiltonsch ist, müssen wir den Begriff *Löschen von Ecken* definieren.

- Definition: 1) Sei E eine Ecke in einem Graphen. E wird aus dem Graphen gelöscht, indem man E und alle Kanten, die E mit sich oder anderen Ecken verbinden, aus dem Graphen entfernt.
 2) Ein Graph H heißt Teilgraph eines Graphen G , wenn alle Ecken und Kanten von H auch Ecken und Kanten von G sind.

Beispiel: Lösche aus Graph 1 die Ecken B und E .



Graph 2 ist ein Teilgraph von Graph 1. Graph 2 besteht aus zwei Teilgraphen, die jeder für sich zusammenhängend sind.

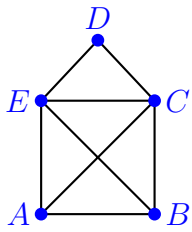
Wir definieren nun einen Fachbegriff, mit dem beschrieben werden kann, dass Graph 2 aus zwei „Teilen“ besteht.

Definition: Die maximal großen zusammenhängenden Teilgraphen eines Graphen heißen die Komponenten des Graphen. Ist ein Graph zusammenhängend, so besteht er aus einer Komponente.

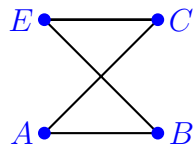
Graph 2 besteht also aus zwei Komponenten, Graph 1 aus einer.

Aufgabe 18

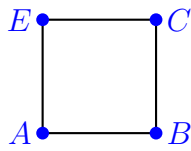
Welcher der Graphen ist Teilgraph von einem oder von mehreren der skizzierten Graphen? Trage Deine Antworten in die Tabelle ein. Überlege Dir, ob ein Graph Teilgraph von sich selber sein kann (eventuell Definition nachsehen).



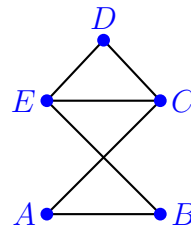
Graph 1



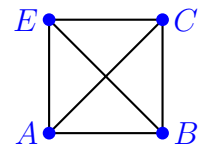
Graph 2



Graph 3



Graph 4



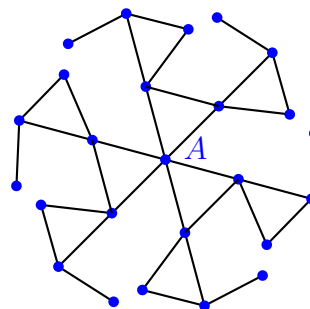
Graph 5

Graph 1 ist Teilgraph des Graphen	
Graph 2 ist Teilgraph des Graphen	
Graph 3 ist Teilgraph des Graphen	
Graph 4 ist Teilgraph des Graphen	
Graph 5 ist Teilgraph des Graphen	

Aufgabe 19

In wie viele Komponenten zerfällt nebenstehender Graph, wenn die Ecke A gelöscht wird?

Antwort: In Komponenten



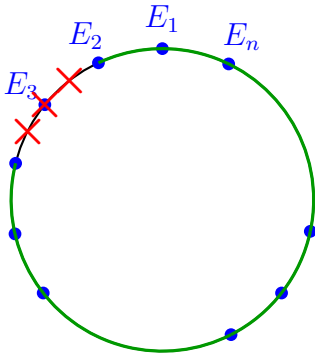
Wir sehen oben, dass der hamiltonsche Graph 1 nach dem Löschen zweier Ecken in zwei Komponenten zerfällt. Der folgende Satz beschreibt dies allgemeiner.

Satz: In einem hamiltonschen Graphen mit n Ecken gelten:

- 1) Löscht man eine Ecke, so ist der entstehende Teilgraph zusammenhängend.
- 2) Löscht man zwei Ecken, so zerfällt der entstehende Teilgraph in höchstens zwei Komponenten.
- 3) Löscht man m Ecken ($m < n$), so zerfällt der entstehende Teilgraph in höchstens m Komponenten.

Zur Veranschaulichung der Beweisidee verwenden wir einen hamiltonschen Graphen mit möglichst wenig Kanten.

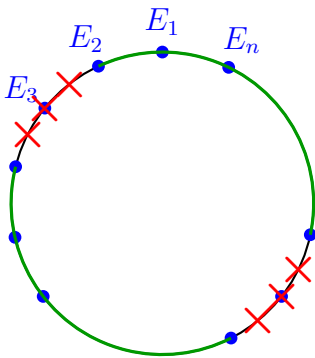
Beweisidee für den Satz über Eckenlöcher in hamiltonschen Graphen:



Löschen **einer** Ecke:

Der entstehende Graph

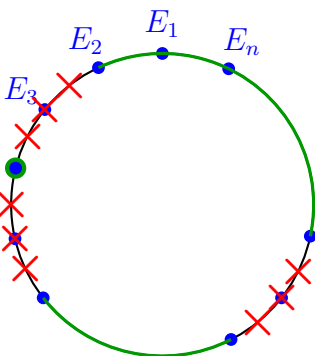
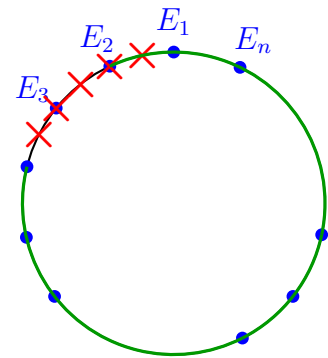
ist **zusammenhängend**



Löschen von **zwei** Ecken:

Der entstehende Graph

zerfällt in **zwei** Komponenten
oder **bleibt zusammenhängend**



Löschen von **drei** Ecken:

Der entstehende Graph

zerfällt in **drei** Komponenten
oder **zerfällt in zwei** Komponenten
oder **bleibt zusammenhängend**

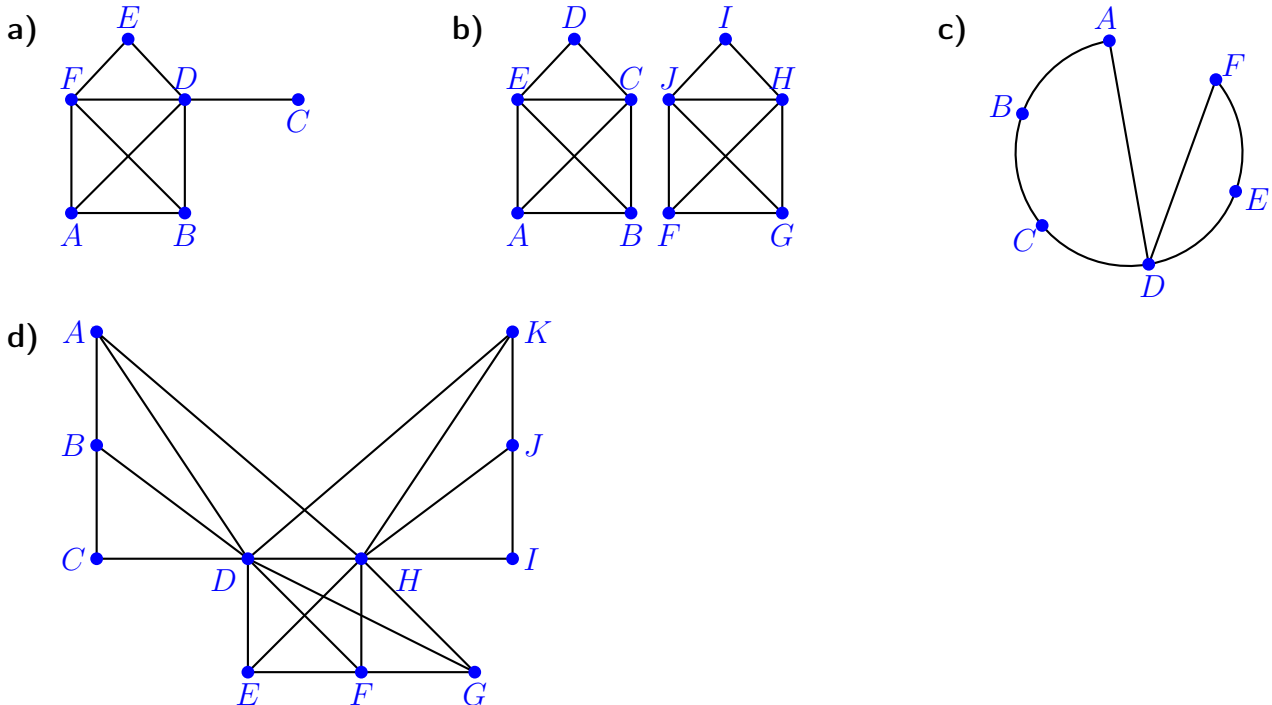
Wir sehen, dass beim Löschen einer Ecke höchstens eine Komponente in zwei Komponenten aufgeteilt werden kann. Beim Löschen einer Ecke erhöht sich also die Anzahl der Komponenten höchstens um 1. Damit folgt die Aussage des Satzes. \square

Wenn der Graph mehr Kanten besitzt, dann zerfällt er beim Löschen von Ecken eventuell in weniger Komponenten. Aber er zerfällt sicher nicht in mehr Komponenten.

Umgekehrt bedeutet dieser Satz z.B.: Zerfällt ein Graph nach dem Löschen von 2 Ecken in drei Komponenten (wie in der letzten Aufgabe), dann ist er nicht hamiltonsch.

Aufgabe 20

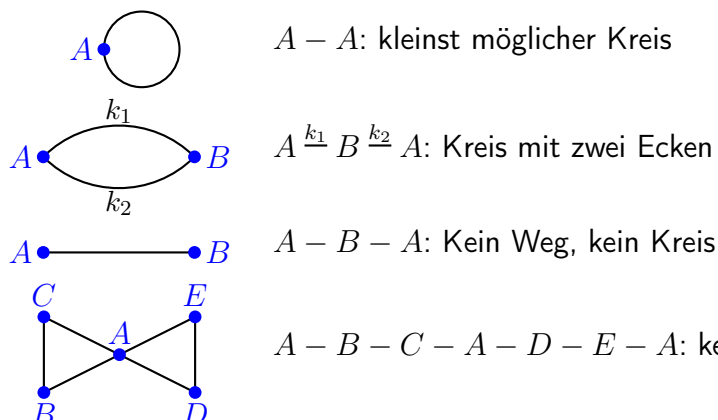
Gib für jeden der Graphen unter Verwendung eines der letzten beiden Sätze eine Begründung dafür an, dass er nicht hamiltonsch ist.

**6 Wege und Kreise**

Definition: Ein Kantenzug heißt Weg, wenn er jede Ecke des Graphen höchstens ein Mal durchläuft und jede Kante höchstens ein Mal benützt. Anfangs- und End-Ecke dürfen übereinstimmen (diese Ecke wird auch nur ein Mal durchlaufen).

Definition: Ein Kreis ist ein Weg, der geschlossen ist.

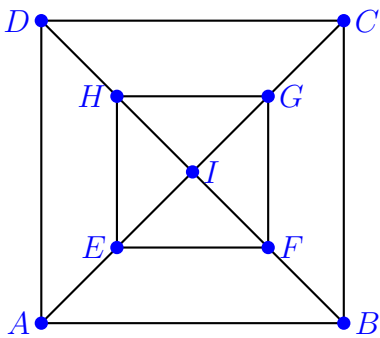
Beispiele:



Beachte: Jeder hamiltonsche Kreis ist ein Kreis, aber nicht umgekehrt.

Aufgabe 21

Gib im folgenden Graphen einen hamiltonschen Kreis und drei verschiedene nicht hamiltonsche Kreise an.



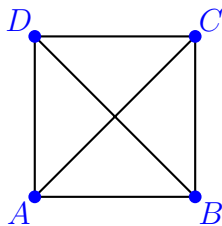
Hamiltonscher Kreis:

Nicht hamiltonsche Kreise:

Aufgabe 22

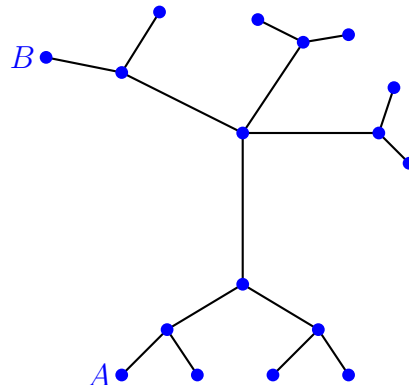
Wie viele verschiedene Wege gibt es jeweils, die A und B verbinden?

a)



Antwort: Es gibt Weg(e)

b)



Antwort: Es gibt Weg(e)

7 Bäume

Definition: Ein Graph, der zusammenhängend ist und keinen Kreis enthält, heißt Baum

Folgerung: Ein Baum enthält keine Schlingen und keine parallelen Kanten.

Warum ergibt sich die Folgerung direkt aus dem Beweis?

Satz: In einem Baum gibt es von jeder Ecke zu jeder anderen Ecke genau einen Weg.

Beweis: Betrachte einen Baum.

1) Da der Baum zusammenhängend ist, gibt es von jeder Ecke zu jeder anderen mindestens einen Weg.

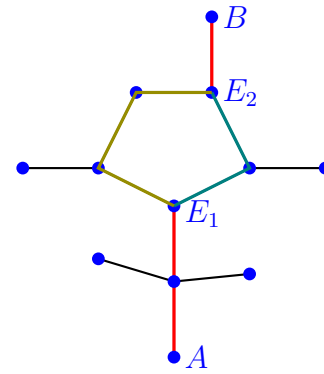
2) Nun beweisen wir, dass es von jeder Ecke zu jeder anderen höchstens einen Weg gibt. Dazu führen wir einen Widerspruchsbeweis.

Annahme: Es gibt im Baum zwei Ecken A und B , so dass mindestens zwei verschiedene Wege von A nach B existieren.

Wir gehen von A aus beide Wege so lange entlang, bis wir die erste Ecke erreicht haben, bei der sich die Wege trennen. Diese nennen wir E_1 . Falls sich die Wege bereits in der ersten Kante unterscheiden, nennen wir A um in E_1 . Dann gehen wir beide Wege so lange entlang, bis wir auf der ersten Ecke stoßen, die sie wieder gemeinsam haben. Wir nennen diese Ecke E_2 .

⇒ Der zusammengesetzte Weg von E_1 nach E_2 entlang des einen Weges und von E_2 nach E_1 entlang des anderen Weges ist ein Kreis.

Also gibt es im Baum einen Kreis ⚡



Also war die Annahme falsch, und für beliebige Ecken A, B gibt es nicht mehr als einen Weg von A nach B . □

Aufgabe 23

Zeichne jeweils einen Graphen, der ein Baum ist und die angegebenen Eigenschaften besitzt.

- Der Baum besitzt 7 Ecken und eine davon hat Eckengrad 5.
- Der Baum besitzt 10 Ecken und zwei davon haben Eckengrad 5.

Aufgabe 24

- Zeichne einen einfachen Graphen mit 8 Ecken und 8 Kanten, der hamiltonsch ist und nach Löschen einer Ecke ein Baum ist.
- Zeichne einen einfachen Graphen mit 8 Ecken und 13 Kanten, der hamiltonsch ist und nach Löschen einer Ecke ein Baum ist.

Wir beginnen mit der Umkehrung zum letzten Satz der vorigen Einheit.

Beginn
Online-
Einheit 4

Umkehrsatz: Gibt es in einem Graphen von jeder Ecke zu jeder anderen Ecke genau einen Weg, und enthält der Graph keine Schlinge, dann ist dieser Graph ein Baum.

Beweis: Der Graph ist zusammenhängend, da es von jeder Ecke zu jeder anderen einen Weg gibt.

Der Graph enthält keinen Kreis mit 1 Ecke, da er keine Schlinge besitzt.

Er enthält auch keinen Kreis mit mindestens 2 Ecken, denn andernfalls gäbe es zu zwei verschiedenen Ecken dieses Kreises zwei verschiedene Wege, die sie verbinden.

⇒ der Graph ist ein Baum. □

Aufgabe 25

Skizziere Bäume mit 6 Ecken und den jeweils angegebenen Eigenschaften. Wie viele Kanten haben die Bäume?

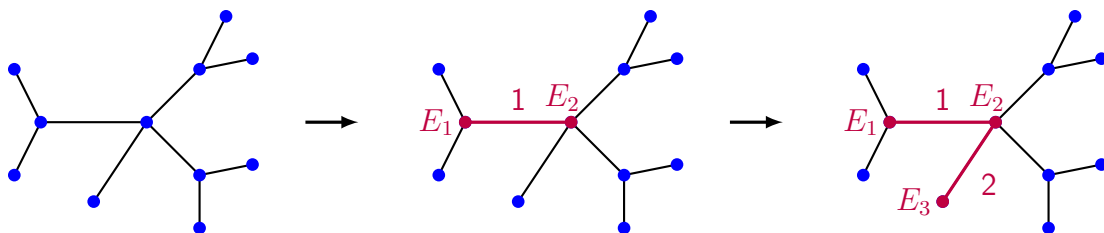
- Der Baum hat genau zwei Ecken mit Eckengrad 1,
- Der Baum hat genau drei Ecken mit Eckengrad 1,
- Der Baum hat genau vier Ecken mit Eckengrad 1,
- Der Baum hat genau fünf Ecken mit Eckengrad 1.

Ein Baum mit sechs Ecken hat offensichtlich immer gleich viele Kanten. Der folgende Satz verallgemeinert diese Aussage.

Satz: Ein Baum mit n Ecken besitzt genau $n - 1$ Kanten

Beweis: Es sei ein Graph mit n Ecken gegeben. Wir färben seine Ecken und Kanten, während wir sie zählen.

- Wähle eine beliebige Ecke E_1 und färbe sie.
- Wähle eine beliebige Kante, die E_1 mit einer Ecke E_2 verbindet. Da keine Schlinge erlaubt ist, folgt $E_1 \neq E_2$. Färbe die gewählte Kante und E_1 . **Bisher gezählt: 2 Ecken und 1 Kante.**
- Wähle eine noch nicht gefärbte Kante, die E_1 oder E_2 mit einer Ecke E_3 verbindet. Da der Baum keinen Kreis enthält, gilt $E_3 \neq E_2$ und $E_3 \neq E_1$. Färbe die neue Kante und E_3 . **Bisher gezählt: 3 Ecken und 2 Kanten.**



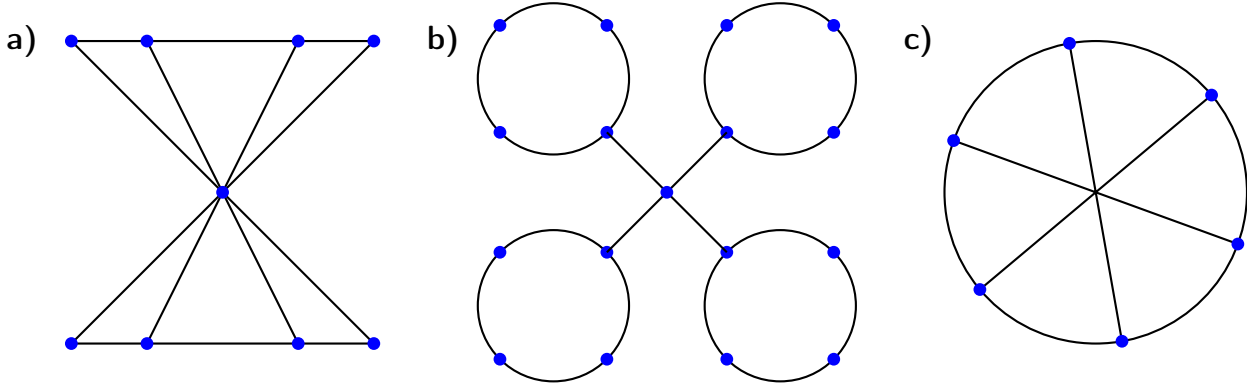
Setze entsprechend fort: In jedem Schritt wird eine neue Kante gefärbt, die eine der bereits gefärbten Ecken mit einer Ecke verbindet. Diese Ecke ist noch nicht gefärbt, da es im Baum keinen Kreis gibt, und wird jetzt gefärbt. Es kommt 1 Kante und 1 Ecke dazu.

Mit dieser Methode wird jede Ecke des Baumes gefärbt, da er zusammenhängend ist.

Nach n Schritten haben wir n Ecken und $n - 1$ Kanten gezählt. Der Graph besitzt keine weiteren Kanten, denn jede weitere Kante müsste eine der bereits gefärbten Ecken mit einer neuen Ecke verbinden. Weitere Ecken besitzt der Graph nicht, also haben wir alle Ecken und Kanten des Graphen gezählt. \square

Aufgabe 26

Streiche in den angegebenen Graphen jeweils so viele Kanten, dass der entstehende Teilgraph ein Baum ist und alle Ecken des gegebenen Graphen enthält.



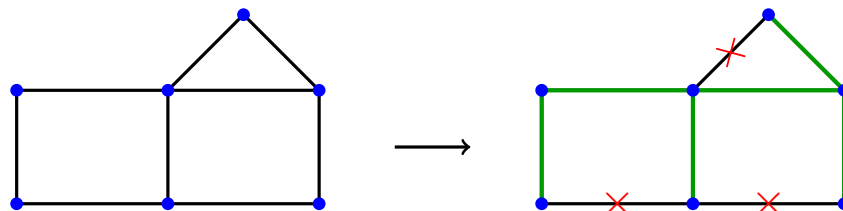
Definition: Ist ein Teilgraph eines Graphen ein Baum, der alle Ecken des Graphen enthält, so heißt er aufspannender Baum des Graphen.

Satz: Jeder zusammenhängende Graph besitzt einen aufspannenden Baum.

Beweis: Sei ein zusammenhängender Graph gegeben. Wenn er keinen Kreis enthält, ist er ein Baum und sein eigener aufspannender Baum.

Enthält er einen Kreis, so entferne eine Kante des Kreises aus dem Graphen. Der entstehende Teilgraph ist weiterhin zusammenhängend, da der Kreis zusammenhängend bleibt. Wiederhole diesen Schritt so oft, bis der entstehende Teilgraph keinen Kreis mehr enthält. Dieser ist ein aufspannender Baum des Graphen. \square

Veranschaulichung:



Folgerung: Jeder zusammenhängende Graph mit n Ecken besitzt mindestens $n - 1$ Kanten.

Beweis: Der Graph besitzt einen aufspannenden Baum mit n Ecken. Dieser hat $n - 1$ Kanten, die alle im Graphen enthalten sind. \square

Folgerung: Entfernt man aus einem Baum eine Kante, so ist er nicht mehr zusammenhängend.

Beweis: Betrachte einen Baum mit n Ecken. Er hat $n - 1$ Kanten. Entfernt man eine Kante, so hat der entstehende Teilgraph n Ecken und $n - 2$ Kanten. Der Teilgraph kann nicht zusammenhängend sein, denn sonst müsste er mindestens $n - 1$ Kanten besitzen. \square

Folgerung: Besitzt ein zusammenhängender Graph mit n Ecken genau $n - 1$ Kanten, so ist der Graph ein Baum.

Beweis: Sei ein zusammenhängender Graph mit n Ecken und $n - 1$ Kanten gegeben.

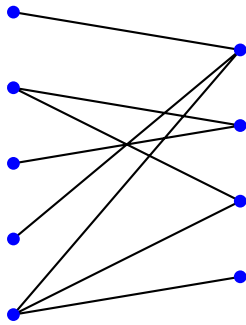
Letzter Satz \Rightarrow Er enthält einen aufspannenden Baum. Dieser hat $n - 1$ Kanten.

\Rightarrow Der Graph ist gleich seinem aufspannenden Baum, ist also selber ein Baum. \square

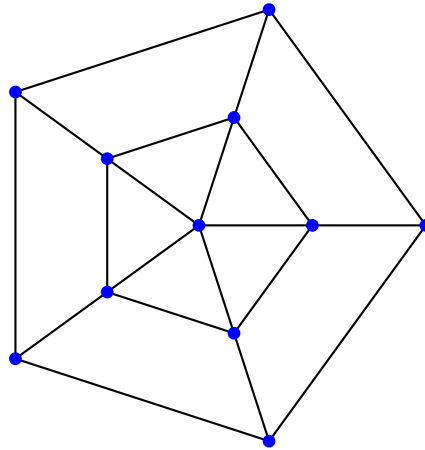
Aufgabe 27

Zeichne in die beiden Graphen jeweils einen aufspannenden Baum ein.

a)



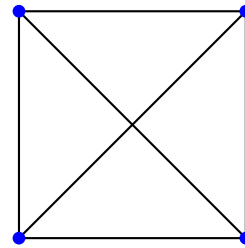
b)



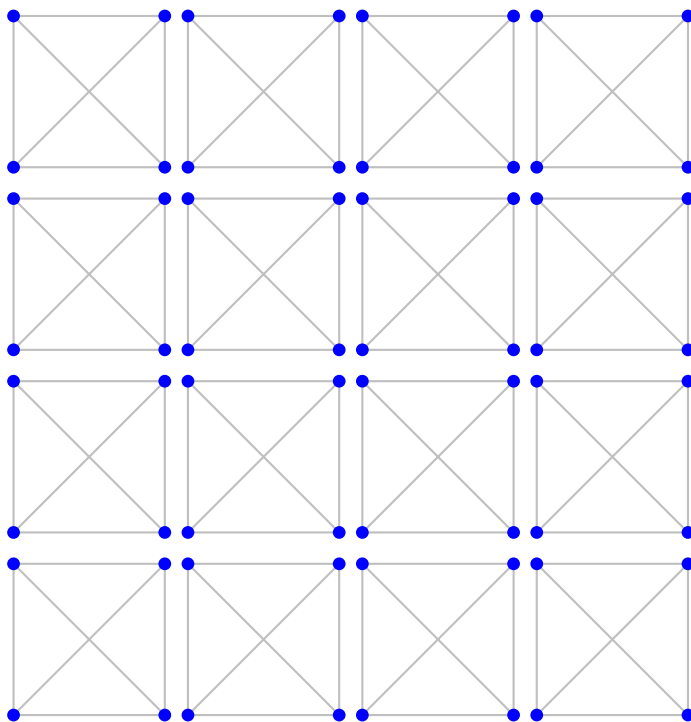
Aufgabe 28

Gegeben ist ein vollständiges Viereck.

- a) Der Graph besitzt 16 verschiedene aufspannende Bäume. Skizziere sie.
- b) Wie viele nicht zueinander isomorphe aufspannende Bäume gibt es? Skizziere alle nicht zueinander isomorphen aufspannenden Bäume.



Lösung zu a):



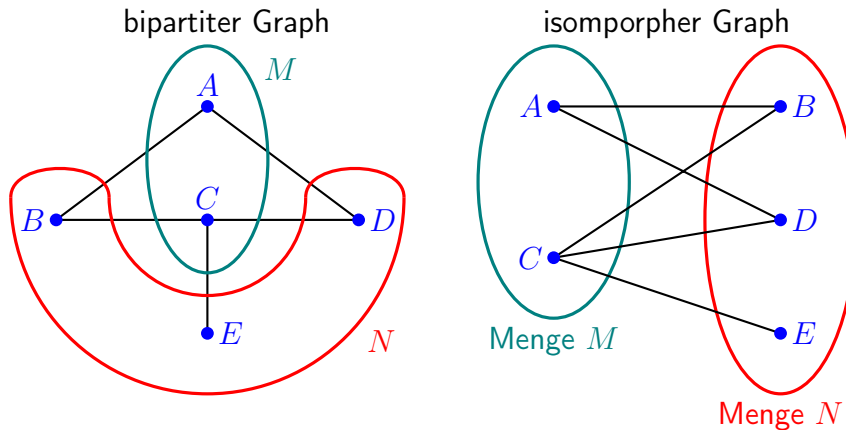
Lösung zu b):

8 Bipartite Graphen

Definition: 1) In einem Graphen heißen zwei Ecken benachbart, falls sie durch mindestens eine Kante verbunden sind.

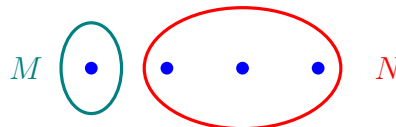
2) Ein einfacher Graph heißt bipartit, wenn die Menge seiner Ecken in zwei nichtleere Teilmengen M und N aufgeteilt werden kann, so dass nur Ecken aus verschiedenen Mengen benachbart sind. Kanten, die zwei Ecken derselben Teilmenge verbinden, gibt es nicht.

Beispiel:



Bemerkungen: 1) Ein bipartiter Graph besitzt mindestens zwei Ecken, denn sowohl in M als auch in N muss mindestens eine Ecke enthalten sein.

2) Ein Graph ohne Kanten mit mindestens zwei Ecken ist bipartit (aber langweilig).



3) Ein bipartiter Graph enthält keine Schlinge, denn jede Ecke mit einer Schlinge ist zu sich selbst benachbart.

4) Sind zwei Graphen isomorph, so sind entweder beide bipartit oder beide nicht bipartit.

Die Färbemethode:

Gegeben: Ein zusammenhängender Graph mit mindestens zwei Ecken.

Ziel: Entscheide, ob dieser Graph bipartit ist.

Vorgehen: 1) Wähle eine Ecke des Graphen und färbe sie grün.

2) Färbe alle ihre Nachbarn rot.

3) Färbe deren benachbarte Ecken wieder grün, usw.

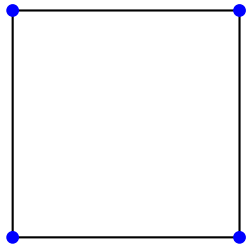
Ergeben sich gleichfarbige benachbarte Ecken, so ist der Graph nicht bipartit.

Gelingt es, alle Ecken so zu färben, dass benachbarte Ecken verschieden gefärbt sind, dann ist der Graph bipartit. Die grünen Ecken bilden die Menge M , die roten die Menge N .

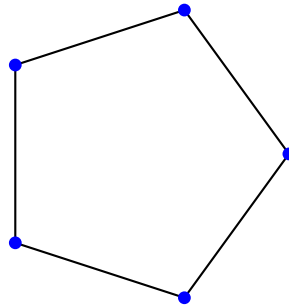
Aufgabe 29

Stelle mit Hilfe der Färbemethode fest, ob die Graphen bipartit sind oder nicht. Trage in die Tabelle J für Ja, N für Nein ein.

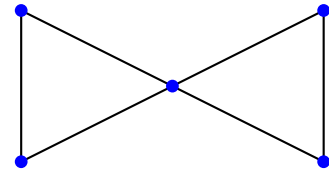
Graph 1:



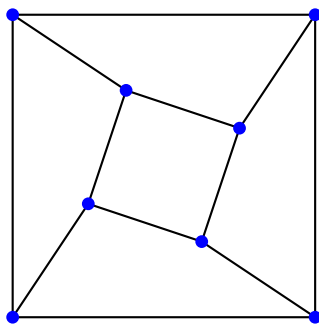
Graph 2:



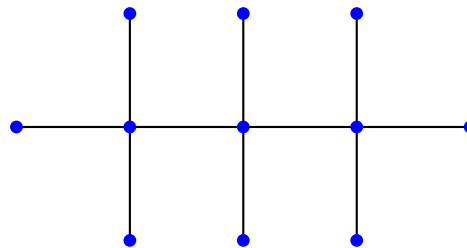
Graph 3:



Graph 4:



Graph 5:



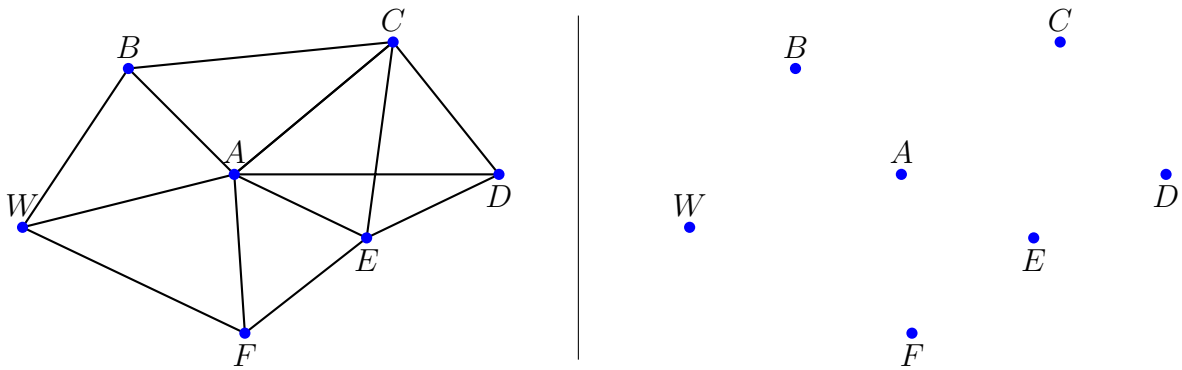
Graph	Graph 1	Graph 2	Graph 3	Graph 4	Graph 5
ist bipartit					

Weiter auf nächster Seite

Diese Einheit startet mit einer Aufgabe.

Aufgabe 30

- a) Neben einem kleinen Bergdorf wurde ein Wasserwerk W zur Versorgung der Häuser A, \dots, F gebaut. In der Graphik unten links siehst Du die Häuser und die möglichen Wasserleitungen. Aus Kostengründen sollen möglichst wenig Leitungen gebaut werden. Streiche aus dem Graphen möglichst viele Kanten, so dass noch alle Häuser mit Wasser versorgt werden können. Zeichne dann die Kanten des entstehenden Teilgraphen rechts ein.



- b) Wie heißt die Eigenschaft eines Graphen, die in unserem Beispiel garantiert, dass jedes Haus mit Wasser versorgt wird?

Antwort: Der Graph ist .

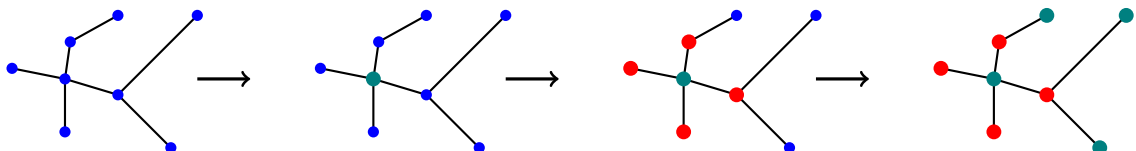
- c) Wie heißt der Teilgraph, den Du im Aufgabenteil a) gezeichnet hast, in Bezug auf den ursprünglichen Graphen?

Antwort:
Der Teilgraph ist ein des linken Graphen.

- d) Die Wasserleitungsfirma hat nun Rohre geliefert, die zwei verschiedene Enden haben. Am einen Ende Anschlussyp 1, am anderen den Anschlussyp 2. Das bedeutet, dass nur Häuser mit verschiedenen Anschlüssen verbunden werden können. Außerdem ist vorgegeben, dass in jedem Haus nur einer der beiden Anschlusstypen verbaut werden kann. Zeige, dass die Wasserversorgung mit diesen Vorgaben gebaut werden kann. Färbe dazu die Häuser grün, die den Anschlussyp 1 haben, und die anderen mit rot. Beachte, dass auch das Wasserwerk nur einen Anschlusstyp besitzen darf.

Satz: Jeder Baum mit mindestens zwei Ecken ist bipartit.

Beweisidee:



Beweis: Betrachte einen beliebigen Baum mit mindestens zwei Ecken.

Färbe eine beliebige Ecke grün. Laufe von dieser Ecke aus den Baum entlang und färbe die Ecken abwechselnd rot und grün.

Man erreicht jede Ecke, da der Baum zusammenhängend ist.

Jede Ecke wird nur über einen Weg erreicht. Daher treten keine Konflikte auf.

⇒ Der Baum ist bipartit.

Wann sind Graphen, die nur aus Ecken auf einem Kreis bestehen, bipartit?

Wir untersuchen folgende Fragestellung: Für welche natürlichen Zahlen n ist ein Graph, der nur aus n Ecken auf einem Kreis besteht, bipartit?

Schritt 1: Untersuche Beispiele für „kleine“ n von 2 bis 7.

n	2	3	4
Graph			
bipartit?			
n	5	6	7
Graph			
bipartit?			

Schritt 2: Stelle eine Vermutung auf, wie die obige Frage beantwortet werden kann.

Vermutung:

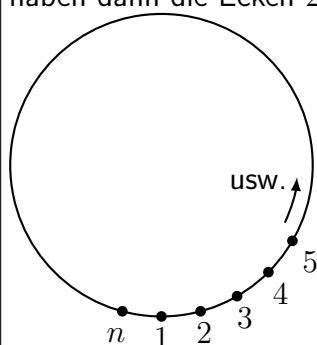
Gegeben ist ein Graph, der nur aus n Ecken auf einem Kreis besteht.

Falls n eine Zahl ist, dann ist der Graph bipartit.

Falls n eine Zahl ist, dann ist der Graph nicht bipartit.

Schritt 3: Beweise deine Vermutung durch geeignetes Färben der Ecken.

Die Ecken benennen wir hierzu gegen den Uhrzeigersinn mit den Zahlen 1 bis n . Beginne nun mit dem Färben, indem du Ecke 1 grün färbst und gegen den Uhrzeigersinn fortfährst. Welche Farbe haben dann die Ecken 2, 3, 4 usw.?



Für die Ecke mit der Nummer k ergibt sich folgender Zusammenhang:

Falls k eine Zahl ist, dann ist die Ecke k grün.

Falls k eine Zahl ist, dann ist die Ecke k rot.

Weiter auf nächster Seite

Zwischen welchen beiden benachbarten Ecken kann überhaupt ein Konflikt bei der Färbung auftreten?
 Zwischen der Ecke mit der Nummer und der Ecke mit der Nummer .

Falls n ist, sind beide Ecken unterschiedlich gefärbt, und es gibt keinen Konflikt.
 In diesem Fall ist der Graph bipartit.

Falls n ist, sind beide Ecken gleich gefärbt, und es gibt einen Konflikt. In diesem Fall ist der Graph nicht bipartit.

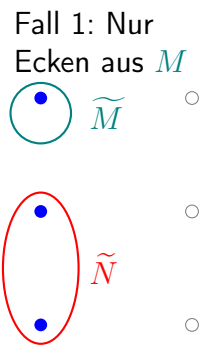
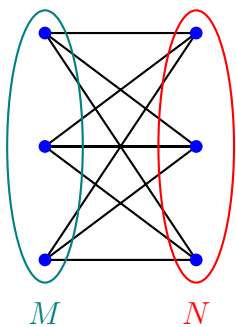
Damit hast Du den folgenden Satz bewiesen.

Satz: Ein Graph mit n Ecken, der nur aus einem Kreis besteht, ist genau dann bipartit, wenn n gerade ist.

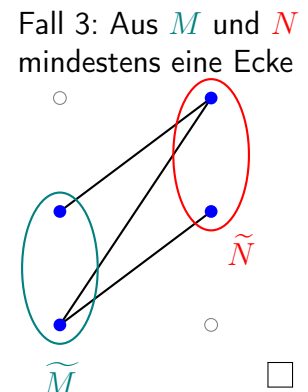
Satz: Jeder Teilgraph eines bipartiten Graphen, der mindestens zwei Ecken enthält, ist bipartit.

Beweis:

bipartiter Graph:



Fall 2: Nur Ecken aus N
Analog



In den Fällen 1 und 2 kann man die Ecken beliebig auf die Mengen \tilde{M} und \tilde{N} verteilen.

Im Fall 3 enthält die Menge \tilde{M} alle Ecken von M , die im Teilgraphen enthalten sind, und die Menge \tilde{N} alle Ecken von N , die im Teilgraphen enthalten sind. \square

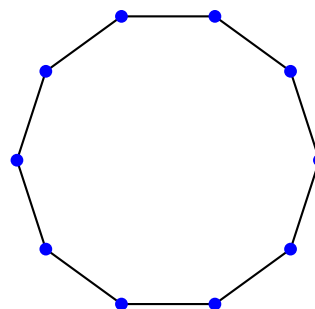
Wir formulieren diesen Satz um, damit wir ihn besser benutzen können.

Folgerung: Enthält ein Graph einen Teilgraphen mit mindestens zwei Ecken, der nicht bipartit ist, dann ist der Graph auch nicht bipartit.

Spezialfall: Enthält ein Graph einen Kreis mit einer ungeraden Anzahl von Ecken, so ist er nicht bipartit.

Aufgabe 31

Gegeben ist der nebenstehende bipartite Graph. Ergänze eine Kante, so dass der Graph nicht mehr bipartit ist.



Satz: Ein einfacher Graph mit mindestens zwei Ecken ist genau dann bipartit, wenn er keinen Kreis mit ungerader Eckenzahl enthält.

Beweis: Aus Spezialfall: Ist ein Graph bipartit, so enthält er keinen Kreis mit ungerader Eckenzahl.

Betrachte einen einfachen Graphen, der keinen Kreis mit ungerader Eckenzahl enthält. Zeige: Der Graph ist bipartit.

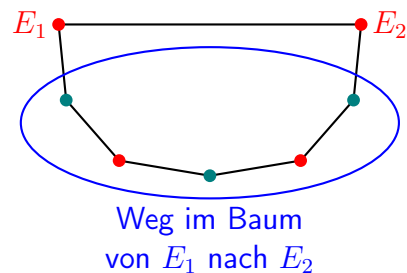
Wir nehmen an, dass der Graph zusammenhängend ist.

Schritt 1: Konstruiere einen aufspannenden Baum. Der Baum ist bipartit. Färbe die Ecken, um sie den Mengen M und N zuzuordnen. Damit sind alle Ecken des Graphen gefärbt!

Schritt 2: Ergänze nun die restlichen Kanten des Graphen. Es gibt keine Kante, die gleich gefärbte Ecken verbindet, denn:

Annahme: Eine Kante verbindet zwei rote Ecken E_1, E_2 . Im Baum gibt es einen Weg, der E_1 und E_2 verbindet. E_1, E_2 haben dieselbe Farbe und der Baum ist bipartit \Rightarrow der Weg hat eine ungerade Anzahl an Ecken.

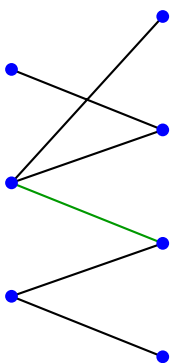
Durch die Kante, die E_1 mit E_2 verbindet, entsteht ein Kreis mit ungerader Eckenzahl \downarrow \square



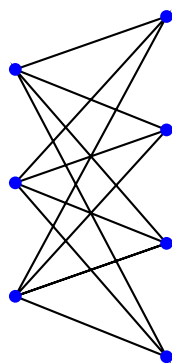
Definition: 1) Ein zusammenhängender bipartiter Graph heißt m - n -Graph, wenn seine zwei Eckenmengen M und N m Ecken bzw. n Ecken enthalten.

2) Ein bipartiter Graph ohne parallele Kanten, bei dem jede Ecke aus M mit jeder Ecke aus N benachbart ist, heißt vollständiger bipartiter Graph.

Veranschaulichung:



3-4-Graph



vollständiger 3-4-Graph

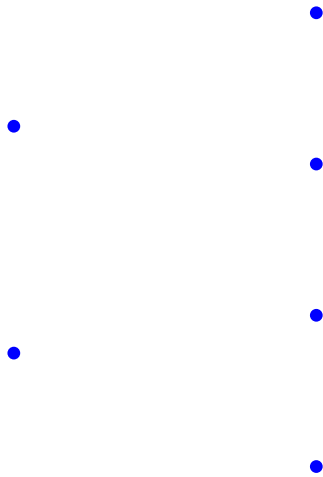
Frage: Warum ist der linke Graph ohne die grüne Kante kein 3-4-Graph? Man kann die Eckenmenge offensichtlich in eine Menge M mit 3 Ecken und eine Menge N mit 4 Ecken aufteilen, so dass die Definition *bipartit* erfüllt ist. Was fehlt dann?

Antwort: Ein m - n -Graph muss zusammenhängend sein. Ohne die grüne Kante ist der Graph nicht zusammenhängend.

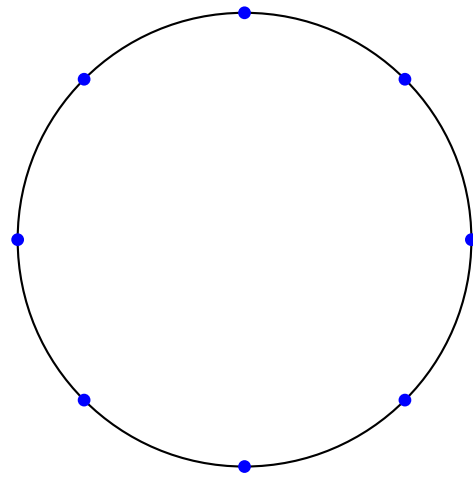
Aufgabe 32

- a) Zeichne einen vollständigen 2–4–Graphen. Wie viele Kanten besitzt er?
- b) Wie viele Kanten besitzt ein vollständiger m – n –Graph?
- c) Ergänze im Achteck Kanten (keine Ecken), bis ein vollständiger bipartiter Graph entsteht. Welcher vollständige m – n –Graph entsteht hierdurch?

Lösung zu a)

Der Graph besitzt Kanten.

Lösung zu c)

Vollständiger – –Graph.**Aufgabe 33**

Zeichne alle vollständigen bipartiten Graphen mit 6 Ecken, die nicht zueinander isomorph sind.

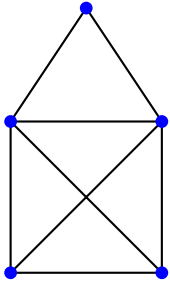
Aufgabe 34

Zeichne einen Baum, der ein

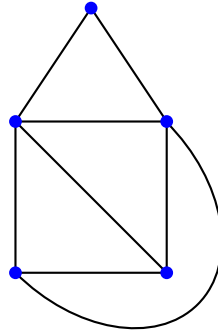
- a) 2–3–Graph ist.
- b) 1–4–Graph ist.
- c) 4–9–Graph ist.

9 Ebene und plättbare Graphen

Das Haus vom Nikolaus



Isomorpher Graph



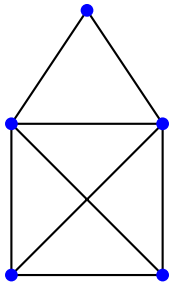
Im *Haus vom Nikolaus* kreuzen sich zwei Kanten, ohne dass der Kreuzungspunkt eine Ecke ist. Wir stellen uns vor, dass die eine Kante über der anderen verläuft. Das bedeutet, dass der Graph nicht ganz in der Zeichenebene enthalten ist, sondern in die dritte Dimension geht. Man kann den Graphen jedoch isomorph umzeichnen, so dass kein Kreuzungspunkt vorkommt, der keine Ecke ist.

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit Graphen, die sich so umzeichnen lassen.

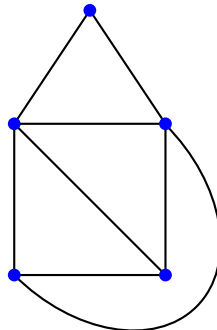
Definition: 1) Ein in der Ebene gezeichneter Graph heißt eben, wenn seine Kanten keine Punkte gemeinsam haben außer Ecken.

2) Ein Graph heißt plättbar, wenn er isomorph zu einem ebenen Graphen ist.

Nochmal die beiden isomorphen Graphen von oben:



nicht eben, aber plättbar



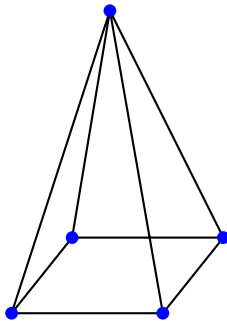
eben und plättbar

Weiter auf nächster Seite

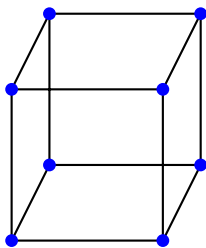
Aufgabe 35

Gegeben sind die folgenden Graphen, die Begrenzungen dreidimensionaler Körper darstellen. Zeige, dass die Graphen plättbar sind, indem Du jeweils einen isomorphen ebenen Graphen zeichnest.

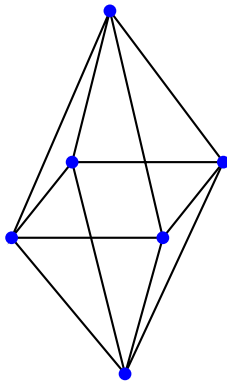
a) In dieser Teilaufgabe gibt es zwei verschiedene Lösungen!



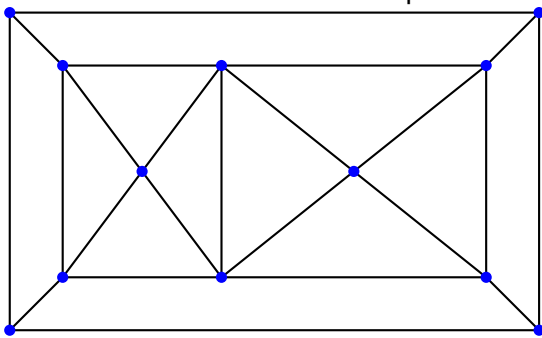
b)



c)

**Aufgabe 36**

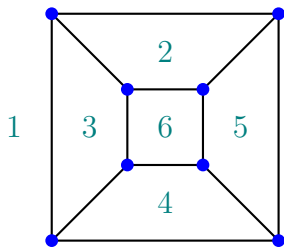
Zeichne neben den ebenen Graphen ein Gebäude, das zu dem Graphen gehören könnte.



Weiter auf nächster Seite

Beobachtung: Ein ebener Graph unterteilt die Zeichenebene in Flächen, eine Außenfläche und keine, eine oder mehrere Innenflächen.

Beispiel:

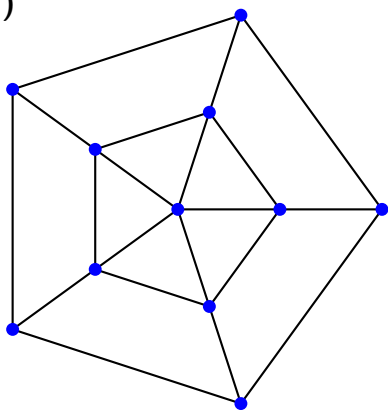


Dieser Graph unterteilt die Zeichenebene in 5 Innenflächen und die mit 1 nummerierte Außenfläche.

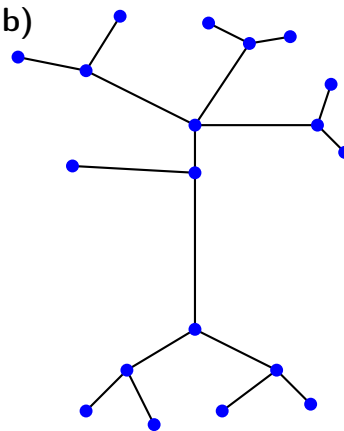
Aufgabe 37

Trage in die Graphen eine Nummerierung der Flächen ein, in die die Ebene durch den Graphen unterteilt wird. Vergiss die Außenfläche nicht. Fülle dann die Tabelle aus.

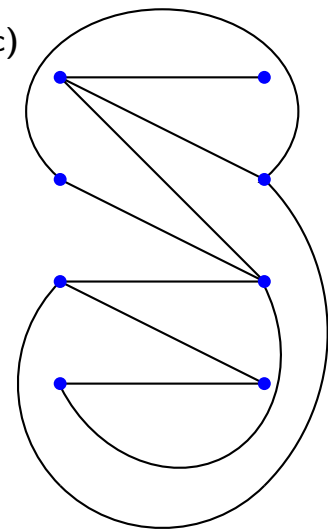
a)



b)



c)



Graph	Anzahl Ecken	Anzahl Kanten	Anzahl Flächen	$e - k + f$
a)	$e =$	$k =$	$f =$	
b)	$e =$	$k =$	$f =$	
c)	$e =$	$k =$	$f =$	
Baum mit n Ecken	$e =$	$k =$	$f =$	

Aufgabe 38

Zeichne zusammenhängende Graphen mit jeweils vier Kanten, die

- a) eine Außenfläche und keine Innenfläche,
- b) eine Außenfläche und eine Innenfläche,
- c) eine Außenfläche und zwei Innenflächen,
- d) eine Außenfläche und drei Innenflächen,
- e) eine Außenfläche und vier Innenflächen

besitzen.

Zur Erinnerung:

- Ein einfacher Graph ist ein Graph, der keine Schlingen und keine parallelen Kanten besitzt.
- Bei einem ebenem Graphen haben die Kanten keine Punkte gemeinsam außer Ecken.
- Ein plättbarer Graph besitzt einen isomorphen ebenen Graphen.
- In der letzten Aufgabe haben wir gesehen, dass $e + k - f$ für alle betrachteten Graphen gleich war.

Insbesondere gilt für einen Baum mit n Ecken

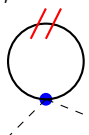
$$e = n, k = n - 1 \text{ (früherer Satz)}, f = 1 \Rightarrow e - k + f = n - (n - 1) + 1 = 2.$$


Satz: Für jeden zusammenhängenden ebenen Graphen gilt die eulersche Flächenformel

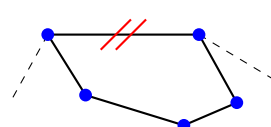
$$e - k + f = 2.$$

Hierbei bezeichnet e die Anzahl der Ecken, k die Anzahl der Kanten und f die Anzahl der Flächen. Die äußere Fläche muss mitgezählt werden.

Beweis: Betrachte einen zusammenhängenden ebenen Graphen mit e Ecken, k Kanten und f Flächen. Entferne so lange Kanten, bis der entstehende Teilgraph ein Baum ist.

Entfernen einer Schlinge:  f und k werden jeweils um 1 kleiner, e bleibt gleich
 $\Rightarrow e - k + f$ bleibt gleich.

Entfernen einer parallelen Kante:  genauso

Entfernen einer Kante aus einem Kreis:  genauso

Wir können also alle Kreise „öffnen“, ohne den Wert von $e - k + f$ zu ändern. Der Graph bleibt zusammenhängend.

Am Ende bleibt ein Baum mit e Ecken übrig. Für diesen gilt $e - k + f = 2$ (letzte Aufgabe).

\Rightarrow Für den ursprünglich gegebenen Graphen gilt ebenfalls $e - k + f = 2$. \square

Aufgabe 39

- Ein zusammenhängender ebener Graph besitzt 13 Kanten und unterteilt die Ebene in 9 Flächen. Wie viele Ecken hat er?
- Ein zusammenhängender ebener Graph hat 5 Ecken und 7 Flächen. Wie viele Kanten hat er?
- Zeichne jeweils für a) und b) einen ebenen Graphen, der diese Eigenschaften hat. Sind die Graphen, die Du gezeichnet hast, einfach?

Aufgabe 40

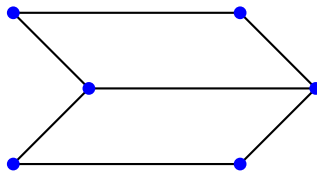
- a) Zeichne einen eben Graphen mit 7 Flächen, der nicht zusammenhängend ist und aus zwei Komponenten besteht. Berechne $e + k - f$.
- b) Zeichne einen eben Graphen mit 6 Flächen, der nicht zusammenhängend ist und aus drei Komponenten besteht. Berechne $e + k - f$.
- c) Sei ein ebener Graph mit e Ecken, k Kanten und f Flächen gegeben, der aus n Komponenten besteht. Stelle eine Vermutung für den Wert von $e + k - f$ in Abhängigkeit von n auf. Überprüfe, ob Deine Formel auch für $n = 1$ stimmt. In diesem Fall ist der Graph zusammenhängend.

Ist ein Graph plättbar, so können wir dies überprüfen, indem wir einen isomorphen ebenen Graphen zeichnen. Wir wollen nun Werkzeuge kennenlernen, mit deren Hilfe wir feststellen können, ob ein Graph plättbar oder nicht plättbar ist. Dazu betrachten wir zunächst ebene Graphen mit möglichst vielen Kanten.

Definition: Ein Graph heißt vollständig eben, wenn er einfach und eben ist und ihm keine Kante hinzugefügt werden kann, ohne dass seine Eigenschaft, einfach und eben zu sein, verloren geht.

Aufgabe 41

Gegeben ist der folgende Graph.



Ergänze möglichst viele Kanten, so dass der entstehende Graph einfach und eben ist. Wie viele Kanten kannst Du ergänzen?

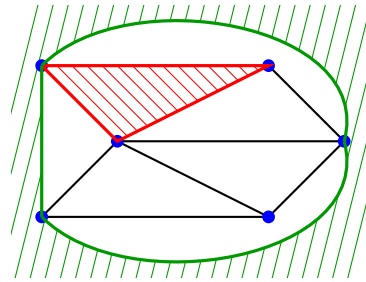
Nachdem Du möglichst viele Kanten ergänzt hast, stellt sich die Frage, ob wirklich nicht mehr Kanten ergänzt werden können.

Dieser Frage gehen wir im nächsten Satz nach. Dazu ziehen wir auf der folgenden Seite Schlussfolgerungen aus der Lösung dieser Aufgabe, die wir dann beim Beweis des Satzes benützen können.

Weiter auf nächster Seite

Rechts sind die Lösung und zwei markierte Flächen zu sehen.

Nachdem wir möglichst viele Kanten ergänzt haben, sehen wir, dass alle Flächen Dreiecke sind. Auch die grün markierte Außenfläche wird von drei Kanten begrenzt.



Satz: Ein vollständig ebener Graph mit $e \geq 3$ Ecken besitzt $k = 3 \cdot e - 6$ Kanten.

Beweis: Betrachte einen vollständig ebenen Graphen.

Er ist zusammenhängend, denn sonst könnte man noch eine Kante ergänzen.

\Rightarrow Es gilt die eulersche Formel $f = 2 + k - e$.

Jede innere Fläche ist ein Dreieck, denn sonst könnte noch eine Kante eingefügt werden.

Die äußere Fläche wird auch von 3 Kanten begrenzt, denn sonst könnte man außen noch eine Kante ergänzen.

Addiert man die Anzahl der Kanten, die die Dreiecke begrenzen, so zählt man jede Kante doppelt.

$$\Rightarrow 2k = 3f = 3(2 + k - e)$$

$$\Rightarrow 2k = 6 + 3k - 3e \Leftrightarrow 0 = 6 + k - 3e \Leftrightarrow k = 3e - 6. \quad \square$$

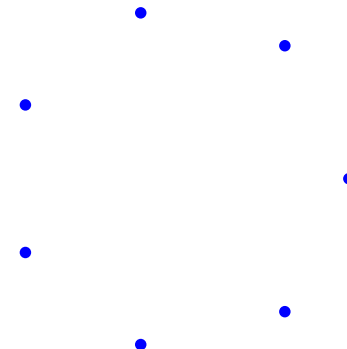
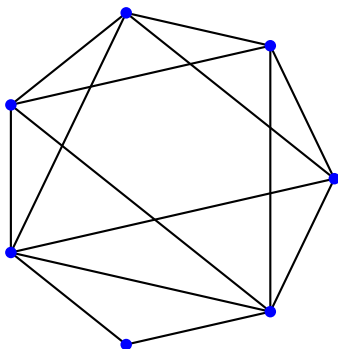
Wir können nun kontrollieren, ob die letzte Aufgabe richtig gelöst wurde. Der Graph hat $e = 6$ Ecken. Da er einfach und eben sein soll, kann er höchstens $3 \cdot e - 6 = 12$ Kanten besitzen. Nachdem 5 Kanten ergänzt wurden, besitzt der Graph 12 Kanten. Wir haben also alle möglichen Kanten gefunden.

Folgerung: Ein einfacher ebener Graph mit $e \geq 3$ Ecken besitzt höchstens $k = 3e - 6$ Kanten.

Aufgabe 42

Gegeben ist der unten links gezeichnete Graph.

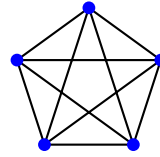
- Beweise, dass der Graph plättbar ist, indem Du daneben einen isomorphen ebenen Graphen zeichnest.
- Wie viele Ecken und Kanten besitzt der Graph? $e = \square$, $k = \square$.
- Warum ist der Graph nicht vollständig eben?
- Ergänze (zuerst im rechten, dann im linken Graphen) so viele Kanten (in rot), bis der Graph vollständig eben ist.



10 Nicht plättbare Graphen

Aufgabe 43

Gegeben ist das vollständige Fünfeck, siehe rechts.



a) Warum ist das vollständige Fünfeck einfach?

Antwort:

b) Wie viele Ecken und Kanten hat das vollständige Fünfeck? $e = \square$, $k = \square$.

c) Angenommen, das vollständige Fünfeck wäre plättbar. Dann besitzt es einen isomorphen einfachen und ebenen Graphen. Wie viele Ecken und Kanten hat der isomorphe Graph?

Antwort: $e = \square$, $k = \square$.

d) Für diesen isomorphen einfachen und ebenen Graphen gilt $3e - 6 = \square$,

e) Warum gibt es diesen isomorphen ebenen und einfachen Graphen nicht?

Antwort:

f) Also ist die Annahme, das vollständige Fünfeck wäre plättbar,

Durch die Lösung der letzten Aufgabe hast Du den folgenden Satz bewiesen.

Satz: Ein vollständiges Fünfeck ist nicht plättbar.

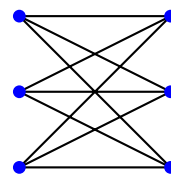
Nun folgt das zweite wichtige Beispiel für einen nicht plättbaren Graphen.

Satz: Der vollständige 3-3-Graph ist nicht plättbar.

Beweisversuch:

$$e = 6 \Rightarrow 3 \cdot e - 6 = 12$$

Es gilt $k = 9 \leq 12$, also kein Widerspruch



Das klappt nicht, der Graph hat zu wenig Kanten. Zum Beweis wird eine andere Idee benötigt: Suche möglichst kurze Kreise im vollständigen 3-3-Graphen.

Alle Kreise im Graphen haben mindestens 4 Ecken bzw. 4 Kanten. Diese Eigenschaft können wir im Beweis verwenden.

Weiter auf nächster Seite

Beweis: Annahme: Der vollständige 3-3-Graph ist plättbar

Dann gibt es einen isomorphen ebenen Graphen.

Der ebene Graph hat $e = 6$ Ecken und $k = 9$ Kanten.

eulersche Formel $\Rightarrow f = 2 + k - e = 5$

Der ebene Graph hat, wie der vollständige 3-3-Graph, nur Kreise mit mindestens 4 Ecken.

\Rightarrow jede Fläche wird von mindestens 4 Kanten begrenzt, auch die Außenfläche

Addiert man die Anzahl der begrenzenden Kanten, so zählt man jede Kante doppelt

$\Rightarrow 2k \geq 4f = 20 \Rightarrow k \geq 10$ \swarrow Denn er besitzt nur 9 Kanten

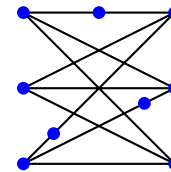
\Rightarrow die Annahme muss falsch sein

\Rightarrow der vollständige 3-3-Graph ist nicht plättbar. \square

Satz: Ist ein Graph plättbar, dann sind auch alle seine Teilgraphen plättbar. Insbesondere: Besitzt ein Graph auch nur einen Teilgraphen, der nicht plättbar ist, dann ist der Graph nicht plättbar.

Beweisskizze: Gibt es zu einem Graphen einen isomorphen ebenen Graphen, dann gibt es zu jedem Teilgraphen einen isomorphen Teilgraphen des ebenen Graphen. Und der ist dann eben.

Beobachtung: Fügen wir im vollständigen 3-3-Graphen zusätzliche Ecken auf bereits bestehenden Kanten ein wie in der Graphik rechts, so ändert dies nichts daran, dass der Graph nicht plättbar ist.



Definition: Fügt man in einem Graphen zusätzliche Ecken auf den bereits bestehenden Kanten ein, so erhält man eine Unterteilung des Graphen.

Durch eine zusätzliche Ecke werden aus einer Kante zwei neue Kanten.

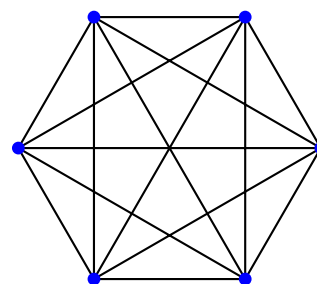
Satz von Kuratowski: Ein Graph ist genau dann nicht plättbar, wenn er einen Teilgraphen enthält, der isomorph zu einem vollständigen Fünfeck oder einem vollständigen bipartiten 3-3-Graphen oder einer Unterteilung eines dieser beiden Graphen ist.

Auf den Beweis dieses Satzes verzichten wir.

Aufgabe 44

Gegeben ist das vollständige Sechseck, siehe rechts.

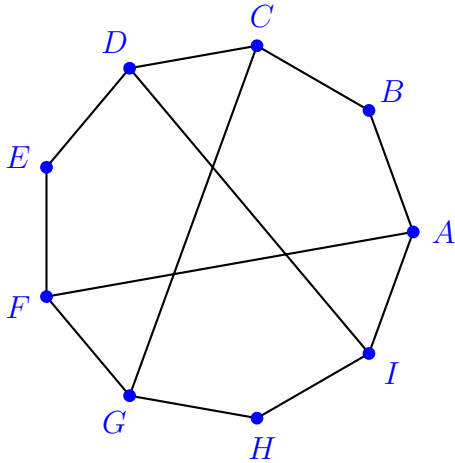
Beweise, dass das vollständige Sechseck nicht plättbar ist, indem Du einen Teilgraphen farbig markierst, der isomorph zu einem vollständigen Fünfeck ist.



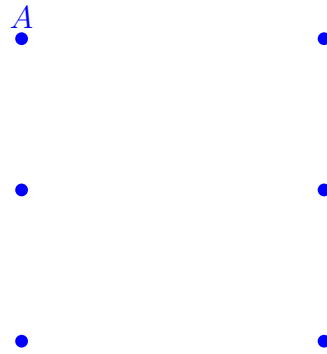
Aufgabe 45

Beweise, dass der unten gezeichnete Graph nicht plättbar ist. Weise dazu nach, dass er isomorph zu einer Unterteilung des vollständigen 3–3–Graphen ist. Zeichne dazu rechts den vollständigen 3–3–Graphen mit den vorgegebenen Ecken. Bezeichne dann die Ecken so, dass die Kanten des rechten Graphen denen im linken Graphen entsprechen. Dazu musst Du noch 3 Unterteilungsecken im rechten Graphen passend einfügen.

Hinweis: Die Ecke im rechten Graphen, die der Ecke *A* im linken Graphen entsprechen soll, ist bereits bezeichnet.



Lösung:



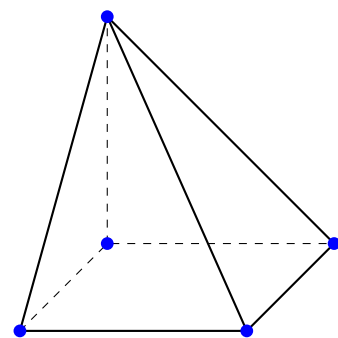
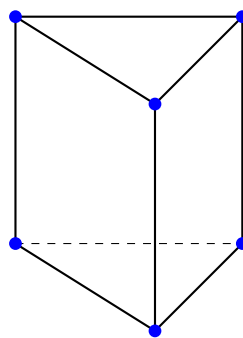
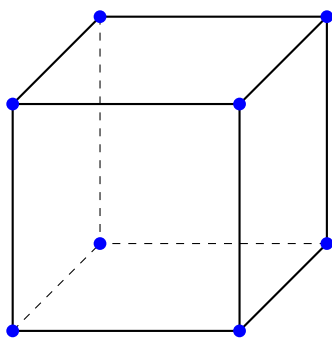
11 Graphen und Polyeder

Beginn
Online-
Einheit 7

Definition: Ein Polyeder ist ein dreidimensionaler Körper, dessen Seiten aus ebenen Vielecksflächen bestehen. Die Vielecksflächen stoßen an den Kanten und den Ecken des Körpers zusammen. In jeder Ecke enden mindestens 3 Kanten.

Die Ecken und Kanten bilden den Graphen des Polyeders.

Beispiele für Polyeder:

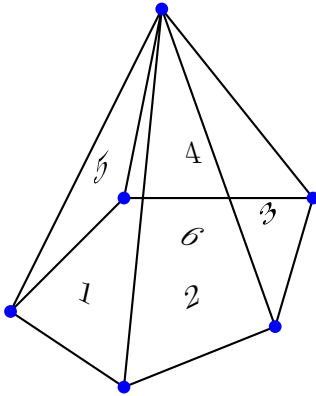


Weiter auf nächster Seite

Aufgabe 46

Gegeben ist das unten skizzierte Polyeder mit 6 Ecken, 10 Kanten und 6 Flächen. Die dreieckigen Seitenflächen sind der Reihe nach mit den Zahlen 1 bis 5 nummeriert, die fünfeckige Bodenfläche hat die Nummer 6.

- a) Warum ist der Graph des Polyeders einfach?
- b) Zeichne einen isomorphen ebenen Graphen und nummeriere die Flächen des Graphen so, dass ihre Nummern denen der Flächen des Polyeders entsprechen.
Hinweis: Der ebene Graph besitzt auch eine äußere Fläche.



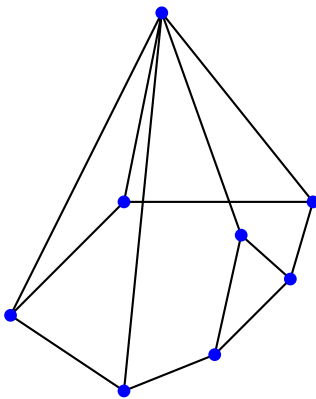
a) Der Graph ist einfach, denn:

b) Isomorpher ebener Graph:

Aufgabe 47

Beim Polyeder aus der letzten Aufgabe wurde eine Ecke abgeschnitten, siehe unten stehende Graphik. Zeichne einen isomorphen ebenen Graphen. Wie viele Ecken, Kanten, Flächen hat der vorliegende Graph mehr als der aus der vorigen Aufgabe?

a) Isomorpher ebener Graph:



b) Im Vergleich zum Graphen aus der letzten Aufgabe erhöhte sich die Anzahl der Ecken um

die der Kanten um

die der Flächen um

,

und

.

Weiter auf nächster Seite

Satz: Für jeden Graphen eines Polyeders gelten:

- 1) Der Graph ist zusammenhängend und einfach,
- 2) Eckenzahl $e \geq 4$,
- 3) Kantenzahl $k \geq 6$.

Beweis: 1) Zusammenhängend: Ein Polyeder ist ein Körper.

Die Kante eines Polyeders sind Geradenstücke. Daher besitzt der Graph keine parallelen Kanten und keine Schlingen, ist also einfach.

2) 3 Ecken liegen in einer Ebene, bilden also nicht die Ecken eines Körpers $\Rightarrow e \geq 4$.

3) In jeder Ecke enden mindestens 3 Kanten

\Rightarrow Es gibt mindestens $4 \cdot 3 = 12$ Enden von Kanten.

Jede Kante hat zwei Enden $\Rightarrow k \geq 6$. \square

Aufgabe 48

- a) Konstruiere ein Polyeder mit $k = 8$ Kanten. Zeichne einen isomorphen ebenen Graphen.
Hinweis: Das Polyeder kann entsprechend zu dem aus Aufgabe 1 konstruiert werden. Wähle als Grundfläche ein Viereck.
- b) Konstruiere ein Polyeder mit $k = 11$ Kanten. Zeichne einen isomorphen ebenen Graphen.
Hinweis: Verwende das Polyeder aus Teilaufgabe a) und schneide eine Ecke ab (vgl. die Konstruktion für Aufgabe 2).

Aufgabe 49

- a) Sei k ein Element der Menge $\{6, 8, 10, \dots\}$. Konstruiere ein Polyeder mit k Kanten, indem Du eine Grundfläche mit $n = \frac{k}{2}$ Ecken und eine Spitze wählst.
- b) Sei k ein Element der Menge $\{9, 11, 13, \dots\}$. Konstruiere ein Polyeder mit k Kanten, indem Du eine Grundfläche mit $n = \frac{k-3}{2}$ Ecken und eine Spitze wählst und dann eine Ecke abschneidest.

Satz: 1) Zu jeder natürlichen Zahl $k \geq 6$, $k \neq 7$ gibt es ein Polyeder mit k Kanten.

2) Es gibt kein Polyeder mit 7 Kanten.

Beweis: Siehe letzte und nächste Übungsaufgabe.

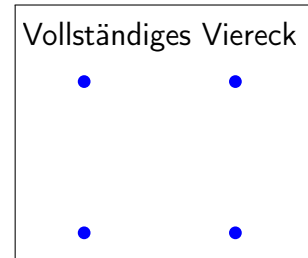
Aufgabe 50

In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass es kein Polyeder mit 7 Kanten gibt. Fülle dazu die Lücken aus.

Betrachte den Graphen des Polyeders. Die Anzahl seiner Ecken wird mit e bezeichnet. Wir wissen, dass der Graph einfach ist.

Weiter wissen wir, dass $e \geq \square$ gilt. Nun können wir eine Fallunterscheidung vornehmen.

Fall $e = 4$: Zeichne rechts ein vollständiges Viereck, d.h. einen einfachen Graphen mit 4 Ecken und möglichst vielen Kanten.



Das vollständige Viereck besitzt $k = \square$ Kanten. Ein einfacher Graph mit 4 Ecken kann nicht mehr Kanten besitzen.

\Rightarrow Es gibt kein Polyeder mit $e = \square$ Ecken und 7 Kanten.

Fall $e \geq 5$: Der Eckengrad jeder Ecke ist mindestens \square .

\Rightarrow Im Graphen gibt es mindestens \square Enden von Kanten.

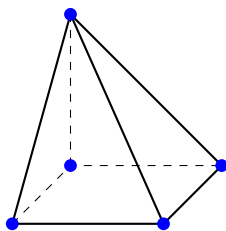
Jede Kante hat 2 Enden \Rightarrow Für die Anzahl von Kanten folgt $k \geq \square$.

\Rightarrow Der Graph besitzt mindestens \square Kanten.

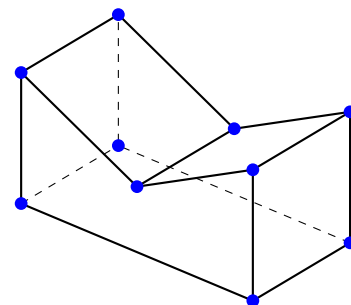
\Rightarrow Es gibt kein Polyeder mit $e \geq \square$ Ecken und 7 Kanten. \square

Definition: Ein Polyeder heißt konvex, wenn die Verbindungsstrecken beliebiger Punkte des Polyeders ganz im Polyeder verlaufen.

Konvexes Polyeder:



Nicht konvexes Polyeder:



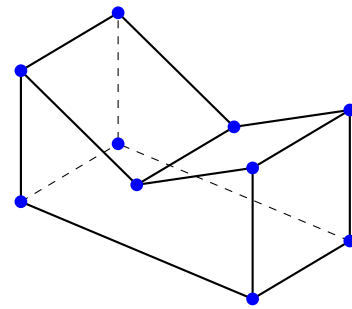
Satz: Der Graph eines konvexen Polyeders ist plättbar, d.h. er besitzt einen isomorphen ebenen Graphen. Die Anzahl der Flächen des Polyeders ist gleich der Anzahl der Flächen des ebenen Graphen, wenn beim ebenen Graphen die äußere Fläche mitgezählt wird.

Veranschaulichung: Bei dem Graphen eines konvexen Polyeders kann man so durch eine seiner Flächen hindurchsehen, so dass man den Graphen des Polyeders ohne Kreuzungen der Kanten sieht. Die Fläche, durch die man hindurchsieht, wird die äußere Fläche des ebenen Graphen.

Aufgabe 51

Gegeben ist das rechts dargestellte Polyeder.

- a) Weise nach, dass das Polyeder nicht konvex ist. Zeichne dazu eine Verbindungsstrecke zweier Punkte des Polyeders ein, die nicht ganz im Polyeder verläuft.
- b) Weise nach, dass der Graph des Polyeders einen isomorphen ebenen Graphen besitzt, obwohl die Voraussetzung *konvex* nicht erfüllt ist. Zeichne dazu einen isomorphen ebenen Graphen.



Satz: Für jedes konvexe Polyeder gilt die eulersche Polyederformel: $e - k + f = 2$

Beweis: Betrachte ein konvexes Polyeder. Der Graph des Polyeders besitzt einen isomorphen Graphen, der eben, einfach und zusammenhängend ist. Für jeden ebenen und zusammenhängenden Graphen gilt die eulersche Formel $e - k + f = 2$ (früherer Satz).

Der Graph des Polyeders besitzt gleich viele Ecken, Kanten und Flächen,
 \Rightarrow Die Formel gilt auch für das Polyeder. \square

Satz: Ein ebener Graph, der isomorph zu dem Graphen eines Polyeders ist, hat folgende Eigenschaften:

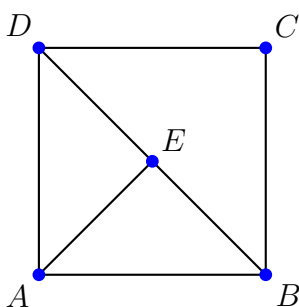
- 1) Er ist zusammenhängend und einfach,
- 2) $e \geq 4$,
- 3) Jede Ecke hat mindestens den Grad 3,
- 4) $k \geq 6$.

Beweis: Jeder Graph eines Polyeders besitzt alle diese Eigenschaften, also auch jeder isomorphe Graph. \square

Aufgabe 52

Gegeben ist der unten stehende ebene Graph mit 7 Kanten.

- a) Zeige, dass die eulersche Formel gilt.
- b) Warum gibt es kein Polyeder, dessen Graph isomorph zum hier gezeigten Graphen ist?

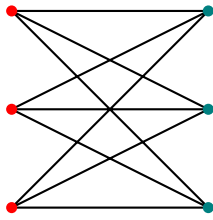


a) $e =$, $k =$, $f =$
 $\Rightarrow e - k + f =$

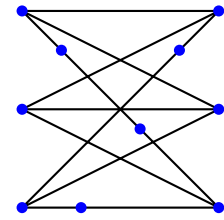
- b) Es gibt kein Polyeder, dessen Graph isomorph zum nebenstehenden Graphen ist, denn

Erinnerung: Wenn ein Graph einen Teilgraphen enthält, der isomorph zu einer Unterteilung des vollständigen 3–3-Graphen ist, dann ist er nicht plättbar.

3–3-Graph:

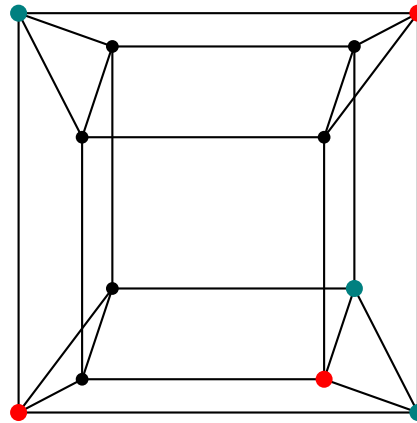
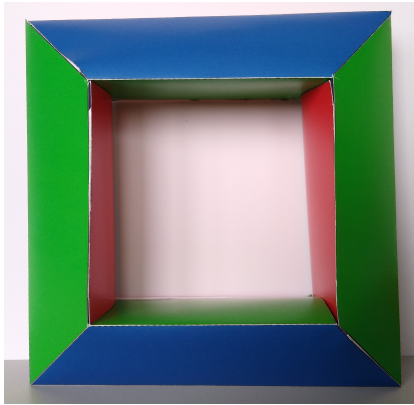


Unterteilung des 3–3-Graphen:



Aufgabe 53

Gegeben ist das nicht konvexe Polyeder, dessen Photo und Graph abgebildet sind.



- a) Bestimme die Anzahl der Flächen, Kanten und Ecken des Polyeders. Zeige, dass die eulersche Polyederformel nicht gilt. Beachte, dass die im Graphen als Dreiecke erscheinende Flächen keine Seiten des Polyeders sind.

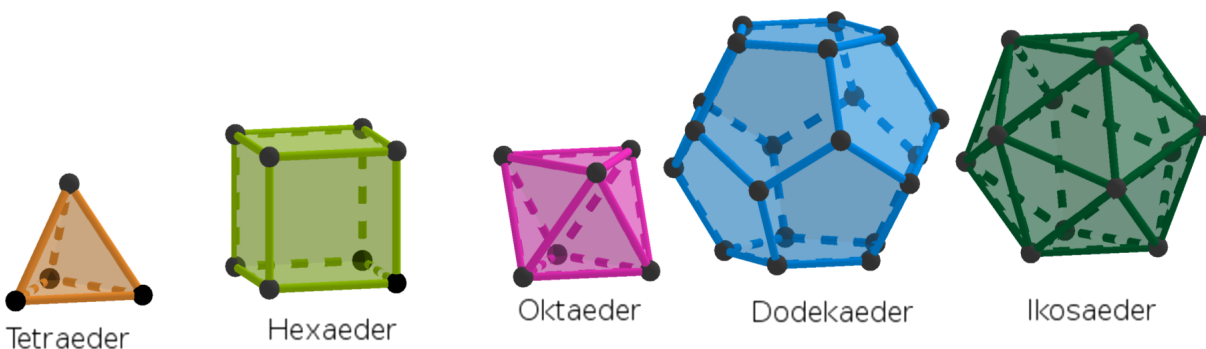
$$e = \boxed{}, k = \boxed{}, f = \boxed{}, \Rightarrow e - k + f = \boxed{} \neq 2.$$

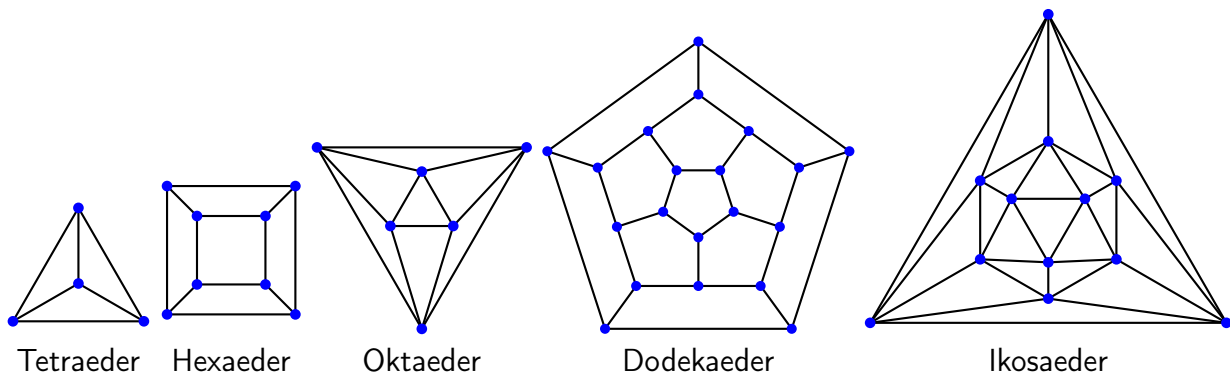
- b) Zeige, dass der Graph des Polyeders nicht plättbar ist, indem Du einen Teilgraphen blau markierst, der isomorph zu einer Unterteilung des 3-3-Graphen ist.

12 Platonische Körper und Graphen

Definition: Ein konvexes Polyeder heißt platonischer Körper, wenn alle Flächen aus kongruenten regelmäßigen n -Ecken bestehen und in jeder Ecke gleich viele Kanten enden.

Platonische Körper und zu ihren Graphen isomorphe ebene Graphen:



**Aufgabe 54**

Trage in die Tabelle den Eckengrad g der Ecken und die Ecken-, Kanten- und Flächenzahl ein.

	Tetraeder	Hexaeder	Oktaeder	Dodekaeder	Ikosaeder
$g =$					
$e =$					
$k =$					
$f =$					

Definition: Ein zusammenhängender einfacher ebener Graph heißt platonischer Graph, wenn er folgende Eigenschaften besitzt:

- 1) Alle Ecken des Graphen haben den selben Grad, dieser beträgt mindestens 3 und
- 2) alle Flächen (auch die äußere) haben die selbe Anzahl Kanten, diese ist mindestens 3.

Folgerung: Die fünf Polyeder Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder, Ikosaeder sind platonische Körper, ihre Graphen sind isomorph zu platonische Graphen.

Satz: Jeder platonische Graph ist isomorph zu einem der Graphen von Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder, Ikosaeder. Daher gibt es genau diese fünf platonischen Körper.

Aufgabe 55

In dieser Aufgabe zeigen wir: Jeder platonische Graph ist isomorph zu einem der Graphen von Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder, Ikosaeder. Fülle dazu die Lücken aus.

Wir betrachten einen platonischen Graphen mit e Ecken, k Kanten und f Flächen. Seien zusätzlich g der Eckengrad, den jede Ecke besitzt, und n die Anzahl der Kanten, die jede Fläche begrenzen.

Jede Ecke hat den Eckengrad $g \Rightarrow$ es gibt Enden von Kanten.

Da jede Kante Enden besitzt, gibt es insgesamt $k =$ Kanten.

Umformen nach der Anzahl der Ecken e liefert

$$e = \text{} \quad (*)$$

Addiert man die Anzahl der Kanten, die die Flächen begrenzen, so zählt man jede Kante doppelt

\Rightarrow Der Graph besitzt $k =$ Kanten. Umformen nach der Anzahl der Flächen liefert

$$f = \text{} \quad (**)$$

Setzt man (*) und (**) für e und f in die eulersche Formel ein, so erhält man

$$2 = e - k + f \Rightarrow 2 = \text{}.$$

Teilt man auf beiden Seiten durch $2k$, so erhält man die Gleichung .

Nach dem ersten Satz gilt $g \geq 3$ und $n \geq 3$. Deshalb müssen wir jetzt einfach durchprobieren, für welche Werte von g und n wir Lösungen für k finden. Starte dazu mit $g = 3$ und erhöhe n solange, bis du keine sinnvolle Lösung mehr für k findest. Fahre dann mit dem nächst größeren g fort.

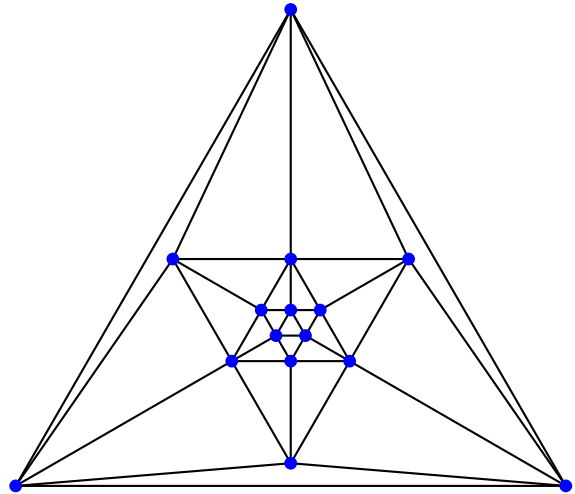
g	n	$\frac{1}{g} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2}$	k	Name
3	3			

Warum sind wir mit den hier betrachteten Werten für g und n fertig und müssen nicht alle möglichen Kombinationen durchgehen?

Aufgabe 56

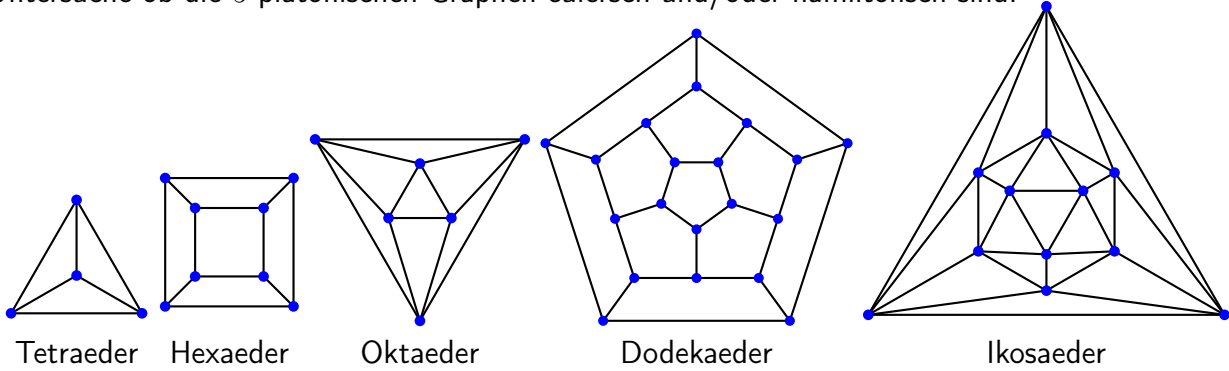
Gegeben ist der nebenstehende ebene Graph. Er ist isomorph zu dem Graphen eines Polyeders.

- a) Aus was für n -Ecken bestehen die Seiten des Polyeders?
- b) Warum kann das zugehörige Polyeder nicht platonisch sein?



Aufgabe 57

Untersuche ob die 5 platonischen Graphen eulersch und/oder hamiltonsch sind.

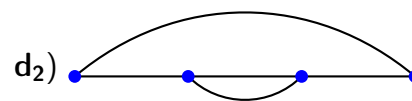
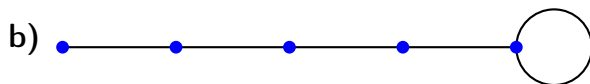
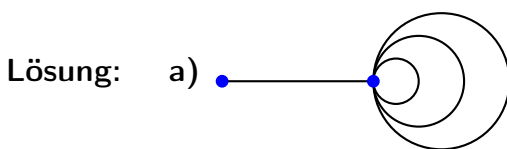


	Tetraeder	Hexaeder	Oktaeder	Dodekaeder	Ikosaeder
ist eulersch					
ist hamiltonsch					

Lösungen der Aufgaben

Aufgabe 1

- Zeichne einen Graphen mit 2 Ecken mit Grad 1 und 7.
- Zeichne einen Graphen mit 5 Ecken mit Grad 1, 2, 2, 2, 3.
- Zeichne zwei verschiedene Graphen mit jeweils 4 Ecken, wovon zwei den Grad 2 und zwei den Grad 3 haben.
- Fülle die Tabelle aus:
- Wie hängen die Eckengrade und die Zahl der Kanten zusammen?
- Warum gibt es keinen Graphen mit drei Ecken mit den Graden 4, 5, 6?



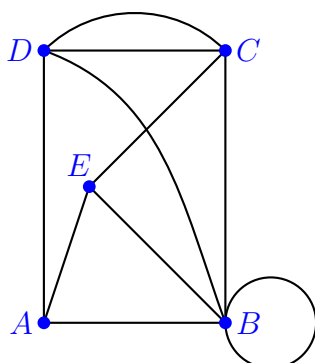
	a)	b)	c ₁)	c ₂)
d) Summe Eckengrade	8	10	10	10
Anzahl Kanten	4	5	5	5

e) Summe der Eckengrade = 2 Mal Anzahl der Kanten.

f) Die Summe der Eckengrade kann nicht ungerade sein (vgl. vorige Teilaufgabe). Hier sollte sie $4 + 5 + 6 = 15$ sein, das geht nicht.

Aufgabe 2

Trage in die Tabelle ein, wie viele Kanten die jeweiligen Ecken verbinden.



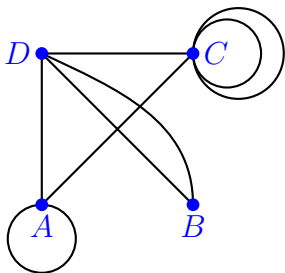
	A	B	C	D	E	Grad
A	0	1	0	1	1	3
B	1	1	1	1	1	6
C	0	1	0	2	1	4
D	1	1	2	0	0	4
E	1	1	1	0	0	3

Aufgabe 3

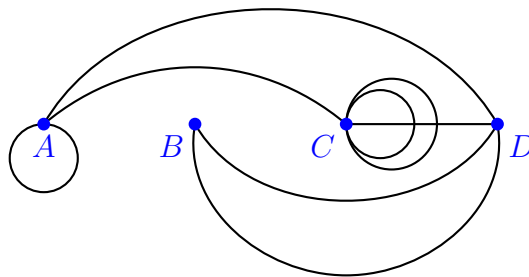
Zeichne zwei verschieden aussehende Graphen, die die folgende Tabelle besitzen.

	A	B	C	D
A	1	0	1	1
B	0	0	0	2
C	1	0	2	1
D	1	2	1	0

Lösung: Eine Lösung:

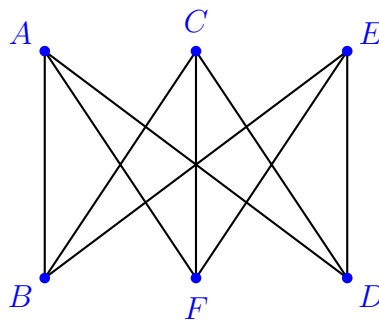
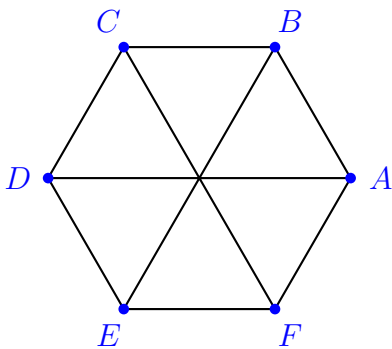


Eine anders aussehende Lösung:



Aufgabe 4

Zeige, dass die folgenden Graphen isomorph sind:



Lösung: Linker Graph:

	A	B	C	D	E	F
A		1		1		1
B	1		1		1	
C		1		1		1
D	1		1		1	
E		1		1		1
F	1		1		1	

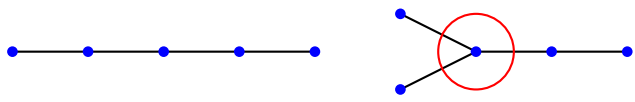
Rechter Graph:

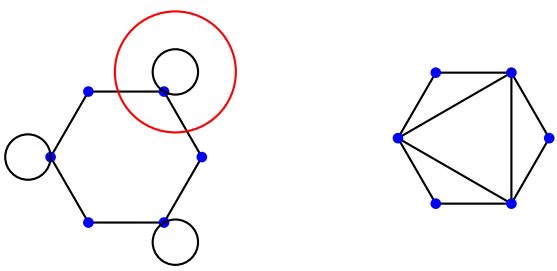
	A	B	C	D	E	F
A		1		1		1
B	1		1		1	
C		1		1		1
D	1		1		1	
E		1		1		1
F	1		1		1	

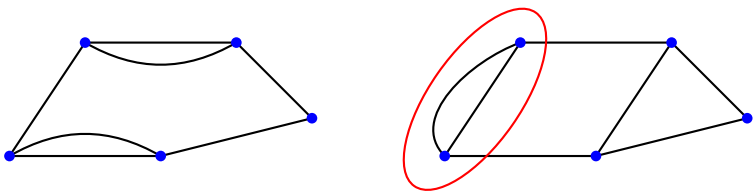
Die Graphen sind isomorph, denn die Tabellen sind gleich.
(Nullen wurden in den Tabellen weggelassen)

Aufgabe 5

Warum sind die folgenden Graphen jeweils nicht isomorph?

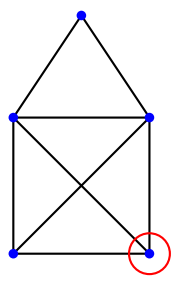
Lösung: a)  Eckengrad 3 kommt nur im rechten Graphen vor.

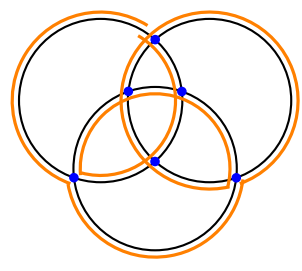
b)  Der linke Graph hat Schlingen, der rechte hat keine.

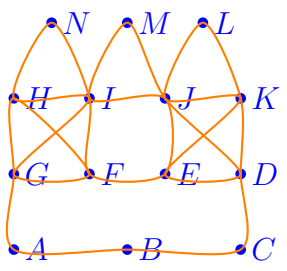
c)  Der linke Graph hat zwei Paare paralleler Kanten, der rechte hat nur ein Paar.

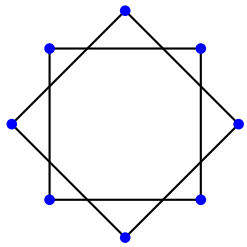
Aufgabe 6

In welchem der Graphen gibt es eine eulersche Tour?

Lösung: a)  Es gibt keine eulersche Tour, denn wenn man rechts unten startet, endet man immer in der linken unteren Ecke.

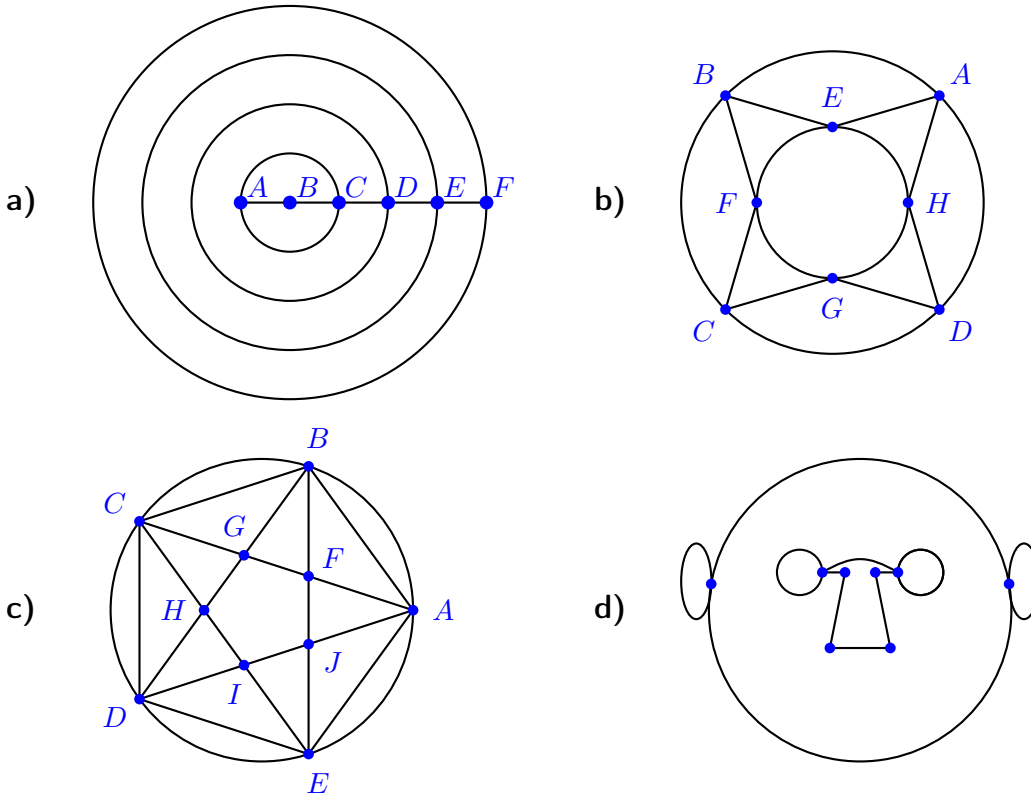
b)  Eine eulersche Tour ist eingezeichnet.

c)  Es gibt eine eulersche Tour.

d)  Es gibt keine eulersche Tour, denn man kommt nicht von dem einen Rechteck zum anderen.

Aufgabe 7

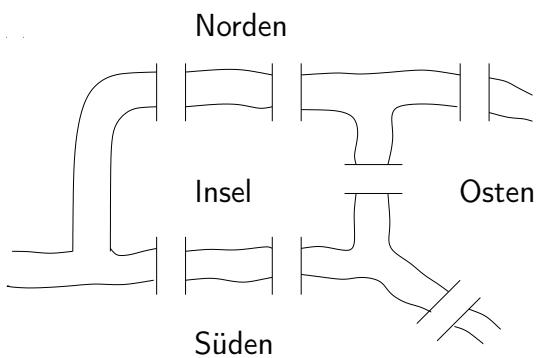
Welcher der folgenden Graphen ist eulersch? Trage Deine Antwort in die Tabelle ein.



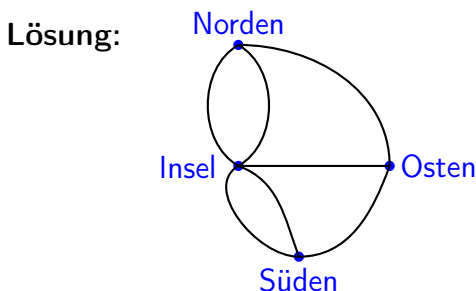
Lösung:

	eulersch	nicht eulersch weil
Graph a)		$\text{Grad}(F) = 3$ ist ungerade
Graph b)	Ja	
Graph c)	Ja	
Graph d)		nicht zusammenhängend

Aufgabe 8



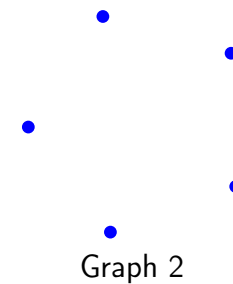
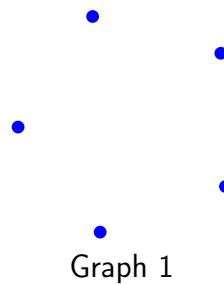
Das Königsberger Brückenproblem: In Königsberg gibt es 7 Brücken über die Pregel, wie im nebenstehenden Stadtplan dargestellt. Die Frage ist nun, ob es einen Rundweg durch Königsberg gibt, so dass jede der Brücken genau ein Mal überquert wird. Zeichne einen Graphen, der zu diesem Problem passt: Die Brücken sollen als Kanten dargestellt werden, da man sie genau einmal überqueren soll. Entscheide dann, ob ein solcher Rundweg möglich ist.



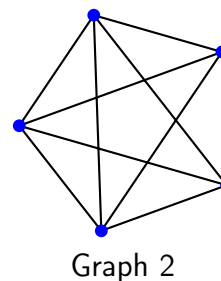
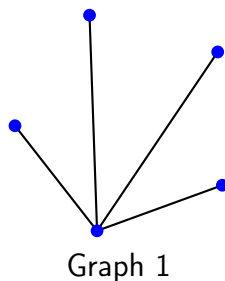
Ein solcher Rundweg wäre eine eulersche Tour. Es gibt aber keine eulersche Tour zu dem Graphen, da es ungerade Eckengrade gibt (es sind sogar alle Eckengrade ungerade). Also gibt es keinen Rundweg durch Königsberg, bei dem jede Brücke genau ein Mal überquert wird.

Aufgabe 9

- a) Ergänze den Graphen 1, so dass er einfach ist und genau vier Kanten besitzt (Lösung ist nicht eindeutig).
- b) Ergänze den Graphen 2, so dass er einfach ist und möglichst viele Kanten besitzt.



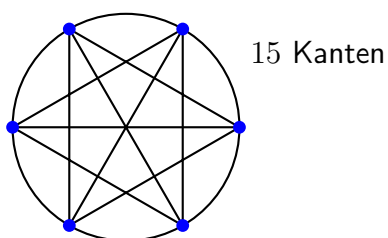
Lösung:



Aufgabe 10

- a) Zeichne ein vollständiges 6-Eck, also einen vollständigen Graphen mit 6 Ecken. Wie viele Kanten besitzt es?
- b) Wie viele Kanten besitzt ein vollständiges 10-Eck?

Lösung: a)



b) $9 + 8 + 7 + \dots + 1 = 45$ Kanten

Aufgabe 11

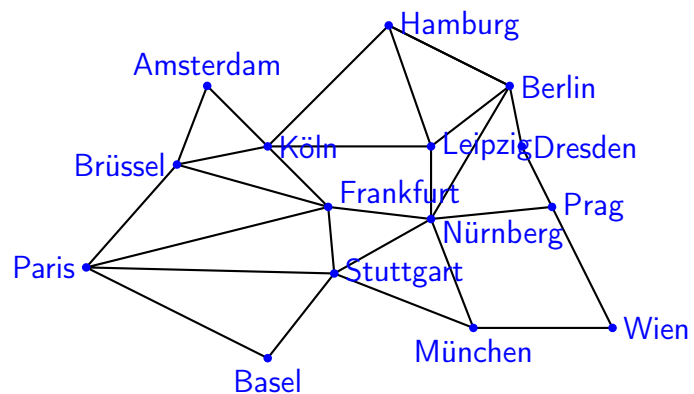
Welche vollständigen n -Ecke sind eulersch?

Lösung: Beim vollständigen n -Eck ist der Eckengrad jeder Ecke $\text{Grad}(E) = n - 1$. Außerdem ist jedes vollständige n -Eck zusammenhängend. Nach dem Satz von Euler gilt also:

- Ist $n \geq 2$ ungerade, dann ist das vollständige n -Eck ein eulerscher Graph,
- Ist $n \geq 2$ gerade, dann ist das vollständige n -Eck nicht eulersch.

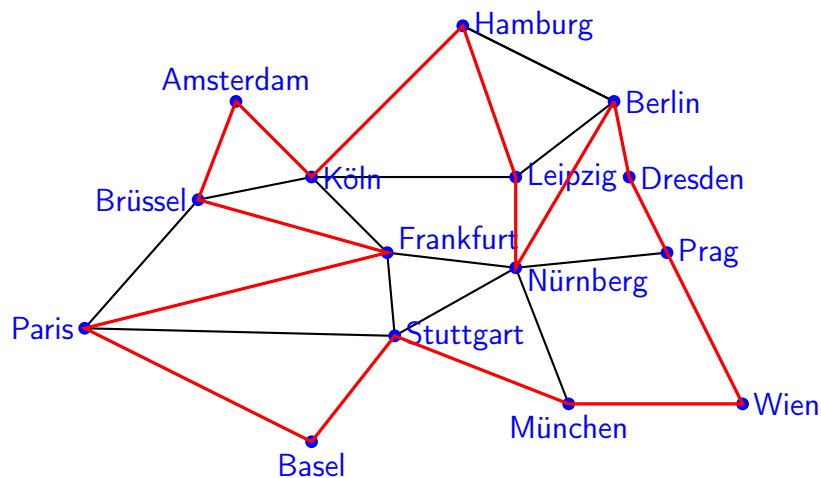
Aufgabe 12

Eine Freundesgruppe möchte eine Rundreise durch die in der Karte eingezeichneten Städte machen. Dabei wollen sie durch jede Stadt nur ein Mal reisen. Sie können nur die eingezeichneten Verbindungen benutzen.

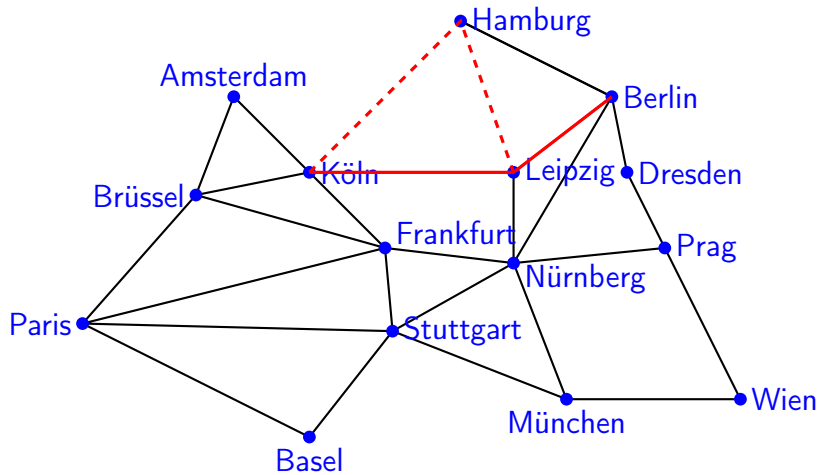


- Gib es eine Rundreise, die in Berlin startet und anschließend durch Nürnberg und dann durch Leipzig geht?
- Gibt es eine Rundreise, die in Berlin startet und anschließend durch Leipzig und dann durch Köln geht?
- Gibt es eine Rundreise, die in Stuttgart losgeht, dann nach Basel, nach Paris und anschließend nach Brüssel?
- Gibt es eine Rundreise, die in Berlin startet und anschließend nach Nürnberg und dann nach München geht?

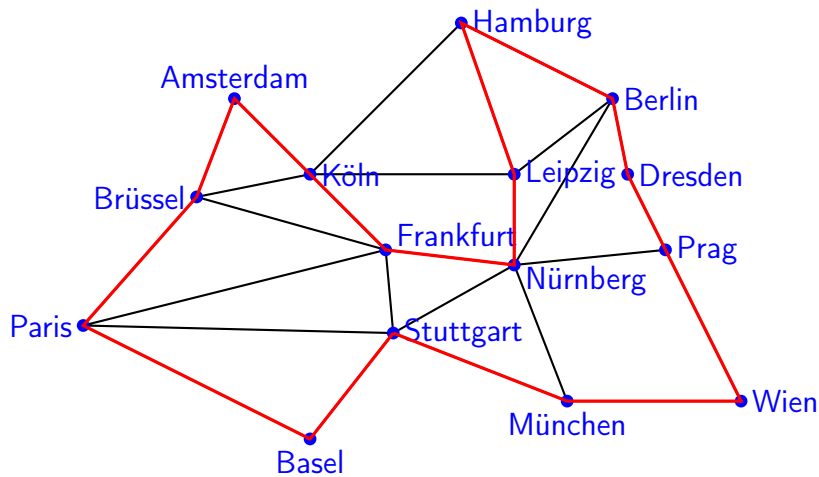
Lösung: a) Ja:



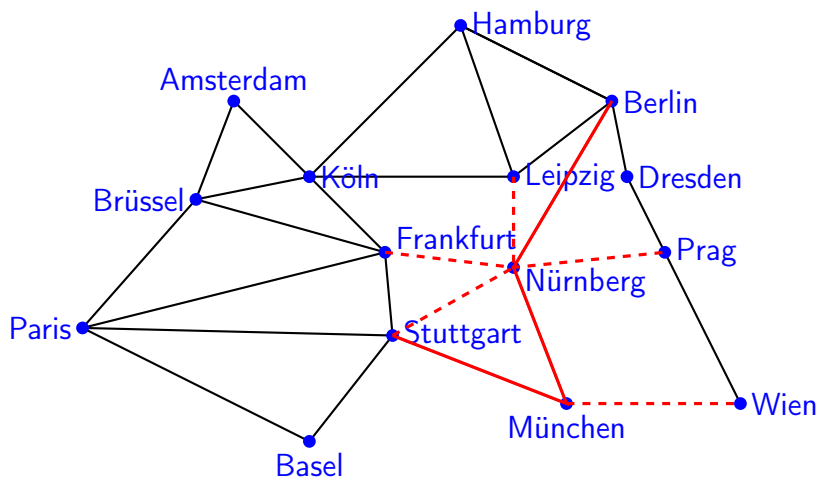
- Nein. Man kann nicht von Köln nach Hamburg fahren, denn dann bleibt nur noch der Rückweg nach Berlin übrig. Fährt man von Köln zu einer anderen Stadt, so können die Verbindungen Köln–Hamburg und Leipzig–Hamburg nicht mehr verwendet werden, so dass Hamburg nicht mehr in der Rundreise vorkommen kann.



c) Ja:

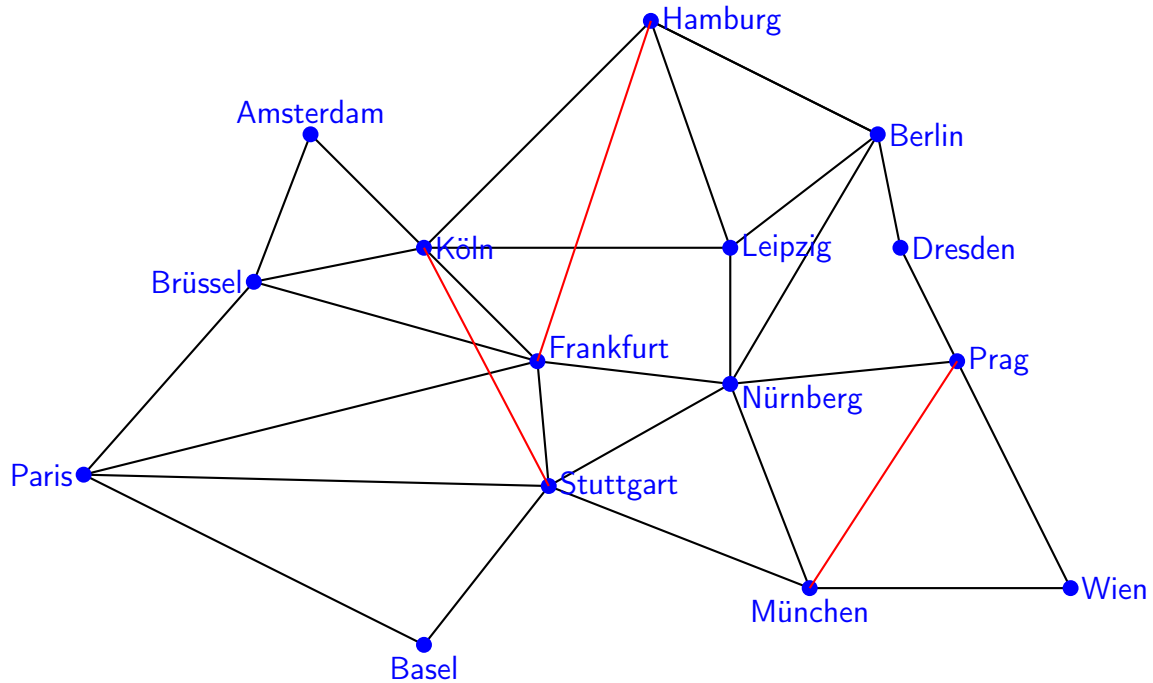


d) Nein. Von München aus kann man entweder nach Wien fahren. Dann kann die Reise nur noch durch Prag und Dresden nach Berlin zurück gehen. Oder man fährt von München nach Stuttgart. Dann kommt man nicht mehr nach Wien, siehe Bild.



Aufgabe 13

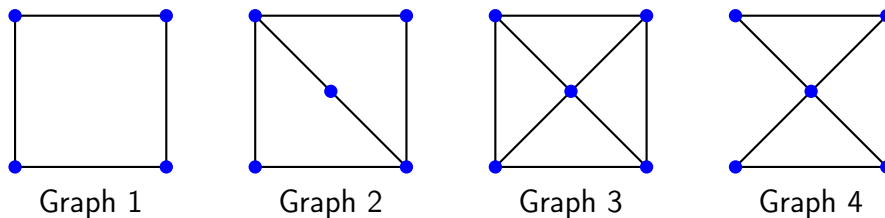
Wie viele Kanten muss man im unten stehenden Graphen mindestens ergänzen, damit der Graph eulersch wird? Zeichne diese Kanten ein.



Lösung: Man muss mindestens drei Kanten ergänzen, siehe rot ergänzte Kanten. Dann haben alle Knoten einen geraden Eckengrad. Und der Graph ist zusammenhängend. Also ist er eulersch.

Aufgabe 14

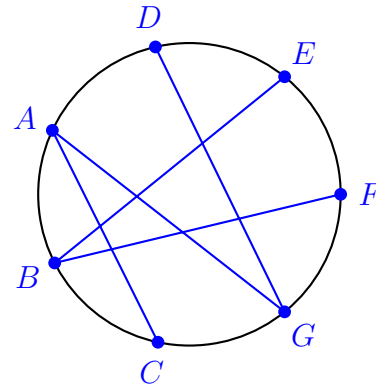
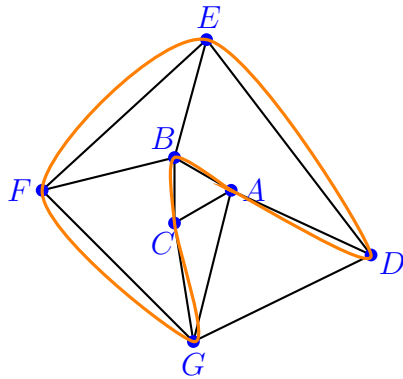
Untersuche, welcher der folgenden Graphen eulersch oder hamiltonsch ist. Trage in die Tabelle „j“ für ja, „n“ für nein ein.



Lösung:	Graph 1	Graph 2	Graph 3	Graph 4
ist eulersch	J	N	N	J
ist hamiltonsch	J	N	J	N

Aufgabe 15

Gegeben sind die folgenden zwei Graphen.



- a) Finde im linken Graphen einen hamiltonschen Kreis.

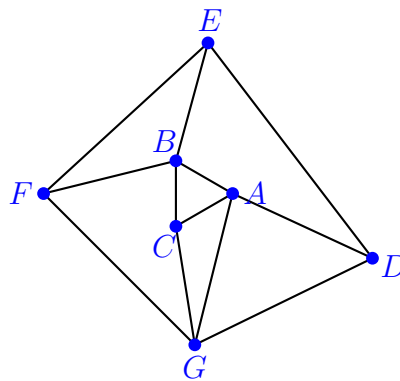
Hamiltonscher Kreis:

$A - B - C - G - F - E - D - A$

- b) Zeichne im rechten Graphen geeignete Bezeichnungen für die Ecken und weitere Kanten ein, so dass der fertige Graph isomorph zum linken Graphen ist.

Aufgabe 16

Gegeben ist nochmals der Graph aus der letzten Aufgabe.



Gib möglichst viele verschiedene hamiltonsche Kreise des Graphen an. Hierbei bedeutet *verschieden*, dass die Reihenfolge unterschiedlich ist und nicht nur der Anfangspunkt im Kreis verschoben wurde.

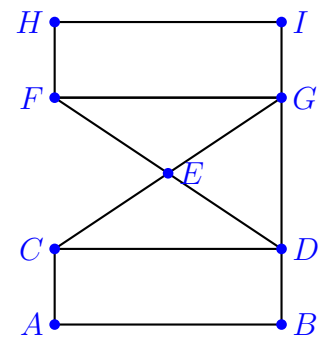
Lösung: Da jeder hamiltonsche Kreis durch A geht, reicht es, nur hamiltonsche Kreise anzugeben, die in A starten und enden.

Alle möglichen verschiedenen hamiltonschen Kreise sind:

eine Richtung	umgekehrt
$A - B - C - G - F - E - D - A$	$A - D - E - F - G - C - B - A$
$A - B - F - E - D - G - C - A$	$A - C - G - D - E - F - B - A$
$A - C - B - E - F - G - D - A$	$A - D - G - F - E - B - C - A$
$A - C - B - F - E - D - G - A$	$A - G - D - E - F - B - C - A$
$A - C - G - F - B - E - D - A$	$A - D - E - B - F - G - C - A$
$A - D - E - F - B - C - G - A$	$A - G - C - B - F - E - D - A$

Aufgabe 17

Gegeben ist der nebenstehende einfache Graph.



- a) Gib einen Kantenzug an, der A und F verbindet.

Antwort: $A - C - E - F$

- b) Warum ist der Graph hamiltonsch?

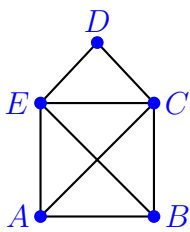
Antwort: Er enthält einen hamiltonschen Kreis:
 $A - B - D - G - I - H - F - E - C - A$

- c) Gib einen geschlossenen Kantenzug an, der durch alle Ecken des Graphen verläuft, keine Kante zwei Mal benützt und trotzdem kein hamiltonscher Kreis ist.

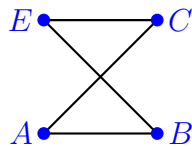
Antwort: Z.B. $A - B - D - E - G - I - H - F - E - C - A$

Aufgabe 18

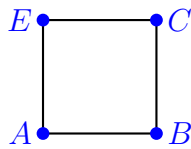
Welcher der Graphen ist Teilgraph von einem oder von mehreren der skizzierten Graphen? Trage Deine Antworten in die Tabelle ein. Überlege Dir, ob ein Graph Teilgraph von sich selber sein kann (eventuell Definition nachsehen).



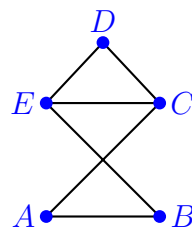
Graph 1



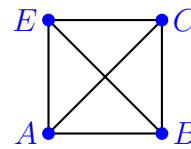
Graph 2



Graph 3



Graph 4



Graph 5

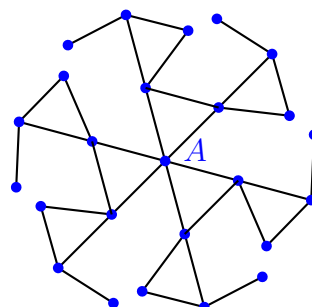
Lösung:

Graph 1 ist Teilgraph des Graphen	1
Graph 2 ist Teilgraph des Graphen	1, 2, 4, 5
Graph 3 ist Teilgraph des Graphen	1, 3, 5
Graph 4 ist Teilgraph des Graphen	1, 4
Graph 5 ist Teilgraph des Graphen	1, 5

Aufgabe 19

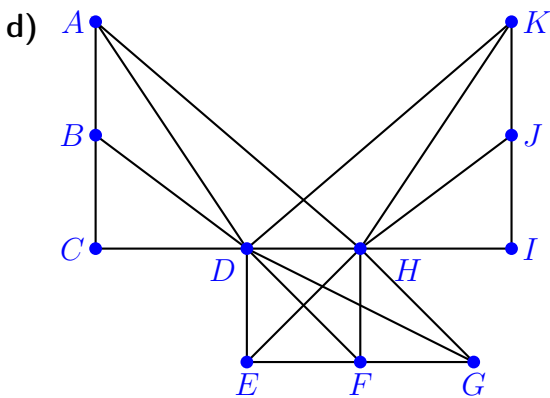
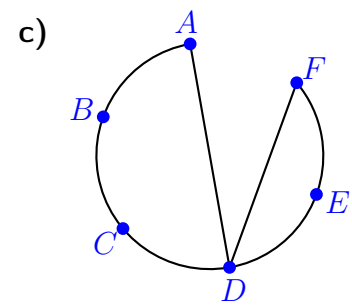
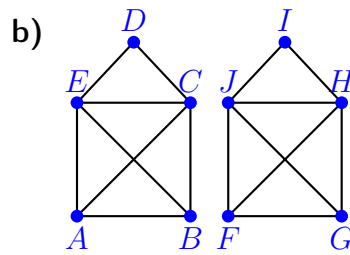
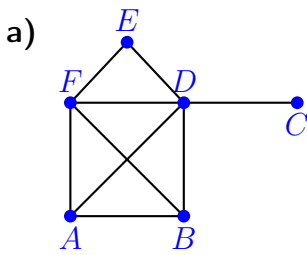
In wie viele Komponenten zerfällt nebenstehender Graph, wenn die Ecke A gelöscht wird?

Antwort: In Komponenten



Aufgabe 20

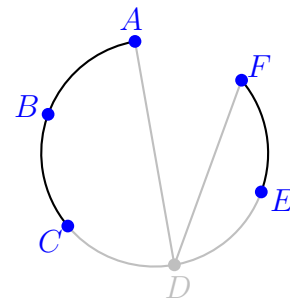
Gib für jeden der Graphen unter Verwendung eines der letzten beiden Sätze eine Begründung dafür an, dass er nicht hamiltonsch ist.



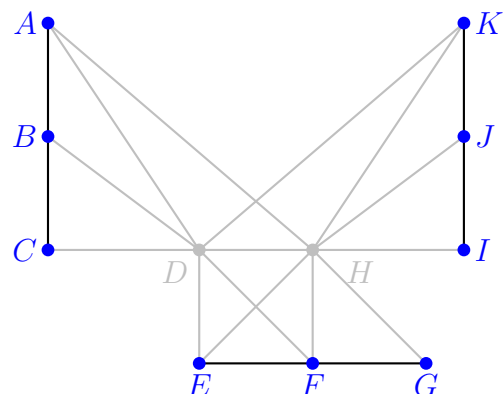
Lösung: a) $\text{Grad}(C) = 1 \Rightarrow$ der Graph ist nicht hamiltonsch.

b) Der Graph ist nicht zusammenhängend \Rightarrow der Graph ist nicht hamiltonsch.

c) Durch Löschen von D zerfällt der Graph in zwei Komponenten, er ist dann nicht mehr zusammenhängend.
 \Rightarrow der Graph ist nicht hamiltonsch.

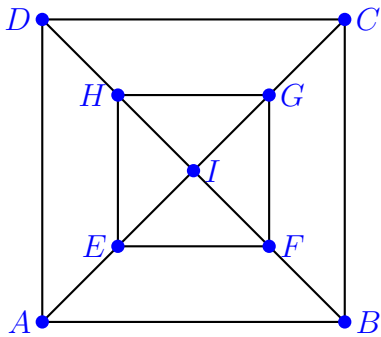


d) Durch Löschen von **zwei** Ecken D und H zerfällt der Graph in **drei** Komponenten.
 \Rightarrow der Graph ist nicht hamiltonsch.



Aufgabe 21

Gib im folgenden Graphen einen hamiltonschen Kreis und drei verschiedene nicht hamiltonsche Kreise an.



Hamiltonscher Kreis:

$A - B - C - D - H - J - G - F - E - A$

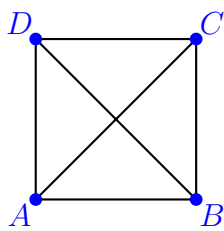
Nicht hamiltonsche Kreise:

$A - B - C - D - A$
 $I - F - G - I$
 $F - G - H - E - F$

Aufgabe 22

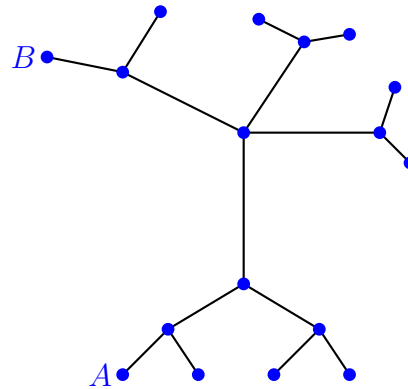
Wie viele verschiedene Wege gibt es jeweils, die A und B verbinden?

a)



Antwort: Es gibt Weg(e)

b)



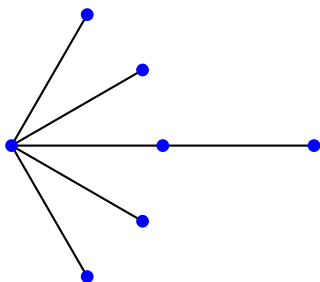
Antwort: Es gibt Weg(e)

Aufgabe 23

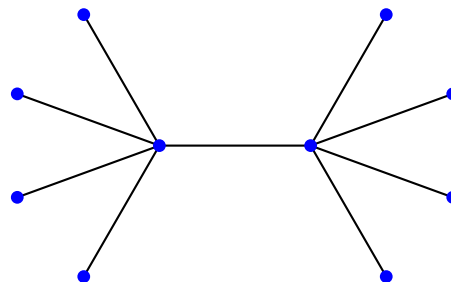
Zeichne jeweils einen Graphen, der ein Baum ist und die angegebenen Eigenschaften besitzt.

- a) Der Baum besitzt 7 Ecken und eine davon hat Eckengrad 5.
- b) Der Baum besitzt 10 Ecken und zwei davon haben Eckengrad 5.

Lösung: a)



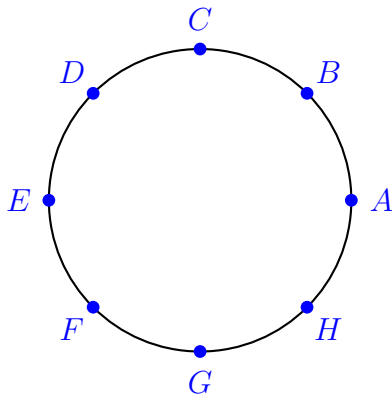
b)



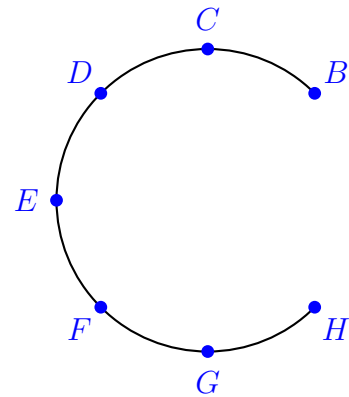
Aufgabe 24

- a) Zeichne einen einfachen Graphen mit 8 Ecken und 8 Kanten, der hamiltonsch ist und nach Löschen einer Ecke ein Baum ist.
- b) Zeichne einen einfachen Graphen mit 8 Ecken und 13 Kanten, der hamiltonsch ist und nach Löschen einer Ecke ein Baum ist.

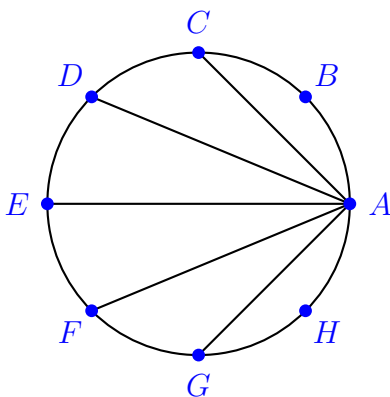
Lösung: a)



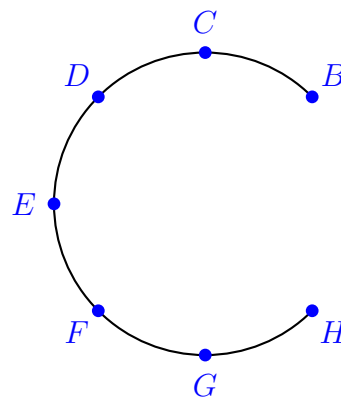
Löschen der Ecke A ergibt einen Baum.



b)



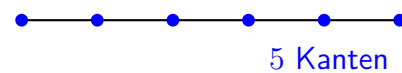
Löschen der Ecke A ergibt einen Baum.



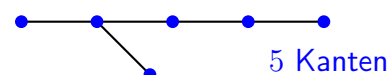
Aufgabe 25

Skizziere Bäume mit 6 Ecken und den jeweils angegebenen Eigenschaften. Wie viele Kanten haben die Bäume?

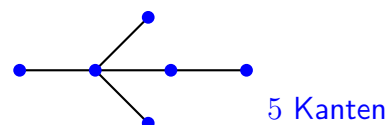
- a) Der Baum hat genau zwei Ecken mit Eckengrad 1,



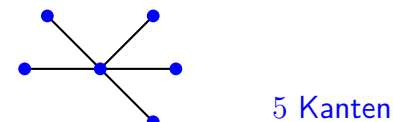
- b) Der Baum hat genau drei Ecken mit Eckengrad 1,



- c) Der Baum hat genau vier Ecken mit Eckengrad 1,



- d) Der Baum hat genau fünf Ecken mit Eckengrad 1.

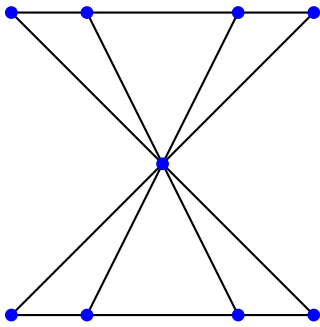


Lösung: Ist bereits im Aufgabentext enthalten.

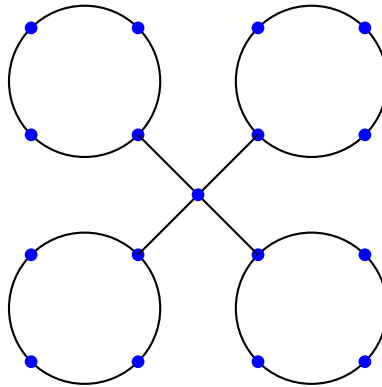
Aufgabe 26

Streiche in den angegebenen Graphen jeweils so viele Kanten, dass der entstehende Teilgraph ein Baum ist und alle Ecken des gegebenen Graphen enthält.

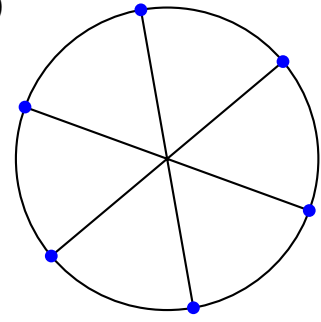
a)



b)



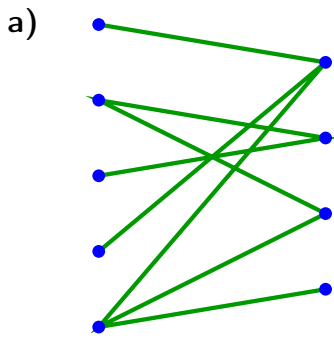
c)

*Weiter auf nächster Seite*

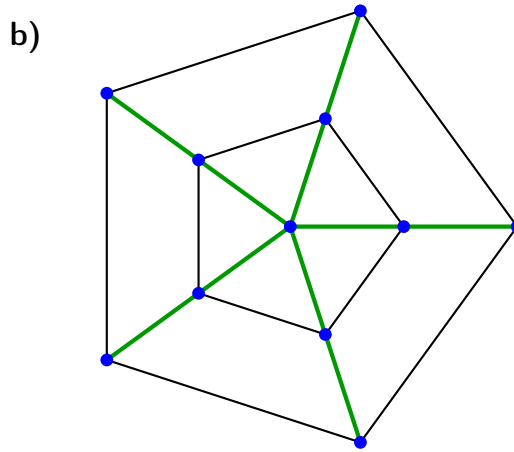
Aufgabe 27

Zeichne in die beiden Graphen jeweils einen aufspannenden Baum ein.

Lösung: *Hinweise:* Der Graph aus Teil a) ist zusammenhängend, besitzt 9 Ecken und 8 Kanten. Also ist er ein Baum.
 In Teil b) hat der Graph 11 Ecken. Ein aufspannender Baum muss also 10 Kanten enthalten.



Dieser Graph ist bereits ein Baum

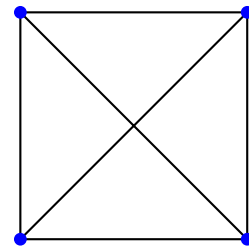


Ein aufspannender Baum besteht aus allen Ecken und den grünen Kanten. Es gibt noch andere Lösungen.

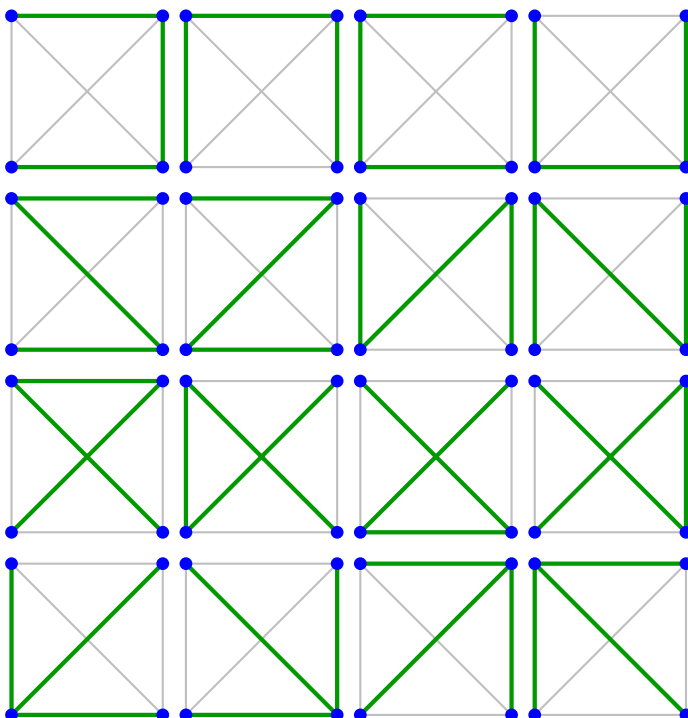
Aufgabe 28

Gegeben ist ein vollständiges Viereck.

- a) Der Graph besitzt 16 verschiedene aufspannende Bäume. Skizziere sie.
- b) Wie viele nicht zueinander isomorphe aufspannende Bäume gibt es? Skizziere alle nicht zueinander isomorphen aufspannenden Bäume.



Lösung zu a):

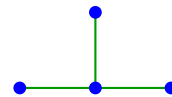


Lösung zu b):

Alle aufspannenden Bäume der ersten drei Zeilen sind isomorph zu



Alle aufspannenden Bäume der letzten Zeile sind isomorph zu

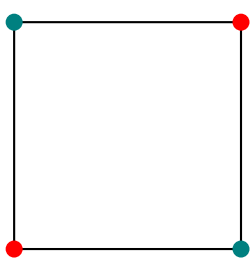


Aufgabe 29

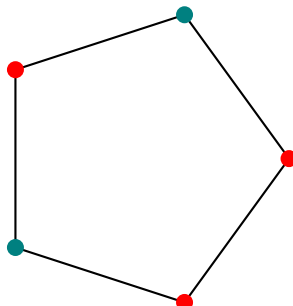
Stelle mit Hilfe der Färbemethode fest, ob die Graphen bipartit sind oder nicht. Trage in die Tabelle J für Ja, N für Nein ein.

Lösung:

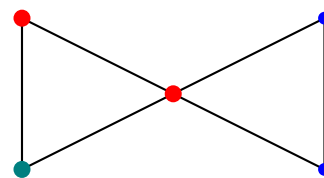
Graph 1:



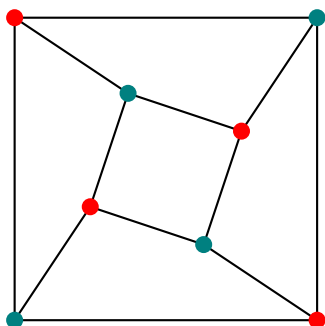
Graph 2:



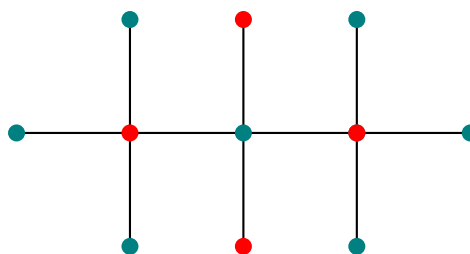
Graph 3:



Graph 4:



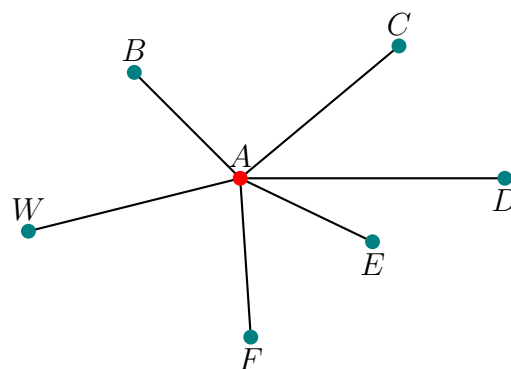
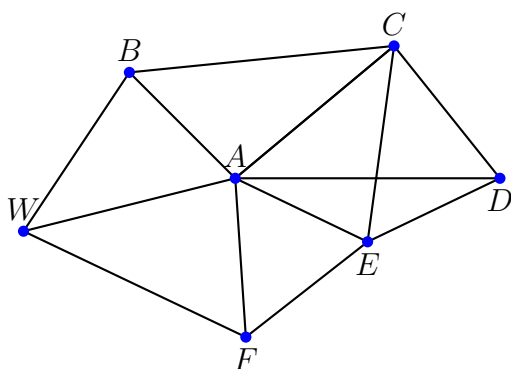
Graph 5:



Graph	Graph 1	Graph 2	Graph 3	Graph 4	Graph 5
ist bipartit	J	N	N	J	J

Aufgabe 30

- a) Neben einem kleinen Bergdorf wurde ein Wasserwerk W zur Versorgung der Häuser A, \dots, F gebaut. In der Graphik unten links siehst Du die Häuser und die möglichen Wasserleitungen. Aus Kostengründen sollen möglichst wenig Leitungen gebaut werden. Streiche aus dem Graphen möglichst viele Kanten, so dass noch alle Häuser mit Wasser versorgt werden können. Zeichne dann die Kanten des entstehenden Teilgraphen rechts ein.



Dies ist nur eine von vielen Lösungen

- b) Wie heißt die Eigenschaft eines Graphen, die in unserem Beispiel garantiert, dass jedes Haus mit Wasser versorgt wird?

Antwort: Der Graph ist .

- c) Wie heißt der Teilgraph, den Du im Aufgabenteil a) gezeichnet hast, in Bezug auf den ursprünglichen Graphen?

Antwort:

Der Teilgraph ist ein des linken Graphen.

- d) Die Wasserleitungsfirma hat nun Rohre geliefert, die zwei verschiedene Enden haben. Am einen Ende Anschlusstyp 1, am anderen den Anschlusstyp 2. Das bedeutet, dass nur Häuser mit verschiedenen Anschlüssen verbunden werden können. Außerdem ist vorgegeben, dass in jedem Haus nur einer der beiden Anschlusstypen verbaut werden kann. Zeige, dass die Wasserversorgung mit diesen Vorgaben gebaut werden kann. Färbe dazu die Häuser grün, die den Anschlusstyp 1 haben, und die anderen mit rot. Beachte, dass auch das Wasserwerk nur einen Anschlusstyp besitzen darf.

Die Ecken wurden oben entsprechend gefärbt.

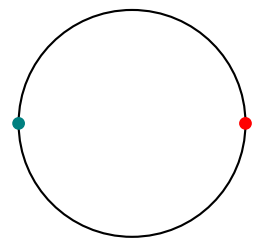
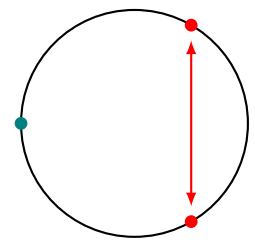
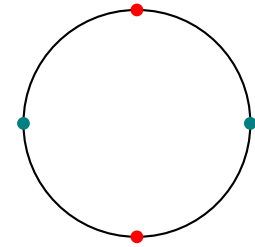
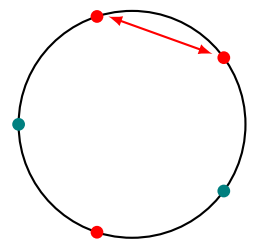
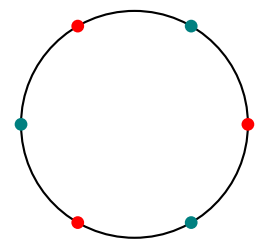
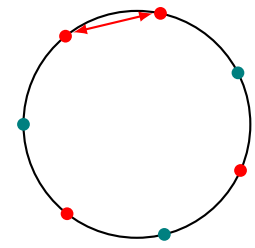
Für andere Lösungen von Teil a) müssen die Färbungen entsprechend abgeändert werden.

Weiter auf nächster Seite

Wann sind Graphen, die nur aus Ecken auf einem Kreis bestehen, bipartit?

Wir untersuchen folgende Fragestellung: *Für welche natürlichen Zahlen n ist ein Graph, der nur aus n Ecken auf einem Kreis besteht, bipartit?*

Schritt 1: Untersuche Beispiele für „kleine“ n von 2 bis 7.

n	2	3	4
Graph			
bipartit?	Ja	Nein	Ja
n	5	6	7
Graph			
bipartit?	Nein	Ja	Nein

Schritt 2: Stelle eine Vermutung auf, wie die obige Frage beantwortet werden kann.

Vermutung:

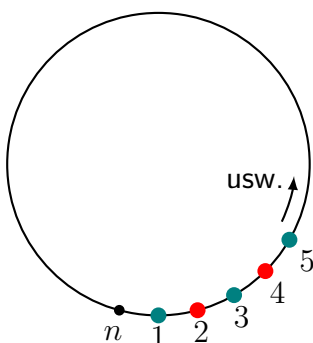
Gegeben ist ein Graph, der nur aus n Ecken auf einem Kreis besteht.

Falls n eine Zahl ist, dann ist der Graph bipartit.

Falls n eine Zahl ist, dann ist der Graph nicht bipartit.

Schritt 3: Beweise deine Vermutung durch geeignetes Färben der Ecken.

Die Ecken benennen wir hierzu gegen den Uhrzeigersinn mit den Zahlen 1 bis n . Beginne nun mit dem Färben, indem du Ecke 1 grün färbst und gegen den Uhrzeigersinn fortfährst. Welche Farbe haben dann die Ecken 2, 3, 4 usw.?



Für die Ecke mit der Nummer k ergibt sich folgender Zusammenhang:

Falls k eine Zahl ist, dann ist die Ecke k grün.

Falls k eine Zahl ist, dann ist die Ecke k rot.

Zwischen welchen beiden benachbarten Ecken kann überhaupt ein Konflikt bei der Färbung auftreten?

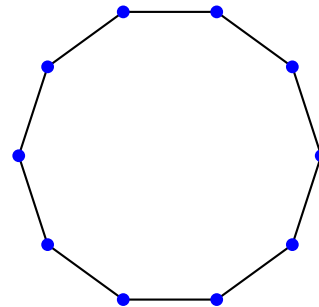
Zwischen der Ecke mit der Nummer und der Ecke mit der Nummer .

Falls n ist, sind beide Ecken unterschiedlich gefärbt, und es gibt keinen Konflikt. In diesem Fall ist der Graph bipartit.

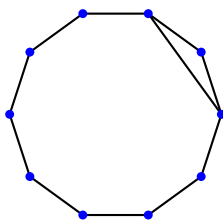
Falls n ist, sind beide Ecken gleich gefärbt, und es gibt einen Konflikt. In diesem Fall ist der Graph nicht bipartit.

Aufgabe 31

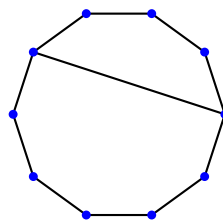
Gegeben ist der nebenstehende bipartite Graph. Ergänze eine Kante, so dass der Graph nicht mehr bipartit ist.



Lösung: Z.B.



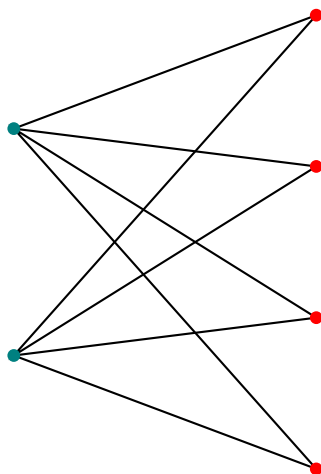
oder



Aufgabe 32

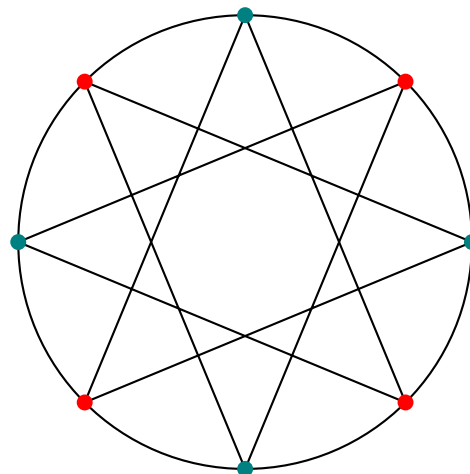
- Zeichne einen vollständigen 2-4-Graphen. Wie viele Kanten besitzt er?
- Wie viele Kanten besitzt ein vollständiger $m-n$ -Graph? **Antwort: $m \cdot n$ Kanten**
- Ergänze im Achteck Kanten (keine Ecken), bis ein vollständiger bipartiter Graph entsteht. Welcher vollständige $m-n$ -Graph entsteht hierdurch?

Lösung zu a)



Der Graph besitzt Kanten.

Lösung zu c)

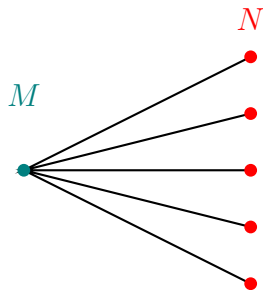


Vollständiger - -Graph.

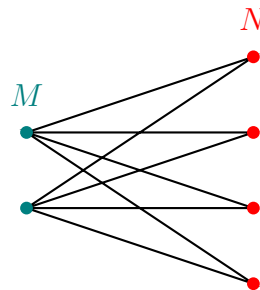
Aufgabe 33

Zeichne alle vollständigen bipartiten Graphen mit 6 Ecken, die nicht zueinander isomorph sind.

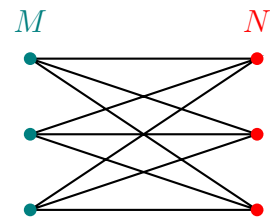
Lösung: M mit 1 Ecke
 N mit 5 Ecken



M mit 2 Ecken
 N mit 4 Ecken



M mit 3 Ecken
 N mit 3 Ecken



Alle vollständigen bipartiten Graphen mit 6 Ecken sind isomorph zu einem dieser Graphen. Es gibt nicht mehr mögliche Eckenverteilungen außer Vertauschung von M und N .

Aufgabe 34

Zeichne einen Baum, der ein

a) 2-3-Graph ist. **Lösung:**

b) 1-4-Graph ist. **Lösung:**

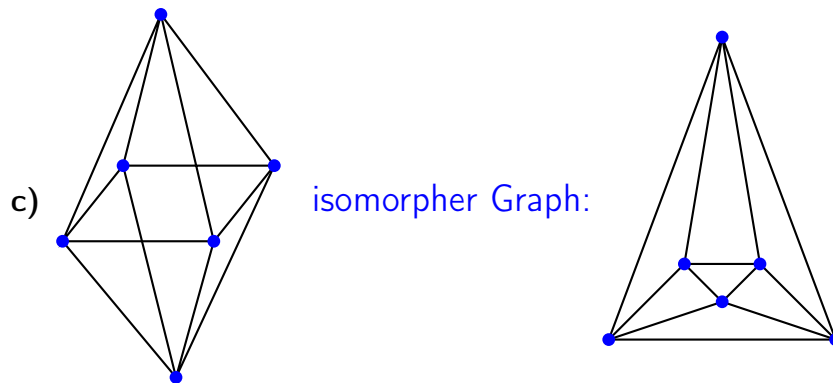
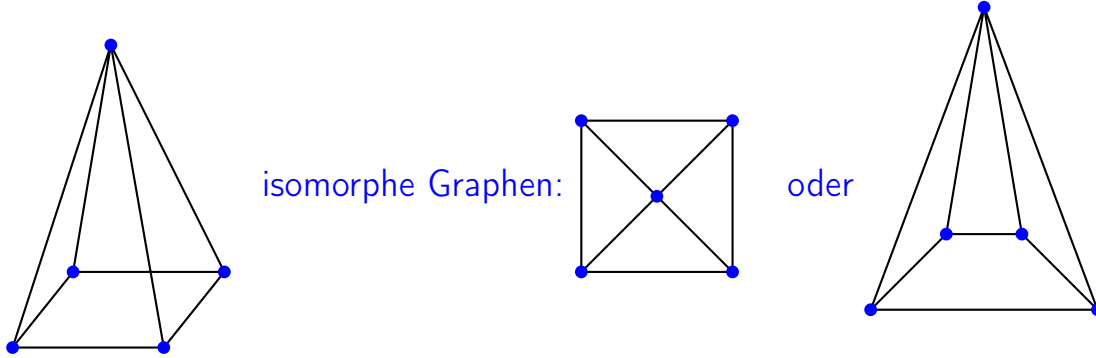
c) 4-9-Graph ist. **Lösung:**

Weiter auf nächster Seite

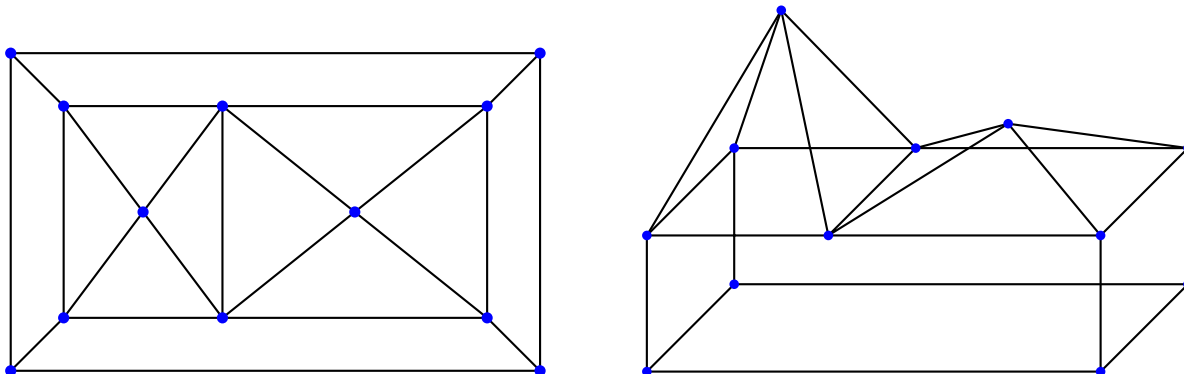
Aufgabe 35

Gegeben sind die folgenden Graphen, die Begrenzungen dreidimensionaler Körper darstellen. Zeige, dass die Graphen plättbar sind, indem Du jeweils einen isomorphen ebenen Graphen zeichnest.

Lösung: a) In dieser Teilaufgabe gibt es zwei verschiedene Lösungen!

**Aufgabe 36**

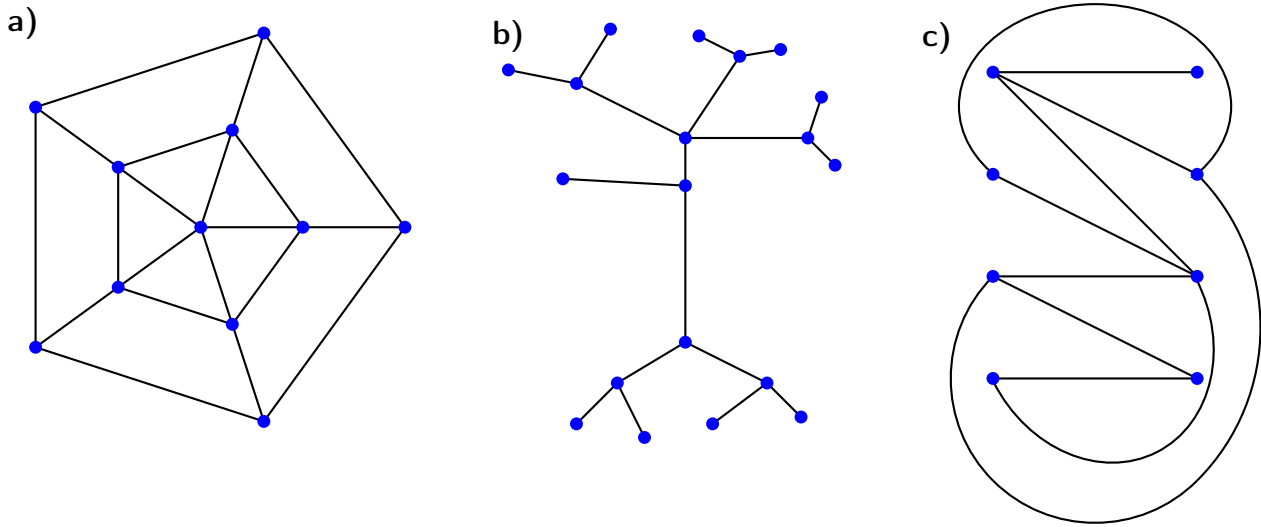
Zeichne neben den ebenen Graphen ein Gebäude, das zu dem Graphen gehören könnte.



Weiter auf nächster Seite

Aufgabe 37

Trage in die Graphen eine Nummerierung der Flächen ein, in die die Ebene durch den Graphen unterteilt wird. Vergiss die Außenfläche nicht. Fülle dann die Tabelle aus.



Graph	Anzahl Ecken	Anzahl Kanten	Anzahl Flächen	$e - k + f$
a)	$e = 11$	$k = 20$	$f = 11$	2
b)	$e = 19$	$k = 18$	$f = 1$	2
c)	$e = 8$	$k = 10$	$f = 4$	2
Baum mit n Ecken	$e = n$	$k = n - 1$	$f = 1$	2

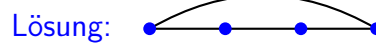
Aufgabe 38

Zeichne zusammenhängende Graphen mit jeweils vier Kanten, die

a) eine Außenfläche und keine Innenfläche,



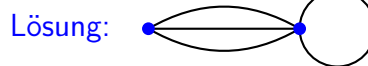
b) eine Außenfläche und eine Innenfläche,



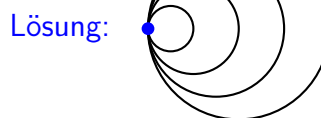
c) eine Außenfläche und zwei Innenflächen,



d) eine Außenfläche und drei Innenflächen,



e) eine Außenfläche und vier Innenflächen



besitzen.

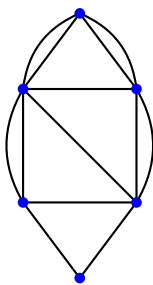
Aufgabe 39

- a) Ein zusammenhängender ebener Graph besitzt 13 Kanten und unterteilt die Ebene in 9 Flächen. Wie viele Ecken hat er?
- b) Ein zusammenhängender ebener Graph hat 5 Ecken und 7 Flächen. Wie viele Kanten hat er?
- c) Zeichne jeweils für a) und b) einen ebenen Graphen, der diese Eigenschaften hat. Sind die Graphen, die Du gezeichnet hast, einfach?

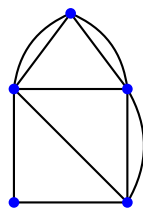
Lösung: a) $e - k + f = 2 \Rightarrow e = 2 + k - f$. Hier ist $k = 13$ und $f = 9$, also ist $e = 2 + 13 - 9 = 6$.

b) $e - k + f = 2 \Rightarrow k = e + f - 2$. Hier ist $e = 5$ und $f = 7$, also ist $k = 5 + 7 - 2 = 10$.

c) Zu a):



Zu b):

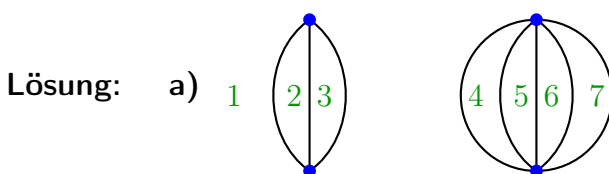


Die Graphen sind nicht einfach, da sie parallele Kanten (oder je nach Lösung Schlingen) besitzen.

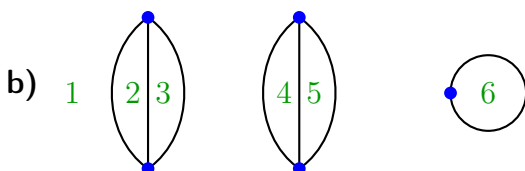
Hinweis: Ein einfacher ebener Graph kann höchstens $3e - 6$ Kanten besitzen, siehe später.

Aufgabe 40

- a) Zeichne einen ebenen Graphen mit 7 Flächen, der nicht zusammenhängend ist und aus zwei Komponenten besteht. Berechne $e + k - f$.
- b) Zeichne einen ebenen Graphen mit 6 Flächen, der nicht zusammenhängend ist und aus drei Komponenten besteht. Berechne $e + k - f$.
- c) Sei ein ebener Graph mit e Ecken, k Kanten und f Flächen gegeben, der aus n Komponenten besteht. Stelle eine Vermutung für den Wert von $e + k - f$ in Abhängigkeit von n auf. Überprüfe, ob Deine Formel auch für $n = 1$ stimmt. In diesem Fall ist der Graph zusammenhängend.



$$e - k + f = 4 - 8 + 7 = 3.$$



$$e - k + f = 5 - 7 + 6 = 4.$$

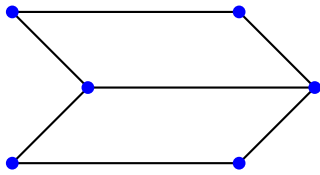
c) Es gilt $e - k + f = n + 1$. Diese Formel ist für $n = 1$ identisch mit der eulerschen Formel.

Man kann diese Formel beweisen, indem man die eulersche Formel auf jede Komponente anwendet und dann die Gleichungen addiert. Dabei wird die äußere Fläche n Mal gezählt anstelle von 1 Mal. Man muss also $(n - 1)$ abziehen und erhält

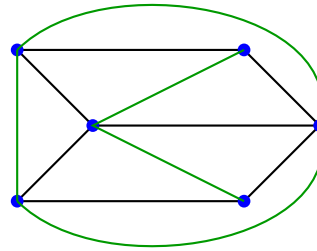
$$e - k + f = 2n - (n - 1) = n + 1.$$

Aufgabe 41

Gegeben ist der folgende Graph.



Lösung:

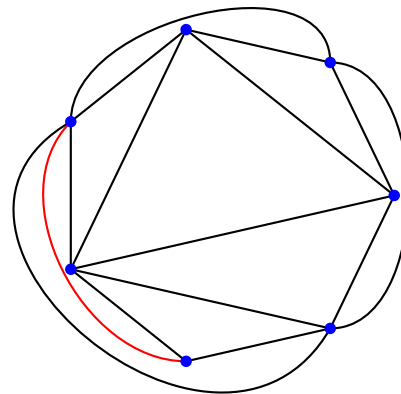
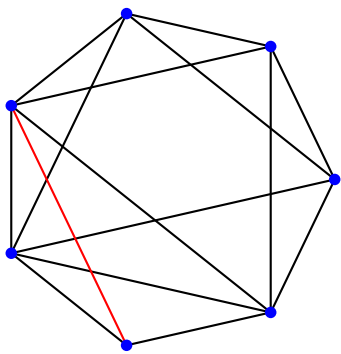


Ergänze möglichst viele Kanten, so dass der entstehende Graph einfach und eben ist. Wie viele Kanten kannst Du ergänzen?

Aufgabe 42

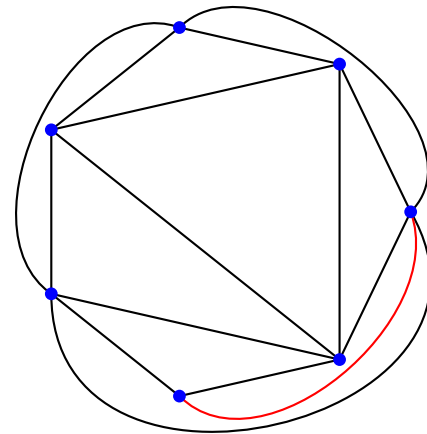
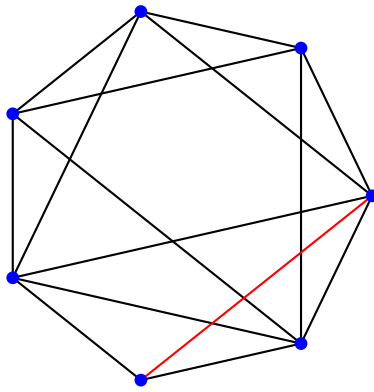
Gegeben ist der unten links gezeichnete Graph.

- Beweise, dass der Graph plättbar ist, indem Du daneben einen isomorphen ebenen Graphen zeichnest.
- Wie viele Ecken und Kanten besitzt der Graph? $e = \boxed{7}$, $k = \boxed{13}$.
- Warum ist der Graph nicht vollständig eben?
- Ergänze (zuerst im rechten, dann im linken Graphen) so viele Kanten (in rot), bis der Graph vollständig eben ist.



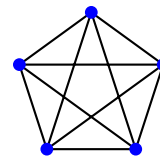
Lösung: a) und b) Siehe oben.

- Ein vollständiger Graph mit 7 Ecken muss $k = 3 \cdot 7 - 6 = 15$ Kanten besitzen. Der gegebene Graph besitzt jedoch nur 14 Kanten.
Andere Antwort: In Teil c) kann eine Kante ergänzt werden, also ist der Graph nicht vollständig eben.
- Aus der Formel des letzten Satzes folgt, dass genau eine Kante ergänzt werden muss. Eine Lösung siehe Graphik oben. Je nachdem, wie die Lösung von a) gezeichnet wurde, muss die rote Kante entsprechend gewählt werden. Hier eine andere Lösung:



Aufgabe 43

Gegeben ist das vollständige Fünfeck, siehe rechts.



- a) Warum ist das vollständige Fünfeck einfach?

Antwort:

- b) Wie viele Ecken und Kanten hat das vollständige Fünfeck? $e =$, $k =$.

- c) Angenommen, das vollständige Fünfeck wäre plättbar. Dann besitzt es einen isomorphen einfachen und ebenen Graphen. Wie viele Ecken und Kanten hat der isomorphe Graph?

Antwort: $e =$, $k =$.

- d) Für diesen isomorphen einfachen und ebenen Graphen gilt $3e - 6 =$.

- e) Warum gibt es diesen isomorphen ebenen und einfachen Graphen nicht?

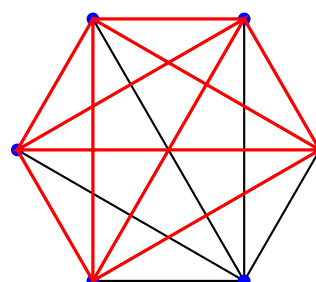
Antwort:

- f) Also ist die Annahme, das vollständige Fünfeck wäre plättbar, .

Aufgabe 44

Gegeben ist das vollständige Sechseck, siehe rechts.

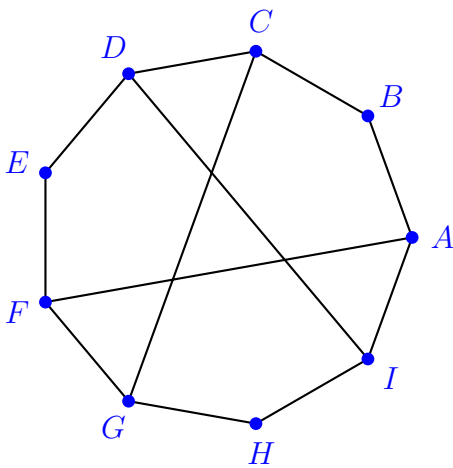
Beweise, dass das vollständige Sechseck nicht plättbar ist, indem Du einen Teilgraphen farbig markierst, der isomorph zu einem vollständigen Fünfeck ist.



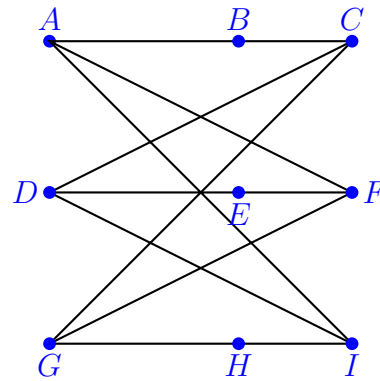
Aufgabe 45

Beweise, dass der unten gezeichnete Graph nicht plättbar ist. Weise dazu nach, dass er isomorph zu einer Unterteilung des vollständigen 3–3–Graphen ist. Zeichne dazu rechts den vollständigen 3–3–Graphen mit den vorgegebenen Ecken. Bezeichne dann die Ecken so, dass die Kanten des rechten Graphen denen im linken Graphen entsprechen. Dazu musst Du noch 3 Unterteilungsecken im rechten Graphen passend einfügen.

Hinweis: Die Ecke im rechten Graphen, die der Ecke A im linken Graphen entsprechen soll, ist bereits bezeichnet.



Lösung:



Weiter auf nächster Seite

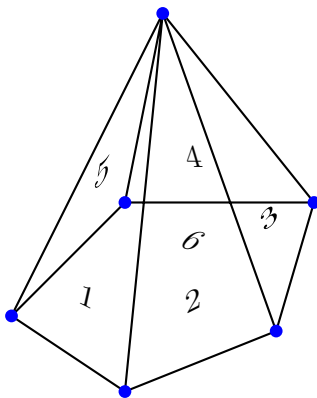
Aufgabe 46

Gegeben ist das unten skizzierte Polyeder mit 6 Ecken, 10 Kanten und 6 Flächen. Die dreieckigen Seitenflächen sind der Reihe nach mit den Zahlen 1 bis 5 nummeriert, die fünfeckige Bodenfläche hat die Nummer 6.

a) Warum ist der Graph des Polyeders einfach?

b) Zeichne einen isomorphen ebenen Graphen und nummeriere die Flächen des Graphen so, dass ihre Nummern denen der Flächen des Polyeders entsprechen.

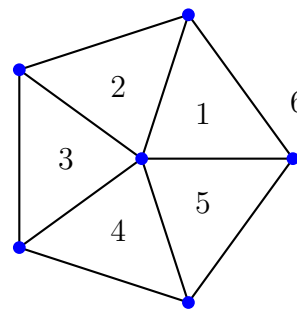
Hinweis: Der ebene Graph besitzt auch eine äußere Fläche.



a) Der Graph ist einfach, denn:

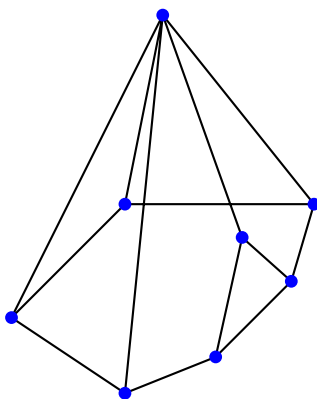
Er hat keine Schlingen und keine parallelen Kanten

b) Isomorpher ebener Graph:

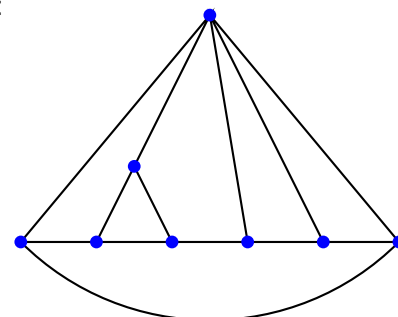


Aufgabe 47

Beim Polyeder aus der letzten Aufgabe wurde eine Ecke abgeschnitten, siehe unten stehende Graphik. Zeichne einen isomorphen ebenen Graphen. Wie viele Ecken, Kanten, Flächen hat der vorliegende Graph mehr als der aus der vorigen Aufgabe?



a) Isomorpher ebener Graph:



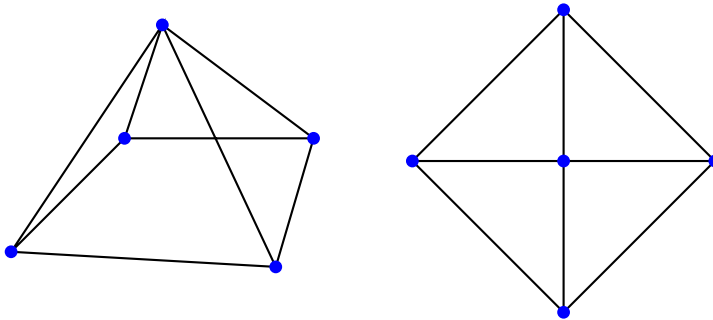
b) Im Vergleich zum Graphen aus der letzten Aufgabe erhöhte sich die Anzahl der Ecken um

die der Kanten um	2	,
die der Flächen um	3	und
	1	.

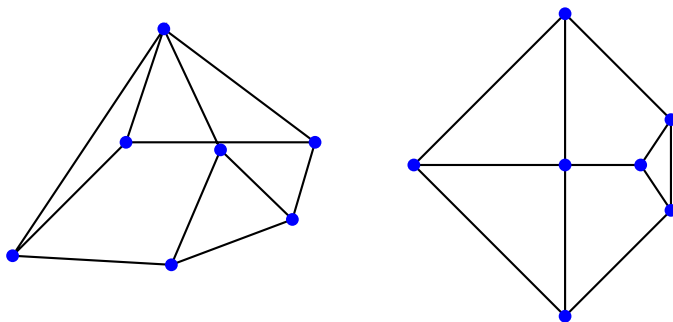
Aufgabe 48

- a) Konstruiere ein Polyeder mit $k = 8$ Kanten. Zeichne einen isomorphen ebenen Graphen.
Hinweis: Das Polyeder kann entsprechend zu dem aus Aufgabe 1 konstruiert werden. Wähle als Grundfläche ein Viereck.
- b) Konstruiere ein Polyeder mit $k = 11$ Kanten. Zeichne einen isomorphen ebenen Graphen.
Hinweis: Verwende das Polyeder aus Teilaufgabe a) und schneide eine Ecke ab (vgl. die Konstruktion für Aufgabe 2).

Lösung: a)



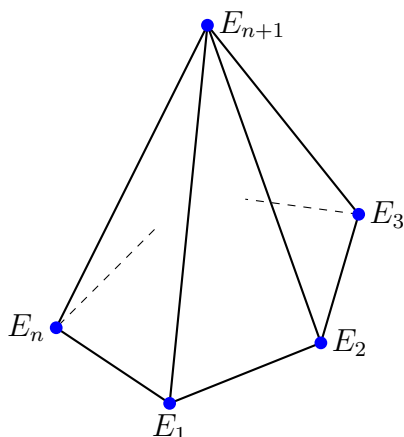
b)



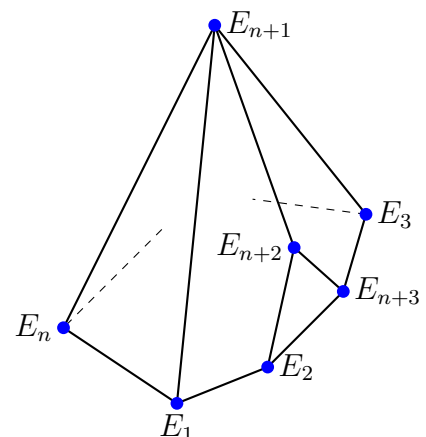
Aufgabe 49

- a) Sei k ein Element der Menge $\{6, 8, 10, \dots\}$. Konstruiere ein Polyeder mit k Kanten, indem Du eine Grundfläche mit $n = \frac{k}{2}$ Ecken und eine Spitze wählst.
- b) Sei k ein Element der Menge $\{9, 11, 13, \dots\}$. Konstruiere ein Polyeder mit k Kanten, indem Du eine Grundfläche mit $n = \frac{k-3}{2}$ Ecken und eine Spitze wählst und dann eine Ecke abschneidest.

Lösung: a)



b)



Aufgabe 50

In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass es kein Polyeder mit 7 Kanten gibt. Fülle dazu die Lücken aus.

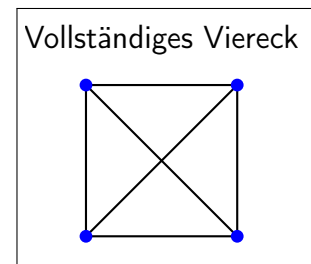
Betrachte den Graphen des Polyeders. Die Anzahl seiner Ecken wird mit e bezeichnet. Wir wissen, dass der Graph einfach ist.

Weiter wissen wir, dass $e \geq$ gilt. Nun können wir eine Fallunterscheidung vornehmen.

Fall $e = 4$: Zeichne rechts ein vollständiges Viereck, d.h. einen einfachen Graphen mit 4 Ecken und möglichst vielen Kanten.

Das vollständige Viereck besitzt $k =$ Kanten. Ein einfacher Graph mit 4 Ecken kann nicht mehr Kanten besitzen.

\Rightarrow Es gibt kein Polyeder mit $e =$ Ecken und 7 Kanten.



Fall $e \geq 5$: Der Eckengrad jeder Ecke ist mindestens .

\Rightarrow Im Graphen gibt es mindestens Enden von Kanten.

Jede Kante hat 2 Enden \Rightarrow Für die Anzahl von Kanten folgt $k \geq$.

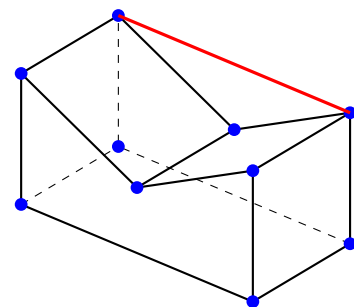
\Rightarrow Der Graph besitzt mindestens Kanten.

\Rightarrow Es gibt kein Polyeder mit $e \geq$ Ecken und 7 Kanten.

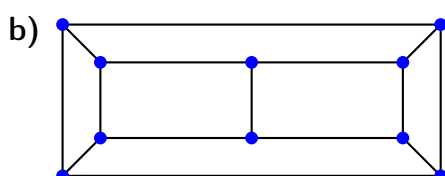
Aufgabe 51

Gegeben ist das rechts dargestellte Polyeder.

- Weise nach, dass das Polyeder nicht konvex ist. Zeichne dazu eine Verbindungsstrecke zweier Punkte des Polyeders ein, die nicht ganz im Polyeder verläuft.
- Weise nach, dass der Graph des Polyeders einen isomorphen ebenen Graphen besitzt, obwohl die Voraussetzung *konvex* nicht erfüllt ist. Zeichne dazu einen isomorphen ebenen Graphen.



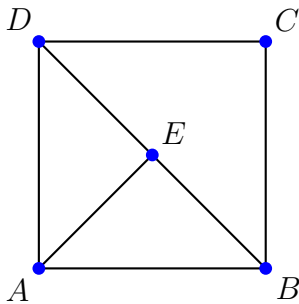
Lösung: a) Siehe rote Linie in der Graphik im Aufgabentext.



Aufgabe 52

Gegeben ist der unten stehende ebene Graph mit 7 Kanten.

- a) Zeige, dass die eulersche Formel gilt.
- b) Warum gibt es kein Polyeder, dessen Graph isomorph zum hier gezeigten Graphen ist?

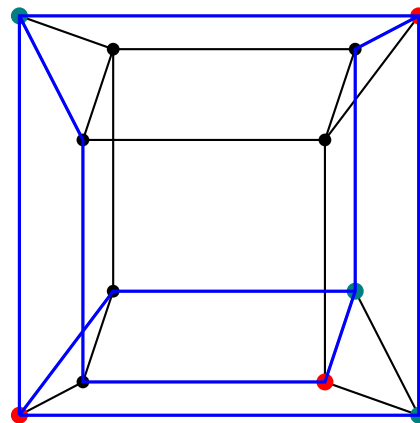
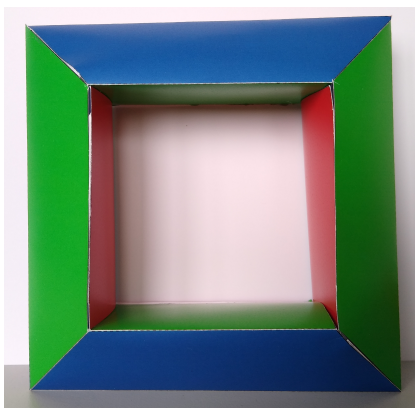


a) $e = 5$, $k = 7$, $f = 4$
 $\Rightarrow e - k + f = 2$

- b) Es gibt kein Polyeder, dessen Graph isomorph zum nebenstehenden Graphen ist, denn $\text{Grad}(C) = 2$, der Eckengrad muss mindestens 3 sein.

Aufgabe 53

Gegeben ist das nicht konvexe Polyeder, dessen Photo und Graph abgebildet sind.



- a) Bestimme die Anzahl der Flächen, Kanten und Ecken des Polyeders. Zeige, dass die eulersche Polyederformel nicht gilt. Beachte, dass die im Graphen als Dreiecke erscheinende Flächen keine Seiten des Polyeders sind.

$e = 12$, $k = 24$, $f = 12$, $\Rightarrow e - k + f = 12 - 24 + 12 = 0 \neq 2$.

- b) Zeige, dass der Graph des Polyeders nicht plättbar ist, indem Du einen Teilgraphen blau markierst, der isomorph zu einer Unterteilung des 3-3-Graphen ist.

Aufgabe 54

Trage in die Tabelle den Eckengrad g der Ecken und die Ecken-, Kanten- und Flächenzahl ein.

	Tetraeder	Hexaeder	Oktaeder	Dodekaeder	Ikosaeder
$g =$	3	3	4	3	5
$e =$	3	8	6	20	12
$k =$	6	12	12	30	30
$f =$	4	6	8	12	20

Aufgabe 55

In dieser Aufgabe zeigen wir: Jeder platonische Graph ist isomorph zu einem der Graphen von Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder, Ikosaeder. Fülle dazu die Lücken aus.

Wir betrachten einen platonischen Graphen mit e Ecken, k Kanten und f Flächen. Seien zusätzlich g der Eckengrad, den jede Ecke besitzt, und n die Anzahl der Kanten, die jede Fläche begrenzen.

Jede Ecke hat den Eckengrad $g \Rightarrow$ es gibt $\boxed{g \cdot e}$ Enden von Kanten.

Da jede Kante $\boxed{2}$ Enden besitzt, gibt es insgesamt $k = \boxed{\frac{1}{2}g \cdot e}$ Kanten.

Umformen nach der Anzahl der Ecken e liefert

$$e = \boxed{\frac{2k}{g}}. \quad (*)$$

Addiert man die Anzahl der Kanten, die die Flächen begrenzen, so zählt man jede Kante doppelt

\Rightarrow Der Graph besitzt $k = \boxed{\frac{1}{2} \cdot n \cdot f}$ Kanten. Umformen nach der Anzahl der Flächen liefert

$$f = \boxed{\frac{2k}{n}}. \quad (**)$$

Setzt man (*) und (**) für e und f in die eulersche Formel ein, so erhält man

$$2 = e - k + f \Rightarrow 2 = \boxed{\frac{2k}{g} - k + \frac{2k}{n}}.$$

Teilt man auf beiden Seiten durch $2k$, so erhält man die Gleichung $\boxed{\frac{1}{k} = \frac{1}{g} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n}}$.

Nach dem ersten Satz gilt $g \geq 3$ und $n \geq 3$. Deshalb müssen wir jetzt einfach durchprobieren, für welche Werte von g und n wir Lösungen für k finden. Starte dazu mit $g = 3$ und erhöhe n solange, bis du keine sinnvolle Lösung mehr für k findest. Fahre dann mit dem nächst größeren g fort.

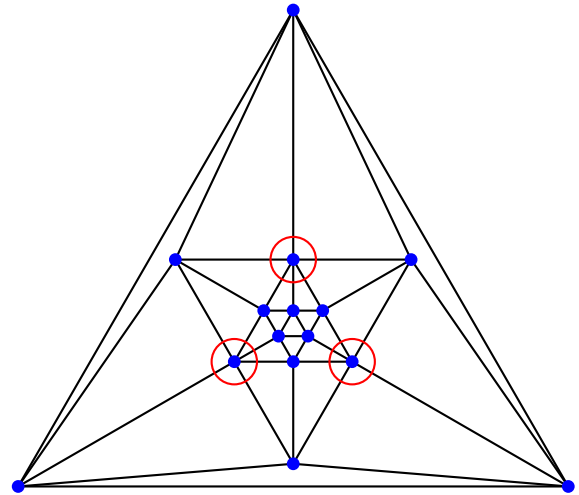
g	n	$\frac{1}{g} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2}$	k	Name
3	3	$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{2+2-3}{6} = \frac{1}{6}$	6	Tetraeder
3	4	$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{4+3-6}{12} = \frac{1}{12}$	12	Würfel
3	5	$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} = \frac{10+6-15}{30} = \frac{1}{30}$	30	Dodekaeder
3	6	$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = \frac{2+1-3}{6} = 0$	-	
4	3	$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$	12	Oktaeder
4	4	$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 0$	-	
5	3	$\frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{30}$	30	Ikosaeder
5	4	$\frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{4+5-10}{20} < 0$	-	
6	3	$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = \frac{2+1-3}{6} = 0$	-	

Warum sind wir mit den hier betrachteten Werten für g und n fertig und müssen nicht alle möglichen Kombinationen durchgehen? Für höhere Werte von g, n ist die Summe der Brüche negativ, daher gibt es kein k und keinen platonischen Graphen.

Aufgabe 56

Gegeben ist der nebenstehende ebene Graph. Er ist isomorph zu dem Graphen eines Polyeders.

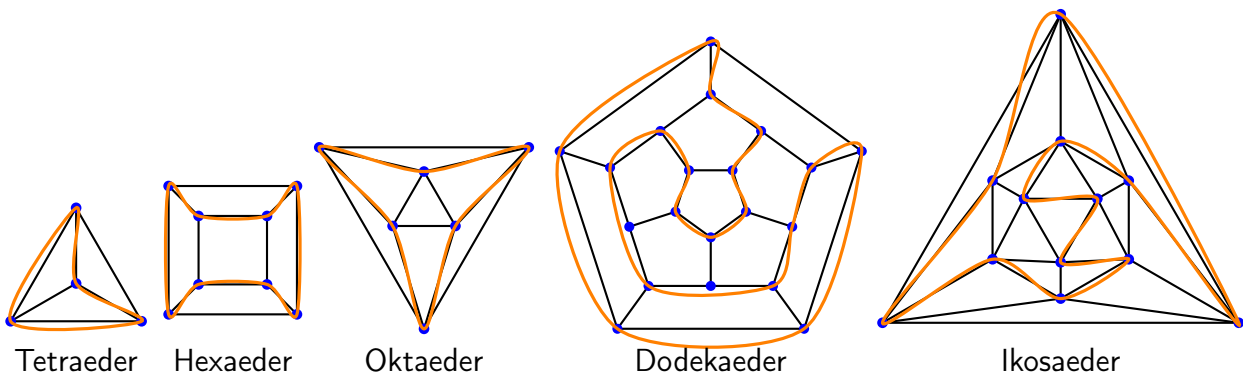
- Aus was für n -Ecken bestehen die Seiten des Polyeders?
- Warum kann das zugehörige Polyeder nicht platonisch sein?



- Lösung:**
- Die Seiten bestehen aus Dreiecken, auch die äußere Fläche wird durch drei Kanten begrenzt.
 - Es gibt Ecken mit Eckengrad 5 (die meisten) und Ecken mit Eckengrad 6 (im Graphen rot markiert). Bei einem platonischen Körper müssten alle Eckengrade gleich sein.

Aufgabe 57

Untersuche ob die 5 platonischen Graphen eulersch und/oder hamiltonsch sind.



	Tetraeder	Hexaeder	Oktaeder	Dodekaeder	Iksaeder
ist eulersch	Nein	Nein	Ja	Nein	Nein
ist hamiltonsch	Ja	Ja	Ja	Ja	Ja

Lösung: Damit ein Graph eulersch ist, müssen alle Eckengrade geradzahlig sein. In den Graphiken sind hamiltonsche Kreise eingezeichnet.